

# Angenähertes Verfahren zur Ermittlung der Maximalen und Minimalen Biegemomente des Rahmenwerks.

By Rio Tanabashi.

Das Problem der Querschnittsbemessung eines Tragwerks erfordert zuerst die Bestimmung der grössten Schnittkräfte, d.h. der Biegemomente und der Querkkräfte u.a. Da die grösste Schnittkraft eng zusammenhängt mit der Verteilung der Nutzlasten, müssen wir wieder zunächst die Verteilung der Nutzlast untersuchen, die die grösste Schnittkraft an einem Schnitt hervorbringt.

Bei der statischen Untersuchung von Stockwerkrahmen begnügt man sich bisher mit der Ermittlung der Schnittkraft für einen bestimmten Belastungszustand, da die Berechnung zu kompliziert und zu mühevoll ist, um mehrere verschiedene Belastungsfälle zu erforschen. Von einer Untersuchung der Verteilung der Nutzlast wurde demnach als von einer der Lösung unzugänglichen Aufgabe abgesehen.

Für einige regelmässige, unendlich mehrstielige Stockwerkrahmen ist die Verteilung der Nutzlasten für die grösste Schnittkraft bekannt. Es ist aber zu beachten, dass die Unregelmässigkeit des Stockwerkrahmens, was die ungünstigste Nutzlastverteilung betrifft, eine grosse Rolle spielt, und infolgedessen das sich aus der Untersuchung des regelmässigen, unendlich mehrstieligen Stockwerkrahmens ergebende Resultat nicht für den wirklichen und unregelmässigen Stockwerkrahmen anwendbar ist. Die wirkliche Beschaffenheit des Rahmens muss von vornherein in Betracht gezogen werden.

Die Deformationsmethode, bei der die Deformationsgrössen als Überzählige betrachtet werden, bietet eine einfachere Lösungsmethode nicht nur für einen bestimmten Belastungszustand, sondern auch für die Bestimmung des Belastungszustandes, der die grösste Schnittkraft in irgendeinem Schnitt erzeugt.

In folgender Untersuchung habe ich einfachheitshalber angenäherte Knotendrehwinkel anstatt der strengen eingeführt, die bei der ungünstigsten Nutzlast vorkommen. Dadurch werden die Einflusslinien und das grösste Biegemoment an jeder beliebigen Stelle eines Stockwerkrahmens ohne weiteres berechenbar. Ein Vergleich mit den genauen Werten lehrt, dass das vorliegende Annäherungsverfahren hinreichend genaue Werte liefert.

Die wagerechte Verschiebung der Knoten, die im allgemeinen durch die Unregelmässigkeit der Belastung und der unsymmetrischen Rahmenform verursacht wird, ist in dieser Untersuchung vernachlässigt, denn diese wagerechte Verschiebung

wird tatsächlich durch die räumliche Verbindung mit den nebeneinander liegenden Stockwerkrahmen in nicht nachmessbarer Weise gestört. Nimmt man Rücksicht auf die wagerechte Verschiebung der Knoten, so wird die Berechnung der grössten Schnittkraft eine verwickeltere.

Doch kommt es zuweilen vor, dass die wagerechte Verschiebung der Knoten die Werte der grössten Schnittkraft ungünstig beeinflusst; der Verfasser hegt darum die Absicht, diesbezüglich später eine ergänzende Untersuchung vorzulegen.

## I. Die Ermittlung der Einflusslinie für das Biegemoment an einem Schnitt des Stockwerkrahmens mittels der allgemeinen Lösung der Knotengleichungen.

Löst man die Knotengleichungen in allgemeiner Form, so lässt sich die Einflusslinie für die Knotendrehwinkel unmittelbar aus der Lösung herleiten.

Wir wollen zuerst erläutern, wie die Einflusslinie für das Biegemoment an irgend einer Stelle durch die Einflusslinie der Knotendrehwinkel ausgedrückt werden kann.

Wir bezeichnen mit  $\theta_b$  die Knotendrehwinkel des Knotenpunktes  $B$  infolge der Belastung  $P_m$  am Punkt  $m$ , mit  $\mathcal{M}_b$  das Aussenmoment am Knoten  $B$ , das die Knotendrehwinkel  $\theta_b=1$  erzeugt, mit  $\delta_{mb}$  die Verschiebung eines beliebigen Punktes  $m$  in der Richtung der Belastung infolge des Aussenmomentes  $\mathcal{M}_b$  (Siehe Abb. 1.).

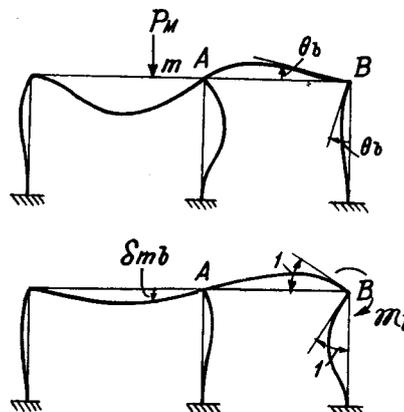


Abb. 1.

Nach dem Maxwellschen Satz ergibt sich

$$\theta_b \mathcal{M}_b = P_m \delta_{mb} \dots \dots \dots (1)$$

oder  $\theta_b = \frac{P_m \delta_{mb}}{\mathfrak{M}_b}$  .....(2)

Falls die äusseren Kräfte auf mehrere Stellen wirken, erhalten wir

$\theta_b = \frac{\Sigma P_m \delta_{mb}}{\mathfrak{M}_b}$  .....(3)

Auf dieselbe Weise erhalten wir die Drehwinkel  $\theta_a$  am Knoten *A* infolge der Belastung:

$\theta_a = \frac{\Sigma P_m \delta_{ma}}{\mathfrak{M}_a}$ , .....(4)

wo  $\mathfrak{M}_a$  das am Knoten *A* wirkende Aussenmoment ist, das die Knotendrehwinkel  $\theta_a=1$  erzeugt, und  $\delta_{ma}$  dementsprechend die Durchbiegung des Punktes *m* in der Richtung der Belastung darstellt.

Die Einspannungsmomente an den beiden Balkenenden sind

$M_a = M_a^0 + \xi_{aa}\theta_a + \xi_{ab}\theta_b$  .....(5)

und  $M_b = M_b^0 + \xi_{ba}\theta_a + \xi_{bb}\theta_b$  .....(6)

Unter  $M_a^0$  und  $M_b^0$  versteht man diejenigen Einspannungsmomente, die bei dem fest eingespannt gedachten Balken durch die Belastung hervorgerufen werden. Die Bezeichnung  $\xi_{aa}$  bzw.  $\xi_{ba}$  stellt das angreifende bzw. festhaltende Moment an dem Balkenende *A* bzw. *B* dar, wobei der Balken in der Form  $\theta_a=1, \theta_b=0$  verbogen gedacht ist.

Also entsteht nach dem Maxwell-Bettischen Satz  $\xi_{ab}=\xi_{ba}$ .

