Band III 1 **Heft 10.**

ENCYKLOPÄDIE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN
IM AUFTRAGE DER AKADEMIEN DER WISSENSCHAFTEN ZU
BERLIN, GÖTTINGEN, HEIDELBERG, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

IN SECHS BÄNDEN.

BAND I: ARITHMETIK UND ALGEBRA, IN 2 TEILEN	RED. VON W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— II: ANALYSIS, IN 3 TEILEN	H. BURKHARDT † (1896–1914), W. WIRTINGER (1905–1912) IN WIEN, R. FRICKE † (1914–1930) UND E. HILB † (1919—1929)
— III: GEOMETRIE, IN 3 TEILEN	W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG UND H. MOHRMANN IN DARMSTADT.
— IV: MECHANIK, IN 4 TEILBÄNDEN.	F. KLEIN † (1896–1925) UND C. H. MÜLLER IN HANNOVER.
— V: PHYSIK, IN 3 TEILEN	A. SOMMERFELD IN MÜNCHEN.
— VI, 1: GEODÄSIE UND GEOPHYSIK, IN 2 TEILBÄNDEN	PH. FURTWÄNGLER IN WIEN UND E. WIECHERT † (1899–1905) IN GÖTTINGEN.
— VI, 2: ASTRONOMIE, IN 2 TEILBÄNDEN	K. SCHWARZSCHILD † (1904–1916) UND S. OPPENHEIM † (1919–1928).

BAND III 1. HEFT 10.

AUSGEGEBEN AM 31. JANUAR 1931.

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1931.

Bisher erschien: Bd. I (vollständig); Bd. II (vollständig); Bd. III 1 I (vollständig); Bd. III 1 II (vollständig); Bd. III 2 I (vollständig); Bd. III 2 II, Heft 7–10; Bd. III 3 (vollständig); Bd. IV 1 I (vollständig); Bd. IV 1 II, Heft 1–3; Bd. IV 2 I (vollständig); Bd. IV 2 II (vollständig); Bd. V (vollständig); Bd. VI 1 A (vollständig); Bd. VI 1 B (vollständig); Bd. VI 2 A (vollständig); Bd. VI 2 B, Heft 1–3.

Jeder Band ist einzeln käuflich, dagegen werden einzelne Hefte nicht abgegeben. Der Bezug der ersten Lieferung eines Bandes verpflichtet zu seiner vollständigen Abnahme.

Aufgabe der Encyklopädie ist es, in knapper, zu rascher Orientierung geeigneter Form, aber mit möglichster Vollständigkeit eine Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaften nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten Resultaten zu geben und zugleich durch sorgfältige Literaturangaben die geschichtliche Entwicklung der mathematischen Methoden seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts nachzuweisen. Sie beschränkt sich dabei nicht auf die sogenannte reine Mathematik, sondern berücksichtigt auch ausgiebig die Anwendungen auf Mechanik und Physik, Astronomie und Geodäsie, die verschiedenen Zweige der Technik und andere Gebiete, und zwar in dem Sinne, daß sie einerseits den Mathematiker orientiert, welche Fragen die Anwendungen an ihn stellen, andererseits den Astronomen, Physiker, Techniker darüber orientiert, welche Antwort die Mathematik auf diese Fragen gibt. In 6 Bänden werden die einzelnen Gebiete in einer Reihe sachlich angeordneter Artikel behandelt; jeder Band soll ein ausführliches alphabetisches Register enthalten. Auf die Ausführung von Beweisen der mitgeteilten Sätze muß natürlich verzichtet werden. — Die Ansprüche an die Vorkenntnisse der Leser sollen so gehalten werden, daß das Werk auch demjenigen nützlich sein kann, der nur über ein bestimmtes Gebiet Orientierung sucht. — Eine von den beteiligten gelehrten Gesellschaften niedergesetzte Kommission, z. Z. bestehend aus den Herren

W. v. Dyck-München, **O. Hölder**-Leipzig, **M. Planck**-Berlin, **W. Wirtinger**-Wien,

steht der Redaktion, die aus den Herren

Ph. Furtwängler-Wien, **W. Fr. Meyer**-Königsberg, **H. Mohrmann**-Darmstadt, **C. H. Müller**-Hannover, **A. Sommerfeld**-München

besteht, zur Seite. — Als Mitarbeiter an der Encyklopädie beteiligen sich ferner die Herren

I. Band:

W. Ahrens (†)
P. Bachmann (†)
J. Bauschinger-Leipzig
G. Bohlmann (†)
L. v. Bortkewitsch-Berlin
H. Burkhardt (†)
E. Czuber (†)
W. v. Dyck-München
D. Hilbert-Göttingen
O. Hölder-Leipzig
G. Landsberg (†)
R. Mehmke-Stuttgart
W. Fr. Meyer-Königsberg i. P.
E. Netto (†)
V. Pareto-Lausanne
A. Pringsheim-München
C. Runge (†)
A. Schoenflies (†)
H. Schubert (†)
D. Seliwanoff (†)
E. Study (†)
K. Th. Vahlen-Wien
H. Weber (†)
A. Wiman-Upsala

II. Band:

L. Bieberbach-Berlin
M. Bôcher (†)
H. A. Bohr-Kopenhagen
E. Borel-Paris
G. Brunel (†)
H. Burkhardt (†)
H. Cramér-Stockholm
G. Faber-München
M. Fréchet-Poitiers
R. Fricke (†)
H. Hahn-Wien
J. Harkness-Montreal
E. Hellinger-Frankfurt a. M.
K. Hensel-Marburg
E. Hilb (†)
H. W. E. Jung-Halle
A. Kneser (†)
A. Krazer (†)
L. Lichtenstein-Leipzig
L. Maurer (†)
W. Fr. Meyer-Königsberg i. P.
P. Montel-Paris
N. E. Nörlund-Kopenhagen
W. F. Osgood-Cambridge, [Mass.
P. Painlevé-Paris
S. Pincherle-Bologna
A. Pringsheim-München
M. Riesz-Lund
A. Rosenthal-Heidelberg
C. Runge (†)
A. Sommerfeld-München
O. Szász-Frankfurt a. M.
O. Toeplitz-Bonn
E. Vessiot-Paris
A. Voss-München
A. Wangerin-Halle
E. v. Weber-Würzburg
Fr. A. Willers-Charlottenburg
W. Wirtinger-Wien
E. Zermelo-Freiburg
L. Zoretti-Caen

III. Band:

G. Berkhan (†)
L. Berwald-Prag
L. Berzolari-Pavia
Chr. Betsch-Cannstatt
G. Castelnuovo-Rom
M. Dehn-Frankfurt a. M.
F. Dingeldey-Darmstadt
F. Enriques-Rom
G. Fano-Turin
P. Heegaard-Oslo
G. Kohn (†)
H. Liebmann-Heidelberg
R. v. Lilienthal-Münster i. W.
G. Loria-Genua
A. Lotze-Stuttgart
H. v. Mangoldt (†)
W. Fr. Meyer-Königsberg i. P.
E. Müller (†)
E. Papperitz-Freiberg i. S.
K. Rohn (†)
H. Rothe (†)
E. Salkowski-Charlotten- [burg
G. Scheffers-Charlottenburg
A. Schoenflies (†)
C. Segre (†)
J. Sommer-Danzig
P. Stäckel (†)
O. Staude (†)
E. Steinitz (†)
H. Tietze-München
L. Vietoris-Wien
A. Voss-München
R. Weitzenboeck-Amsterdam
M. Zacharias-Berlin
H. G. Zeuthen (†)
K. Zindler-Innsbruck

IV. Band:

M. Abraham (†)
P. Cranz-Berlin
C. u. T. Ehrenfest-Leiden
S. Finsterwalder-München
O. Fischer (†)
L. Föppl-München
Ph. Forchheimer-Wien
Ph. Furtwängler-Wien
M. Grübler-Dresden
M. Grüning-Hannover
E. Hellinger-Frankfurt a. M.
L. Henneberg-Darmstadt
K. Heun (†)
G. Jung-Mailand
Th. v. Kármán-Aachen
F. Klein (†)
A. Kriloff-Petersburg
H. Lamb-Manchester
A. E. H. Love-Oxford
R. v. Mises-Berlin
C. H. Müller-Hannover
L. Prandtl-Göttingen
G. Prange-Hannover
H. Reißner-Charlottenburg
A. Schoenflies (†)
P. Stäckel (†)
O. Tedone-Genua
H. E. Timerding-Braunschwg.
A. Timpe-Berlin
A. Voss-München
G. T. Walker-Simla (Indien)
K. Wieghardt (†)
G. Zemplén (†)

V. Band:

M. Abraham (†)
L. Boltzmann (†)
M. Born-Göttingen
G. H. Bryan-Bangor (Wales)
P. Debye-Leipzig
H. Dießelhorst-Braunschwg.
P. S. Epstein-Pasadena
R. Gans-Königsberg
K. F. Herzfeld-München
F. W. Hinrichsen (†)
E. W. Hobson-Cambridge
H. Kamerlingh-Onnes-Leiden
W. H. Keesom-Leiden
Kratzer-Münster i. W.
M. v. Laue-Berlin
Th. Liebisch (†)
H. A. Lorentz (†)
L. Mamlock-Berlin
H. Minkowski (†)
O. Mügge-Göttingen
J. Nabl-Wien
W. Pauli-Hamburg
F. Pockels (†)
L. Prandtl-Göttingen
R. Reiff (†)
C. Runge (†)
A. Schoenflies (†)
M. Schröter (†)
R. Seeliger-Greifswald
A. Smekal-Halle
A. Sommerfeld-München
E. Study (†)
A. Wangerin-Halle
W. Wien (†)
J. Zenneck-München

VI, 1. Band:

R. Bourgeois-Paris
V. Conrad-Wien
G. H. Darwin (†)
F. Exner-Wien
S. Finsterwalder-München
Ph. Furtwängler-Wien
F. R. Helmert (†)
S. Hough-Kapstadt
H. Meldau-Bremen
W. Moebius-Leipzig
P. Pizzetti-Pisa
C. Reinhertz (†)
A. Schmidt-Potsdam
E. v. Schweidler-Innsbruck
W. Trabert (†)

VI, 2. Band:

E. Anding-Gotha
J. Bauschinger-Leipzig
A. Bemporad-Catania
E. W. Brown-New-Haven
C. Ed. Caspari-Paris
F. Cohn-Berlin
R. Emden-München
F. K. Ginzel-Berlin
P. Guthnick-Neubabelsberg
F. Hayn-Leipzig
J. v. Hepperger-Wien
G. Herglotz-Göttingen
A. Hnatek-Wien
I. Hopmann-Bonn
K. Hoffmeister-Sonneberg
H. Kienle-Göttingen
H. Kobold-Kiel
F. Kottler-Wien
K. Laves-Chicago
G. v. Niessl-Wien
S. Oppenheim (†)
H. Samter-Berlin
K. Schwarzschild (†)
K. Sundman-Helsingfors
E. T. Whittaker-Edinburgh
A. Wilkens-München
C. W. Wirtz-Kiel
H. v. Zeipel-Upsala

Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Unter der Abteilung Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften nimmt die Redaktion des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung ihr aus dem Leserkreise zugehende Verbesserungsvorschläge und Ergänzungen (auch in literarischer Hinsicht) zu den erschienenen Heften der Encyklopädie auf. Diesbezügliche Einsendungen sind an den Herausgeber des Jahresberichts Herrn Prof. Dr. L. Bieberbach, Berlin-Dahlem, Gelfertstraße 16, zu richten, der sich mit den betr. Bandredakteuren wegen der Veröffentlichung der Notizen in Verbindung setzen wird.

Die akademische Kommission zur Herausgabe der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN

DRITTER BAND:

GEOMETRIE

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN

DRITTER BAND IN DREI TEILEN

GEOMETRIE

REDIGIERT VON

W. FR. MEYER UND H. MOHRMANN
IN KÖNIGSBERG IN DARMSTADT

ERSTER TEIL

ZWEITE HÄLFTE

LEIPZIG
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER
1914—1931

Inhaltsverzeichnis zu Band III, 1. Teil, 2. Hälfte.

A. Rein geometrische Theorien.

B. Grundlagen der Anwendung von Algebra und Analysis auf die Geometrie.

(Fortsetzung.)

8. Elementare Geometrie vom Standpunkte der neueren Analysis aus. Von J. SOMMER in Danzig.

(Abgeschlossen Neujahr 1914.)

9. Elementargeometrie und elementare nicht-euklidische Geometrie in synthetischer Behandlung. Von M. Zacharias in Berlin.

A. Einleitung.

B. Elementare euklidische Geometrie.

I. Allgemeiner Teil.

II. Besonderer Teil.

Seite

C. Elementare nicht-euklidische Geometrie.

(Abgeschlossen Ende 1913.)

10. Neuere Dreiecksgeometrie. Von G. Berkhan † in Hamburg und W. Fr. Meyer in Königsberg.

Einleitung.

I. Der Begriff: Merkwürdig.

II. Koordinaten und Verwandtschaften.

III. Urdreieck und abgeleitete Dreiecke.

Seite

II. Die Hamiltonschen Quaternionen und ihre Verallgemeinerungen.

(Abgeschlossen im Oktober 1916.)

Zweiter Teil.

III. Die Graßmannsche Ausdehnungslehre.

Von Alfred Lotze in Stuttgart.

IV. Sonstige Systeme geometrischer Analyse.

Von Chr. Betsch in Cannstatt.

(Abgeschlossen im März 1923.)

12. Polyeder und Raumeinteilungen. Von Ernst Steinitz †.

I. Die Polygone.

II. Die Entwicklung der Polyedertheorie.

III. Morphologie der Polyeder.

IV. Polyeder in mehrdimensionalen Räumen.

V. Die durch Symmetrieeigenschaften ausgezeichneten Polyeder und die Raumeinteilungen.

(Abgeschlossen am 31. August 1916.)

13. Beziehungen zwischen den verschiedenen Zweigen der Topologie. Von H. Tietze in München und L. Vietoris in Wien.

I. Punktmengen in n-dimensionalen Zahlenräumen.

(Abgeschlossen 15. Oktober 1929.)

Übersicht
über die im vorliegenden Bande III, 1. Teil, 2. Hälfte zusammengefaßten Hefte und ihre Ausgabedaten.

A. Rein geometrische Theorien.
B. Grundlagen der Anwendung von Algebra und Analysis auf die Geometrie.
(Fortsetzung.)

III AB 13. BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DEN VERSCHIEDENEN ZWEIGEN DER TOPOLOGIE.

Von

H. TIETZE und **L. VIETORIS**

in München in Wien.

Bei den Vorarbeiten für den Artikel hat Herr *Hellmuth Kneser*-Greifswald (damals in Göttingen) durch Berichte über ausländische Publikationen, die dem ersten Ref. nicht zugänglich waren, wertvolle Mitarbeit geleistet. Besonderes Interesse hat Herr *L. E. J. Brouwer* an dem Artikel genommen, vor allem an der Ausgestaltung der Abschnitte II und V über allgemeine Räume. Von ihm stammt die Anregung zur Mitarbeit des zweiten Ref. und er hat in vielen mündlichen Besprechungen mit diesem wichtige Teile des Artikels wesentlich gefördert. Zahlreiche wertvolle Bemerkungen erhielten wir außer von dem bereits genannten Herrn *H. Kneser* noch von den Herren *P. Alexandroff, S. Bochner, W. Hurewicz, B. v. Kerékjártó, K. Menger* und *A. Rosenthal.* Für alles sei auch an dieser Stelle besonders gedankt.

Wenn die Encyklopädie sich im allgemeinen zum Ziel setzte, den Stand der mathematischen Wissenschaften um das Ende des 19. Jahrhunderts darzustellen, so konnte diese Zeitgrenze nicht maßgeblich sein für das vorliegende Gebiet, wo erst in letzter Zeit eine gewisse Klärung der Begriffe sich durchsetzte. Im übrigen vgl. wegen der Gesichtspunkte, nach denen auf die Literatur eingegangen wurde, die Einleitung (Nr. **1**).

Von den Nummern des Artikels stammen die erstmals 1925 gedruckten älteren Nummern **1—9**, **11**, **16**, **19**, **22—37** im wesentlichen von dem ersten, die später dazugekommenen Nr. **10**, **13**, **14**, **17**, **18**, **21**, **40—42** von dem zweiten Ref., soweit bei den wiederholten Besprechungen über den ganzen Artikel eine solche Aufteilung angebbar ist.

Inhaltsübersicht.

Literatur.

M. Fréchet, Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale, Paris 1928 [abgekürzt: *Fréchet,* Esp. abstr.].

J. Hadamard, Sur quelques applications de l'indice de Kronecker. Note zu *J. Tannery,* Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, t. 2, Paris 1910 [abgekürzt: *Hadamard,* L'ind. de Kr.].

H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen, I. Bd., Berlin 1921, Kap. 1, 2 [abgekürzt: *Hahn,* Reelle F. I].

F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914 [abgekürzt: *Hausdorff*, Grundz.]; 2. Aufl.: Mengenlehre, Berlin und Leipzig 1927 [abgekürzt: *Hausdorff*, Mengenl. 1927].

B. v. Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie, 1. Bd., Berlin 1923 [abgekürzt: *Kerékjártó*, Vorl. 1].

D. König, Az analysis situs elemei, I, Budapest 1918.

S. Lefschetz, L'analysis situs et la géometrie algébrique, Paris 1924 [abgekürzt: *Lefschetz*, L'an. situs etc.].

K. Menger, Dimensionstheorie, Leipzig 1928 [abgekürzt: *Menger*, Dim.].

É. Picard-G. Simart, Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendentes, t. 1, Paris 1897, Chap. 2 [abgekürzt: *Picard-Simart*, Fonct. alg.].

