4.4 Gedämpfte Schwingung

4.4.1 Dämpfung und Reibung

Wie bei jeder Bewegung gibt es bei Schwingungen auch dissipative Effekte, d.h. es wird Schwingungsenergie in Wärmeenergie umgewandelt, so dass die Schwingungsamplitude abnimmt. Dies geschieht z.B. über Reibung oder Luftwiderstand.

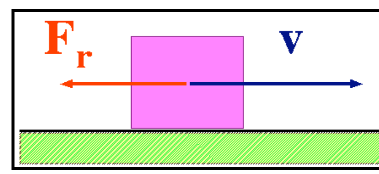
Exp. PI/63b: Federpendel mit und ohne Dämpfung

In diesem Beispiel kann eine Dämpfung eingestellt werden: die Pendelmasse besteht aus einem Kupferblech, welches sich zwischen zwei Elektromagneten bewegt. Wird ein Magnetfeld angelegt, so werden im Kupferblech Wirbelströme induziert, welche wie bei einer Wirbelstrombremse die Bewegung abbremsen. Die Auslenkung wird auf dem Oszilloskop sichtbar gemacht indem man das Licht misst, welche am Kupferblech vorbei auf eine Photozelle gelangt.

Exp. I 69: Pohl'sches Rad

Bei diesem Drehpendel (=Torsionsschwinger) kann ebenfalls über eine Wirbelstrombremse eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung eingestellt werden.

Die Reibungskraft (oder der Luftwiderstand) ist immer der Geschwindigkeit entgegengerichtet. Der Betrag kann unabhängig von der Geschwindigkeit sein (bei Roll oder Gleitreibung), proportional zur Geschwindigkeit (viskose Reibung) oder proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit (Luftwiderstand).



4.4.2 Geschwindigkeitsproportionale Reibung

Der wichtigste Fall entspricht der geschwindigkeitsproportionalen Reibung. In diesem Fall muss die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators durch einen Reibungsterm ergänzt werden, der proportional zur Geschwindigkeit ist:

$$m \ddot{x} = - c\, x - b\, \dot{x} .$$

Die standardisierte Form dieser Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{x} + 2 \square \dot{x} + \square_o^2 x = 0 , \qquad \square = \frac{b}{2m}, \ \square_0^2 = \frac{c}{m} .$$

Die Größe $\square$ wird als Abklingkoeffizient bezeichnet.

Eine solche lineare DGl mit konstanten Koeffizienten ist immer lösbar mit dem Ansatz

$$x = A\, e^{\square t} . \qquad \dot{x} = \square\, A\, e^{\square t} \qquad \ddot{x} = \square^2 A\, e^{\square t} ,$$

d.h. wir verwenden hier die komplexe Schreibweise. Einsetzen in die Bewegungsgleichung ergibt

$$\square^2 + 2\, \square\, \square + \square_o^2 = 0 .$$

Damit reduziert sich das Problem auf das Auffinden von Nullstellen dieser Gleichung:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm i\omega_s \qquad \text{mit} \qquad \omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Die allgemeine Lösung ist damit

$$x(t) = A_1\, e^{\lambda_1 t} + A_2\, e^{\lambda_2 t} = e^{-\gamma t}\,(A_1\, e^{i\omega_s t} + A_2\, e^{i\omega_s t})\,.$$

Physikalisch sinnvolle Lösungen müssen reell sein; dies ist offenbar dann der Fall wenn die beiden Konstanten konjugiert komplex sind, $A_1 = A_2^*$. In diesem Fall kann der Ausdruck in der Klammer auf die Form A $\cos(\omega_s t+\varphi)$ gebracht werden, sofern ω_s reell ist. In diesem Fall bleiben zwei reelle Parameter für die Amplituden, welche durch die beiden Anfangsbedingungen (z.B. Ort und Geschwindigkeit) bestimmt sind.