Setzt man die Beziehungen (3) und (4) in die Gleichungen (5) und (6) ein, so ergibt sich

$M_a = M_a^0 + \xi_{aa} \frac{\Sigma P_m \delta_{ma}}{\mathfrak{M}_a} + \xi_{ab} \frac{\Sigma P_m \delta_{mb}}{\mathfrak{M}_b}$  ... (7)

und  $M_b = M_b^0 + \xi_{ba} \frac{\Sigma P_m \delta_{ma}}{\mathfrak{M}_a} + \xi_{bb} \frac{\Sigma P_m \delta_{mb}}{\mathfrak{M}_b}$  ... (8)

Für den Balken mit unveränderlichem Trägheitsmoment gelten die folgenden einfacheren Formeln:

$M_a = M_a^0 + \Sigma P_m (2\delta_{ma} + \delta_{mb}) 2J_{ab}/l$  .....(9)

$M_b = M_b^0 + \Sigma P_m (2\delta_{mb} + \delta_{ma}) 2J_{ab}/l$ , .....(10)

wo *l* die Stablänge,  $J_{ab}$  das Trägheitsmoment, und  $\delta_{ma}$  bzw.  $\delta_{mb}$  die Durchbiegungslinie infolge  $\theta_a=1$  bzw.  $\theta_b=1$  darstellt.

Sehen wir zuerst von  $M_a^0$  bzw.  $M_b^0$  ab, geht der Ausdruck (9) bzw. (10) über in

$M_a = \Sigma P_m (2\delta_{ma} + \delta_{mb}) 2J_{ab}/l$  .....(11)

$M_b = \Sigma P_m (\delta_{ma} + 2\delta_{mb}) 2J_{ab}/l$  .....(12)

Da  $\delta_{ma}$  und  $\delta_{mb}$  nichts anderes als die Einflusslinie der Knotendrehwinkel  $\theta_a$  und  $\theta_b$  sein können, geht aus den Gleichungen (11) und (12) hervor, dass man die Einflusslinie für das Einspannungsmoment am Balkenende erhält, wenn man die Einflusslinie für den Knotendrehwinkel an beiden Enden des betreffenden Stabes gemäss den Gleichungen (11) oder (12) zusammensetzt.

Aus Gl. (11) und (12) folgt auch, dass die Einflusslinie für das Einspannungsmoment  $M_a$  des Stabs *AB* mit der  $2J_{ab}/l$  fach vergrösserten Biegelinie übereinstimmt, in die der Rahmen bei den Belastungen  $\bar{M}_a=2$  und  $\bar{M}_b=1$  sich umformt (Siehe Abb. 2).

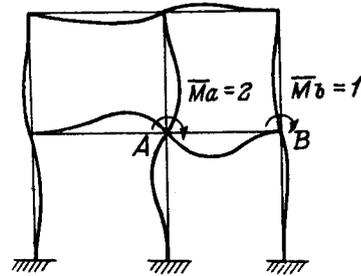


Abb. 2.

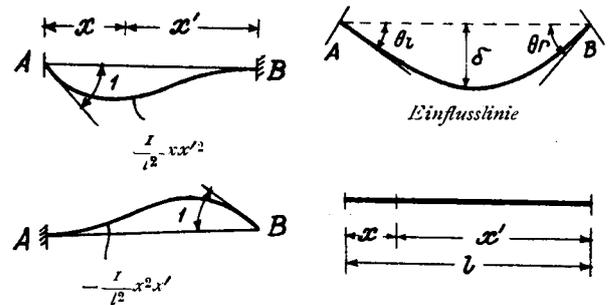
Die wirkliche Einflusslinie für  $M_a$  bzw.  $M_b$  betreffend, haben wir noch die Einflusslinie hinzuzufügen, deren Gleichung als

$M_a^0 = \frac{P}{l^2} x x'^2$  .....(13)

bzw.  $M_b^0 = -\frac{P}{l^2} x^2 x'$  .....(14)

gegeben ist.

Aus Gl. (13) und (14) geht hervor, dass der Neigungswinkel der Einflusslinie an dem in Frage stehenden Balkenende Eins und am anderen Ende Null wird. Die Einflusslinie für  $M_a^0$  bzw.  $M_b^0$  ist graphisch in Abb. 3 dargestellt.



Einflusslinie für  $M_a^0$  bzw.  $M_b^0$   
Abb. 3.

Abb. 4.

Nehmen wir an, dass ein unbelasteter Balken mit konstantem Trägheitsmoment durch irgendeine Ursache an beiden Enden um den Winkel  $\theta_l$  und  $\theta_r$  gedreht ist, so lautet die Gleichung der Biegelinie:

$\delta = \left\{ \theta_l \left( 1 - \frac{x'}{l} \right) x'^2 - \theta_r \left( 1 - \frac{x}{l} \right) x^2 \right\} \frac{1}{l}$ , (15)

wobei  $\delta$  die Durchbiegung eines beliebigen Punktes ist, der *x* von dem linken und *x'* von dem rechten Ende entfernt liegt (Siehe Abb. 4).

Dieselbe Gleichung gilt ebenso für die Einflusslinie, da sie, wie oben erwähnt, als Biegelinie

des unbelasteten Stabs vorgestellt wird.

Wenden wir die Gl. (15) auf die Einflusslinie für Biegemomente an, so lautet die gesamte durch Belastung des betreffenden Stabes bewirkte Einflussgrösse

$$\int q \delta dx,$$

worin  $q$  die Belastung ist.

Die Integration ist auf den positiven bzw. negativen Bereich von  $\delta$  zu beschränken, um die maximale bzw. minimale Einflussgrösse zu bestimmen.

Ist der Drehsinn der Knotendrehung  $\theta_l$  und der von  $\theta_r$  einander entgegengesetzt, so schneidet die Einflusslinie die Balkenachse nicht und die maximale od. minimale Einflussgrösse wird von der Vollbelastung aus berechnet. Hiernach folgt

$$qF = \int_0^l q \delta dx = \frac{q}{l} \left\{ \int_0^l \theta_l \left(1 - \frac{x'}{l}\right) x'^2 dx - \int_0^l \theta_r \left(1 - \frac{x}{l}\right) x^2 dx \right\} = \frac{ql^2}{12} (\theta_l - \theta_r) \dots (16)$$

Für den positiven Drehwinkel  $\theta_l$  wird die Einflussgrösse positiv und umgekehrt.

Wenn  $\theta_l$  und  $\theta_r$  gleiche Drehsinne besitzen, dann wird die Ordinate der Durchbiegungslinie teils positiv, teils negativ und jeder Teil ist je für sich zu integrieren.

Der Punkt, bei der die Einflusslinie die Balkenachse schneidet, befindet sich an der Stelle

$$x'_0 = \frac{\theta_r}{\theta_l + \theta_r} l \quad x_0 = \frac{\theta_l}{\theta_l + \theta_r} l \quad (\text{Siehe Abb. 5})$$

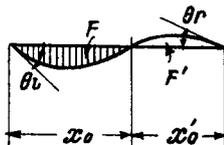


Abb. 5.