A. Sainte Laguë, Les réseaux (ou graphes), Mémorial des sciences mathématiques, fasc. 18, Paris 1926 [abgekürzt: *Sainte-Laguë*, Réseaux].

A. Schoenflies, Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver., Ergänzungsband II, zweiter Teil, Leipzig 1908 [abgekürzt: *Schoenflies*, Ber. II].

H. Tietze, Über Analysis situs, Hamburger Mathematische Einzelschriften, 2. Heft, Hamburg 1923, p. 1/32 [= Abhdlgn. a. d. Math. Seminar d. Hamburg. Universität, 2, p. 37/68] [abgekürzt: *Tietze*, Hambg. Sem., p. 1/32 [37/68]].

O. Veblen, Analysis situs, New York 1922 (Amer. Math. Society, Colloquium Lectures, vol. 5; The Cambridge Colloquium 1916, part II) [abgekürzt: *Veblen*, Cambr. Coll.].

H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, 1. Aufl., Leipzig 1913, 2. Aufl. (anastat. Neudruck mit Zusätzen) 1923 [abgekürzt: *Weyl*, R. Fl.].

Mit „II C 9" bzw. „III AB 3" werden abgekürzt die Encyklopädieartikel von *L. Zoretti-A. Rosenthal*, II C 9 a, bzw. von *M. Dehn-P. Heegaard*, III AB 3, zitiert.

Verwendete Bezeichnungen.

$A, B, P, Q, X, \ldots$ Punkte; $\overline{PQ}$ Abstand (Nr. **3**, **16**).

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}, \mathfrak{P}, \mathfrak{N}, \ldots$ Punktmengen und Räume; $\overline{\mathfrak{A}}$ abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{A}$ (Nr. **10**); $\mathfrak{E}_i^2$ Dreiecke, $\mathfrak{E}_i^n$ n-dimensionale Simplexe (Nr. **26**), $\mathfrak{E}^n$ n-dimensionales Elementarraumstück (Nr. **30**); $\mathfrak{F}$ Fläche; $\mathfrak{H}$ Raum mit Festsetzungen über Häufungspunkte (Nr. **7**); $\mathfrak{K}^n$ n-dimensionaler Komplex (Nr. **30**); $\mathfrak{L}$ Limesraum (Nr. **6**); $\mathfrak{M}^n$ (kontinuierliche) n-dimensionale Mannigfaltigkeit (Nr. **24**, **26**); $\mathfrak{R}^1$ die (Zahlen-)Gerade, $\mathfrak{R}^2$ die Ebene, $\mathfrak{R}^n$ der n-dimensionale (reelle) Zahlenraum (Nr. **2**); $\mathfrak{S}^n$ n-dimensionale sphärische Mannigfaltigkeit (Nr. **26**); $\mathfrak{T}$ Umgebungsraum (topologischer Raum im engeren Sinn, Nr. **8**); $\mathfrak{U}(P)$, $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{P})$ Umgebungen (Nr. **3**, **8**), $\mathfrak{U}_P$ Umgebung aus einem Fundamentalsystem (Nr. **9**); $\mathfrak{Z}_i^n$ n-dimensionale Zellen (Nr. **24**, **26**).

$\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{m}, \mathfrak{r}, \ldots$ Mengen von Mengen.

$\xi_1, \ldots, \xi_n$ Koordinaten des $\mathfrak{R}^n$ (Nr. **2**); $\zeta, \zeta_1^n, \ldots$ Zellaufbauten (Nr. **32**, **35**).

$\mathsf{A}, \mathsf{H}, \ldots$ Abbildungen; $\mathsf{Z}, \mathsf{Z}^n, \ldots$ besondere als (kombinatorische) „Zellsysteme" bezeichnete Zellaufbauten (Nr. **35**); Σ_0^n, Σ^n besondere die $\mathfrak{S}^n$ definierende Zellsysteme (Nr. **35**).

$\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ usw. (Nr. **10**).

---

1. Einleitung. Über Dinge, die zur Analysis situs oder Topologie (beide Bezeichnungen werden synonym verwendet) gehören, wird an ganz verschiedenen Stellen der Encyklopädie berichtet. Die *kombinatorische Topologie* hat bereits 1908 im Artikel III AB 3 (*Dehn-Heegaard*) ihre Darstellung gefunden — zugleich die erste Veröffentlichung überhaupt auf dem Gebiet einer rein kombinatorisch ausgeprägten Analysis situs —, während über die *allgemeine Topologie* in Nr. 25, 26, über die Topologie (kontinuierlicher) n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten, die wir kurz *n-dimensionale Topologie* nennen werden, innerhalb der Nrn. **1**—**17 b** (insbesondere in **16**—**17 b**) des Artikels II C 9 a (*Zoretti-Rosenthal*) berichtet wird.[1])[1a]) Zwischen den genannten Gebieten soll der folgende Artikel die notwendige *Brücke und gegenseitige Abgrenzung* herstellen. Insbesondere ist darum über neuere Arbeiten, die zur Klärung allgemeiner Raumbegriffe und ihrer verschiedenen Tragweiten geführt haben, sowie (in Abschnitt V) über die Einführung eines Dimensionsbegriffs in der allgemeinen Topologie berichtet worden. Im übrigen wird (abgesehen von einer Erörterung des Begriffs der kontinuierlichen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit und einer kurzen Besprechung der Flächentopologie) auf die einzelnen Gebiete selbst nur so weit eingegangen, als zur Besprechung ihrer wechselseitigen Beziehungen erforderlich ist. Daher ist auch eine Übersicht über die Literatur der einzelnen Gebiete, die man in den genannten Artikeln findet, hier nicht beabsichtigt und nur gelegentlich ein Hinweis auf neuere Erscheinungen gebracht. Diese durch die ursprüngliche Zielsetzung ebenso wie durch äußere Gründe bedingte Einschränkung bringt es mit sich, daß manche, an sich besonders wichtige Arbeiten (z. B. über neue topologische Invarianten) unbesprochen bleiben.

Da fast alle Bezeichnungen (wie: Mannigfaltigkeit, zusammenhängend, einseitig, abgeschlossen, offen, kompakt, stetig, Rand, Jordan-

---

1) Bei einer Reihe topologischer Arbeiten, in denen von anschaulichen Überlegungen ausgedehnter Gebrauch gemacht wird, blieb es zunächst dahingestellt, ob die endgültige Sicherung der Ergebnisse früher auf dem Boden der kombinatorischen oder auf dem der kontinuierlichen n-dimensionalen Topologie gelingen wird. Jedenfalls hatten die älteren topologischen Arbeiten, über die in III AB 3 berichtet wird, Sätze der kontinuierlichen n-dimensionalen Topologie im Auge. Nach *E. Study*, Mathematik und Physik, Braunschweig 1923, p. 6 möchte man die Topologie überhaupt noch nicht zur Mathematik, sondern eher zur Experimentalphysik zählen.

1a) Zur Entwicklung der Topologie vgl. ferner Artikel III AB 1 (*F. Enriques*) Abschnitt II (Prinzipien der Theorie des Kontinuums) und die dort genannten Arbeiten von *F. Enriques* u. a., sowie den die neuere Entwicklung berücksichtigenden Überblick von *G. Feigl*, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. 37 (1928) p. 273—286.

kurve, kombinatorische Topologie usw.[1b])) in der Literatur in verschiedenen Bedeutungen auftreten, mußte bei ihrer Verwendung die Entscheidung für einen bestimmten Begriff und auch die eine oder andere Neubenennung vorgenommen werden. Auch die Bezeichnung „Analysis situs" oder „Topologie" findet sich nicht immer übereinstimmend und bisweilen auf Dinge angewendet, die nicht in unserem Sinne „topologischen", d. h. gegenüber eineindeutigen, umkehrbar stetigen Transformationen invarianten Charakter haben. Diese Dinge bleiben, ebenso wie die Anwendungen der Topologie auf Nicht-topologisches, vom folgenden Bericht ausgeschlossen.[2])

1b) Vgl. bezüglich der einzelnen Ausdrücke die folgenden Stellen dieses Artikels: bezüglich Mannigfaltigkeit: Nr. **23** ff. [118]) [119]) [155]) [158]) [204]); Schema einer Mannigfaltigkeit: [203]); zusammenhängend: [29]) [204a]) Nr. **40**; einfach zusammenhängend: [167]) [230a]); zweiseitig, einseitig: [168]) [182a]) [226a]), vgl. auch [5]); offen: [27a]) [129]); abgeschlossen: Nr. **6**, **8**, [16]) [129]); fermé: [129]); kompakt: [13]) [16]) [16b]) [47]) [129]); stetig: Nr. **2**, **6**, [27]) [58]) [266]) [29]); homogen: [89]) [135]); homöomorph: [4]) [204]); verwandt: [204]) [206]); innerer Punkt: Nr. **8**, [26]) [91]); mittlerer Punkt: Nr. **19**, **30**, [91]); Begrenzung: [28]), [91]); Randpunkt: Nr. **19**, **30**, [28]) [91]); Umgebung: Nr. **8**, **9**, [31]); classe (*D*), (*E*), (*V*): [55]) [66]); Elementarraumstück (Elementarmannigfaltigkeit): [156]); Polyederfläche: [157]); Verkettung: [19]) [182]); Kurve: Nr. **42**, [283]) [285]) [188]); stetige Kurve: [290]); Jordankurve: [179]); kombinatorische Topologie: [198aα]) [198b]) [222d]). — Über die Verwendung des Wortes „Dimension" siehe Nr. **41**, [201]) [233d]). — Über die folgenden bedauerlicherweise sehr ähnlich lautenden, aber auf ganz verschiedene Dinge sich beziehenden Ausdrücke vgl.: bezüglich Trennbarkeits-(Trennungs-)axiome: Nr. **13**; separabel: [41]); getrennt: [44]) [242]); Zerlegungsräume: Nr. **21**; Zerlegungssätze: [180]) [227b]).

2) Speziell für die funktionentheoretischen Anwendungen, die der Analysis situs die Hauptimpulse gegeben haben, vgl. die Artikel von *W. F. Osgood*, *W. Wirtinger* und *R. Fricke* in Bd. II, 2. Anwendungen der Analysis situs auf Gebilde der algebraischen Geometrie bei *Picard-Simart*, Fonct. alg., und *S. Lefschetz*, L'an. situs etc., ferner *J. W. Alexander* II, Rend. della R. Accad. dei Linc. (5) 23 (1914), p. 55; *S. Lefschetz*, Ann. of math. (2) 21 (1919/20), p. 225, 28 (1927), p. 342, Trans. Am. Math. Soc. 28 (1926), p. 49, No. 72; *A. Comessatti*, Ann. di mat. (4) 5 (1928), p. 299 und die dort zitierten Arbeiten von *F. Severi*; *O. Zariski*, Am. J. of. Math. 51 (1929), p. 305, Proc. Nat. Acad. 14 (1929), p. 494 und dort genannte Literatur. — Über Verwertung topologischer Begriffsbildungen und Sätze für eine allgemeine Theorie kontinuierlicher Gruppen s. *O. Schreier*, Abh. Math. Sem. Hamburg 4 (1925), p. 15, 5 (1927), p. 233; *F. Leja*, Ann. Soc. Polon. de math. 3, Jg. 1924 (1925), p. 153, Fund. math. 9 (1927), p. 37—44; *H. Weyl*, Math. Ztschr. 24 (1926), p. 380; *E. Cartan*, Acta math. 48 (1926), p. 41, Ann. di mat. (4) 4 (1927), p. 209—256, J. de Math. (9) 6 (1927), p. 1—120; *H. Weyl-F. Peter*, Math. Ann. 97 (1927), p. 737—755; *H. Kneser*, Math. Ztschr. 25 (1926), p. 362—372; *Reinh. Baer*, J. f. Math. 160 (1929), p. 208—226. Wegen Anwendungen der Topologie vgl. auch *G. D. Birkhoff*[174]); *E. Cartan*, Paris C. R. 187 (1928^{2}), p. 196; *G. de Rham*, ib. 188 (1929^{1}), p. 1651.

Im obigen Sinne nicht-topologisch sind insbesondere auch Untersuchungen, bei denen Differenzierbarkeit der auftretenden Abbildungsfunktionen vorausgesetzt

Der Besprechung der drei Gebiete der Topologie: allgemeine, n-dimensionale und kombinatorische Topologie, ist im folgenden, um nicht mit dem abstraktesten zu beginnen, zur Einführung ein I. Abschnitt über Punktmengen in n-dimensionalen Zahlenräumen vorausgeschickt. Bei streng systematischer Anordnung müßte ein solcher Abschnitt hinter den über allgemeine Topologie gestellt werden.

I. Punktmengen in n-dimensionalen Zahlenräumen.

2. Limiten in Punktmengen eines $\mathfrak{R}^n$. Eine eindeutige Abbildung A einer Menge $\mathfrak{P}$ von „Punkten des reellen n-dimensionalen Raumes $\mathfrak{R}^n$" — d. h. von reellen Zahlen-n-tupeln $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — auf eine Menge $\mathfrak{Q}$ des $\mathfrak{R}^n$ heißt *stetig im Punkte* P_0 von $\mathfrak{P}$, wenn für jede der Beziehung

$$\lim_{\nu=\infty} P_\nu = P_0 \tag{1}$$

genügende Punktfolge $P_1, P_2, \ldots, P_\nu, \ldots$ aus $\mathfrak{P}$ auch die entsprechende Beziehung $\lim\limits_{\nu=\infty} P_\nu' = P_0'$ zwischen den Bildpunkten aus $\mathfrak{Q}$ besteht. A heißt *stetig* (schlechtweg), wenn A in *allen* Punkten von $\mathfrak{P}$ stetig ist. Dabei ist (1) gleichbedeutend mit $\lim\limits_{\nu=\infty} \xi_{\nu h} = \xi_{0h}$, wo $\xi_{ih} (h = 1, \ldots, n)$ die Koordinaten von P_i sind; damit sind die Limesbeziehungen für Punkte auf jene für reelle Zahlen zurückgeführt. Hat die eindeutige stetige Abbildung A eine eindeutige stetige Umkehrung A^{-1}, so heißt A eine *topologische*[3]) Abbildung. Zwei Punktmengen $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ heißen *homöomorph*[4]) (es besteht *„Homöomorphie"* von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$), wenn es eine topologische Abbildung von $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{Q}$ gibt. Ist $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}$ mit $\mathfrak{R}$ homöomorph, so auch $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{R}$. Die einer Gesamtheit untereinander homöomorpher Mengen gemeinsamen Eigenschaften heißen *(absolute) topologische* oder *topologisch invariante* Eigenschaften. Zu ihnen gehört die Mächtigkeit der Mengen [I A 5 (*A. Schoenflies*) als die Invariante gegenüber beliebigen eineindeutigen Abbildungen, ferner auch jede bei beliebigen eindeutigen stetigen, nicht notwendig eindeutig umkehrbaren Abbildungen invariante Eigenschaft (vgl. Nr. **33**). Zu den wichtigsten Aufgaben der Analysis situs gehört es, in der Gesamtheit aller Punktmengen (oder innerhalb einer bestimmt abgegrenzten Teilgesamtheit) *die einzelne Punktmenge durch ein geeignetes System topologischer*

---

wird, wie in der „topologie restreinte du premier ordre", worüber man vgl.: *G. Bouligand,* Bull. Soc. Math. de Fr. 56 (1928), p. 26 und dort zitierte Literatur; *M. Morse,* Proc. Nat. Acad. 13 (1927), p. 813.

3) *L. E. J. Brouwer,* Paris C. R. 168 (1919), p. 845.

4) *H. Poincaré*[154]), p. 9.

Eigenschaften derart *vollständig zu kennzeichnen*, daß die Übereinstimmung in diesen Eigenschaften für die Homöomorphie zweier Mengen der betrachteten Gesamtheit nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist. Die Lösung dieser Aufgabe ist erst in wenigen Fällen gelungen (vgl. Nr. **31, 32**). In anderen Fällen ist sogar die einfachere Aufgabe ungelöst, ein Verfahren anzugeben, das für irgend zwei Punktmengen einer bestimmten Gesamtheit zu entscheiden gestattet, ob sie homöomorph sind oder nicht (*Homöomorphieproblem*).

Außer diesen absoluten topologischen Eigenschaften betrachtet man auch relative. Hat man nämlich eine Teilmenge $\mathfrak{A}_1$ einer Menge $\mathfrak{P}$ (oder mehrere Teilmengen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$), dann werden *relative topologische*[5]) Eigenschaften von $\mathfrak{A}_1$ (bzw. des Systems der $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2, \ldots$) bezüglich $\mathfrak{P}$ solche Beziehungen zwischen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{A}_1$ (bzw. $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2, \ldots$) genannt, die bei jeder topologischen Abbildung von $\mathfrak{P}$ auch zwischen der Bildmenge $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{P}$ und den in ihr enthaltenen Bildmengen $\mathfrak{B}_i$ der $\mathfrak{A}_i$ bestehen.

