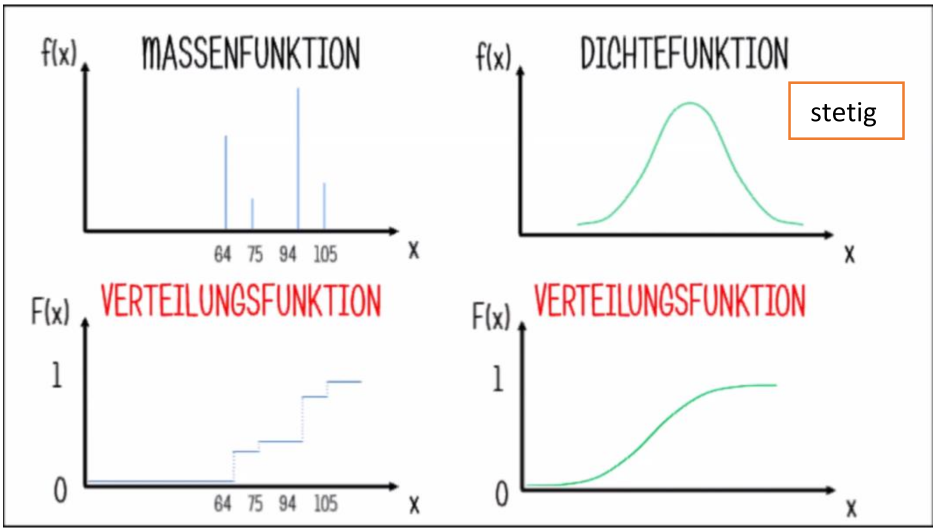
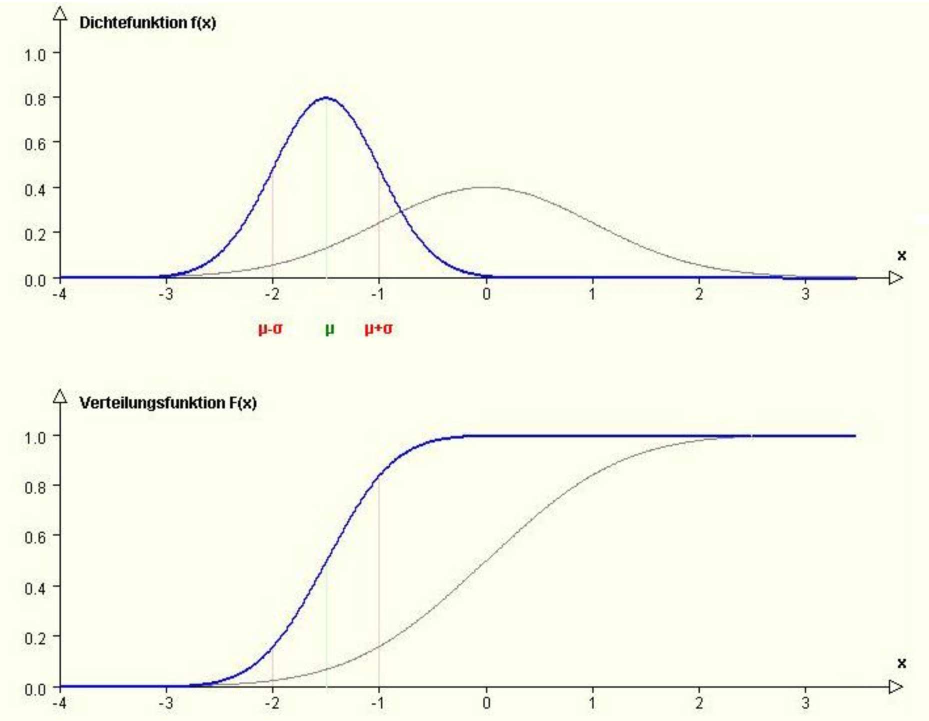
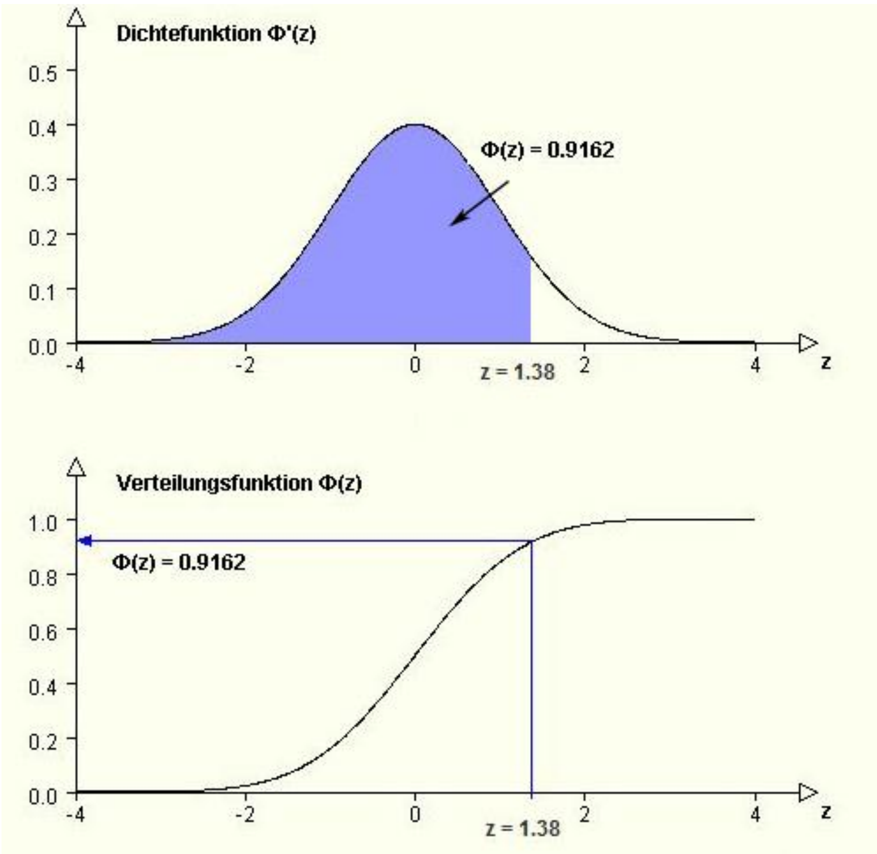
Kapitel 12 – Stetige Zufallsvariablen