Die schraffierte Einflussfläche in Abb. 5, die für die positive Einflussgrösse bestimmend ist, berechnet sich zu

$$F = \int_{x'_0}^l \frac{\theta_l}{l} \left(1 - \frac{x'}{l}\right) x'^2 dx' - \int_0^{x_0} \frac{\theta_r}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) x^2 dx$$

Bei gleichmässig verteilter Nutzlast ist die Einflussgrösse

$$qF = q \frac{l^2}{12} \left[ \theta_l \left\{ 4(1 - a^3) - 3(1 - a^4) \right\} - \theta_r \left\{ 4a^3 - 3a^4 \right\} \right] = \frac{ql^2}{12} C \theta_l \dots (17)$$

Auf gleiche Weise erhält man die negative Einflussgrösse entsprechend der nicht schraffierten Fläche

$$qF' = q \frac{l^2}{12} \left[ -\theta_r \left\{ 4(1 - a^3) - 3(1 - a^4) \right\} + \theta_l \left\{ 4a^3 - 3a^4 \right\} \right] = -\frac{ql^2}{12} C' \theta_l \dots (18)$$

wobei  $a = \frac{\theta_l}{\theta_l + \theta_r}$  und  $a' = \frac{\theta_r}{\theta_l + \theta_r}$  ist. Der abgekürzte Ausdruck  $C$  oder  $C'$  ist eine Funktion von  $\theta_l : \theta_r$ .

Aus den oben eingeführten Formeln können wir die grössten Biegemomente an den Stabenden mit Hilfe der Einflusslinien für den Knotendrehwinkel bestimmen. Bei gleichmässigen Nutzlasten auf dem Träger mit unveränderlichem Trägheitsmoment geschieht die Berechnung ausserordentlich einfach.

Die Koeffizienten  $C$  und  $C'$  sind in Tabelle I zusammengestellt.

Tabelle I.

$\theta_r/\theta_l$	$C$	$C'$
0,05	+ ,950221	- ,000221
0,10	+ ,9015578	- ,001518
0,15	+ ,854770	- ,004770
0,20	+ ,810185	- ,0010185
0,25	+ ,768000	- ,018000
0,30	+ ,728268	- ,028268
0,35	+ 690953	- ,040953
0,40	+ ,655980	- ,055980
0,45	+ ,623233	- ,073233
0,50	+ ,592595	- ,092595
0,55	+ ,563928	- ,113928
0,60	+ ,537109	- ,137109
0,65	+ ,512004	- ,162004
0,70	+ ,476993	- ,176993
0,75	+ ,466341	- ,216341
0,80	+ ,445816	- ,245816
0,85	+ ,426429	- ,276429
0,90	+ ,408262	- ,308262
0,95	+ ,391106	- ,341106
1,00	+ ,37500	- ,375000

Falls das Trägheitsmoment des Balkens veränderlich oder eine besondere Belastung zu berücksichtigen ist, wird eine numerische Berechnung und sogar eine graphische Analyse erwünscht.

Die Einflusslinie für die Querkraft an irgendeiner Stelle kann auch dadurch eingeführt werden, dass man die Einflusslinie der Knotendrehwinkel passend zusammensetzt. Es wird aber hier darauf verzichtet, deren weitere Berechnung zu entwickeln.

II. Strenge Untersuchung der Einflusslinie für die Knotendrehwinkel und für das Einspannungsmoment des Balkenendes.

Die in Abb. 6 nebenbeschriebenen Zahlen stellen das Steifigkeitsverhältnis ( $J/l : J_c/l_c$ ) des Rahmenstabes dar.

Als Beispiel dient das in Abb. 6 dargestellte vierstöckige Rahmenwerk mit drei Stielen, in dem die Einflusslinie für das Einspannungsmoment des Balkens  $GH, HI, JK, KL$  und für das Endmoment der Stiele  $GK, HK$  und  $IL$  gesucht wird.

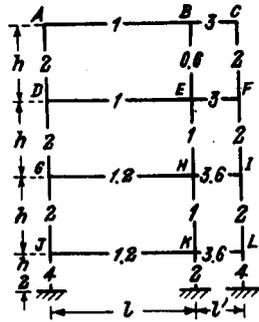


Abb. 6.

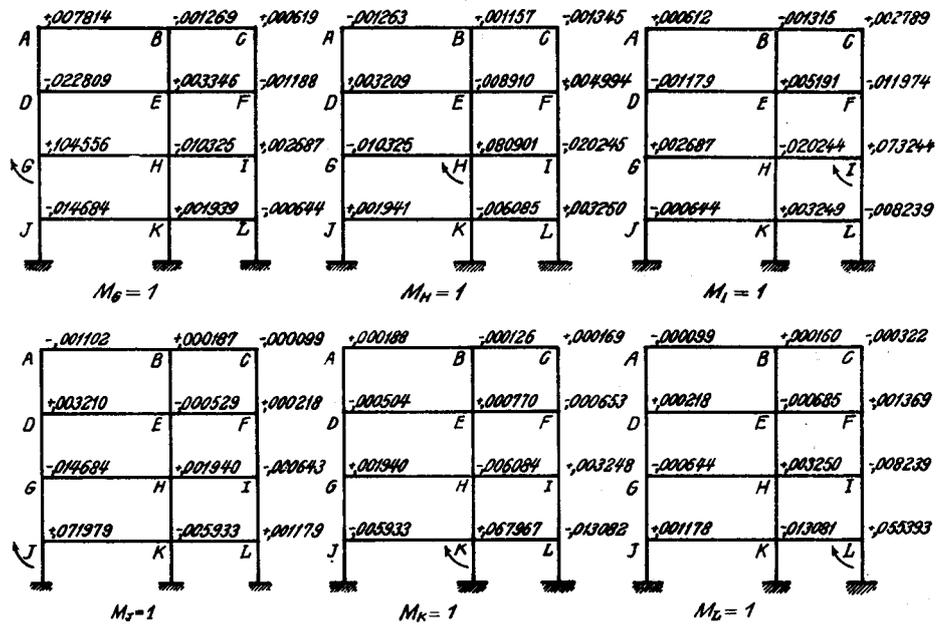


Abb. 7.

Knoten-drehwinkel  $\theta$  infolge  $M_x=1$ .

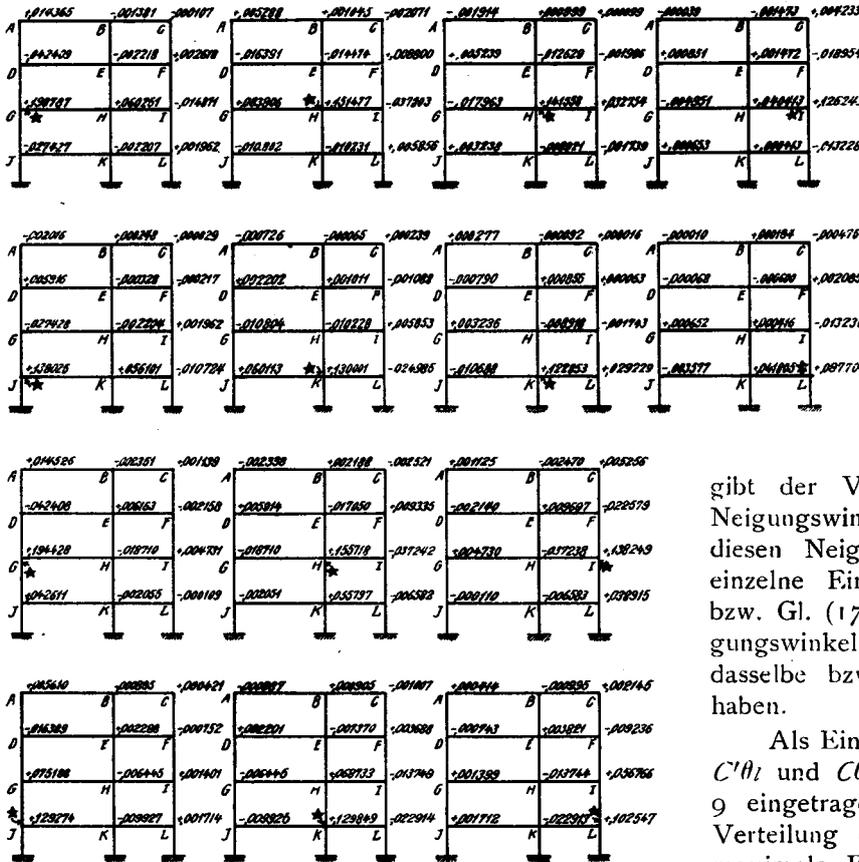


Abb. 8.