Beispiele: Die Eigenschaft einer einfachen geschlossenen Kurve $\mathfrak{A}_1$ auf einer Fläche $\mathfrak{P}$, diese zu zerstücken oder nicht zu zerstücken; die Eigenschaft einer einfachen geschlossenen Kurve $\mathfrak{A}_1$, im Raume $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}^3$ unverknotet oder verknotet zu liegen (analog: Verkettung mehrerer Kurven $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2, \ldots$). Die Beispiele zeigen, daß in derselben Menge $\mathfrak{P}$ zwei Teilmengen homöomorph, also für sich allein betrachtet von den gleichen absoluten topologischen Eigenschaften sein können, ohne doch die gleichen relativen Eigenschaften bezüglich $\mathfrak{P}$ aufzuweisen. (Analog können zwei Systeme von Teilmengen aus $\mathfrak{P}$: $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2, \ldots$ und $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2, \ldots$, so beschaffen sein, daß ihre Vereinigungsmengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ homöomorph und so aufeinander topologisch abbildbar sind, daß dabei $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{B}_i$ einander entsprechen ($i = 1, 2, \ldots$), ohne daß die beiden Systeme in ihren relativen Eigenschaften bezüglich $\mathfrak{P}$ übereinstimmen müßten). Für die Gesamtheit aller Teilmengen von $\mathfrak{P}$, die zu einer gegebenen Teilmenge $\mathfrak{A}_1$ von $\mathfrak{P}$ homöomorph sind, ergibt sich daraus die Einteilung in die Klassen derjenigen, die in den relativen Eigenschaften bezüglich $\mathfrak{P}$ übereinstimmen. Es entsteht die Aufgabe der Kennzeichnung jeder dieser Klassen durch ein geeignetes System rela-

---

5) Die Unterscheidung zwischen absoluten und relativen topologischen Eigenschaften betont (im Hinblick auf verschiedene Bedeutungen von „zweiseitig“ und „einseitig“) *F. Klein,* Math. Ann. 9 (1876), p. 478 = Ges. math. Abh. 2, p. 67. Vgl. hierzu *W. Dyck,* Math. Ann. 32 (1888), p. 457 u. 474, Anm.; ferner *L. Antoine,* Diss. Straßburg 1921 = J. de math. (8) 4 (1921), p. 221, Fund. math. 5 (1924), p. 265—287. Über absolute und relative topologische Eigenschaften s. ferner *F. Enriques*[1a]), p. 69 (innere und äußere Eigenschaften); *B. v. Kerékjártó,* l. c.[20a]).

tiver topologischer Eigenschaften, sowie die Aufgabe, für zwei gegebene homöomorphe Teilmengen von $\mathfrak{P}$ zu entscheiden, ob sie zur selben Klasse gehören.

3. Umgebungen, Abstände und Häufungspunkte in Punktmengen eines $\mathfrak{R}^n$. Ist $P_0 = (\xi_{01}, \ldots, \xi_{0n})$ ein Punkt der Menge $\mathfrak{P}$ des $\mathfrak{R}^n$, so werde eine Teilmenge von $\mathfrak{P}$ dann als eine „Umgebung $\mathfrak{U}(P_0)$ von P_0", genauer als „Umgebung $\mathfrak{U}(P_0 \mid \mathfrak{P})$ von P_0 in $\mathfrak{P}$" bezeichnet, wenn sie für ein geeignetes $\eta > 0$ alle Punkte $P = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ aus $\mathfrak{P}$ enthält, für welche die Ungleichungen $|\xi_h - \xi_{0h}| < \eta$ $(h = 1, \ldots, n)$ gelten. Die nicht-negative Zahl

$$\overline{P_0 P_1} = \sqrt{\sum_{h=1}^{n} (\xi_{1h} - \xi_{0h})^2}$$

heißt der „Abstand" oder die „Entfernung" der Punkte P_0 und P_1.

Bezeichnet man die Menge aller Punkte P aus $\mathfrak{P}$, für welche $\overline{P_0 P} < \varrho$ (wo $\varrho > 0$), als eine „sphärische Umgebung von P_0", so kann man die Umgebungen $\mathfrak{U}(P_0)$ auch definieren als Mengen mit einer sphärischen Umgebung von P_0 als Teilmenge; und die obige Definition der Limesbeziehung (1) läßt sich ersetzen durch jede der folgenden: in jeder $\mathfrak{U}(P_0)$ liegen fast alle P_ν, d. h. alle P_ν bis auf endlich viele; bzw.: es gilt $\lim\limits_{\nu=\infty} \overline{P_0 P_\nu} = 0$. Es läßt sich also für unsere Punktmengen $\mathfrak{P}$ des $\mathfrak{R}^n$ der Begriff der Umgebung aus dem Abstand herleiten, der Limesbegriff aber aus jedem dieser beiden Begriffe.

Sei ferner $\mathfrak{A}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{P}$, so heißt ein Punkt P_0 von $\mathfrak{P}$ Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$, wenn zu jedem $\varrho > 0$ unendlich viele Punkte P aus $\mathfrak{A}$ mit $\overline{P_0 P} < \varrho$ existieren; wofür man auch sagen kann: in jeder $\mathfrak{U}(P_0)$ existieren unendlich viele Punkte aus $\mathfrak{A}$; oder: in $\mathfrak{A}$ existiert eine Folge von (von P_0 verschiedenen) Punkten mit dem Limes P_0. Der Begriff des Häufungspunktes läßt sich also für unsere Punktmengen $\mathfrak{P}$ des $\mathfrak{R}^n$ aus jedem der Begriffe Abstand, Umgebung, Limes herleiten.

Da sich aber auch mittels des Begriffs des Häufungspunktes die Umgebung $\mathfrak{U}(P_0 \mid \mathfrak{P})$ definieren läßt als eine Menge, deren Komplementärmenge bezüglich $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P} - \mathfrak{U}(P_0 \mid \mathfrak{P})$ den Punkt P_0 nicht zum Häufungspunkt hat, so läßt sich schließlich für unsere Punktmengen $\mathfrak{P}$ des $\mathfrak{R}^n$ jeder der drei Begriffe Limes, Häufungspunkt, Umgebung aus jedem der anderen herleiten.

4. Allgemeinere topologische Gebilde. Der in Nr. 2 umschriebene Fragenkreis der Analysis situs bedarf jedoch, um ihren Anwendungen angepaßt zu sein, der Verallgemeinerung. Von den Gebieten, in denen die Analysis situs zunächst zur Geltung gekommen ist, bezogen sich nämlich insbesondere die hierhergehörigen Betrachtungen der Funktionentheorie auf Gebilde, die nicht unmittelbar unter den Begriff der in Nr. 2 besprochenen Punktmengen fallen [z. B. über einer Ebene oder Kugel ausgebreitete *Riemann*sche Flächen; Fundamentalbereiche doppeltperiodischer bzw. automorpher Funktionen, aufgefaßt als in abstracto geschlossene Flächen; vgl. Encykl. II B, insbes. II B 2 (*Wirtinger*), p. 130f.; II B 4 (*Fricke*), p. 358; ferner III AB 1 (*Enriques*), p. 115 ff.]. Das gleiche gilt von den Gebilden, die man durch jedwede Erweiterung eines Raumes mittelst uneigentlicher (unendlich ferner) Punkte erhält [vgl. Encykl. III AB 1 (*Enriques*), p. 72; II B 1 (*Osgood*), p. 26]. In allen angeführten Beispielen handelt es sich um Spezialfälle des später zu besprechenden Begriffs der mehrdimensionalen Mannigfaltigkeit (Nr. 24 ff.). Dabei sei zunächst folgendes hervorgehoben. In allen genannten Beispielen allgemeinerer Gebilde treten zu der Angabe, was als „Punkt" eines Gebildes $\mathfrak{P}$ anzusehen ist, bekannte Festsetzungen, die für jeden Punkt P_0 angeben, welche Punktfolgen aus $\mathfrak{P}$ als solche mit dem *Limes* P_0 anzusehen sind. Man kann z. B. für jeden Punkt P_0 festsetzen, welche Teilmengen von $\mathfrak{P}$ als seine Umgebungen $\mathfrak{U}(P_0)$ anzusehen sind, und daraus wie in Nr. 3 die Limesbeziehungen ableiten. Ein Beispiel für solche Festsetzungen ist es, wenn man die euklidische (ξ_1, ξ_2)-Ebene zu einem Gebilde $\mathfrak{P}$ durch Hinzunahme eines einzigen uneigentlichen Punktes P_∞ erweitert und als $\mathfrak{U}(P_\infty)$ jede Menge aus $\mathfrak{P}$ bezeichnet, die P_∞ und für ein geeignetes $\varrho > 0$ alle Punkte $\xi_1^2 + \xi_2^2 > \varrho^2$ umfaßt; oder wenn man für eine *Riemann*sche Fläche über der $(\xi_1 + i\xi_2)$-Ebene festsetzt, $\lim P_\nu = P_0$ solle dann und nur dann gelten, wenn für die Projektionen Q der Punkte P auf die $(\xi_1 + i\xi_2)$-Ebene $\lim Q_\nu = Q_0$ gilt und außerdem fast alle Q_ν im gleichen Blatt wie Q_0 liegen (bzw. in den in Q_0 zusammentreffenden Blättern, falls Q_0 Verzweigungspunkt ist).

Sind derart Limesbeziehungen innerhalb eines Gebildes $\mathfrak{P}$ festgesetzt, so läßt sich der Begriff der stetigen, und damit auch der der topologischen Abbildung von $\mathfrak{P}$ auf irgend ein anderes mit Limesbeziehungen ausgestattetes Gebilde $\mathfrak{Q}$ ganz wie in Nr. 2 erklären. Auch Mengen $\mathfrak{M}$ von ganz beliebigen Elementen (z. B. von Geraden[6]) konnten solcherart vom topologischen Standpunkt aus untersucht werden, sobald Festsetzungen über Limesbeziehungen zwischen ihren Elementen aufgestellt waren. Ein spezieller Fall solcher Festsetzungen ist es, wenn $\mathfrak{M}$ eineindeutig auf eine Punktmenge $\mathfrak{A}$ eines $\mathfrak{R}^n$ bezogen

6) Vgl. II C 9, p. 1014. Analog können z. B. Mengen von Bewegungszuständen eines mechanischen Systems oder Mengen von Elementen einer kontinuierlichen Gruppe in topologischer Hinsicht untersucht werden.

und bestimmt wird, daß in $\mathfrak{M}$ zwischen den Elementen jene Limesbeziehungen gelten sollen, die in $\mathfrak{A}$ zwischen den Bildpunkten bestehen. Im wesentlichen dasselbe ist die Einführung von solchen *Koordinaten* für die Elemente von $\mathfrak{M}$, daß ihre Anzahl n endlich ist und durch sie eine *eineindeutige* Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf den $\mathfrak{R}^n$ oder allgemeiner (bei Relationen zwischen den Koordinaten) auf eine Teilmenge $\mathfrak{A}$ des $\mathfrak{R}^n$ geliefert wird.[7])

5. Übergang zur allgemeinen Topologie. Wenn in der zuletzt besprochenen speziellen Weise (durch Koordinaten) die Limesbeziehungen in einer Menge $\mathfrak{M}$ auf jene in einer Punktmenge $\mathfrak{A}$ eines $\mathfrak{R}^n$ zurückgeführt werden, tritt man nicht wesentlich aus dem in Nr. 2 abgegrenzten Rahmen heraus. In den anderen besprochenen Fällen aber hat man es mit einer grundsätzlichen Erweiterung zu tun, insofern *allgemeinere* Limes- oder Umgebungsbeziehungen auftreten, die nicht oder nicht unmittelbar den in Nr. 2, 3 betrachteten zugezählt werden können, sondern auf besonderen Festsetzungen beruhen. In den als Beispielen genannten oder in verwandten Fällen (*Riemann*sche Flächen, Periodenparallelogramm, durch Einführung uneigentlicher Punkte gewonnene projektive Ebene, Menge der Geraden des $\mathfrak{R}^n$ usw.) ergab sich nun die Art, wie die Festsetzungen über Limes- (oder Umgebungs-)beziehungen zu treffen sind, jeweils aus den inneren Bedürfnissen des betrachteten Falles. Insofern erschienen diese Festsetzungen nicht als willkürliche, sondern als naturgemäße. Gewisse allgemeine, allen diesen Festsetzungen gemeinsame Eigenschaften wurden verwertet, ohne als solche besonders aufgestellt und formuliert zu sein. Die Frage war nicht aktuell, welche Schranken man sich hinsichtlich der Willkür bei solchen Festsetzungen über Limiten oder Umgebungen ziehen, welche Eigenschaften man von den festzusetzenden Beziehungen fordern wolle, um sie noch als Limes- oder Umgebungsbeziehungen zu bezeichnen. Die Verallgemeinerungen der Begriffe Limes bzw. Umgebung waren in naiver Weise, ohne eine scharfe Abgrenzung dieser Begriffe, erfolgt.

7) Sind jedoch in einer Menge $\mathfrak{M}$ die Limesbeziehungen schon auf andere Weise festgesetzt, so gelten als geeignet zur Darstellung der ganzen Menge $\mathfrak{M}$ nur solche Koordinaten, für welche die gegebenen Limesbeziehungen mit den aus den Koordinaten abzulesenden übereinstimmen [vgl. Art. III AB 7 (*E. Müller*), Anm. 6]. In den meisten Fällen werden aber in einer Menge $\mathfrak{M}$, deren Elemente geometrische Gebilde (z. B. gerade Linien, Kreise, Kugeln) sind, die Festsetzungen über die Limes- und Stetigkeitsbeziehungen (ausgesprochen oder stillschweigend) gerade erst vermöge eines eingeführten Systems von Koordinaten für die Elemente getroffen (unter Umständen vermöge verschiedener Koordinatensysteme in einzelnen Teilbereichen von $\mathfrak{M}$).

Eine genauere Durcharbeitung ergab sich aber, als Stetigkeitsbetrachtungen auf Mengen von Elementen ausgedehnt wurden[8]), für welche je nach der Untersuchungsrichtung wesentlich verschiedene Festsetzungen über Limes- oder Umgebungsbeziehungen in Frage kamen. Sei z. B. $\mathfrak{P}$ die Menge aller in $0 \leqq x \leqq 1$ definierten stetig differenzierbaren Funktionen $f(x)$ mit $f(0) = f(1) = 0$; jedes $f(x)$ heiße ein Punkt P im Funktionenraum $\mathfrak{P}$. Man kann festsetzen

$$\lim P_\nu = P_0 \tag{2}$$

solle gleichbedeutend sein mit „$\lim f_\nu(x) = f_0(x)$ für jedes einzelne x“; oder man kann festsetzen, (2) solle gleichmäßige Konvergenz bedeuten: „$|f_\nu(x) - f_0(x)| < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ für $\nu \geqq \nu(\varepsilon)$ und alle x“; oder man kann festsetzen, (2) solle bedeuten, daß „überdies $|f_\nu'(x) - f_0'(x)| < \varepsilon$ für jedes ε für $\nu \geqq \nu(\varepsilon)$ und alle x“. Je nach Bedarf ist die eine oder die andere dieser Festsetzungen vorteilhafter. Bildet man z. B. $\mathfrak{P}$ eindeutig auf die Menge $\mathfrak{R}^1$ der Punkte $P' = (\xi)$ der Zahlenlinie ab vermöge $\xi = \int\limits_0^1 f(x)\,dx$, so ist diese Abbildung nur für die zweite und dritte der obigen Festsetzungen stetig (im Sinn von Nr. **2**). Diese beiden Festsetzungen lassen sich übrigens — im Sinn von Nr. **3** — aus Abstandsbeziehungen herleiten, wenn als Abstand von $f(x)$ und $f_0(x)$ in $0 \leqq x \leqq 1$ die Zahl Max. $|f(x) - f_0(x)|$ bzw. die größere der Zahlen Max. $|f(x) - f_0(x)|$, Max. $|f'(x) - f_0'(x)|$ erklärt wird. Die diesen beiden Abstandsfestsetzungen im Sinn von Nr. **3** entsprechenden Festsetzungen des Umgebungsbegriffes sind aus der Variationsrechnung bei Untersuchung des starken, bzw. schwachen Extremum bekannt; vgl. Artikel II A 8 (*A. Kneser*) Nr. **19**, II A 8a (*Zermelo-Hahn*) Nr. **2**.[8a])

Werden derartige allgemeine Mengen (Funktionenräume, Kurvenräume[8])) aufeinander oder auf Punktmengen im Sinn von Nr. **2** abgebildet, wovon wir eben in $\xi = \int\limits_0^1 f(x)\,dx$ ein Beispiel hatten, so bestätigt man in den verschiedensten Fällen eine Reihe allgemeiner Sätze, die auch für Abbildungen von Punktmengen aufeinander gelten, und zwar darum, weil ihre Quelle unabhängig von den Besonderheiten der Einzelfälle in gewissen allgemeinen Eigenschaften der eingeführten Limes- bzw. Umgebungsbeziehungen liegt. Die Erkenntnis dieses Um-

8) Vgl. II C 9, Nr. **25** ff.

8a) Eine neuere instruktive Auseinandersetzung über die Möglichkeit verschiedener (je nach der Untersuchungsrichtung gewählter) Limes-Festsetzungen findet man bei *M. Fréchet,* Fund. math. 9 (1927), p. 25.

standes führte zu selbständigen Theorien dieser Beziehungen, gegründet auf feste axiomatische Abgrenzungen irgendeines dazu brauchbaren Begriffs, wie des Limes (Nr. **6**), des Häufungspunktes (Nr. **7**), der Umgebung (Nr. **8**), der abgeschlossenen Hülle, der offenen Menge, der abgeschlossenen Menge (Nr. **10**), des inneren Punktes (Nr. **8**). Auf alle derart definierten allgemeinen „Räume" (Mengen mit Limes-, Umgebungs- oder Häufungsbeziehungen usw.) läßt sich der Begriff der topologischen Abbildung (Nr. **2**) übertragen, und das Studium der gegenüber solchen Abbildungen invarianten Eigenschaften dieser Räume, einschließlich der relativen Eigenschaften ihrer Teilmengen, bildet den Gegenstand der „allgemeinen Topologie" (Nr. **6**—**22**). Sie stellt zugleich die Begriffsbildungen zurecht für eine geeignete Einführung der „n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten" (Nr. **23**—**30**), unter die, wie erwähnt, auch alle Beispiele in Nr. **4** fallen und deren topologische Untersuchung den Gegenstand der „n-dimensionalen Topologie" ausmacht.