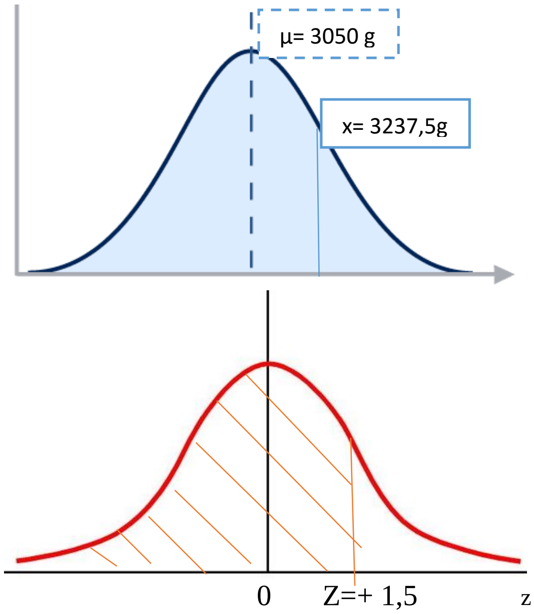
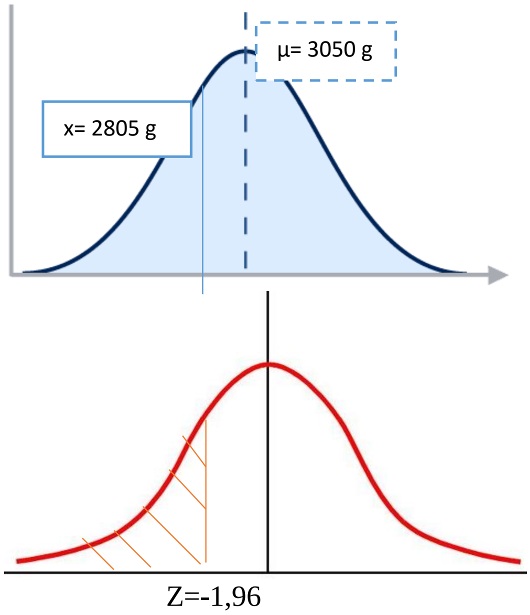
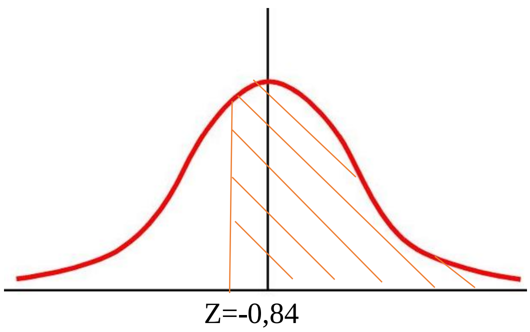
12.1. Dichtefunktion und Verteilungsfunktion	
stetig	Trägermenge T, also die Menge der möglichen Realisationen, ist durch ein Intervall gegeben Häufig ist T die Menge R aller reellen Zahlen !!!
Verteilungsfunktion	Beschreibt das Verhalten (wie bei diskret), wird beschrieben als Integral $F(x)= P(X\leq x)$  ➢ gibt an das x <u>höchstens</u> einen bestimmten Wert annimmt! (Siehe auch https://www.youtube.com/watch?v=DoHTsDrzAQk) ➢ monoton wachsend gegen 1 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ $F'(x) = f(x)$
Dichtefunktion Auch Wahrscheinlichkeitsdichte, Dichte von X	Hat nur die Nicht-Negativitätsbedingung!! d.h. $f(x) \geq 0$ Es gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (Normierungseigenschaft … etwas angleichen)
Rechteckverteilung Auch stetige Gleichverteilung	Über das Intervall [a,b] $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \, für\ a \leq x \leq b \\ 0 \ldots für\ alle\ sonstigen\ x \end{cases}$ $F(x) = \begin{cases} 0 \ldots für\ x \leq a; \\ \frac{x-a}{x-b} \ldots für\ a \leq x \leq b \\ 1 \ldots für\ x > b \end{cases}$ b-a … Länge 1/b-a … Höhe } A = 1