Einflusslinie für das Biegemoment an dem mit Stern bezeichneten Stäbe. Die eingetragenen Zahlen stellen nur die Neigungswinkel der Einflusslinie an dem Knotenpunkt dar. Der Neigungswinkel der Einflusslinie infolge  $M_x=0$  od.  $M_L=0$  ist nicht eingetragen.

Die systematische Auflösung der Knotengleichungen führt für jeden einzelnen Belastungszustand  $M_G=1$ ,  $M_H=1$  usw. zu den Knotenwinkeln, die in Abb. 7 eingetragen sind.

Aus diesen Knotendrehwinkeln ermittelt sich die Einflusslinie für das Einspannungsmoment gemäss Gl. (7) und (8).

Anstatt die ganze Gestalt der Einflusslinie zu zeigen, gibt der Verfasser in Abb. 8 nur deren Neigungswinkel an den Knoten an. Aus diesen Neigungswinkeln berechnet sich die einzelne Einflussgrösse gemäss der Gl. (16) bzw. Gl. (17) od. (18) je nachdem die Neigungswinkel an den benachbarten Knoten dasselbe bzw. ein verschiedenes Vorzeichen haben.

Als Einflussgrösse sind die Werte  $\theta_1 - \theta_2$ ,  $C'\theta_1$  und  $C\theta_1$  1000 fach vergrössert in Abb. 9 eingetragen. Abb. 9 zeigt zugleich die Verteilung der Nutzlasten, die das positive maximale Einspannungsmoment an dem betreffenden Stäbe hervorbringt.

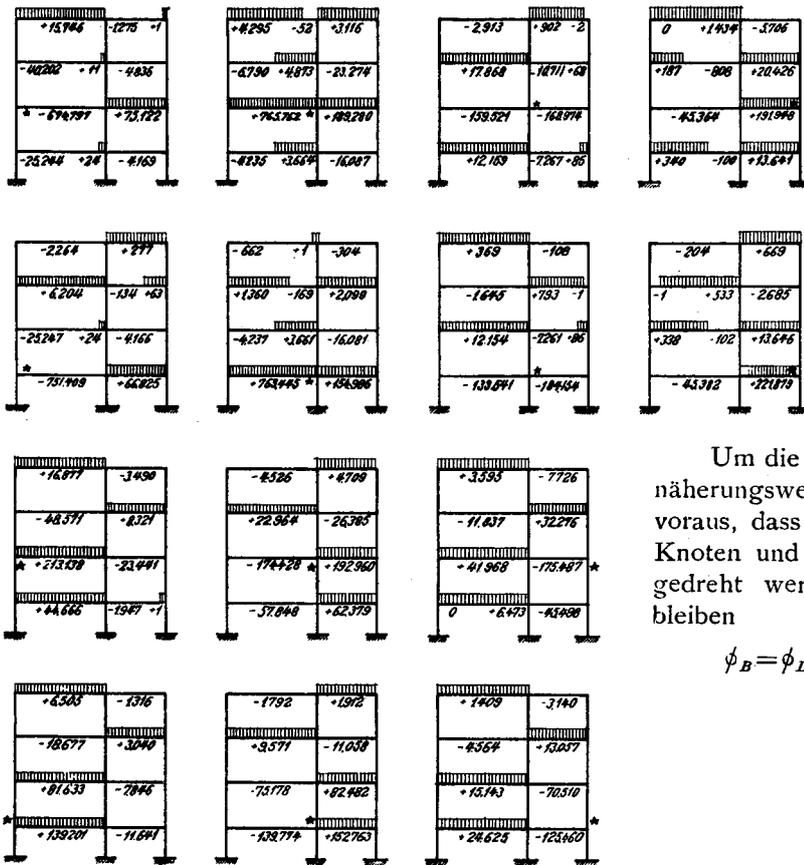


Abb. 9. Einflussgrösse.

III. Angenähertes Verfahren zur Ermittlung der Einflusslinien.

Die exakte Ermittlung der Einflusslinie erfordert eine mühevollere Rechnungsarbeit. Vom praktischen Standpunkt aus ist es wünschenswert, nach einer anderen vereinfachten Rechnungsmethode zu suchen.

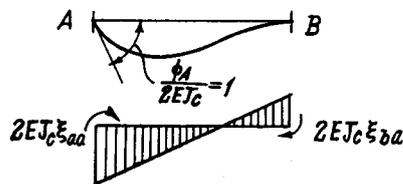


Abb. 10.

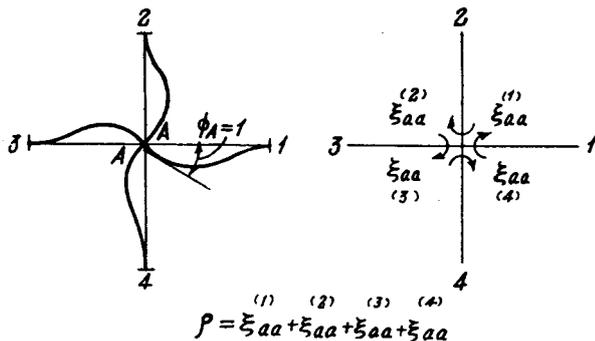


Abb. 11.

In der folgenden angenäherten Lösung ersetzen wir  $2EJ_c\theta$  durch  $\phi$  und untersuchen die Einflusslinie für  $\phi$  anstatt  $\theta$ .

$\xi_{aa}$  bzw.  $\xi_{ba}$  stellt die Verhältniszahl des angreifenden bzw. festhaltenden Moments an dem Balkende A bzw. B dar, wobei der Balken in der Form  $\frac{\phi_A}{2EJ_c} = 1$   $\phi_B = 0$  verbogen gedacht ist (siehe Abb. 10) und  $\rho$  die Summe  $\xi_{aa}$  aller an dem Knoten anschliessenden Stabenden ist (siehe Abb. 11).

Um die Einflusslinie für den Knotendrehwinkel näherungsweise zu bestimmen, setzt der Verfasser voraus, dass der von dem Aussenmoment belastete Knoten und die daneben befindlichen vier Knoten gedreht werden, während die übrigen ungedreht bleiben

$$\phi_B = \phi_D = \phi_F = \phi_H = \phi_A = \phi_C = \phi_E = \phi_G = 0 \quad (\text{Siehe Abb. 12}) \quad (19)$$

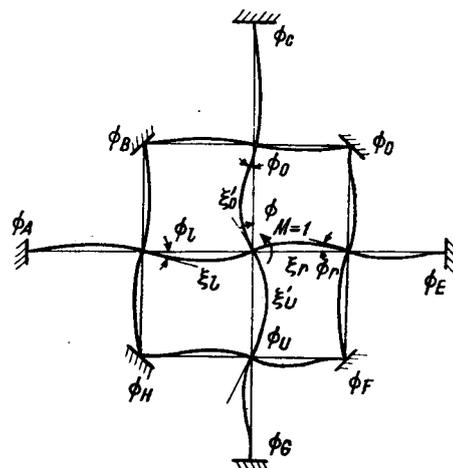


Abb. 12.