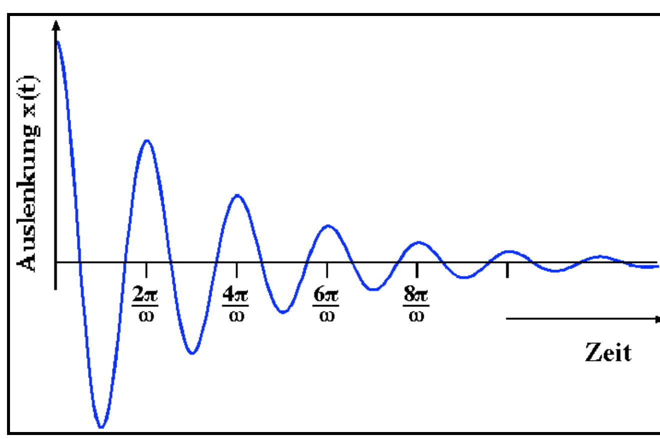
Die Art der Lösung wird durch die Wurzel ω_s bestimmt; man kann die drei Bereiche unterscheiden, dass die Wurzel reell, null oder imaginär ist, d.h.

$$\omega_0 > \gamma\,, \qquad \omega_0 = \gamma\,, \qquad \omega_0 < \gamma\,.$$

Wir behandeln die drei Fälle in dieser Reihenfolge.

4.4.3 Schwache Dämpfung, $\omega_0 > \gamma$

Die Eigenfrequenz ist somit größer als die Dämpfungskonstante; das System verhält sich dann in erster Näherung wie ein ungedämpfter Oszillator mit abfallender Amplitude.



Die Lösung kann in diesem Bereich geschrieben werden als

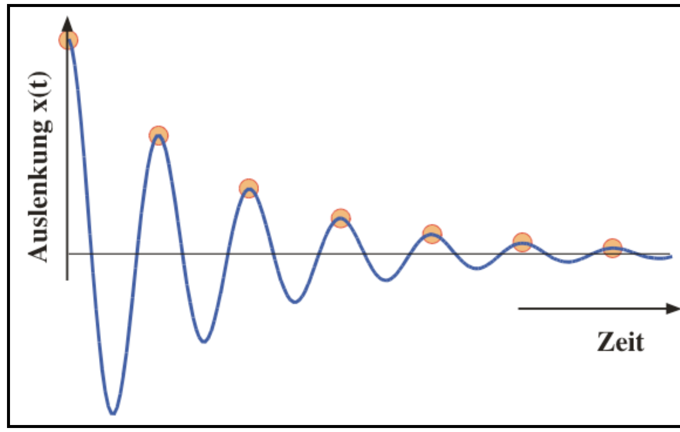
$$x(t) = x_0\, e^{-\gamma t} \cos(\omega_s t + \varphi)\,,$$

wobei die Amplitude x_0 und die Phase φ wiederum aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen sind. Die Amplitude fällt somit exponentiell ab, und die Schwingungsfrequenz ist niedriger, $\omega_s < \omega_0$.

Die Energie ist proportional zum Quadrat der Amplitude $x_0\, e^{-\gamma t}$, sie fällt somit mit der doppelten Rate ab:

$$E_{tot}(t) = E_{tot}(0)\, e^{-2\gamma t}\,.$$

Aus gemessenen Daten können die Parameter ω_s und β bestimmt werden. ω_s erhält man aus der Periode T; der Abklingkoeffizient β kann durch Vergleich der Amplitude zu verschiedenen Zeiten ermittelt werden. Vergleicht man die Auslenkungen bei zwei Zeiten, welche sich um eine Periode unterscheiden, fällt der oszillatorische Teil heraus und wir erhalten:

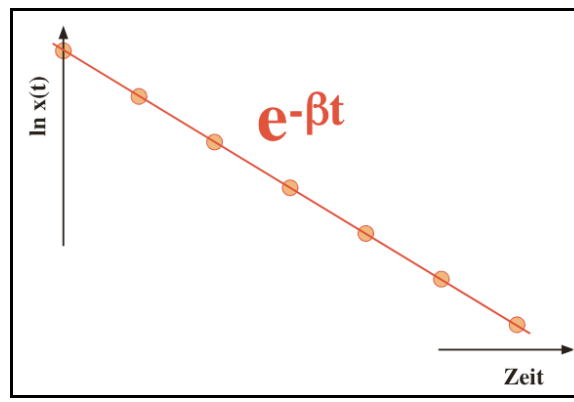


$$\frac{x(t+T)}{x(t)} = e^{-\beta T} ,$$

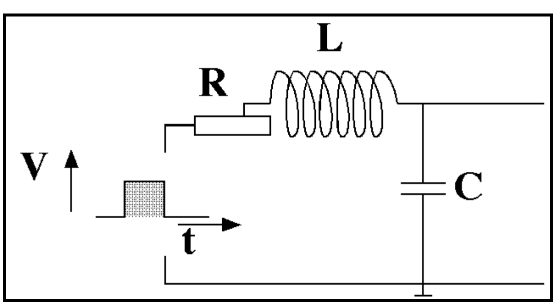
d.h.

$$\beta = - \ln[\frac{x(t+T)}{x(t)}] / T .$$

In der Praxis trägt man z.B. die Amplitude als Funktion der Zeit logarithmisch auf und bestimmt die Zerfallszeit aus einem linearen Fit.