II. Allgemeine Topologie.

6. Limesräume. Wir besprechen zunächst die Theorie des allgemeinen Limesbegriffes, wie sie von *M. Fréchet* in Angriff genommen und von ihm selbst und anderen weitergeführt wurde.[9]) Eine Menge $\mathfrak{M}$ von Elementen werde ein *Limesraum* oder ein Raum $\mathfrak{L}$ genannt[10]) — die Elemente von $\mathfrak{M}$ werden Einfachheit halber „Punkte" des Limesraums genannt —, wenn für alle aus Elementen von $\mathfrak{M}$ gebildeten Folgen $P_1, P_2, \ldots, P_\nu, \ldots$ Festsetzungen getroffen sind von folgender Art:

I. Jede Folge wird entweder als Folge ohne Limes oder als Folge mit Limes bezeichnet, in letzterem Falle wird ihr ein durch die Folge eindeutig bestimmtes Element P_0 als Limes zugeordnet und geschrieben: $\lim\limits_{\nu=\infty} P_\nu = P_0$.

II. Dabei sind die folgenden Forderungen („Limesaxiome") erfüllt:

1. Wenn alle P_ν gleich P_1 sind, so ist $\lim\limits_{\nu=\infty} P_\nu = P_1$.

2. Wenn $\lim\limits_{\nu=\infty} P_\nu = P_0$, so ist $\lim\limits_{\nu=\infty} P_{n_\nu} = P_0$ für jede Teilfolge $(1 \leqq n_1 < n_2 < \cdots)$.[10a])

9) *M. Fréchet*, Palermo Rend. 22 (1906), p. 1—74. Vgl. im übrigen, auch wegen Literatur, II C 9, Nr. **26**.

10) *Fréchet* sagt dafür „classe (L)".

10a) *H. Kneser*, Math. Ztschr. 25 (1926), p. 362 nennt einen Limesraum „*Konvergenzraum*", wenn er noch dem folgenden Axiom genügt: aus $\lim P_\nu = P_0$ folgt $\lim Q_\nu = P_0$, falls Q_1 beliebig und $Q_{\nu+1} = P_\nu$.

Jede Punktmenge $\mathfrak{P}$ eines $\mathfrak{R}^n$ ist ein solcher Limesraum (vgl. Nr. 2).[10b]) Unter den eindeutigen Abbildungen eines Limesraumes $\mathfrak{L}$ auf einen anderen $\mathfrak{L}'$ wurde in erster Linie der besondere Fall studiert — und als „Funktionalrechnung" bezeichnet —, daß man für $\mathfrak{L}'$ den Raum $\mathfrak{R}^1$ (Zahlengerade) nimmt, was mit der Betrachtung in $\mathfrak{L}$ definierter reeller Funktionen („Operationen" genannt) zusammenfällt.[11])

Eine eindeutige Abbildung A eines Limesraumes $\mathfrak{L}$ auf einen anderen $\mathfrak{L}'$ heiße wie in Nr. 2 stetig, genauer: „*limesstetig*", wenn zugleich mit jeder in $\mathfrak{L}$ gültigen Beziehung $\lim P_\nu = P_0$ auch für die Bildelemente gilt: $\lim P_\nu' = P_0'$. Es heißt A topologisch („*limestopologisch*"), wenn A eindeutig umkehrbar und A sowie A^{-1} stetig ist.[12])

Eine Menge $\mathfrak{A}$ in einem Raum $\mathfrak{L}$ heißt *abgeschlossen* (*in* $\mathfrak{L}$), wenn sie alle (in $\mathfrak{L}$ liegenden) Limiten der in ihr liegenden Punktfolgen enthält, sie heißt *kompakt* (in $\mathfrak{L}$), wenn jede unendliche Teilmenge von $\mathfrak{A}$ eine Folge verschiedener Punkte mit einem (nicht notwendig zu $\mathfrak{A}$ gehörenden) Limes umfaßt (*Fréchet*[13])). Beides sind gegenüber beliebigen stetigen (somit speziell gegenüber topologischen) Abbildungen invariante relative Eigenschaften (vgl. Nr. 2) von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{L}$. Wichtiger[13a]) noch ist die folgende absolute topologische Eigenschaft: Ein Raum $\mathfrak{L}$ heißt *in sich kompakt*[14]) oder *absolut-kompakt*[15]), wenn jede unendliche Menge aus $\mathfrak{L}$ eine Folge verschiedener Punkte mit einem in $\mathfrak{L}$ liegen-

---

10b) Auch jede Menge $\mathfrak{A}$ von Punkten eines Limesraumes $\mathfrak{L}$ kann selbst als ein Limesraum aufgefaßt werden, wenn man für die Punkte aus $\mathfrak{A}$ festsetzt, es solle für sie $\lim P_\nu = P_0$ dann und nur dann gelten, wenn diese Gleichung für dieselben Punkte in $\mathfrak{L}$ gilt. Daß ein so gewonnener „Ausschnitt unserer ursprünglichen Limesrelation auf einen Teil $\mathfrak{A}$" [vgl. zu dieser Ausdrucksweise *L. Vietoris*, Monatsh. Math. Phys. 31 (1921), p. 175] stets ebenfalls die Limesaxiome erfüllt, können wir kurz so ausdrücken: das System der Limesaxiome ist „ausschnittinvariant" (vgl. noch *F. Hausdorff*[26a])). Daraus folgt, daß jede für *Limesräume* erklärte topologische Eigenschaft auch stets einen Sinn hat für *Mengen* eines Limesraumes.

11) Vgl. II C 9, p. 1015. Ebendort p. 1014 und bei *Fréchet*, l. c. [9]), p. 1 siehe über die ersten Arbeiten zur Funktionalrechnung von *Ascoli*, *Volterra*, *Arzelà* und *Hadamard*.

12) Über die Beziehungen zwischen dem Begriffe limesstetig (bzw. limestopologisch) und dem später genannten Begriffe umgebungsstetig (bzw. umgebungstopologisch) vgl. Nr. 15.

13) Vgl. II C 9, p. 1016.

13a) Hierzu beachte man, daß von den kompakten Mengen vor allem die abgeschlossenen Bedeutung erlangt haben und daß die wichtigsten Eigenschaften der abgeschlossenen kompakten Mengen darauf beruhen, daß sie absolut-kompakte Mengen (vgl. im Text nach Anm. 16) sind.

14) Vgl. [22]) p. 243, 264.

15) *H. Tietze*, Math. Ann. 91 (1924). p. 211.

den Limes umfaßt, anders gesagt, wenn jede Menge aus $\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{L}$ kompakt ist.[16]) Da jede Menge $\mathfrak{A}$ eines Limesraumes $\mathfrak{L}$ selbst als Limesraum angesehen werden kann (vgl. [10b])), so ist durch unsere Definition auch erklärt, wann eine in einem Raum $\mathfrak{L}$ gelegene *Menge* $\mathfrak{A}$ absolut-kompakt genannt werden soll: wenn nämlich jede unendliche Teilmenge $\mathfrak{A}_1$ von $\mathfrak{A}$ eine Folge verschiedener Punkte mit einem Limes in $\mathfrak{A}$ umfaßt. Man kann dafür auch sagen: Eine Menge $\mathfrak{A}$ heißt absolut-kompakt, wenn $\mathfrak{A}$ in dem Limesraum $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$, der durch $\mathfrak{A}$ gemäß [10b]) gegeben ist, kompakt ist.[16a]) [16b])

Die ganz wenigen Forderungen, die vermöge II. 1., 2. an die Limesbeziehungen gestellt sind, bedingen eine solche Allgemeinheit des Begriffes Limesraum, daß unter diesen Begriff noch sehr seltsame Gebilde fallen.[17]) Trotzdem fließt eine Reihe allgemeiner Sätze allein aus den Forderungen 1., 2. Wir verweisen diesbezüglich auf II C 9. Um eine stärkere Annäherung an die für Punktmengen in Räumen $\mathfrak{R}^n$ geltenden Verhältnisse zu erhalten, kann man in verschiedener Weise zu 1., 2. noch weitere Forderungen hinzunehmen.[18])

7. Räume mit Festsetzungen über Häufungspunkte. Wie eine vom Grundbegriff des Häufungspunktes ausgehende Theorie aufgebaut

---

16) Bisweilen findet man das Wort „abgeschlossen" im Sinn von absolut-kompakt verwendet (vgl. die Bemerkungen l. c. [15]) p. 219), neuerdings im gleichen Sinn (z. B. von *S. Saks,* l. c. [172]) p. 289, 291) auch das Wort „kompakt" (vgl. insbesondere [16b]) über den Ausdruck „kompakter Raum").

16a) Man kann die Definition des absolut-kompakten *Raumes* auch auf den Begriff der in einem Raume $\mathfrak{L}$ kompakten *Menge* $\mathfrak{A}$ zurückführen und definieren: ein Raum $\mathfrak{L}$ heiße dann absolut-kompakt, wenn die aus allen Punkten von $\mathfrak{L}$ bestehende Menge $\mathfrak{A}(\mathfrak{L})$ in $\mathfrak{L}$ kompakt ist. Die im Text befolgte Anordnung entspricht der Auffassung des einen der beiden Referenten (*T.*), daß es wünschenswert ist, möglichst nur bei Erklärung von *relativen* topologischen Eigenschaften von *Mengen in einem Raum*, bei Erklärung von *absoluten* topologischen Eigenschaften aber von *Räumen* zu sprechen.

16b) Da man die in [16a]) gegebene Definition des absolut-kompakten Raumes etwas weniger genau auch so ausdrücken kann: $\mathfrak{L}$ heißt absolut-kompakt, wenn $\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{L}$ kompakt ist, so ist erklärlich, wenn neuerdings häufig kurz von *„kompakten Räumen"* im Sinne von „absolut-kompakten Räumen" gesprochen wird. Auch der vorliegende Artikel hat diese Wandlung in der Terminologie mitgemacht. Die (an sich nicht erfreuliche) doppelte Verwendung des Wortes „kompakt" ist übrigens dann unbedenklich, wenn (wie im folgenden geschehen soll) genau zwischen den in einem Raum kompakten *Mengen* und den kompakten *Räumen* unterschieden wird.

17) Vgl. z. B. II C 9, p. 1024, Anm. 534.

18) Durch solche weitere Forderungen werden z. B. die von *Fréchet* als „classes (*S*)" bezeichneten Limesräume gewonnen; vgl. II C 9, Anm. 509, und in diesem Artikel Anm. [71]) und [10a]).

werden kann, hat *Fr. Riesz*[19]) skizziert.[20]) Für die Elemente („Punkte") einer Menge $\mathfrak{M}$ seien Festsetzungen getroffen von folgender Art:

I. Zu jeder in $\mathfrak{M}$ enthaltenen Menge $\mathfrak{A}$ und zu jedem Punkt P von $\mathfrak{M}$ wird angegeben, ob P als Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$ zu bezeichnen ist oder nicht.

II. Dabei sind die folgenden Forderungen („Axiome des Häufungspunktes") erfüllt[20a]):

1. Ein Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$ ist auch Häufungspunkt jeder $\mathfrak{A}$ enthaltenden Menge aus $\mathfrak{M}$.

2. Für jede Zerlegung von $\mathfrak{A}$ in zwei Teilmengen: $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$ ist jeder Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$ zugleich Häufungspunkt wenigstens einer der Mengen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$.

3. Eine nur aus einem Punkte bestehende Menge $\mathfrak{A}$ hat keinen Häufungspunkt.

4. Jeder Häufungspunkt von Häufungspunkten einer Menge ist selbst Häufungspunkt derselben.

Wir nennen dann $\mathfrak{M}$ einen Raum $\mathfrak{H}$ *(Raum mit Festsetzungen über Häufungspunkte)*. Gemäß 2. und 3. ist dabei jede endliche Menge $\mathfrak{A}$ ohne Häufungspunkt. — Wegen der Beziehungen der Theorie der Räume $\mathfrak{H}$ zu der der Limesräume vgl. Nr. **15**.

8. Räume mit Umgebungsbeziehungen. Außer den Begriffen des Limes bzw. des Häufungspunktes ist vor allem der Umgebungsbegriff zum Ausgangspunkt für eine Theorie allgemeiner Räume gemacht

19) *F. Riesz,* l. c. [20]) und Atti IV. Congr. internaz. mat., Roma 1908, II (1909), p. 18/24. Wir sagen „Häufungspunkt" statt wie *Riesz* „Verdichtungsstelle", da das Wort „Verdichtungspunkt" und das damit sprachlich gleichwertige „Kondensationspunkt" eine besondere Bedeutung erhalten haben. Vgl. z. B. II C 9, p. 870. — *F. Riesz* gibt l. c., p. 22 auch Axiome für „Verkettung", d. i. eine gewisse Verallgemeinerung der Beziehung zwischen einer Menge und einem ihrer Häufungspunkte. Wegen weiterer Literatur vgl. II C 9, Anm. 506; ferner *M. Fréchet,* Fund. math. 12 (1928), p. 298—310 und *Fréchet,* Esp. abstr., p. 185 ff.

20) *F. Riesz* hat erstmals in seiner Arbeit „Die Genesis des Raumbegriffs", Math. naturw. Berichte aus Ungarn 24, Jg. 1906, p. 309—352, diese Theorie dargestellt und außer drei mit II. 1, 2, 3 gleichwertigen Axiomen als viertes ein Trennbarkeitsaxiom (vgl. Nr. **13**) aufgestellt (l. c. p. 318). Das im folgenden unter II. 4 angeführte Axiom wurde als Ergänzung von 1, 2, 3 von *W. Groß* (1913) eingeführt [vgl. *L. Vietoris,* Monatsh. Math. Phys. 31 (1921), p. 175]; davon unabhängig von *M. Fréchet,* vgl. Bull. sc. math. (2) 42 (1918), p. 138—156, Sir Asutosh Mookerjee's Commemor. Vol. 2, Calcutta (1922), p. 333—394 und *Fréchet,* Esp. abstr., p. 181—188.

20a) Ein anderes System von Forderungen bei *B. v. Kerékjártó,* Acta litt. ac. scient. Szeged 2 (1925), p. 157.

worden, und zwar von *R. E. Root*[21]) und in besonders umfassender Weise von *F. Hausdorff*[22]), während bereits vorher *D. Hilbert*[23]) und *H. Weyl*[24]) für spezielle Fälle entsprechende Kennzeichnungen des Umgebungsbegriffes angegeben haben. Unter einem „Umgebungsraum" oder „topologischen Raum" (im engeren Sinne)[25]) oder „Raum $\mathfrak{T}$" werde eine Menge $\mathfrak{M}$ verstanden, für deren Elemente — die wieder „Punkte" heißen — Festsetzungen folgender Art getroffen sind:

I. Den Punkten P von $\mathfrak{M}$ sind gewisse Teilmengen von $\mathfrak{M}$ zugewiesen, „Umgebungen von P" genannt und mit $\mathfrak{U}(P)$ bezeichnet [im Bedarfsfalle ausführlicher: „Umgebungen von P in $\mathfrak{M}$": $\mathfrak{U}(P \mid \mathfrak{M})$].

II. Dabei sind die folgenden Forderungen („Umgebungsaxiome") erfüllt[26]):

($\bar{A}$) a) Zu jedem P von $\mathfrak{M}$ gibt es mindestens eine $\mathfrak{U}(P)$; b) jede $\mathfrak{U}(P)$ enthält P.

($\bar{B}$) a) Jede eine $\mathfrak{U}(P)$ enthaltende Menge $\mathfrak{V}$ ist selbst eine Umgebung von P; b) desgleichen der Durchschnitt $\mathfrak{U}_1(P) \cdot \mathfrak{U}_2(P)$ zweier Umgebungen von P.

($\bar{C}$) Ist die Menge $\mathfrak{U}$ eine Umgebung von P, so ist es auch die Menge aller „*inneren*" Punkte von $\mathfrak{U}$, d. h. aller jener Punkte X, für welche $\mathfrak{U}$ eine Umgebung von X ist.

($\bar{D}$) Ist $P \neq Q$, so gibt es Umgebungen $\mathfrak{U}(P)$, $\mathfrak{V}(Q)$ ohne gemeinsamen Punkt.

Gemäß Nr. **3** ist jede Punktmenge $\mathfrak{P}$ eines $\mathfrak{R}^n$ ein topologischer

---

21) *R. E. Root,* Amer. J. of math. 36 (1914), p. 79/104. Vorher eine kurze Mitteilung in Bull. Am. Math. Soc. 17 (1910/11), p. 538/9. Vgl. auch II C 9, p. 1020.

22) *F. Hausdorff*, Grundz., Kap. 7, 8.

23) *D. Hilbert,* Math Ann. 56 (1902), p. 383 = Grundlagen der Geometrie, 3. Aufl. (1909), p. 179 f.

24) *Weyl,* R. Fl., p. 17 f.

25) *F. Hausdorff*[22]), p. 213; im weiteren Sinne sollen als topologische Räume alle in Nr. **6**, **7**, **8**, **10** eingeführten allgemeinen Räume bezeichnet werden. Im folgenden wird die Bezeichnung „topologischer Raum" schlechtweg stets im engeren Sinne gemeint.

Verzichtet man von den folgenden Forderungen auf ($\bar{B}$), ($\bar{C}$), ($\bar{D}$), so erhält man die von *M. Fréchet* neuerdings als „Räume V" bezeichneten und untersuchten Räume; vgl. Fund. math. 10 (1927), p. 328, 14 (1929), p. 118. Zur Terminologie vgl. II C 9, l. c. [66]).

26) Vgl. *H. Tietze*[30]), p. 295 sowie [122]), p. 2 [38]; ($\bar{A}$) bis ($\bar{D}$) stellen eine das Wesentliche nicht berührende Modifikation der *Hausdorff*schen Einführung des Umgebungsbegriffs dar (vgl. Nr. **9**, speziell [81]), sowie II C 9, p. 1020/21); sie können auch als Axiome des Begriffs „innerer Punkt" aufgefaßt werden, wenn man statt „$\mathfrak{U}$ ist Umgebung von P" sagt: „P ist innerer Punkt von $\mathfrak{U}$".