Bei dieser Voraussetzung ergeben sich im wesentlichen kleine Fehler, da die Übertragungsziffer des Knotendrehwinkels im Rahmen sehr klein gehalten ist.

Auf Grund der Voraussetzung lassen sich die folgenden Beziehungen ableiten.

$$\begin{aligned} \phi_0 &= -\frac{\xi_0}{\rho_0} \phi & \phi_u &= -\frac{\xi_u}{\rho_u} \phi & \phi_r &= -\frac{\xi_r}{\rho_r} \phi \\ \phi_l &= -\frac{\xi_l}{\rho_l} \phi \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (20)$$

Greift ein Aussenmoment 1 an einem Knoten an, so bedingt das Gleichgewicht der äusseren und inneren Momente

$$\rho\phi - \xi_0 \frac{\xi_0}{\rho_0} \phi - \xi_u \frac{\xi_u}{\rho_u} \phi - \xi_r \frac{\xi_r}{\rho_r} \phi - \xi_l \frac{\xi_l}{\rho_l} \phi = M = 1 \quad \dots \dots \dots (21)$$

woraus folgt

$$\phi = 1 / \left[ \rho - \xi_0 \frac{\xi_0}{\rho_0} - \xi_u \frac{\xi_u}{\rho_u} - \xi_r \frac{\xi_r}{\rho_r} - \xi_l \frac{\xi_l}{\rho_l} \right] \quad (22)$$

Mittels der Formeln (21) und (22) werden die Drehwinkel der Knoten bei dem Angriff der Momente an einem Knoten angenähert ermittelt. Das grösste Spannungsmoment an dem Stabende wird durch die Zusammensetzung der Einflusslinie der Knotendrehwinkel gewonnen.

Zur Berechnung des angenäherten Spannungsmoments am Ende des Stabes *A-B* in Abb. 13 berücksichtigt man also nur die fettgezeichneten Stäbe.

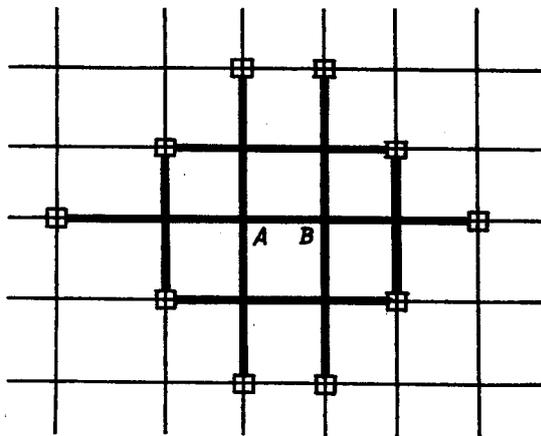


Abb. 13.

#### IV. Praktische Berechnung des maximalen und minimalen Spannungsmoments.

**Erste Stufe der Berechnung.** Die Berechnung der  $\rho$ - und  $\xi$ -werte.

Für den Stab mit unveränderlichem Trägheitsmoment bezeichnet man mit  $\xi$  die Steifigkeit oder Steifigkeitsverhältniszahl des betreffenden Stabes ( $J/l$  od.  $J/l : J_c/l_c$ ) und ferner mit  $\rho$  die 2-fache Summe der Steifigkeiten oder Steifigkeitsverhältnis zahlen aller an einen Knoten anschliessenden Stäbe. Für den Stab mit veränderlichem Trägheitsmoment sind  $\rho$  und  $\xi$  durch besondere Integrationen zu berechnen. Die statische Bedeutung dieser Werte ist in meiner Dissertation klar erläutert, in der die Bestimmungsgleichungen der Deformationsmethode nach dem Prinzip der virtuellen Verrückung abgeleitet sind.

**Zweite Stufe der Berechnung.** Unter der Übertragungsziffer des Knotenwinkels  $\mu$  versteht man den Tangentenwinkel an einem Stabende, wenn das andere Ende um den Winkel 1 gedreht wird. Nehmen wir an, dass ein beliebiger Knoten eines rechteckigen Stockwerkrahmens um  $-\phi$  gedreht wird, so dreht sich der benachbarte Knoten um  $\mu_0\phi$ ,  $\mu_u\phi$ ,  $\mu_l\phi$  bzw.  $\mu_r\phi$  je nach dem die Drehung  $\phi = -1$  an dem oberen, unteren, rechten

bzw. linken Knoten stattfindet. Die Übertragungsziffern ergeben sich aus  $\mu_0 = \xi_0/\rho$ ,  $\mu_u = \xi_u/\rho$ ,  $\mu_l = \xi_l/\rho$  bzw.  $\mu_r = \xi_r/\rho$ .

Die Übertragungsziffer wird stets neben dem den Drehwinkel vermittelnden Stab mit einem Pfeil eingetragen (Abb. 14), der nach dem Ursprungsknoten gerichtet ist.

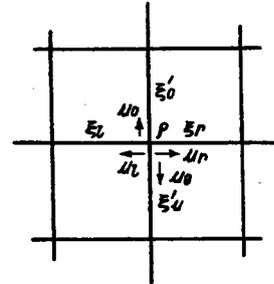


Abb. 14.

**Dritte Stufe der Berechnung.** Berechnung des Knotendrehwinkels infolge  $M=1$  an einem Knoten, d.h. des Neigungswinkels der Einflusslinie für Knotendrehwinkel.

Der Knotendrehwinkel  $K$  des Knotens, an dem das Einheitsmoment angreift, berechnet sich aus Gl. (22) oder

$$K = 1 / (\rho - \Sigma \xi \mu),$$

wobei  $\Sigma$  die Addition von  $\xi \mu$  für alle an dem betreffenden Knoten anschliessenden Stäbe fordert, d.i.  $K = 1 / (\rho - \xi_0 \mu_0 - \xi_u \mu_u - \xi_r \mu_r - \xi_l \mu_l)$ .

Multipliziert man  $K$  mit den Übertragungsziffern  $\mu_0$ ,  $\mu_u$ ,  $\mu_l$ , bzw.  $\mu_r$ , so erhält man die übertragenen Drehwinkel an dem benachbarten Knoten, die ebenso mit einem Pfeil nach dem Ursprungsknoten neben dem betreffenden Stab eingetragen sind (Abb. 15).

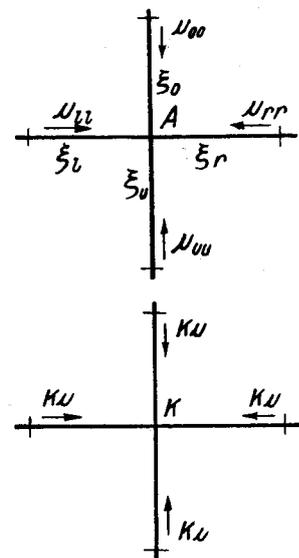


Abb. 15.