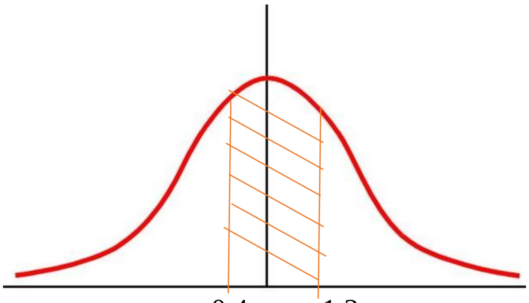
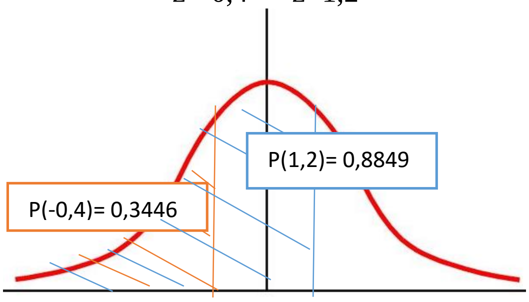
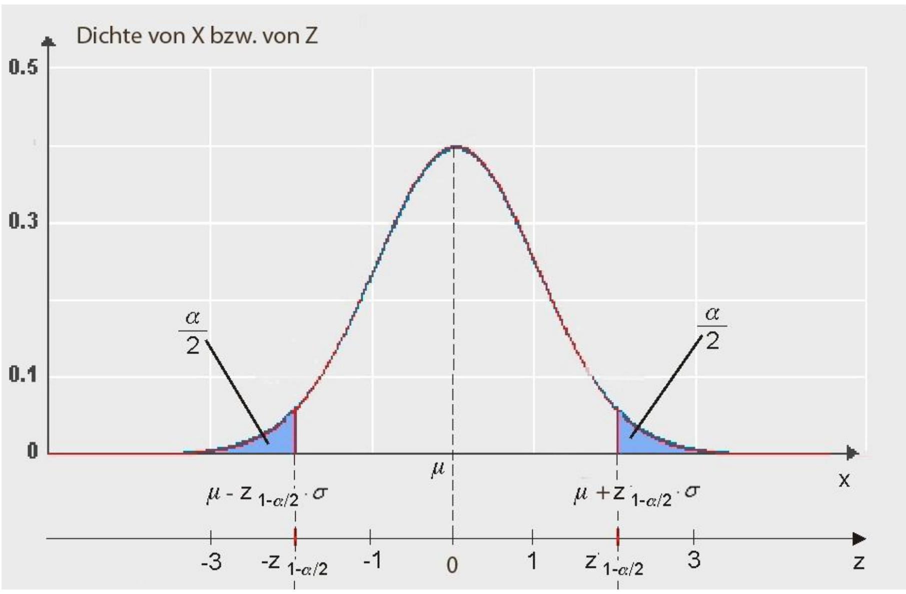
„Die Realisationen von X liegen unterhalb oder oberhalb eines bestimmten Schwellenwerts“	Werte F(x) der Verteilungsfunktion $F(x) = P(x \leq X)$ resp. die zu 1 komplementären Werte $P(X > x) = 1 - F(x)$ sollen ermittelt werden d.h. Wahrscheinlichkeit für x unterhalb/oberhalb eines Schwellenwertes: bei n Durchführungen sind „Anzahl k“ kleiner als/ größer als der Wert
„X nimmt Realisationen x in einem Intervall [a; b] an“	Hier sollen die Differenzen F(a) – F(b) von Werten der Verteilungsfunktion F(x) bestimmt werden d.h. P für x in einem **Intervall**: bei n Versuchen P , dass a **zwischen** b und k mal erscheint
<u>12.2. Kenngrößen stetiger Verteilungen</u>	
Erwartungswert	$$\mu := E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$
Varianz	$$\sigma^2 := V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)dx.$$
Standardabweichung	$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$
Standardisierungen:	
Lineartransformation	Transformation einer Zufallsvariable X in eine neue Variable Z $$F(Z) = aX + b$$
z-Transformation	$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$ E(Z) = 0 V(Z) = 1
Rechteckverteilung	$$\mu = E(X) = \frac{a+b}{2}$$ $$\sigma^2 = V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$
p-Quantile	Eindeutig erklärt, weil Verteilungsfunktion streng monoton wächst Es gilt: p mit $0 < p < 1$ durch $F(x_p) = p$ F(X) = 0,5 ist der Median definiert Besondere Bedeutung: p- Quantile; (1-p) – Quantile, weil sie Hypothesen testen bei p= 0,05 > 0,01 ist eine Irrtumswahrscheinlichkeit angegeben!