Raum.[26a]) Wird jedem Punkt P eines topologischen Raumes $\mathfrak{T}$ eindeutig ein bestimmter Punkt P' eines topologischen Raumes $\mathfrak{T}'$ zugeordnet, so heißt eine solche Abbildung stetig[27]), genauer: *„umgebungsstetig“*, wenn es zu jeder $\mathfrak{U}(P' \mid \mathfrak{T}')$ eine $\mathfrak{U}(P \mid \mathfrak{T})$ gibt, deren sämtliche Punkte auf Punkte von $\mathfrak{U}(P' \mid \mathfrak{T}')$ abgebildet werden. Eine 1-1-deutige Abbildung A zweier topologischer Räume $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$ heißt topologisch (genauer: „umgebungstopologisch“), wenn A und A^{-1} stetig sind, was, wie man leicht sieht, soviel besagt, als daß jede $\mathfrak{U}(P' \mid \mathfrak{T}')$ Bild einer $\mathfrak{U}(P \mid \mathfrak{T})$ ist und umgekehrt.

Wird (wie in Nr. **3**) als Häufungspunkt einer Menge $\mathfrak{A}$ eines Raumes $\mathfrak{T}$ (einer Teilmenge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{T}$) ein Punkt P bezeichnet, wenn jede $\mathfrak{U}(P \mid \mathfrak{T})$ unendlich viele Punkte von $\mathfrak{A}$ enthält (wodurch dann ein Raum $\mathfrak{H}$ definiert wird (vgl. Nr. **7**)), so heißt $\mathfrak{A}$ *abgeschlossen* (*in* $\mathfrak{T}$), wenn $\mathfrak{A}$ jeden seiner Häufungspunkte enthält; $\mathfrak{A}$ heißt *offen* (*in* $\mathfrak{T}$)[27a]), wenn $\mathfrak{A}$ Umgebung jedes seiner Punkte ist. Die *Begrenzung*[28]) *einer Menge* $\mathfrak{A}$ *in* $\mathfrak{T}$ bilden jene Punkte von $\mathfrak{T}$, die weder innere Punkte (s. o.) von $\mathfrak{A}$ noch von $\mathfrak{T} - \mathfrak{A}$ (der Komplementärmenge) sind. Ein Raum $\mathfrak{T}$ heißt *zusammenhängend*[29]), wenn er nicht in zwei punkt-

---

26a) Auch jede Punktmenge eines topologischen Raumes kann selbst als ein topologischer Raum aufgefaßt werden (*Hausdorff*, Grundz., p. 241): die Umgebungsaxiome sind „ausschnittinvariant“ (vgl. [10b])).

27) Vgl. *F. Hausdorff* [22]), p. 359.

27a) Über eine andere Verwendung des Wortes „offen“ siehe [129]).

28) Nach *C. Jordan* (Definition von „frontière“), vgl. II C 9, p. 880; das vielfach synonym mit Begrenzung verwendete Wort „Rand“ brauchen wir in anderem Sinne, vgl. Nr. **19**, **30**.

29) Diese — von *N. J. Lennes* (1911) und *F. Hausdorff* (1914) unabhängig eingeführte — Definition (vgl. II C 9, p. 897) hat bereits 1906 *F. Riesz*, l. c. [20]), p. 321 gegeben; vgl. auch ebenda p. 315 die Definition eines zusammenhängenden physikalischen Kontinuums. Für diesen Begriff „zusammenhängend“ wird in Artikel II C 9 die Bezeichnung „lückenlos zusammenhängend“ gebraucht, die Bezeichnung „zusammenhängend“ aber im Sinne der Definition von *G. Cantor* (l. c., p. 896). Da aber der letztere Begriff, im Gegensatz zum ersteren, nicht topologisch invariant (vgl. l. c., p. 950) und überhaupt viel weniger weittragend ist (die *Cantor*sche Definition ist nur auf spezielle topologische, nämlich metrische Räume [Nr. **16**] übertragbar), so entscheiden wir uns dafür, die einfachere Bezeichnung „zusammenhängend“ dem wichtigeren *Riesz-Lennes-Hausdorff*schen Begriffe zu geben. — Für diese Verwendung des Wortes „zusammenhängend“ spricht auch der Umstand, daß man allgemein sagt: eine Gerade wird durch einen ihrer Punkte $\xi = \alpha$ in zwei Halbgerade $\xi > \alpha$ und $\xi < \alpha$ „zerlegt“, ebenso eine Ebene $\mathfrak{R}^2$ durch eine Jordankurve $\mathfrak{K}$ (z. B. eine Kreislinie) in zwei „getrennte“ Gebiete; nach *Riesz-Lennes-Hausdorff* ist die Restmenge (die Menge der Punkte $\xi \neq \alpha$ bzw. die Menge $\mathfrak{R}^2 - \mathfrak{K}$) *nicht* zusammenhängend; nach der *Cantor*schen Definition aber wäre diese nach der „Zerlegung“ übrig bleibende Restmenge als

fremde, nicht leere, in $\mathfrak{T}$ abgeschlossene Mengen zerlegbar ist, d. h. wenn von je zwei komplementären, nicht leeren Teilen mindestens einer einen Häufungspunkt des andern enthält.

9. **Fundamentalsysteme von Umgebungen.** Wird jedem Punkte P eines topologischen Raumes $\mathfrak{T}$ eine gewisse Teilmenge aus der Menge seiner Umgebungen zugewiesen — die in die Teilmenge aufgenommenen mögen mit $\mathfrak{U}_P$ bezeichnet werden, — dann werde von einem *Fundamentalsystem von Umgebungen* gesprochen, wenn es für jeden Punkt P zu jeder $\mathfrak{U}(P)$ eine in $\mathfrak{U}(P)$ enthaltene $\mathfrak{U}_P$ gibt. Nimmt man z. B. für $\mathfrak{T}$ den n-dimensionalen Raum $\mathfrak{R}^n$, so stellen alle sphärischen Umgebungen (Nr. 3) ein Fundamentalsystem vor, desgleichen bereits alle sphärischen Umgebungen mit rationalem Radius ϱ. Aus einem Fundamentalsystem gewinnt man die Gesamtheit aller $\mathfrak{U}(P)$, indem man alle Mengen nimmt, die eine $\mathfrak{U}_P$ als Teilmenge enthalten. Da zufolge $(\bar{C})$ in jeder $\mathfrak{U}(P)$ eine offene Umgebung von P enthalten ist, so gibt es stets aus lauter offenen Umgebungen gebildete Fundamentalsysteme.

Hier mag eine Bemerkung Platz finden über den Unterschied zwischen der *Hausdorff*schen Theorie der topologischen Räume und der modifizierten Fassung, in der sie im vorstehenden wiedergegeben wurde. In unserer Terminologie gesprochen, betrachtet *Hausdorff* überhaupt keine anderen als offene Umgebungen, und zwar für jeden topologischen Raum nur diejenigen eines bestimmten Fundamentalsystems. Nun erfüllt jedes solche Fundamentalsystem besondere Forderungen (von *Hausdorff* als Umgebungsaxiome (A), (B), (C), (D) bezeichnet, vgl. II C 9, p. 1021), und nach *Hausdorffs* Definition ist ein topologischer Raum eine Menge, deren Elementen Umgebungen zugewiesen sind, die *diesen* Forderungen genügen; da aber umgekehrt jedes System von — den Elementen P einer Menge $\mathfrak{M}$ zugeordneten — Teil-

„zusammenhängend“ zu bezeichnen, was eine kaum erträgliche sprachliche Härte darstellt.

Für den *Riesz-Lennes-Hausdorff*schen Begriff „zusammenhängend“ gebraucht *L. Vietoris* in seinen früheren Arbeiten, Monatsh. Math. Phys. 31 (1921) und 32 (1922), die Bezeichnung „stetig“, was allerdings dem naiven Sprachgebrauch, sowie den Ausdrücken „Stetigkeit der Geraden“, „Stetigkeitsaxiom“ entspricht, aber wegen der nun einmal für Funktionen und Abbildungen festgelegten Bedeutung des Wortes stetig nicht übernommen werden soll. Eine andere Definition als im Text für „zusammenhängend“ gibt für Konvergenzräume *H. Kneser*, l. c. [10a]). Vgl. noch die Definition für „getrennt“ [44]), [242]), die mit der Textdefinition für „zusammenhängend“ aufs engste zusammenhängt. Vgl. ferner [84c]).

Wegen des in der kombinatorischen Topologie eingeführten Begriffes „zusammenhängend“ vgl. [204a]).

mengen $\mathfrak{U}_P$, das diesen Forderungen genügt, stets[30]) (in unserem Sinne) ein Fundamentalsystem von Umgebungen eines aus den Elementen von $\mathfrak{M}$ gebildeten topologischen Raumes ist, so deckt sich unsere Darstellung mit der *Hausdorff*schen hinsichtlich der Abgrenzung des Begriffs „topologischer (Umgebungs-) Raum" (wenn auch nicht hinsichtlich des Begriffs „Umgebung"[31])). Zwei Fundamentalsysteme desselben topologischen Raumes nennt *Hausdorff* „gleichwertige Umgebungssysteme".

10. Andere Fassungen des Begriffs des topologischen Raumes. In vielen Überlegungen ist $(\bar{D})$ ersetzbar durch das schwächere Axiom:

$(\bar{D}_0)$. Zu irgend zwei Punkten x und y gibt es mindestens eine Umgebung von x, welche y nicht enthält.

Dadurch erhält man in $(\bar{A})$, $(\bar{B})$, $(\bar{C})$, $(\bar{D}_0)$ ein zu den obigen Axiomen (1), (2), (3), (4) der Räume $\mathfrak{H}$ äquivalentes System.[31a]) $(\bar{D})$ geht über $(\bar{D}_0)$ dadurch hinaus, daß es die Einzigkeit des auf Grund der Umgebungen definierten Limes fordert; auf Grund von $(\bar{A})$, $(\bar{B})$, $(\bar{C})$, $(\bar{D}_0)$ allein kann eine Folge von Punkten immer noch mehrere Limiten haben, d. h. Punkte, in deren beliebig kleinen Umgebungen fast alle Punkte der Folge (d. h. alle bis auf endlich viele) liegen.[32])

Mit $(\bar{A})$, $(\bar{B})$, $(\bar{C})$, $(\bar{D})$ äquivalent sind auch (für alle aus mehr als einem Punkte bestehenden Räume) die folgenden *Axiome der offenen Menge*[33]): 1. Der Durchschnitt endlich vieler und die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen. 2. Zu zwei verschiedenen Punkten gibt es zwei fremde offene Mengen, von denen die eine den einen, die andere den anderen enthält. — Als Umgebung eines Punktes P wird dann jede Obermenge einer P enthaltenden offenen Menge erklärt. Dual dazu kann man natürlich auch den Begriff der abgeschlossenen Menge axiomatisieren.

Mit $(\bar{A})$, $(\bar{B})$, $(\bar{C})$ äquivalent sind die Forderungen an den Begriff der

---

30) *H. Tietze,* Math. Ann. 88 (1923), p. 296.

31) Für den Begriff „Umgebung" in der in diesem Artikel (im Einklang mit [122]), p. 2 [38]) gegebenen Abgrenzung benützt *H. Tietze,* Math. Ztschr. 5 (1919), p. 288, ebenso [30]), p. 295 den Ausdruck „umgebende Menge", während er das Wort Umgebung dort noch im *Hausdorff*schen Sinne verwendet.

31a) *M. Fréchet,* Ann. Éc. Norm. (3) 38 (1921), p. 366; *L. Vietoris*, Monatsh. Math. Phys. 31 (1921), p. 176.

32) *E. W. Chittenden* und *A. D. Pitcher,* Trans. Amer. 20 (1919), p. 228.

33) *P. Alexandroff,* Math. Ann. 94 (1925), p. 296—308, 298. Ein anderes Axiomensystem der offenen Menge, das mit $(\bar{A})$ bis $(\bar{D})$ äquivalent ist, l. c. [30]), p. 294.

abgeschlossenen Hülle $\overline{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{A}$ (d. i. Menge $\dotplus$ Ableitung)[33a]) bei *C. Kuratowski*[34]): I. $\overline{\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{A}} \dotplus \overline{\mathfrak{B}}$, II. $\mathfrak{A} \subseteq \overline{\mathfrak{A}}$, III. $\overline{\mathfrak{O}} = \mathfrak{O}$ (wobei $\mathfrak{O}$ die leere Menge ist), IV. $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} = \overline{\mathfrak{A}}$. Sie gestatten die Definition der abgeschlossenen Menge ($\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}}$), der offenen Menge (als Komplement einer abgeschlossenen) und damit die Entwicklung eines großen Teils der Topologie, obwohl sie z. B. nichts darüber aussagen, ob eine endliche Menge abgeschlossen ist. Besonders bemerkenswert erscheint die auf dieser Basis gegebene Einteilung der durch die zwei Operationen der Bildung des Komplements und der Abschließung erzeugbaren Mengenfunktionen in 14 Klassen.

W. Sierpiński[34a]) hat eine auf den Begriff der *abgeleiteten Menge,* sowie eine auf den Begriff der *abgeschlossenen Menge* gegründete Theorie topologischer Räume aufgestellt.

In bemerkenswerter Weise verwertet *E. W. Chittenden*[34b]) in einer kürzlich erschienenen Abhandlung über allgemeine topologische Räume den Begriff der *Mengenfunktion, deren „Wert" selbst wieder eine Menge ist.*[34c])

11. Teilräume. In dieser Nummer beschränken wir uns auf (Umgebungs-)Räume $\mathfrak{T}$ und übergehen die analogen Überlegungen für Räume $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{H}$. Ist $\mathfrak{M}_1$ Teilmenge einer Menge $\mathfrak{M}$, und ist aus $\mathfrak{M}$ durch Umgebungsfestsetzungen ein topologischer Raum $\mathfrak{T}$ hergestellt, so erhält man den aus den Elementen von $\mathfrak{M}_1$ gebildeten „Teilraum" $\mathfrak{T}_1$ von $\mathfrak{T}$, wenn man als $\mathfrak{U}(P_0|\mathfrak{M}_1)$ eines Punktes P_0 aus

---

33a) Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zwei Mengen desselben Raumes, so bedeutet (nach *C. Carathéodory,* Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig und Berlin 1918, p. 23) $\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}$ ihre Vereinigung; es bedeutet (nach *Hausdorff,* Grundz., p. 3 und 4) $\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{B}$ (oder $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$), daß $\mathfrak{B}$ Teilmenge von $\mathfrak{A}$ ist, und $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ (oder $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$), daß $\mathfrak{B}$ echte (d. h. von $\mathfrak{A}$ verschiedene) Teilmenge von $\mathfrak{A}$ ist.

Abweichend von dieser (die Analogie mit $\geqq$ und $>$ wahrenden) Bezeichnung wird neuerdings von manchen Autoren „$\supset$" im Sinne von „$\supseteq$" geschrieben, wobei dann jedesmal, wenn eine Teilmenge als echte Teilmenge gekennzeichnet werden soll, ein besonderer Zusatz nötig wird.

34) *C. Kuratowski,* Fund. Math. 3 (1922), p. 182—199. Vgl. auch *O. Nikodym,* ib. 7 (1925), p. 149—154. Weitere, mit dem genannten äquivalente Axiomensysteme für andere Grundbegriffe gibt neuerdings *M. Zarycki,* Fund. math. 9 (1927), p. 3—15; s. ferner Trans. Am. Math. Soc. 30 (1928), p. 498—506.

34a) *W. Sierpiński,* Math. Ann. 97 (1927), p. 321.

34b) *E. W. Chittenden,* Trans. Am. Math. Soc. 31 (1929), p. 290. Im besonderen wird der Begriff des Häufungspunktes zugrunde gelegt.

34c) Über verschiedene Arten allgemeiner Räume vgl. noch II C 9, Nr. **26**, p. 1015 ff. Ein Kriterium dafür, daß ein Raum „(V)" (im Sinne der neueren Bezeichnung von *M. Fréchet*) bzw. eine Menge eines Raumes (V) *zusammenhängend* sei, gibt *W. Sierpiński,* Fund. math. 9 (1927), p. 186.

$\mathfrak{M}_1$ jeden Durchschnitt einer $\mathfrak{U}(P_0|\mathfrak{M})$ mit $\mathfrak{M}_1$ bezeichnet.[35]) Zugleich mit $\mathfrak{T}$ genügt nämlich dann auch $\mathfrak{T}_1$ den Axiomen $(\bar{A})$ bis $(\bar{D})$ (das gleiche gilt übrigens auch von jedem der in Nr. **12** eingeführten Axiome $(\bar{E})$, $(\bar{F})$). Ist weiter $\mathfrak{M}_2$ Teilmenge von $\mathfrak{M}_1$, so erhält man, ob man nun den aus den Elementen von $\mathfrak{M}_2$ bestehenden Teilraum von $\mathfrak{T}$, oder aber den aus diesen Elementen bestehenden Teilraum von $\mathfrak{T}_1$ bildet, stets den gleichen topologischen Raum $\mathfrak{T}_2$.

12. Abzählbarkeitsaxiome. Obwohl sich bereits aus den angeführten Axiomen für topologische Räume weitreichende Folgerungen ziehen lassen, so ist doch auch hier — analog wie in der Theorie der Limesräume (Nr. **6**) — eine Einengung durch weitere Forderungen geboten, wenn eine stärkere Annäherung der Theorie an die bei den Punktmengen in n-dimensionalen Räumen geltenden Verhältnisse erreicht werden soll. Solche Einengungen hat *Hausdorff* vorgenommen durch Hinzunahme von „Abzählbarkeitsaxiomen"[36]), die sich so aussprechen lassen:

$(\bar{E})$ Es gibt ein Fundamentalsystem von Umgebungen, in dem jedem Punkt des Raumes nur abzählbar viele Umgebungen zugewiesen sind (*erstes Abzählbarkeitsaxiom*). — Wie die oben erwähnten sphärischen Umgebungen mit rationalem ϱ zeigen, erfüllt z. B. jeder Raum $\mathfrak{R}^n$ dieses Axiom (desgl. jede Punktmenge $\mathfrak{P}$ eines $\mathfrak{R}^n$).