Diese Knotenwinkel stellen die Neigungswinkel

der Einflusslinie für den Knotendrehwinkel  $\theta_A$  dar. Die analogen Neigungswinkel der Drehwinkel-Einflusslinie für die anderen Knoten müssen ebenso berechnet und eingetragen werden.

**Vierte Stufe der Berechnung.** Berechnung der Einflusslinie für das Spannungsmoment des Stabendes.

Wir bezeichnen mit  $K$  bzw.  $\bar{K}$  den Drehwinkel am Knoten  $A$  bzw.  $C$ , an dem das Einheitsmoment  $M=1$  angreift, und ferner mit  $K\mu$  bzw.  $\bar{K}\mu$  die zugehörigen Drehwinkel der benachbarten Knoten (Abb. 16). Aus diesen Drehwinkeln berechnet sich nach Gl. (5) u. Gl. (6) die Neigung der Einflusslinie für das Spannungsmoment am Knoten. Diese Neigungswinkel, entsprechend der Einflusslinie für das Spannungsmoment des Säulenkopfes  $A$ , sind beispielsweise in Abb. 17 eingetragen.

Sie stimmen natürlich mit den Drehwinkeln überein, um die die Knoten bei den gleichzeitigen Belastungen  $M_A=a$  und  $M_C=1$  sich drehen, wobei  $a=\xi ua/\xi ac$  ist.

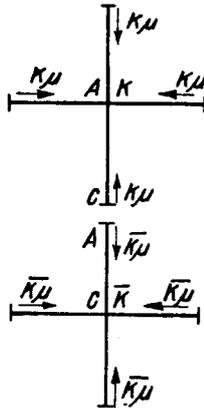


Abb. 16.

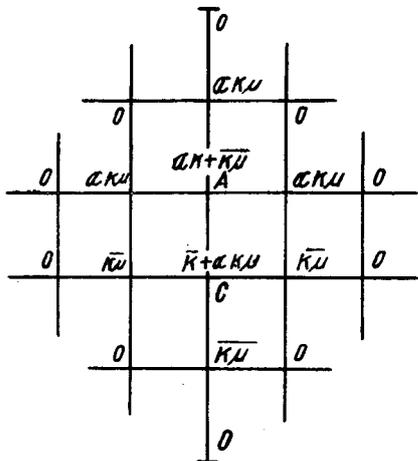


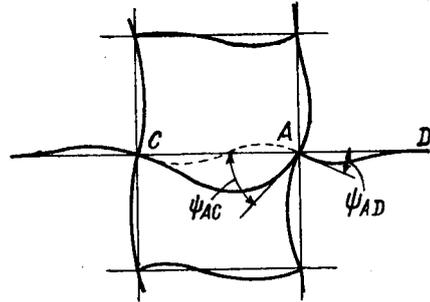
Abb. 17.

Für den Stab mit unveränderlichem Trägheitsmoment wird  $u=2$ .

Handelt es sich um die Neigung der Einflusslinie für das Spannungsmoment des Balkenendes, so kommt der zuzusetzende Neigungswinkel  $-1$  gemäss der Gleichung (5) u. (6) in Betracht.

Zum Beispiel ist die Neigung der Einflusslinie für das Spannungsmoment am Ende  $A$  des Balkens  $AC$  derart, dass die Tangente an  $A$  von sich um den Winkel  $(uK + \bar{K}\mu)\xi ac$  dreht, während sich die Tangente der Einflusslinie  $AC$  um den Winkel  $(uK + \bar{K}\mu)\xi ac - 1$  bewegt. Die Neigungswinkel an  $C$  sind gemeinsam, da die zuzusetzenden Neigungswinkel wegen der Abb. (18) null sind. In Abb.

(18) sind diese Neigungswinkel der Einflusslinie eingetragen.



$$\psi_{AD} = \alpha K + \bar{K}\mu$$

$$\psi_{AC} = \alpha K + \bar{K}\mu - \frac{1}{\xi ac}$$

Abb. 18.

Da wir  $\phi$  anstatt  $2EJc\theta$  angenommen haben, ist das Spannungsmoment des Stabendes aus folgender Gleichung zu bestimmen.

$$M = M^0 + \xi ac \times \left\{ \frac{\xi aa}{\xi ac} \phi a + \phi c \right\}$$

$$= \xi ac \times \left\{ \frac{M^0}{\xi ac} + a\phi a + \phi c \right\} = \xi ac \times qF \dots (23)$$

Der Koeffizient  $qF$  ist die Einflussgrösse, berechnet nach den Gl. (16), (17) u. (18) der Einflusslinie.

**Fünfte Stufe der Berechnung.** Die Berechnung der Einflussgrösse für das Spannungsmoment.

Die Einflussfaktoren für das Spannungsmoment am Ende  $A$  des Stabes  $A-C$  in Abb. (17) berechnen sich ohne weiters aus den eingetragenen Neigungswinkeln. Wenn  $\phi_l$  und  $\phi_r$  verschiedene Vorzeichen haben, dann ist bei der Einflussgrösse  $\phi_l - \phi_r$ . Falls dagegen  $\phi_l$  und  $\phi_r$  dasselbe Vorzeichen haben, berechnet man die positive bzw. negative Einflussgrösse aus  $C\phi_l$  bzw.  $C'\phi_l$  gemäss Gl. (16) u. (17). In diesem Fall ist es klar, dass die teilweise Belastung auf das Spannungsmoment einen grösseren Einfluss ausübt. Die Einflussgrössen sind mit  $m_{uv}$  od.  $m'_{uv}$  bezeichnet, je nachdem sie positiv oder negativ sind. Die Werte  $m_{uv}$  oder  $m'_{uv}$  werden auch neben dem Stab eingetragen, wie es in Abb. (19) ersichtlich ist.

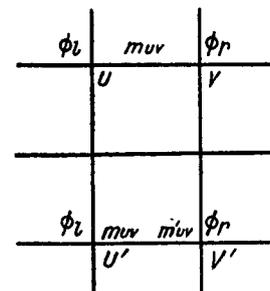


Abb. 19.

**Sechste Stufe der Berechnung.** Berechnung des maximalen und minimalen Einspannungsmomentes an einem Stabende. Für die fünfte Stufe der Berechnung empfiehlt es sich, die Werte  $\overline{m_{uv}} = \frac{P_{uv} l_{uv}^2}{12} m_{uv}$  anstatt  $m_{uv}$  zu berechnen, wobei  $P_{uv}$  die Nutzlast auf dem Balken  $U-V$  und  $l_{uv}$  die Spannweite des Balkens ist.

Addiert man alle Werte von  $\overline{m_{uv}}$  bzw.  $\overline{m'_{uv}}$  zusammen und multipliziert mit der Steifigkeitsverhältniszahl des—je nach dem die Berechnung des grössten oder kleinsten Biegemomentes erwünscht ist—zu untersuchenden Stabes, so erhalten wir das grösste bzw. kleinste Biegemoment.

Im allgemeineren Fall ist das grösste Einspannungsmoment negativ am linken und positiv am rechten Ende.

**Zahlenbeispiel.** Als Beispiel dient wieder das in Abb. 3 dargestellte Rahmenwerk. Der Rechnungsgang ist übersichtlich in Abb. 20 angegeben.