12.3. Normalverteilung und Standardnormalverteilung

Normalverteilung	Für die Modellierung von Zufallsvorgängen, von Carl Friedrich Gauss entwickelt Glockenform!
Dichtefunktion Kurznotation	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{für alle reellen } x$ Hängt von Erwartungswert und von der Varianz ab, und ist bezüglich dem Erwartungswert symmetrisch (Glockenform!!!) Hat Wendepunkte: $\mu - \sigma;\ \mu + \sigma$ X ~ N(μ; σ^2) verwendet (lies: X ist normalverteilt mit Erwartungswert mü und Varianz sigma-Quadrat) Jede Dichtefunktion kann in eine Standardnormalverteilung überführt werden! $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{(-\frac{1}{2}*z^2)}$ (Siehe unten,ergibt sich durch Einsetzen von $\mu = 0\ und\ \sigma = 1$)
Verteilungsfunktion	$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt$
	Sind miteinander verbunden, da: F‘(x) = f(x) 

	Die Gestalt beider Funktionen hängt vom Erwartungswert und der Varianz ab!
Standardnormal-verteilung **Dichtefunktion (Groß-Phi)** **Verteilungsfunktion (klein-Phi)**	Auf eine Grundform zurückführbar! E(Z) = 0 V(Z) = 1 $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ Z ~ N(0,1) $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right).$ $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ Nicht in geschlossener Form darstellbar
$\Phi'(z) = \phi(z)$	
Beispiel	Aufgabe: Wie groß ist die Annahme der Wahrscheinlichkeit p, dass ein Neugeborenes ein Geburtsgewicht X a) 3237,5g b) 2805 g c) Über 2945 g d) Zwischen 3000 bis 3200g aufweist Gegeben ist μ = 3050g und σ = 125g.

a)	$$Z\ (x) = \frac{x-\mu}{\sigma}$$ $$Z\ (3237{,}5) = \frac{3237{,}5 - 3050}{125}$$ Z = 1,5 In die Tabelle für Werte der Verteilungsfunktion z der Standardverteilung schauen: Bei 1,50 ergibt sich p= <u>0,9332</u> Dass das Gewicht 3237,5g aufweist, liegt bei einer Wahrscheinlichkeit von 93,32 %.	
b)	$$Z\ (2805) = \frac{2805 - 3050}{125}$$ Z= -1,96 In der Tabelle ablesen, da es sich um eine Glockenform handelt,kannman hier den positiven Wert ablesen. p= 0,9750 ABER der p-Wert ist für z=1,96, um nun den für z=-1,96 zu bekommen, rechnet man p= 1-0,9750 <u>p= 0,025</u> Dass das Gewicht 2805 g aufweist, liegt bei einer Wahrscheinlichkeit von 2,5 %.	
c)	Ausdruck „über“ = „Mindestens“ und bedeutet, alles was darüberliegt! $$Z\ (x > 2945) = \frac{2945 - 3050}{125}$$ Z = -0,84 p= 0,7995 Dass das Gewicht über 2945g aufweist, liegt bei einer Wahrscheinlichkeit von 79,95 %.	