$(\bar{F})$ Es gibt ein abzählbares Fundamentalsystem von Umgebungen, d. h. es gibt eine abzählbare Menge $\mathfrak{a}$ von Teilmengen des Raumes $\mathfrak{T}$, so daß man ein Fundamentalsystem von Umgebungen erhält, wenn man jedem Punkt P als Umgebungen $\mathfrak{U}_P$ des Systems alle jene Umgebungen von P zuweist, die zugleich Mengen aus $\mathfrak{a}$ sind (*zweites Abzählbarkeitsaxiom*). — Auch dieses Axiom — das $(\bar{E})$ zur Folge hat (aber nicht umgekehrt) — gilt für jeden $\mathfrak{R}^n$ sowie für jede Punktmenge eines $\mathfrak{R}^n$; für jeden $\mathfrak{R}^n$ erkennt man das, wenn man für $\mathfrak{a}$ die Menge aller Kugeln $\overline{MX} < \varrho$ nimmt, für die ϱ und die Koordinaten des Mittelpunktes M rational sind.[37])

Wir nennen im folgenden einen topologischen Raum, der dem zweiten (mithin auch dem ersten) Abzählbarkeitsaxiom genügt, *rational*.

Die Abzählbarkeitsaxiome erscheinen gegenüber den übrigen mehr gestaltlichen Axiomen als rein quantitative Aussagen und haben, auch wenn man die übrigen Umgebungsaxiome auf ein Minimum, nämlich $(\bar{A})$ (das *Hausdorff*sche (A)) beschränkt, eine Reihe wich-

35) Vgl. *F. Hausdorff* [22]), p. 242.

36) Vgl. II C 9, p. 1021.

37) Vgl. *F. Hausdorff* [22]), p. 262.

tiger Folgerungen.[38] So dient das erste Abzählbarkeitsaxiom vor allem dazu, alle nicht isolierten Punkte des Raumes zu Limiten von konvergenten Folgen untereinander verschiedener Punkte zu machen. Aus dem zweiten folgt unter anderem, daß jede Vereinigung beliebig vieler offener Mengen auch Vereinigung abzählbar vieler unter ihnen ist; daß es nur abzählbare Mengen von paarweise fremden offenen Mengen gibt; daß jede auf- oder absteigende wohlgeordnete Menge von abgeschlossenen oder von offenen Mengen eine abzählbare Mächtigkeit hat; daß die Mächtigkeit der Menge aller abgeschlossenen Mengen nicht größer als die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ des Kontinuums ist; daß jede nicht abzählbare Menge mindestens eine in ihr liegende Verdichtungsstelle enthält[39]; daß jede abgeschlossene Menge Vereinigung einer abzählbaren und einer (eventuell leeren) perfekten Menge ist[40]; daß der Raum *separabel,* d. h. abgeschlossene Hülle einer abzählbaren Menge ist.[41]

Es kann aber umgekehrt ein topologischer (jedoch nicht ein metrischer) Raum separabel sein, ja sogar aus nur abzählbar vielen Punkten bestehen, ohne auch nur dem ersten, geschweige dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom zu genügen.[42][43]

13. Trennbarkeitsaxiome. Sie bestehen in folgenden allmählichen Verschärfungen der schon eingeführten Trennungsaxiome ($\bar{D}_0$) und ($\bar{D}$):

($\bar{D}_2$). In jeder Umgebung $\mathfrak{U}$ jedes Punktes P gibt es eine abgeschlossene Umgebung $\mathfrak{V}$ von P; anders gesagt: Zu jedem Punkt P und jeder P nicht enthaltenden abgeschlossenen Menge $\mathfrak{A}$ gibt es zwei fremde offene Mengen $\mathfrak{O}_P$ und $\mathfrak{O}_{\mathfrak{A}}$, für welche P in $\mathfrak{O}_P$ liegt und $\mathfrak{O}_{\mathfrak{A}} \geqq \mathfrak{A}$ ist (*Regularität*).

($\bar{D}_3$). Zu irgend zwei fremden abgeschlossenen Mengen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ gibt es zwei fremde offene Mengen $\mathfrak{O}_{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{O}_{\mathfrak{B}}$, für welche $\mathfrak{O}_{\mathfrak{A}} \geqq \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{O}_{\mathfrak{B}} \geqq \mathfrak{B}$ ist (*Normalität*).

($\bar{D}_4$). Zu irgend zwei getrennten[44] Mengen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ gibt es zwei fremde offene Mengen $\mathfrak{O}_{\mathfrak{A}} \geqq \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{O}_{\mathfrak{B}} \geqq \mathfrak{B}$.[45]

---

38) *A. Tychonoff* und *N. Vedenissoff,* Bull. scienc. math. 50 (1926), p. 15—27

39) *E. Lindelöf,* vgl. II C 9a, p. 869.

40) *Cantor-Bendixson*scher Satz, vgl. II C 9a, p. 866.

41) Dies ist die neuere von den durch *Fréchet* eingeführten Bedeutungen des Wortes „separabel". Vgl. II C 9, Anm. 515a.

42) *P. Urysohn,* Math. Ann. 94 (1925), p. 288—290.

43) Über die Tragweite des zweiten Abzählbarkeitsaxioms, bes. im metrischen Räumen, vgl. *P. Alexandroff,* Math. Ann. 92 (1924), p. 294—301.

44) Zwei Mengen heißen *getrennt*, wenn sie fremd sind und keine einen Häufungspunkt der anderen enthält; *F. Riesz,* l. c. [20]) p. 321 (die Bezeichnung ist dort: *in bezug aufeinander isoliert*).

45) ($\bar{D}_2$) zuerst eingeführt bei *L. Vietoris*, Monatsh. Math. Phys 31 (1921),

Von den Eigenschaften $(\bar{D}_0)$, $(\bar{D})$, $(\bar{D}_2)$, $(\bar{D}_3)$, $(\bar{D}_4)$ geht jede, solange man daneben nicht mehr als $(\bar{A})$, $(\bar{B})$, $(\bar{C})$ voraussetzt, über die vorhergehende hinaus.

$(\bar{D}_2)$ ist nichts anderes als „Abgeschlossenheit im Kleinen" und schließt unter anderen die Möglichkeit eines zusammenhängenden abzählbaren rationalen Raumes[46]) aus.

14. Vollständigkeitseigenschaften topologischer Räume. Für viele Untersuchungen ist eine Einengung des Raumbegriffs durch Forderung der Existenz bestimmter Limiten zweckmäßig. In topologischen Räumen ohne Gültigkeit der Abzählbarkeitsaxiome hat sich die Annahme einer der drei folgenden untereinander äquivalenten Eigenschaften α), β), γ) als brauchbar erwiesen[47]):

---

p. 173; $(\bar{D}_3)$, $(\bar{D}_4)$ bei *H. Tietze,* Math. Ann. 88 (1923), p. 301 ff., sowie *Alexandroff* und *Urysohn,* Math. Ann. 92 (1924), p. 258—266, und *P. Urysohn,* Math. Ann. 94 (1925), p. 262—295, von welch letzteren beiden die Namen regulär und normal stammen. Sie nennen übrigens einen $(\bar{D}_4)$ genügenden Raum *„vollständig normal"*. — $(\bar{D}_2)$ ergibt sich auch unmittelbar aus dem ersten der Axiome der euklidischen Ebene von *R. L. Moore,* Trans. Am. Math. Soc. 17 (1916), p. 132 und 133 (Theorem 5). Axiomatische Untersuchungen, die an die letztgenannte Arbeit anschließen: *R. L. Moore*, ib. 20 (1919), p. 169—178, *J. R. Kline,* ib. 18 (1917), p. 177—184, *P. M. Swingle*, Bull. Am. Math. Soc. 32 (1926), p. 110—111, *D. W. Woodard,* Fund. math. 13 (1929), p. 121—145.

46) *P. Urysohn,* Math. Ann. 94 (1925), p. 274—283.

47) *R. L. Moore,* Proc. Nat. Ac. 5 (1919), p. 206—210, nennt eine Klasse $\mathfrak{S}$ (d. i. eine Limesklasse mit lauter abgeschlossenen Ableitungen), in der α gilt, „compact in the new sense", *M. Fréchet* anschließend [Ann. Éc. Norm. (3) 38 (1921), p. 346] „parfaitement compact en soi". *L. Vietoris* [Monatsh. Math. Phys. 31 (1921), p. 187] nennt einen topologischen Raum mit der Eigenschaft α *lückenlos*, *P. Alexandroff* und *P. Urysohn* [Math. Ann. 92 (1924), p. 258—266 und Bull. Ac. Pol. (A) (5. III. 1923)] *bikompakt.* Von letzteren beiden stammt auch der Name „vollständiger Häufungspunkt".

Den Beweis der Äquivalenz von α) und γ) in Klassen $\mathfrak{S}$ siehe bei *R. L. Moore,* l. c., und *M. Fréchet,* l. c., den von α), β), γ) in topologischen Räumen bei *L. Vietoris,* Monatsh. Math. Phys. 31, p. 187; 32, p. 261, sowie *Alexandroff* und *Urysohn,* Math. Ann. 92, p. 259 f. *M. Fréchet,* Bull. Soc. Math. France 45 (1917), p. 1—8, *W. Sierpiński,* Fund. Math. 2 (1921), p. 179—188, *Kuratowski-Sierpiński,* Fund. Math. 2, p. 172—178 und *C. Kuratowski*, Fund. Math. 3 (1922), p. 41—53, behandeln ähnliche Fragen bezüglich des verallgemeinerten *Borel*schen Überdeckungssatzes. Vgl. II C 9 a, p. 1023. Verallgemeinerungen in anderen Richtungen bei *K. Menger,* Sitzungsber. Ak. Wien 133 (1924), p. 421—444; *W. Hurewicz,* Math. Ztschr. 24 (1925), p. 401—421; *L. Tumarkin,* Proc. Ac. Amsterdam 28 (1925), p. 994; *J. Spława-Neyman,* Fund. math. 5 (1924), p. 328; *R. L. Moore,* Proc. Nat. Ac. 10 (1924), p. 464—467, Bull. Am. Math. Soc. 32 (1926), p. 275.

Weitere Literatur: *M. Fréchet*, Ann. Éc. Norm. (3) 41 (1924), p. 143—144; *W. Sierpiński,* Bull. Am. Math. Soc. 32 (1926), p. 649, Fund. math. 8 (1926), p. 223;

α) Jede monotone Menge $\mathfrak{m}$ von nicht leeren, abgeschlossenen Mengen hat einen nicht leeren Durchschnitt. Dabei heißt $\mathfrak{m}$ *monoton*, wenn von irgend zweien ihrer Elemente $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ entweder $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{B} \leqq \mathfrak{A}$ gilt.

β) Jede unendliche Menge hat einen vollständigen Häufungspunkt. Dabei heißt ein Punkt P *vollständiger Häufungspunkt* einer Menge $\mathfrak{N}$, wenn der Durchschnitt jeder Umgebung von P mit $\mathfrak{N}$ dieselbe Mächtigkeit wie $\mathfrak{N}$ hat.

γ) Ist die abgeschlossene Menge $\mathfrak{A}$ in der Vereinigungsmenge einer Menge $\mathfrak{g}$ von offenen Mengen enthalten, so hat $\mathfrak{g}$ eine endliche Teilmenge, in deren Vereinigung $\mathfrak{A}$ enthalten ist (Gültigkeit des *Heine-Borel-Lebesgue*schen Überdeckungssatzes).

Ein topologischer Raum hat die Eigenschaften $\alpha = \beta = \gamma$ dann und nur dann, wenn er *absolut abgeschlossen*[48]) (d. h. in jedem ihn umfassenden Raum abgeschlossen) und *regulär* ist.

Ein topologischer Raum läßt sich dann und nur dann durch Hinzufügung eines einzigen Punktes zu einem „bikompakten" (vgl. [47])) bzw. kompakten Raum ergänzen, wenn er „im Kleinen bikompakt" bzw. „im Kleinen in sich kompakt" ist, d. h. wenn jeder seiner Punkte eine bikompakte bzw. in sich kompakte Umgebung hat.[49]) In β) und damit in α) und γ) ist die „Kompaktheit in sich" enthalten. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht, wohl aber für rationale Räume. Wegen des singulären Charakters aller nicht rationalen Räume gehen wir daher auf α), β), γ) nicht näher ein.[50])

Bezüglich der Abhängigkeiten von $(\bar{A})$, $(\bar{B})$, $(\bar{C})$, $(\bar{D}_0)$, $(\bar{D})$, $(\bar{D}_2)$, $(\bar{D}_3)$, $(\bar{D}_4)$, $(\bar{E})$, $(\bar{F})$, α beschränken wir uns auf die wichtigsten. Jeder lückenlose (= bikompakte), also insbesondere jeder kompakte rationale topologische Raum ist normal, also erst recht regulär, aber nicht immer „vollständig normal" (vgl. [45])). Dagegen ist jeder rationale reguläre

---

W. Hurewicz, Fund. math. 9 (1927), p. 193—204; *R. L. Moore*, Fund. math. 8 (1926), p. 189—192, p. 374; Proc. Nat. Acad. 10 (1924), p. 168—170; *T. H. Hildebrandt*, Bull. Am. Math. Soc. 32 (1926), p. 423—474; *R. G. Lubben*, Trans. Am. Math. Soc. 30 (1928), p. 668—685; *E. W. Chittenden*, Trans. Am. Math. Soc. 31 (1929), p. 299.

48) Diese Bezeichnung wurde l. c. [15]), p. 215 eingeführt.

49) *P. Alexandroff*, Math. Ann. 92 (1924), p. 296. Siehe ferner *M. Fréchet*, Fund. math. 10 (1927), p. 343—355. Die Ergänzbarkeit jedes normalen Raumes zu einem absolut-abgeschlossenen normalen Raum zeigt *Wilfr. Wilson*, Proc. Amsterdam Ak. 29 (1926), p. 462—464.

50) Näheres siehe außer l. c. [47]) bei *P. Alexandroff*, Math. Ann. 92 (1924), p. 267—274 und besonders ausführlich bei *Alexandroff* und *Urysohn*, Verhandelingen Amsterdam Ak. Deel XIV, No. 1 (1929).

topologische Raum normal[51]) und wegen seiner Metrisierbarkeit (siehe Nr. 17) auch vollständig normal.

Die Bedeutung der Normalität liegt in ihrer engen Beziehung zur Existenz stetiger Funktionen und der damit zusammenhängenden Metrisierbarkeit (vgl. Nr. 17).

15. Beziehungen zwischen den verschiedenen Arten allgemeiner Räume. Zwischen den in den Nrn. 6—8 erklärten Begriffen des Limes-, Häufungs- und Umgebungsraumes bestehen enge Beziehungen, derart, daß viele Räume der einen Art zugleich als Räume einer anderen Art angesehen werden können. So kann man in jedem topologischen Raum $\mathfrak{T}$ Limesbeziehungen erklären durch folgende Festsetzung[52]): $\lim P_\nu = P_0$ soll dann und nur dann gelten, wenn in jeder $\mathfrak{U}(P_0)$ fast alle Elemente P_ν liegen (d. h. alle von einem geeigneten ν an). Diese Festsetzung erfüllt offenbar die Forderungen I., II. von Nr. 6, es ist also damit dem topologischen Raum $\mathfrak{T}$ ein bestimmter Limesraum $\mathfrak{L}$ zugeordnet. Umgekehrt aber kann, allgemein gesprochen, aus $\mathfrak{L}$ und seinen Limesbeziehungen nicht eindeutig auf $\mathfrak{T}$ und seine Umgebungsbeziehungen rückgeschlossen werden. (Erklärt man z. B. in einer Menge $\mathfrak{M}$ als $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{M})$ jede P enthaltende Teilmenge von $\mathfrak{M}$, so gilt $\lim P_\nu = P$ nur, wenn $P_\nu = P$ für $\nu > \nu_0$. Dieselben Limesbeziehungen können aber auch ganz anderen Umgebungsbeziehungen in $\mathfrak{M}$ entspringen; vgl. etwa das Beispiel bei *Hausdorff*[22]), p. 264.) Ist die eindeutige Abbildung A eines topologischen Raumes $\mathfrak{T}$ auf eine Punktmenge eines anderen topologischen Raumes $\mathfrak{T}'$ umgebungsstetig, so ist sie auch limesstetig im Hinblick auf die aus den Umgebungsbeziehungen fließenden Limesbeziehungen: das Umgekehrte braucht nicht zu gelten. Ist A eine umgebungstopologische Abbildung, so ist sie auch eine limestopologische.

Einfacher liegen die Dinge in dem wichtigen Falle eines das Axiom $(\overline{E})$ erfüllenden topologischen Raumes $\mathfrak{T}$. Ist nämlich aus einem solchen Raum $\mathfrak{T}$ in der obigen Weise der Limesraum $\mathfrak{L}$ entsprungen, so gibt es außer $\mathfrak{T}$ keinen anderen das Axiom $(\overline{E})$ erfüllenden topologischen Raum, dem gleichfalls der Limesraum $\mathfrak{T}$ entspringen könnte. Es ist nämlich $\mathfrak{T}$ eindeutig aus dem durch $\mathfrak{T}$ bestimmten Limesraum $\mathfrak{L}$ bestimmbar; denn die Umgebungen $\mathfrak{U}(P_0)$ eines Punktes P_0 lassen

51) *A. Tychonoff*, Math. Ann. 95 (1925), p. 139—142.