Abb. 20 a: Die Steifigkeitsverhältniszahl und der Wert  $\rho$  an jedem Knoten. (1. Stufe)

Abb. 20 b: Die Übergangsziffer der Knotendrehwinkel. (2. Stufe)

Abb. 20 c: Einzelner Knotendrehwinkel  $K$  infolge  $M=1$ . (3. Stufe)

Abb. 20 d: Zugehörige Knotendrehwinkel ( $K\mu$ ) an den benachbarten Knoten infolge  $M=1$ . (4. Stufe)

Abb. 20 e: Neigungswinkel der Einflusslinie für das Spannungsmoment am Ende  $H$  des Balkens  $H-G$ . (5. Stufe)

Abb. 20 f: Einflussgrösse auf das Einspannungsmoment des betreffenden Schnittes.

In Abb. 20 f ist zugleich die ungünstigste Verteilung der Nutzlasten für das positive Einspannungsmoment am Ende  $H$  des Balkens  $H-G$  dargestellt.

Auf dieselbe Weise berechnet sich das angenäherte maximale oder minimale Einspannungsmoment am beliebigen Stabende. Die grössten und kleinsten Einspannungsmomente des Rahmenstabes  $GJ, HK, IL, GH, HI, JK, KL$  sind in Tabelle II zusammengestellt. Daneben sind die Einspannungsmomente bei voller Belastung des Rahmens gegeben, die durch Addition aller Werte von  $m_{uv}$  und  $m'_{uv}$  errechnet werden.

In Tabelle II stellen die Ziffern in der Spalte I die genauen und die in der Spalte III die angenäherten Werte dar. Die Einspannungsmomente in der Spalte II sind in der Weise ermittelt, dass man die Einflusslinie aus strenger Lösung nur innerhalb des in Abb. 13 fett gezeichneten Bereichs berücksichtigt. Die unterstrichenen Momentenbeiwerte in Tabelle II werden gewöhnlich zur Querschnittsbestimmung benützt. Durch Vergleich dieser wichtigen Beiwerte erkennt man, dass das angenäherte Verfahren für den praktischen Gebrauch befriedigend ist.

### V. Praktische Ermittlung des maximalen Biegemomentes in der Balkenmitte.

In gleicher Weise wird das maximale Biegemoment an einem beliebigen Querschnitt durch passende Zusammensetzung der Einflusslinie für

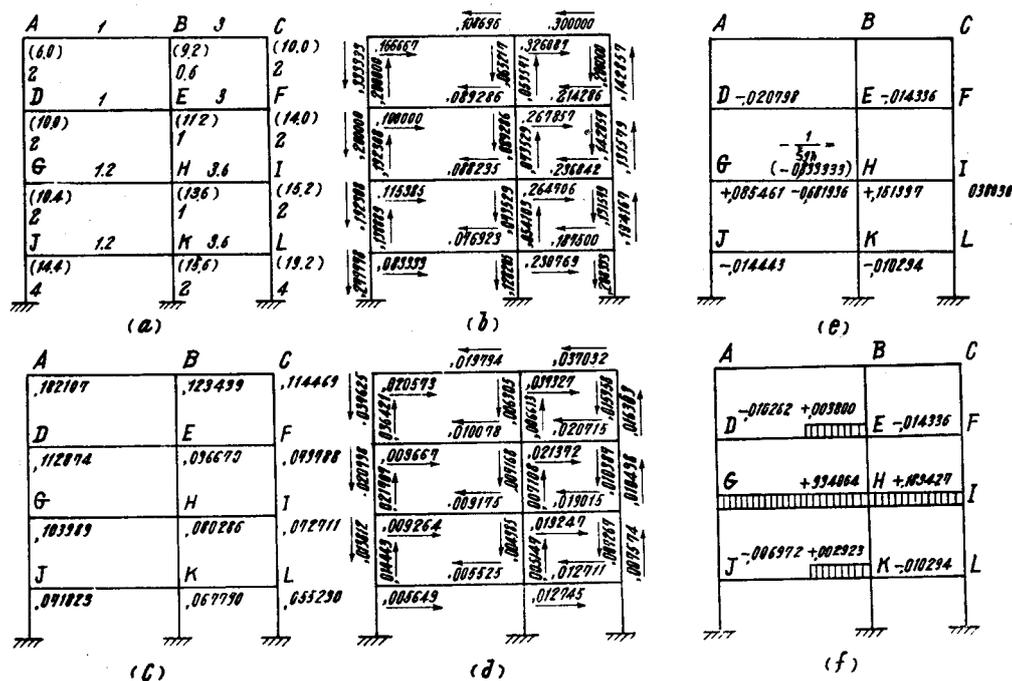


Abb. 20.

Tabelle II.

Biegemoment in  $\frac{1}{12}wl^2$ , wobei  $w$  die Belastung,  $l$  die Spannweite der langen Balken, und  $\frac{1}{12}wl^2$  der kurzen Spannweite als  $0.1 \times \frac{1}{12}wl^2$  vorausgesetzt ist.

Die Stellung des Stabs			A) Einspannungsmomet bei vollier Belastung			B) Maximale Einspannungs-momente			C) Minimale Einspannungs-momente		
			I	II	III	I	II	III	I	II	III
Balken des zweiten Geschosses	GH	Ende-G	-0.885578	-0.904319 +2,1	-0.897431 +1,2	+0.027949	+0.009054 -67,6	+0.010320 -63,1	-0.913527	-0.913373 0	-0.907751 -0,6
		Ende-H	+0.939385	+0.933919 -0,55	+0.927920 -1,2	+0.957400	+0.051872 -0,5	+0.951556 -0,6	-0.018015	-0.017953 -0,4	-0.023636 +31,3
	HI	Ende-H	-0.543585	-0.533423 -1,8	-0.550821 +1,3	+0.108479	+0.108155 -0,4	+0.090476 -16,55	-0.652065	-0.641578 -1,65	-0.641297 -1,75
		Ende-I	-0.080209	-0.083315 +3,8	-0.061431 -23,4	+0.088426	+0.083264 -5,8	+0.122873 +39,0	-0.168635	-0.166579 -11,5	-0.184306 +9,3
Balken des ersten Geschosses	JK	Ende-J	-0.919686	-0.924440 +0,5	-0.922540 +0,3	+0.015534	+0.008048 -48,2	+0.007975 -48,65	-0.935220	-0.932488 -0,3	-0.930515 -0,5
		Ende-K	+0.932964	+0.932112 -0,1	+0.928181 -0,5	+0.941011	+0.939126 -0,2	+0.937312 -0,35	-0.008047	-0.007014 -12,8	-0.009135 +13,5
	KL	Ende-K	-0.510217	-0.505868 -0,9	-0.514470 +0,8	+0.045400	+0.043787 -3,55	+0.036626 -19,35	-0.555617	-0.549655 -1,1	-0.551095 -0,75
		Ende-L	-0.077280	-0.077734 +0,6	-0.071194 -7,9	+0.088168	+0.086008 -2,4	+0.101628 +15,2	-0.165447	-0.163742 -1,1	-0.172822 +3,5
Stiele des ersten Geschosses	GJ	Oberes Ende	+0.448108	+0.413388 -7,7	+0.433988 -3,15	+0.551026	+0.515608 -6,4	+0.521956 -5,25	-0.102918	-0.102220 -0,65	-0.087968 +14,6
		Unteres Ende	+0.413770	+0.400416 -3,25	+0.405944 -1,95	+0.455286	+0.441668 -2,95	+0.451586 -0,8	-0.041516	-0.041252 -0,65	-0.045642 +9,8
	HK	Oberes Ende	-0.190472	-0.185417 -2,2	-0.197975 +3,9	+0.048969	+0.048498 -0,9	-0.040719 -16,8	-0.239441	-0.234915 -1,9	-0.338694 -0,35
		Unteres Ende	-0.184564	-0.182963 -0,9	-0.190341 +3,1	+0.033286	+0.033095 -0,7	+0.031687 -4,7	-0.217850	-0.216058 -0,9	-0.222028 +1,9
	IL	Oberes Ende	+0.041110	+0.059140 +43,8	+0.060736 +47,7	+0.110528	+0.103338 -6,5	+0.106632 -3,6	-0.069418	-0.044198 -36,4	-0.045896 -33,9
		Unteres Ende	+0.036016	+0.042954 +19,2	+0.050392 +39,8	+0.084966	+0.082148 -3,4	+0.091552 +7,7	-0.048950	-0.039194 -20,0	-0.041160 -15,9