4.4.4 Gedämpfte elektromagnetische Schwingungen



Als ein Beispiel für gedämpfte Schwingungen betrachten wir den LRC Schwingkreis. Er kann abgeleitet werden aus dem LC Kreis. Durch Zufügen eines Ohm'schen Widerstandes (der in jedem Schwingkreis existiert) erhält man eine modifizierte Maschenregel:

$$U_L + U_C + U_R = 0 = L\, dI/dt + Q/C + R\, I =$$

$$= L\, d^2Q/dt + R\, dQ/dt + Q/C .$$

Damit erhält man die Resonanzfrequenz des ungedämpften Systems wieder

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} .$$

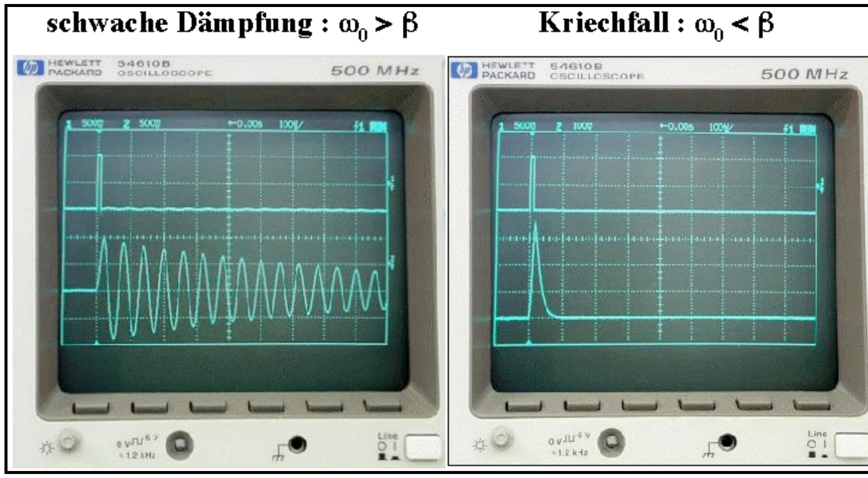
Für den Abklingkoeffizienten erhält man

$$\beta = \frac{R}{2L} .$$

Exp 92a: gedämpfte LRC Schwingungen

Der LRC Schwingkreis verhält sich ähnlich wie der LC Schwingkreis, ist aber gedämpft.

Man kann die unterschiedlichen Bereiche starker und schwacher Dämpfung im RLC System leicht durch Verändern eines Widerstandes einstellen. Links ist ein schwach gedämpftes Signal gezeigt, welches durch einen elektrischen Puls angestoßen wird und danach etwa 50 Schwingungen durchführt. Die Situation im rechten Bild entspricht etwa dem Fall $\square_0 = \square$.



Es ist nützlich, den Dämpfungsgrad

$$D = \square / \square_0 ,$$

resp. den Gütefaktor

$$Q = 1/2D = \square_0 / 2\square$$

einzuführen, das Verhältnis der Dämpfungskonstante zur Resonanzfrequenz. Im Bereich der schwachen Dämpfung kann der Dämpfungsgrad den Wertebereich von 0<D<1 annehmen, der Gütefaktor ist > 0.5.

In natürlichen Systemen kommen sehr unterschiedliche Werte vor. Atomare Systeme z.B. können eine extrem geringe Dämpfung aufweisen. Übergänge, die für Atomuhren benutzt werden, haben Gütefaktoren von mehr als 10^{10}. Heute ist es auch möglich, makroskopische Systeme herzustellen, deren Gütefaktor von einer ähnlichen Größenordnung ist.