Es gibt reguläre, dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügende, nicht-normale topologische Räume. Dagegen scheint es eine ungelöste Frage, ob ein kompakter, dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügender (also regulärer) topologischer Raum normal sein muß.

52) Vgl. *F. Hausdorff*[22]), p. 233.

sich mit Hilfe der Folgen $P_1, P_2, \ldots, P_\nu, \ldots$ mit dem Limes P_0 kennzeichnen als diejenigen Mengen, die man erhält, wenn man von jeder solchen Folge eine Restfolge $P_{\nu+1}, P_{\nu+2}, \ldots$ und die Menge *aller* in diesen Restfolgen auftretenden Punkte bildet. Für solche Räume $\mathfrak{T}$ fallen die umgebungsstetigen Abbildungen von $\mathfrak{T}$ mit den limesstetigen zusammen, desgleichen die umgebungstopologischen mit den limestopologischen.

Es gibt Limesräume, die nicht aus Umgebungsräumen in der oben angegebenen Weise herleitbar sind.[53]) — Definiert man, ausgehend von einem Umgebungsraum $\mathfrak{T}$ so wie in Nr. 3 Häufungspunkte, so erhält man einen Raum $\mathfrak{H}$ (Nr. 7); der Ausgangsraum $\mathfrak{T}$ ist eindeutig aus dem Raum $\mathfrak{H}$ bestimmbar. Denn die Umgebungen $\mathfrak{U}(P_0)$ eines Punktes P_0 lassen sich als jene Mengen kennzeichnen, deren Komplementärmengen den Punkt P_0 weder enthalten noch zum Häufungspunkt haben. Die so aus Umgebungsräumen herleitbaren Räume $\mathfrak{H}$ sind aber nicht die allgemeinsten. — Definiert man, ausgehend von einem Limesraum so wie in Nr. 3 Häufungspunkte, so erhält man einen den Axiomen II 1, 2, 3 [nicht allemal[54]) auch 4] von Nr. 7 genügenden Raum. Wieder sind die so herleitbaren Räume $\mathfrak{H}$ nicht die allgemeinsten.[54a]) Zusammengefaßt gilt: *Von den drei Begriffen allgemeiner Räume aus* Nr. 6, 7, 8 *umfaßt keiner völlig den anderen.*[54])[54a])

16. Metrische Räume. Gleichmäßige Stetigkeit. Ein besonders wichtiger Fall von Räumen, welche zugleich Limes- und Umgebungsräume sowie Räume $\mathfrak{H}$ sind, ist der der „metrischen Räume“.[55]) So heißt nach *Hausdorff* eine Menge $\mathfrak{M}$, wenn in ihr Abstandsbeziehungen gegeben sind durch Festsetzungen folgender Art:

I. Jedem Paar P, Q von Elementen („Punkten“) aus $\mathfrak{M}$ ist eindeutig eine nicht-negative reelle Zahl zugeordnet, die ihr „Abstand“ oder ihre „Entfernung“ heißt und mit $\overline{PQ}$ bezeichnet wird.

53) Über Untersuchungen von *M. Fréchet* über gewisse Umgebungsbeziehungen in Limesräumen vgl. II C 9, Anm. 516 b.

54) *F. Hausdorff*[22]), p. 266.

54a) Vgl. *F. Riesz*[19]), p. 20.

55) Der Begriff wurde zuerst von *M. Fréchet*[9]) unter der Bezeichnung „classe (E)“ eingeführt. Über die Theorie dieser Räume vgl. noch *F. Hausdorff*, Grundz., p. 290 ff., Mengenlehre 1927, p. 94 ff. und *H. Hahn*, Reelle F., Kap. 1, 2. — Statt „classe (E)“ hat *M. Fréchet* später „classe (D)“ gesagt. Über sonstige Bezeichnungen für verschiedene Arten von Räumen vgl. II C 9, p. 1018/20. Vgl. ferner *D. Pompeju*, Tôhoku Math. J. 11 (1917), p. 229. — Als ein Beispiel für die Bildung eines metrischen Raumes sei die Einführung von Abständen zwischen den Flächen des dreidimensionalen Raumes erwähnt: *M. Fréchet*, Ann. Soc. Math. Pol. 3 (1924), p. 4—19. Über Abstände zwischen meßbaren Mengen s. *T. Ważewski*, Paris C. R. 176 (1923[1]), p. 69—70.

II. Dabei sind folgende Forderungen („Abstandsaxiome") erfüllt:

1. $\overline{PQ} = \overline{QP}$;

2. $\overline{PQ}$ ist gleich 0, dann und nur dann, wenn $P = Q$;

3. für irgend drei Punkte P, Q, R gilt stets $\overline{PQ} + \overline{QR} \geqq \overline{PR}$ („Dreiecksungleichung").[55a])

Jeder metrische Raum $\mathfrak{D}$ ist zugleich ein Umgebungsraum vermöge der Festsetzung (vgl. Nr. **3**): Umgebung eines Punktes P heißt jede Menge aus $\mathfrak{D}$, in der eine sphärische Umgebung von P enthalten ist, d. h. die Menge aller Punkte X mit $\overline{PX} < \varrho$ (wo $\varrho > 0$). Man sieht leicht, daß $(\overline{A})$, $(\overline{B})$, $(\overline{C})$, $(\overline{D})$ für die so definierten Umgebungen erfüllt sind, desgleichen auch $(\overline{E})$, wie die Betrachtung der sphärischen Umgebungen von P mit rationalem ϱ zeigt.[56]) Leitet man aus diesen Umgebungsbeziehungen eines metrischen Raumes gemäß Nr. **15** Limesbeziehungen ab, so ist dies gleichbedeutend mit der Festsetzung:

$$\lim_{\nu=\infty} P_\nu = P_0, \quad \text{wenn} \quad \lim_{\nu=\infty} \overline{P_0 P_\nu} = 0, \tag{3}$$

durch welche *Fréchet* die metrischen Räume der Theorie der Limesräume einordnet.[57]) — Gemäß der Abstandsdefinition in Nr. **3** ist jede Punktmenge eines $\mathfrak{R}^n$ ein metrischer Raum.

Eine eindeutige Abbildung A eines metrischen Raumes $\mathfrak{D}$ auf einen anderen $\mathfrak{D}'$ oder auf eine Teilmenge von $\mathfrak{D}'$ (ist speziell $\mathfrak{D}' = \mathfrak{R}^1$, so handelt es sich um eine „reelle Funktion" $f(P)$ in $\mathfrak{D}$) ist stetig (und zwar sowohl limes- als umgebungsstetig) dann und nur dann, wenn es zu jedem Punkt P_0 von $\mathfrak{D}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, P_0) > 0$ gibt, so daß $\overline{P_0' P'} < \varepsilon$ gilt für die Bildpunkte P' aller jener Punkte P, für welche $\overline{P_0 P} < \delta$. Wenn es im besonderen zu jedem $\varepsilon > 0$ ein für alle P_0 (bzw. für alle P_0 einer Teilmenge $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{D}$) gemeinsam brauchbares $\delta = \delta(\varepsilon)$ gibt, so heißt A *gleichmäßig stetig*[58]) in $\mathfrak{D}$ (bzw. $\mathfrak{P}$).

Werden in einer Menge $\mathfrak{M}$ auf zwei verschiedene Weisen Abstandsbeziehungen festgesetzt, so kann es sein, daß die daraus fließenden Umgebungs- und Limesbeziehungen die gleichen sind, also der-

55a) Nach *A. Lindenbaum,* Fund. math. 8 (1926), p. 211 wird Axiom 1 überflüssig, wenn man $\overline{QP} + \overline{QR} \geqq \overline{PR}$ an Stelle von 3 fordert.

56) Vgl. die analogen Betrachtungen bei *F. Hausdorff*[22]), p. 213/14, 262.

57) Vgl. II C 9, p. 1018.

58) Es wird hier also der Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit nur bei Zugrundelegung von Abstandsbeziehungen erklärt. Vgl. dazu auch *F. Klein,* Gesammelte math. Abhandlungen, I (1921), p. 243 und *F. Hausdorff*[22]), p. 290, § 6). Neuerdings wurde die gleichmäßige Stetigkeit, ebenso die gleichmäßige Konvergenz von Funktionen-(Abbildungs-)Folgen auch ohne Zugrundelegung einer Metrik von *W. Sierpiński,* Wektor 2 (1913), p. 353—355, und *L. Vietoris,* Monatsh. Math. Phys. 32 (1922), p. 267 ff. betrachtet.

selbe allgemeine Raum definiert wird. Wir sprechen dann von *topologisch äquivalenten* Abstandsbeziehungen. Sie liegen dann und nur dann vor, wenn die beiderlei sphärischen Umgebungen gleichwertige Umgebungssysteme (im Sinne *Hausdorffs*, vgl. Nr. 9) darstellen. Das aber ist, unter $\overline{PQ}$ und $\widehat{PQ}$ die beiden Abstände verstanden, gleichbedeutend damit, daß sowohl in dem durch die Abstände $\overline{PQ}$ definierten metrischen Raum für jedes P_0 der Abstand $\widehat{P_0P}$ eine stetige Funktion von P ist, als auch umgekehrt $\overline{P_0P}$ im Raum der $\widehat{PQ}$.[59]) Wenn es im besonderen zu jedem $\varepsilon > 0$ ein von P_0 unabhängiges $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gibt, so daß $\widehat{P_0P} < \varepsilon$ für $\overline{P_0P} < \delta$ und $\overline{P_0P} < \varepsilon$ für $\widehat{P_0P} < \delta$, dann sprechen wir von *gleichmäßig äquivalenten* Abstandsbeziehungen. Nimmt man z. B. $\mathfrak{M} = \mathfrak{R}^n$ und setzt $\varrho = \varrho(P_0, P_1)$ gleich dem in Nr. 3 erklärten gewöhnlichen Abstand, so stellen (unter O den Ursprung verstanden) $\frac{\varrho(P_0 P_1)}{1 + \varrho(OP_0) + \varrho(OP_1)}$, $\sum_h |\xi_{1h} - \xi_{0h}|$ (der „écart"[60])), Max. $|\xi_{1h} - \xi_{0h}|$ (die „Spanne"[61])) drei mit ϱ topologisch äquivalente Abstandsbeziehungen vor, von denen aber nur die beiden letzten mit ϱ gleichmäßig äquivalent sind. Zwei Abstandsbeziehungen, die einer dritten äquivalent (bzw. gleichmäßig äquivalent) sind, sind es auch untereinander. Ist die Abbildung eines metrischen Raumes $\mathfrak{D}$ auf einen anderen $\mathfrak{D}'$ (oder auf eine Teilmenge von $\mathfrak{D}'$) gleichmäßig stetig, so ist sie es auch, wenn die Abstandsbeziehungen in $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ durch gleichmäßig äquivalente ersetzt werden.

Wird in einem metrischen Raum für je zwei Punkte der Abstand ϱ ersetzt durch den topologisch äquivalenten $\varrho' = \frac{\varrho}{1+\varrho}$, so bleiben alle Abstände ϱ' unter der festen Schranke 1. Es ist also jeder metrische Raum einem „beschränkten" metrischen Raum homöomorph.[62])

Über Abstandsbeziehungen, die etwas allgemeiner gehaltenen Forderungen genügen, als die in II. 1.—3. genannten, vgl. II C 9.[62a])[62b])

---

59) Und zwar ergibt die Gleichwertigkeit der sphärischen Umgebungen zunächst, daß die beiden Abstände in der Umgebung der Null stetige Funktionen voneinander sind. Die übrige Stetigkeit folgt dann aus der Dreiecksungleichung.

60) *C. Jordan,* Cours d'analyse, t. 1, 2. éd. (1893), p. 18.

61) *H. Minkowski,* Geometrie der Zahlen, Leipzig 1896, p. 2.

62) *F. Hausdorff*[22]), p. 312.

62a) II C 9, p. 1017; ferner *V. W. Niemytzki,* Trans. Amer. 29 (1927), p. 507—514.

62b) Weitere Literatur über metrische Räume: *K. Menger,* Proceed. Amsterdam 29 (1926), p. 166—169; 30 (1927), p. 710—714; Math. Ann. 100 (1928), p. 75—163; Wien. Ak. Anz. 26. I., 3. V., 10. V. 1928; *W. L. Ayres,* Fund. math. 14 (1929), p. 334—338.

17. Metrisation. Von großer Bedeutung ist es, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür zu kennen, daß ein topologischer Raum „metrisierbar", d. h. einem metrischen Raum homöomorph ist.

M. Fréchet, bei dem die Frage[63]) zuerst auftaucht, vermutete auf Grund von *H. Hahns* Konstruktion[64]) einer nicht konstanten stetigen Funktion in allgemeinen V-Klassen (vgl. [66])), daß die Antwort in weitem Umfang bejahend sein werde. Tatsächlich wurde daran anschließend von *E. W. Chittenden*[65]) die Metrisation der Klassen V[66]) durchgeführt.

Eine besonders einfache Metrisation der rationalen regulären topologischen Räume gab auf dem Weg über die stetigen Funktionen *P. Urysohn*.

Er zeigte[67]), daß die Normalität (Nr. **13**) notwendig und hinreichend ist, damit in einem topologischen Raum zu je zwei fremden abgeschlossenen Mengen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ eine stetige Funktion $f(P)$ existiert, welche in allen Punkten von $\mathfrak{A}$ den Wert 0, in allen Punkten von $\mathfrak{B}$ den Wert 1 und in allen übrigen Punkten nur Zwischenwerte, 0 und 1 eingerechnet, annimmt.

Nun definiert man[68]), wenn noch das zweite Abzählbarkeitsaxiom ($\overline{F}$) vorausgesetzt wird (Nr. **12**), in folgender Weise einen die gegebenen Limesbeziehungen liefernden Abstand. $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots$ seien sämtliche als offen vorausgesetzten Umgebungen eines abzählbaren Fundamentalsystems. Zu irgend zwei Umgebungen $\mathfrak{U}_i$, $\mathfrak{U}_k$, für welche $\overline{\mathfrak{U}}_i \leqq \mathfrak{U}_k$ gilt, wählen wir zufolge des eben ausgesprochenen Satzes eine stetige Funktion $f_{ik}(x)$, welche in $\overline{\mathfrak{U}}_i$ überall $= 0$, außerhalb von $\mathfrak{U}_k$ überall $= 1$ ist und in $\overline{\mathfrak{U}}_k - \mathfrak{U}_i$ überall $\geqq 0$ und $\leqq 1$ ist. Diese f_{ik} seien, in eine Folge geordnet, die Funktionen $f_1, f_2, f_3, \ldots$. Die Funktion des Punktepaares (P, Q)

$$\varrho(P, Q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(P) - f_n(Q)|$$

ist dann ein Abstand der verlangten Art.

63) *M. Fréchet,* Palermo Rend. 30 (1910), p. 23; Trans. Am. Math. Soc. 19 (1918), p. 53. Vgl. ferner *E. W. Chittenden,* Palermo Rend 45 (1921), p. 265. Ein einfaches Beispiel einer explizit durchgeführten Metrisierung findet sich bei *H. Tietze,* Math. Ann. 87 (1922), p. 150.

64) *H. Hahn*, Monatsh. Math. Phys. 19 (1908), p. 247—257. Über V-Klassen siehe II C 9, p. 1017.

65) *E. W. Chittenden,* Trans. Am. Math. Soc. 18 (1917), p. 161—166.

66) Anstatt „Klassen V" sagt *Fréchet* in seinen späteren Arbeiten „Räume E"; vgl. II C 9, Anm. 516b. Über *Fréchets* neue „Räume V" vgl. [25]).

67) *P. Urysohn,* Math. Ann. 94 (1925), p. 290. Hierzu vgl. *E. W. Chittenden,* Bull. Am. Math. Soc. 33 (1927), p. 17, Trans. Am. Math. Soc. 31 (1929), p. 309—321.

68) *P. Urysohn,* Math. Ann. 94 (1925), p. 309—315; siehe auch Bull. Acad. Polon. 1923, p. 13—16.

Weil nun jeder rationale reguläre topologische Raum normal ist (vgl. [51]), kann man also sagen: *Jeder rationale reguläre Raum ist metrisierbar.* Eine teilweise Umkehrung besteht darin, daß jeder metrische (und damit jeder metrisierbare) Raum regulär ist (sogar $(\overline{D}_4)$ befriedigt) und dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt. Man kann auch sagen: Ein rationaler Raum ist dann und nur dann metrisierbar, wenn er regulär ist.

Da jeder kompakte rationale Raum regulär ist[69]), gilt auch: *Jeder kompakte rationale topologische Raum ist metrisierbar.*[70]) Umgekehrt ist jeder kompakte metrische Raum rational.

Als notwendige und hinreichende Bedingung für die Metrisation eines beliebigen topologischen Raumes haben *P. Alexandroff* und *P. Urysohn*[71]) die Möglichkeit der Einführung eines Systems von in bestimmter Weise gleichmäßig beliebig fein werdenden Überdeckungen erkannt. Sie besteht in folgendem:

Es läßt sich eine Folge von Überdeckungen $\{\mathfrak{U}_A^{(1)}, \mathfrak{U}_B^{(1)}, \ldots\}$, $\{\mathfrak{U}_{A'}^{(2)}, \mathfrak{U}_{B'}^{(2)}, \ldots\}, \ldots$ angeben, in denen die $\mathfrak{U}_X^{(k)}$ alle offen sind, so daß a) zu je zwei Mengen $\mathfrak{U}_A^{(n)}$, $\mathfrak{U}_B^{(n)}$, deren Durchschnitt nicht leer ist, ein $\mathfrak{U}_C^{(n-1)}$ existiert, so daß $\mathfrak{U}_A^{(n)} \dotplus \mathfrak{U}_B^{(n)} \leqq \mathfrak{U}_C^{(n-1)}$ ist, b) jede Folge $\mathfrak{U}_A^{(1)}, \mathfrak{U}_B^{(2)}, \mathfrak{U}_C^{(3)}, \ldots$ entweder einen leeren Durchschnitt hat oder mit der Folge der Umgebungen eines Punktes X gleichwertig ist.[72])

Eine der geschilderten Entwicklung analoge findet sich in Arbeiten von *E. W. Chittenden* und *A. D. Pitcher.*[73])[76]) Sie gehen zur Gewinnung eines Raumbegriffes von dem Begriff des „development" im Sinn von *E. H. Moore*[74]) aus. Ein development Δ ist ein System von Teilmengen $\mathfrak{P}^{ml}$ einer Menge $\mathfrak{M}$, wo m und l natürliche Zahlen sind.[75]) Alle $\mathfrak{P}^{ml}$ mit festem m bilden den m^{ten} Staffel (stage); der

69) Vgl. Nr. **14**.