d)	<u>Schritt 1:</u> Man rechnet die z-Werte von 3000g und 3200g aus. Z(3000)= -0,4 Z(3200)= 1,2 <u>Schritt 2:</u> p(-0,4)= 1-0,6554 p(-0,4)= 0,3446 (rot) p(1,2)= 0,8849 (blau) <u>Schritt 3</u> Nun wird p(1,2) mit p(-0,4) subtrahiert. Das Ergebnis lautet p= 0,5403.	  Dass das Gewicht zwischen 3000g und 3200g liegt, liegt bei einer Wahrscheinlichkeit von 54,03 %.
Quantile	 	

<u>12.4. X^2-, t- und F-Verteilung</u>

X^2	Testen von Hypothesen über die Varianz einer Normalverteilung, Analyse von Häufigkeiten

Charakterisierung

n unabhängige standardnormalverteilte Variablen $z_1, z_2, \dots, z_n$

$$X \coloneqq \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$$

$$X \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2$$

Arten der Verteilung

Kurznotation: $X \sim X^2_n$ (X ist X^2 verteilt mit n Freiheitsgraden)

$E(x) = n$
$V(x) = 2n$

a-Symmetrie (linkssteile(rechtschiefe) oder rechtssteile(linksschiefe))
Symmetrie

Gestalt

Hängt stark von n Freiheitgraden ab!

t
auch Student-Verteilung

Verwendung beim Testen von Hypothesen zum Erwartungswert, deren Varianz nicht bekannt ist, nach William S. Gosset

Bedingung

Wenn X und Z unabhängige Zufallsvariablen sind,

dann folgt:

$$T \coloneqq \frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{n}}}$$

$E(T) = 0$ ($n > 1$)
$V(T) = n/(n-2)$ ($n > 2$)

- Symmetrisch zum Nullpunkt!
- Mit zunehmender Anzahl n der Freiheitsgrade nähert sich aber die Dichte der t-Verteilung der der Standardnormalverteilung an.

p	$t_{4;p}$	$t_{15;p}$	$t_{30;p}$	$t_{40;p}$	z_p
0,95	2,132	1,753	1,697	1,684	1,6449
0,975	2,776	2,131	2,042	2,021	1,9600
0,99	3,747	2,602	2,457	2,4233	2,3263

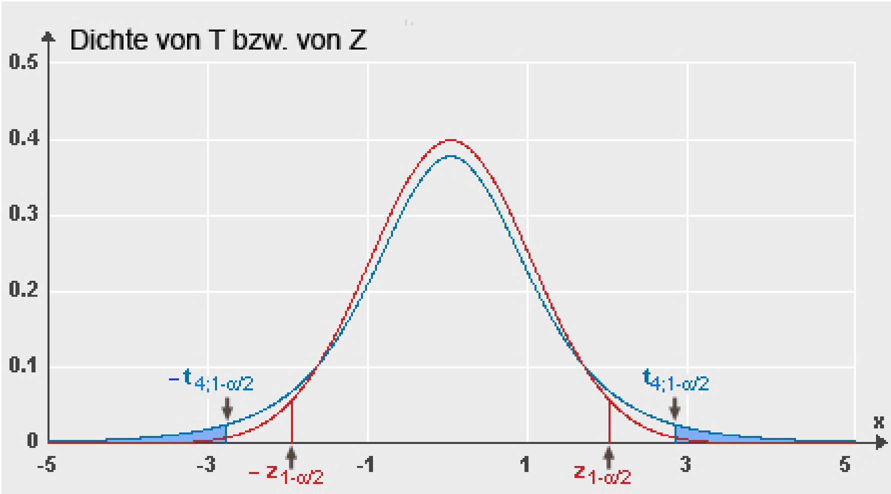
Tab. 12.1: *Quantile der t-Verteilung und der Standardnormalverteilung*