4.4.5 Überkritische Dämpfung (Kriechfall)

Wir betrachten jetzt den Fall, dass die Dämpfung größer ist als die Resonanzfrequenz,

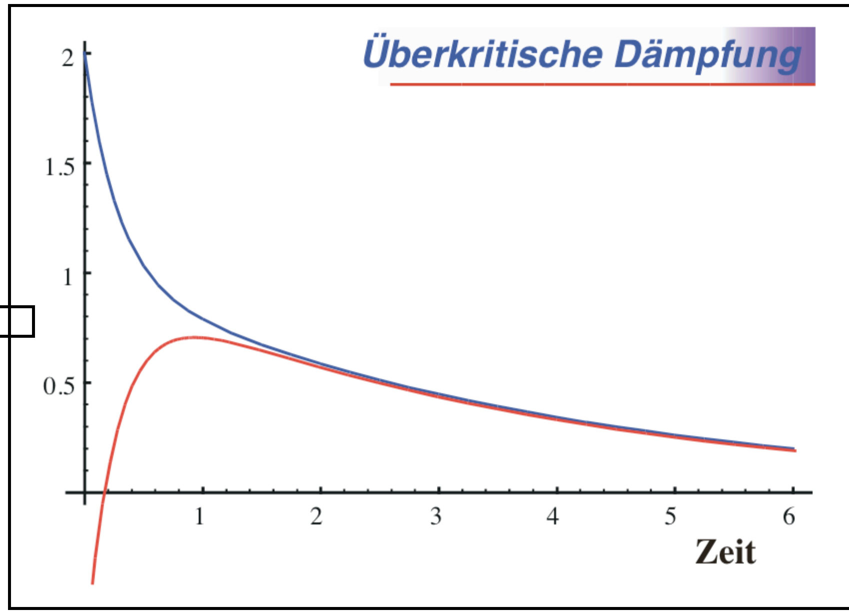
$$\square > \square_0, \quad D > 1, \quad Q < 0.5 .$$

Damit wird der Radikand $\square_0^2 - \square^2 < 0$ und die Wurzel imaginär. Die allgemeine Lösung lautet in diesem Bereich

$$x(t) = e^{-\square t} (c_1 e^{\square t} + c_2 e^{-\square t}) , \quad \square = (\square^2 - \square_o^2)^{1/2} .$$

wobei $c_{1,2}$ Integrationskonstanten darstellen, die durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind. Das System nähert sich biexponentiell seinem Gleichgewicht.

In diesem Fall tritt keine Schwingung mehr auf. Es kann maximal einen Nulldurchgang aufweisen wenn die beiden Amplituden entgegengesetztes Vorzeichen aufweisen.



Exp. 93, 93a: Gedämpfte Schwingung

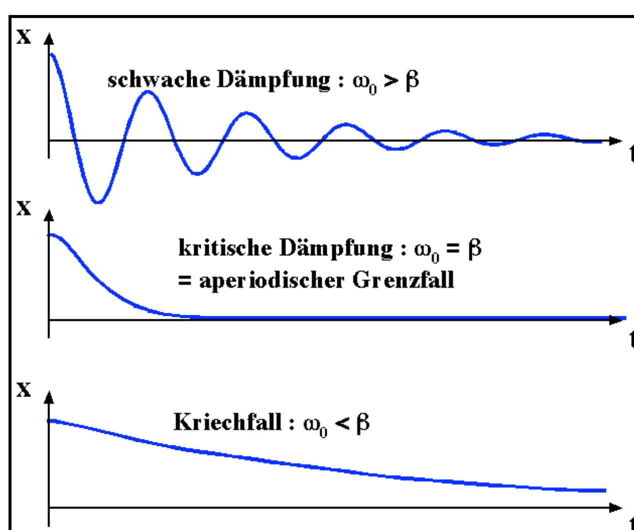
Mit einem ähnlichen Aufbau kann man auch den aperiodischen Grenzfall oder den Kriechfall beobachten.

4.4.6 Der aperiodische Grenzfall: $\omega_0 = \beta$, D = 1 .

Dies wird auch als der Fall der kritischen Dämpfung bezeichnet. Die Wurzel verschwindet und die beiden Eigenwerte sind entartet. In diesem Fall kann die Lösung der Differentialgleichung als

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)\, e^{-\beta t} .$$

geschrieben werden. Diese Situation führt dazu, dass der Gleichgewichtswert am schnellsten (näherungsweise) erreicht wird. Dies ist nützlich (und wird deshalb angestrebt) in Messgeräten, wo man den (Gleichgewichts) Messwert möglichst rasch erreichen möchte.



In der Figur sind nochmals die drei relevanten Fälle zusammengefasst:

- Schwache Dämpfung ($\beta<w_0$)
- Der aperiodische Grenzfall oder kritische Dämpfung ($\beta=w_0$)
- Stärke Dämpfung oder Kriechfall ($\beta>w_0$)