Die hinzugefügten Zahlen geben die Abweichung von dem genauen Wert in Prozent an. Das Vorzeichen + bedeutet, dass der angenäherte Wert gegenüber dem genauen grösser ist.

die Knotendrehwinkel ermittelt, wobei die Koeffizienten  $\alpha$  und  $\iota$  in der Formel (22) durch  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  ersetzt werden müssen.

Die neu eingeführten Koeffizienten  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  sind nach der Bestimmungsgleichung des Biegemoments an dem betrachteten Querschnitt zu bestimmen. Da die Grösse der Koeffizienten von der Lage des Querschnittes abhängig ist, dürfte es nicht praktisch sein, das grösste Biegemoment Stelle für Stelle zu berechnen.

In praktischer Hinsicht nehmen wir an, dass das grösste Feldmoment teils durch die Nutzlast unmittelbar auf dem Balken und teils durch die Nutzlasten verursacht wird, die die kleinsten Einspannungsmomente an beiden Enden des im Frage stehenden Balken beibehalten lassen.

Dazu kommt noch der Einfluss der stetigen Belastung.

Nach diesem Gedankengang erhält man zeichnerisch das grösste Feldmoment, wie in Abb. 21 ersichtlich ist.

Bezeichnet man mit

$-M_{0l}$  und  $+M_{0r}$  die Einspannungsmomente infolge der Nutzlast auf dem Balken  $L-R$ ,  
 $+M_{lp}$  und  $-M_{rp}$  die kleinsten Einspannungsmomente infolge der Nutzlasten auf anderen Balken,

und mit  $-M_{lg}$ ,  $+M_{rg}$  das Einspannungsmoment infolge der stetigen Belastung auf dem ganzen Rahmenwerk,

so berechnet sich das das grösste Feldmoment erzeugende Einspannungsmoment zu

$$M_l = -M_{0l} + M_{lp} - M_{lg}$$

$$M_r = +M_{0r} - M_{rp} + M_{rg} \dots\dots\dots(24)$$

und das Feldmoment in der Balkenmitte zu

$$M = M_0 + \frac{1}{2} \{ M_l - M_r \} \dots\dots\dots(25)$$

Nach vorliegenden Bezeichnungen lassen sich die Einspannungsmomente folgendermassen ausdrücken:

$$M_{0l} = \xi_{lr} \frac{Pl^2}{12} \left\{ (u_l K_l + \overline{K_r \mu_r}) + (u_l K_l \mu_r + K_r) - \frac{1}{\xi_{ac}} \right\}$$

$$M_{0r} = \xi_{lr} \frac{Pl^2}{12} \left\{ (u_r K_r + \overline{K_l \mu_l}) + (u_r K_r \mu_l + K_l) - \frac{1}{\xi_{ac}} \right\}$$

$$M_0 = \frac{1}{8} (\rho + g) l^2 \dots\dots\dots(26)$$

Die Werte in Gl. (26) werden aus den in Tabelle II angegebenen Momentenbeiwerten leicht ermittelt. Hier in Tabelle II stellt A das Einspannungsmoment bei voller Belastung und B bzw.

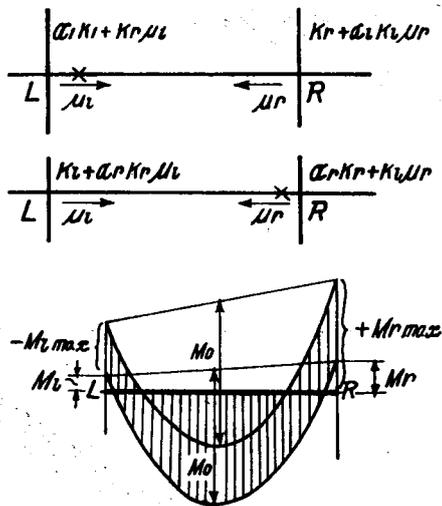


Abb. 21.

C das maximale bzw. minimale Einspannungsmoment dar.

Die Verteilung der Nutzlasten, die  $+M_{lp}$  in Formel (24) ergibt, ist eine andere als die, welche  $-M_{rp}$  in derselben Formel (24) zur Folge hat.

In Wirklichkeit ergibt sich in keinem Falle ein solcher Belastungszustand, bei dem  $+M_{lp}$  und  $-M_{rp}$  gleichzeitig minimum werden.

In dieser Hinsicht stellt das oben abgeleitete grösste Feldmoment einen angenäherten Wert dar.

Eine analoge Überlegung führt dazu, dass das kleinste Feldmoment angenähert erhältlich ist, wenn man als zugehörige Einspannungsmomente die grössten Einspannungsmomente nimmt.

Die Bestimmung des kleinsten Feldmoments ist aus Abb. 21 ersichtlich.

### VI. Schlussfolgerung.

Bezüglich der Querschnittbestimmung des Rahmens liefert das vom Verfasser neu vorgeschlagene Berechnungsverfahren die Möglichkeit, die maximalen und minimalen Biegemomente des Stockwerkrahmens auf praktische Weise zu ermitteln. Bei diesem Verfahren sind natürlich die Steifigkeitsverhältniszahl, Spannweite des Balkens und das Verhältnis der Nutzlast zum Eigengewicht in Rechnung gezogen. Demnach ist das Verfahren auch für unregelmässige Rahmenwerke anwendbar. Der ungünstigste Verteilungszustand der Nutzlasten auf dem wirklichen unregelmässigen Rahmenwerk darf keineswegs von dem regelmässigen, etwas idealisierten Rahmenwerk erschlossen werden. Die strenge Untersuchung der dreistöckigen vierstöckigen Rahmen hat erwiesen, dass das ungünstigste Biegemoment zuweilen durch die teilweise Verteilung der Nutzlasten (d.h. nicht durch feldweise Belastung) erzeugt wird.

Derartige ungünstige Verteilungen der Nutzlast werden ebenso durch die vorgeschlagene Methode erkennbar.

In der vorliegenden Untersuchung wird jedoch der Einfluss der wagerechten Knotenverschiebungen ausser Acht gelassen. Auf diese Aufgabe geht der Verfasser hier nicht näher ein.