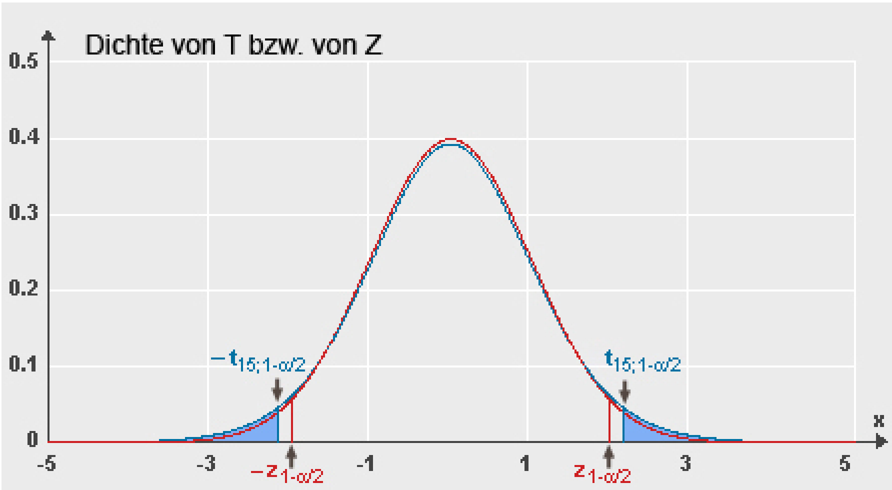
Kurznotation: $t_{n;p}$(lies: p-Quantil der t-Verteilung mit n Freiheitsgraden)

<table>
<tr>
<td>Gestalt

n= 4

rot = Standardnormal-verteilung

n= 15</td>
<td>




</td>
</tr>
<tr>
<td>F</td>
<td>
Als Teststatistik, spielt eine zentrale Rolle in der Varianz- & Regressionsanalyse, um Varianzen auf ihre Unterschiedlichkeit zu prüfen
Wird von X^2 abgeleitet, wird definiert durch X^2 zwei verteilte unabhängige Zufallsvariablen mit m und n Freiheitsgraden
<hr>
Sind X_1 und X_2 zwei <u>unabhängige</u> Zufallsvariablen mit $X_1 \sim X^2_m$ und $X_2 \sim X^2_n$, so folgt die Zufallsvariable, welche mit der Anzahl der Freiheitsgeraden dividiert wird:

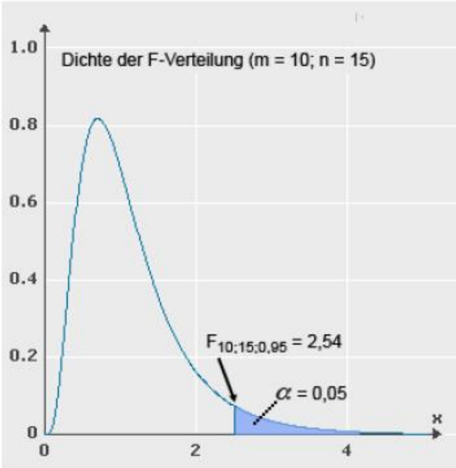
$$Y := \frac{X_1/m}{X_2/n} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$$

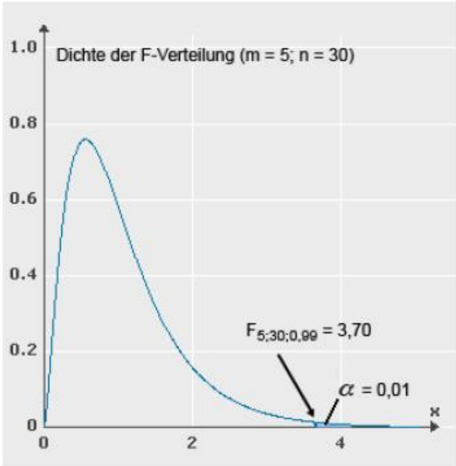
σ_1^2… Varianz geschätzt aus der Stichprobe 1 für die Population
σ_2^2…. Varianz geschätzt aus der Stichprobe 2 für die Population

F-Verteilung mit m und n Freiheitsgraden und man schreibt $Y \sim F_{m;n}$ (lies: Y ist F-verteilt mit m und n Freiheitsgraden)

$$E(Y) = \frac{n}{n-2} \qquad (n > 2)$$

$$V(Y) = \frac{2n^2 \cdot (m+n-2)}{m \cdot (n-2)^2 \cdot (n-4)} \qquad (n > 4).$$
</td>
</tr>
</table>


Dichte der F-Verteilung (m = 10; n = 15)
F10;15;0,95 = 2,54
α = 0,05
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
2
4
x


Dichte der F-Verteilung (m = 5; n = 30)
F5;30;0,99 = 3,70
α = 0,01
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
2
4
x