70) Dieser Satz folgt auch unmittelbar aus älteren Arbeiten [*E. W. Chittenden,* Trans. Amer. 18 (1917), p. 161—166, und *L. Vietoris,* Monatsh. Math. Phys. 32 (1922), p. 271 f.], wurde aber von *Urysohn* zuerst ausgesprochen und eigens bewiesen [Math. Ann. 92 (1924), p. 275—293]. Zu *Vietoris,* l. c. p. 271 vgl. die Berichtigung Monatsh. Math. Phys. 35 (1928), p. 163.

71) *P. Alexandroff-P. Urysohn,* Paris C. R. 177 (1923), p. 1274. Hier finden sich auch notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß ein *Limes*raum einem metrischen Raum homöomorph ist.

72) a) und b) sind voneinander unabhängig; vgl. *V. W. Niemytzki,* l. c. [76]).

73) *E. W. Chittenden* und *A. D. Pitcher,* Trans. Amer. 20 (1919), p. 213. Vgl. C II 9a, Anm. 512, 516.

74) *E. H. Moore,* New Haven Math. Colloquium 1910, p. 1—150.

75) Von belanglosen Fällen abgesehen treten dabei unendlich viele Zahlenpaare m, l auf.

zweite Zeiger unterscheidet die Elemente eines Staffels voneinander. Für ein beliebiges Element P von $\mathfrak{M}$ sei nun $\mathfrak{V}_P^m = \sum\limits_{m' \geqq m,\, P \text{ in } \mathfrak{P}^{m' l}} \mathfrak{P}^{m' l}$, d. h. die Vereinigung aller P enthaltenden Mengen $\mathfrak{P}^{m' l}$ aller Staffel vom m^{ten} an. Diese $\mathfrak{V}_P^m$ spielen die Rolle von Umgebungen des „Punktes P" in dem zu definierenden Raum und geben Anlaß zur Einführung eines Distanzbegriffes. Die beiden Autoren stellen und beantworten nun Fragen nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen, welchen ein development genügen muß, damit der dadurch definierte Raum gewisse Eigenschaften hat (Einzigkeit des Limes, Gültigkeit des *Heine-Borel-Lebesgue*schen Überdeckungssatzes, Existenz stetiger Funktionen, Existenz eines bezüglich der Limesbeziehungen äquivalenten Abstandes). Unter anderen steht hier bereits der folgende allgemeine Satz über die Metrisierbarkeit eines topologischen Raumes: Damit ein topologischer Raum einem kompakten metrischen Raum homöomorph sei, ist notwendig und hinreichend, daß a) im Raum der *Heine-Borel*sche Satz gilt, b) zu jedem P eine Folge von Umgebungen $\mathfrak{U}_1(P)$, $\mathfrak{U}_2(P)$, ... existiert, so daß für jede Folge $P_1, P_2, \ldots$ die Folge $\mathfrak{U}_1(P_1), \mathfrak{U}_2(P_2), \ldots$ höchstens einen Punkt als Durchschnitt hat. Ferner untersuchen *Chittenden* und *Pitcher*[76]) die Tragweite verschiedener Abschwächungen des Dreiecksaxioms und zeigen unter anderem, daß aus dem Vorhandensein eines „Abstandes", der, statt dem Dreiecksaxiom zu genügen, bloß „coherent" ist (aus $\lim\limits_{i=\infty} AB_i = 0 = \lim\limits_{i=\infty} B_i C_i$ folgt $\lim\limits_{i=\infty} A C_i = 0$), auf einen metrischen Abstand geschlossen werden kann, der dieselben Limesbeziehungen liefert.[77])

18. Metrische Vollständigkeit. Ein metrischer Raum heißt *vollständig*[78]), wenn in ihm jede dem *Cauchy*schen Konvergenzkriterium genügende Punktfolge einen Limes hat. Jeder metrische Raum ist überall dichter Teilraum eines metrisch vollständigen Raumes und zwar nur auf eine Weise.[79])

Metrische Vollständigkeit ist keine topologische Eigenschaft, d. h. von zwei zueinander homöomorphen metrischen Räumen kann der eine vollständig sein, der andere nicht, z. B. die Euklidische Ebene und die punktierte Kugel. Wohl aber ist es eine topologische Eigenschaft eines topologischen Raumes, wenn es einen zu ihm homöo-

---

76) *E. W. Chittenden-A. D. Pitcher,* Trans. Amer. 19 (1918), p. 66—78. Vgl. ferner *V. W. Niemytzki,* Trans. Am. Math. Soc. 29 (1927), p. 507—513.

77) Weitere Literatur zur Metrisation: *D. v. Dantzig-B. L. v. d. Waerden,* Abh. Hamb. Math. Sem. 6 (1928), p 367—376.

78) Begriff von *M. Fréchet,* Palermo Rend. 22 (1906), p. 23.

79) *Hausdorff,* Grundz., p. 315.

morphen vollständigen Raum gibt, ebenso wenn jeder zu ihm homöomorphe metrische Raum vollständig ist. Letzteres ist die Kompaktheit[79a]), ersteres die Eigenschaft ein „absolutes G_δ"[80]) zu sein, d. h. eine Menge, derart daß jede in einem vollständigen Raum gelegene zu ihr homöomorphe Menge ein G_δ dieses Raumes ist.[81])

Jede Homöomorphie zwischen zwei Punktmengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ läßt sich zu einer Homöomorphie zwischen zwei absoluten G_δ-Mengen erweitern[81a]), d. h. es gibt zwei vollständige Räume $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ und eine topologische Abbildung T von $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{Q}$, ferner eine zu $\mathfrak{A}$ homöomorphe Menge $\mathfrak{A}'$ in $\mathfrak{P}$, eine zu $\mathfrak{B}$ homöomorphe Menge $\mathfrak{B}'$ in $\mathfrak{Q}$, derart daß $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ einander in der Abbildung T entsprechen.

In separabeln, metrisch vollständigen Räumen ist jede perfekte nicht leere Menge (*Cantor*) und jedes G_δ mit in sich dichtem Teil (*Young*)[82]), allgemeiner jede nicht abzählbare *Borel*sche Menge[82a]), weil sie einen nicht leeren perfekten Teil enthält, von der Mächtigkeit des Kontinuums.[83])

Jeder separable metrische Raum ist zu einer Teilmenge des durch $|x_i| \leqq \frac{1}{i}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ definierten in sich kompakten Teiles des

79a) *V. Niemytzki-A. Tychonoff,* Fund. math. 12 (1928), p. 118—120.

80) G_δ in einem allgemeinen Raum $\mathfrak{R}$ = Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen von $\mathfrak{R}$, analog F_σ = Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen, *Hausdorff,* Grundz., p. 305. G_δ zu sein, ist an sich natürlich keine absolute topologische Eigenschaft. Über die Invarianz in Euklidischen Räumen vgl. *S. Mazurkiewicz,* Bull. Ac. Cracovie, sér. A 1916 (1917), p. 490—494; *W. Sierpiński,* Fund. math. 6 (1924), p. 21—30, 24—29 und 106—110, wo auch allgemeinere Sätze bewiesen werden, ferner ib. 8 (1926), p. 135 und *M. Lavrentieff,* ib. 6 (1924), p. 151. Vgl. *M. Souslin,* Fund. math. 5 (1924), p. 155, den Bericht von *W. Sierpiński,* Über Funktionen und Mengen, Rivista Hispan. Amer. 1925, und *F. Hausdorff,* Mengenl. 1927, p. 82 ff.

81) Dieses Zusammenfallen der absoluten G_δ mit den vollständigen Räumen wurde zuerst von *P. Alexandroff,* Paris C. R. 178 (1924), p. 185, für separable Mengen, im Anschluß daran von *F. Hausdorff,* Fund. math. 6 (1924), p. 146—148, allgemein bewiesen. Vgl. auch *M. Fréchet,* Paris C. R. 176 (1923[1]), p. 977—978, Bull. scienc. math. (2) 49 (1925) 1. part., p. 100—103; *Hausdorff,* Mengenl. 1927, p. 214; *W. Sierpiński,* Fund. math. 11 (1928), p. 203.

81a) *M. Lavrentieff,* Paris C. R. 178 (1924[1]), p. 187, Fund. math. 6 (1924), p. 149; vgl. auch *Hausdorff,* Mengenl. 1927, p 216 und *W. Sierpiński,* Paris C. R. 178 (1924[1]), p. 545.

82) Vgl. *Hausdorff,* Grundz., p. 318.

82a) Über *Borel*sche Mengen s. II C 9, p. 890.

83) *P. Alexandroff,* Paris C. R. 162 (1916), p. 323—325; *F. Hausdorff,* Math. Ann. 77 (1916), p. 430—437. Vgl. ferner *W. Hurewicz,* Fund. math. 12 (1928), p. 78—109.

*Hilbert*schen Raumes[84]) homöomorph.[85]) Es gilt aber noch mehr: Es gibt einen vollständigen, metrischen, separabeln Raum $\mathfrak{U}$ (Universalraum), derart, daß jeder separable metrische Raum zu einem Teil von $\mathfrak{U}$ sogar kongruent, d. i. entfernungstreu homöomorph ist.[86]) $\mathfrak{U}$ wird durch Vervollständigung eines abzählbaren metrischen Raumes $\mathfrak{U}_0$ konstruiert, dessen Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ der Reihe nach eingeführt und gegenseitig durch solche Entfernungen verbunden werden, daß zu irgendwelchen endlich vielen Punkten $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_s}$ von $\mathfrak{U}_0$ und ebenso vielen rationalen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ ein Punkt A_{n_0} in $\mathfrak{U}_0$ mit den Entfernungen $\overline{A_{n_0}A_{n_1}} = \alpha_1$, $\overline{A_{n_0}A_{n_2}} = \alpha_2, \ldots, \overline{A_{n_0}A_{n_s}} = \alpha_s$ existiert, sobald diese Entfernungen mit den Entfernungen $\overline{A_{n_i}A_{n_k}}$ $(i, k \leqq s)$ und dem Dreiecksaxiom überhaupt verträglich sind. Der durch Vervollständigung von $\mathfrak{U}_0$ entstehende Raum $\mathfrak{U}$ ist in der Weise homogen, daß es zu irgend zwei kongruenten Teilmengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{U}$ eine entfernungstreue Abbildung von $\mathfrak{U}$ auf sich selbst gibt, die $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ überführt. Ferner ist $\mathfrak{U}$ der einzige metrische Raum, der die obige Eigenschaft eines metrischen Universalraumes hat und zugleich vollständig, separabel und homogen (im besprochenen Sinn) ist.

19. Topologie im Kleinen. Überlagerungsräume. Analog entsprechenden Unterscheidungen in anderen Gebieten (z. B. Differentialgeometrie im Großen und Kleinen) kann man auch neben der bisher besprochenen „Topologie im Großen“, die die Räume als Ganzes ins Auge faßt, eine „Topologie im Kleinen“ treiben, die sich — wie wir vorläufig sagen mögen — mit dem Charakter eines Raumes in beliebig kleiner Umgebung der einzelnen Punkte befaßt. Seien $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zwei topologische (Umgebungs-)Räume, P ein Punkt von $\mathfrak{M}$, Q einer von $\mathfrak{N}$. Dabei kann nach Nr. **11** jede Umgebung von P bzw. Q selbst als topologischer Raum betrachtet werden (Teilraum von $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{N}$). Dann wollen wir sagen, $\mathfrak{M}$ habe in P denselben Umgebungscharakter oder Umgebungstypus[87]) wie $\mathfrak{N}$ in Q, wenn es Umgebungen $\mathfrak{U}(P) = \mathfrak{U}(P|\mathfrak{M})$ und $\mathfrak{V}(Q) = \mathfrak{V}(Q|\mathfrak{N})$ gibt, die so aufeinander topo-

84) Über den *Hilbert*schen Raum vgl. II C 9, p. 1026.

85) *P. Urysohn,* Paris C. R. 178 (1924), p. 65 und Math. Ann. 92 (1924), p. 302—304. Ein analoges Resultat für einen anderen als den *Hilbert*schen Raum gibt *M. Fréchet,* Paris C. R. 178 (1924), p. 1782—1785. Vgl ferner *P. Urysohn,* C. R. Congrès Soc. sav. Dijon 1924; *M. Fréchet,* Paris C. R. 180 (1925), p. 419—421, Bull. scienc. math. (2) 49 (1925) 1. part., p. 297—301; *A. Tychonoff,* Paris C. R. 182 (1926), p. 1519—1520.

86) *P. Urysohn,* Paris C. R. 180 (1925), p. 803; Bull. Sc. Math. (2) 51 (1927), p. 43—64, 74—90.

87) *Tietze,* Hambg. Sem., p. 7 [43], Anm. 4.

logisch abbildbar sind, daß dabei P und Q einander entsprechen.[88]) Seien $\mathfrak{U}_0(P)$, $\mathfrak{V}_0(Q)$ derartig homöomorph, A die bezügliche Abbildung. Wie man sofort sieht, gibt es dann zu *jeder* Umgebung $\mathfrak{U}_* = \mathfrak{U}_*(P)$ und *jeder* $\mathfrak{V}_* = \mathfrak{V}_*(Q)$ eine in $\mathfrak{U}_*$ enthaltene $\mathfrak{U}(P)$, sowie eine in $\mathfrak{V}_*$ enthaltene $\mathfrak{V}(Q)$, die in der angegebenen Weise (d. i. mit Entsprechen von P und Q) homöomorph sind (beispielsweise: $\mathfrak{U}(P) =$ Durchschnitt von $\mathfrak{U}_*$ mit dem Bild vermöge A^{-1} des Durchschnittes $\mathfrak{V}_0 \cdot \mathfrak{V}_*$; $\mathfrak{V}(Q)$ $=$ Durchschnitt von $\mathfrak{V}_*$ mit dem Bild vermöge A des Durchschnitts $\mathfrak{U}_0 \cdot \mathfrak{U}_*$). Dies zeigt, daß die Kenntnis einer einzigen beliebigen Umgebung von P unabhängig von dem übrigen Raum $\mathfrak{M}$ hinreicht, um den Umgebungscharakter von $\mathfrak{M}$ in P festzustellen.

Ein Raum $\mathfrak{T}$, welcher in sämtlichen Punkten denselben Umgebungstypus hat, heißt *topologisch-homogen.*[89]) Beispiele: die Kugelfläche; jeder $\mathfrak{R}^n$. — Hingegen ist, wie aus dem *Brouwer*schen Satz von der Invarianz des n-dimensionalen Gebietes[90]) folgt, der durch die Punktmenge $\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 \leqq 1$ des $\mathfrak{R}^n$ dargestellte Raum $\mathfrak{P}$ nicht homogen, da ein „*Randpunkt*" Q $\left(\sum \xi_i^2 = 1\right)$ in $\mathfrak{P}$ einen anderen Umgebungstypus hat, wie ein „*mittlerer Punkt*" P $\left(\sum \xi_i^2 < 1\right)$; man beachte, daß es sich mit dieser Unterscheidung um eine absolute topologische Eigenschaft (Nr. 2) von $\mathfrak{P}$ handelt, nicht um eine relative von $\mathfrak{P}$ bezüglich des $\mathfrak{R}^n$ (daß die Punkte P bzw. Q zugleich auch mit den inneren bzw. Begrenzungspunkten (Nr. 8) von $\mathfrak{P}$ im $\mathfrak{R}^n$ zusammenfallen, bleibt nämlich dabei außer Betracht, weil die nicht zu $\mathfrak{P}$ gehörigen Punkte des $\mathfrak{R}^n$ für die Umgebungen $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{P})$ und $\mathfrak{U}(Q|\mathfrak{P})$ keine Rolle spielen).[91])

---

88) Hierzu ist notwendig (nicht hinreichend), daß $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ *gleichen Mächtigkeitsgrad in der Umgebung* von P bzw. von Q im Sinne von *G. Cantor* haben (vgl. hierüber und über *Cantor*s Definition „homogener" Punktmengen: II C 9, p. 870, 873; die Definitionen beziehen sich dort auf den Fall von Punktmengen in einem $\mathfrak{R}^n$).

89) Die Homogenität in dem von *G. Cantor* (vgl. [88])) erklärten Sinn ist dazu notwendig (nicht hinreichend). Andere Arten von Homogenität betrachten *F. Hausdorff*[22]), p. 173; *L. E. J. Brouwer,* Proc. Ac. Amsterdam 20 (1917), p. 1194, Versl. 25 (1917), p. 1426 und *B. P. Haalmejer,* Versl. Amsterdam Akad. 28 (1919), p. 376, Math. Ztschr. 16 (1923), p. 92—102; *C. Kuratowski,* Fund. math. 3 (1922), p. 14—19; *E. B. van Vleck,* Trans. Am. Math. Soc. 9 (1908), p. 237; *E. Jacobsthal* und *K. Knopp,* Sitz.-Ber. Berlin. Math. Ges. 14 (1915), p. 121; *K. Knopp,* Math. Ann. 95 (1925), p. 411; *P. Urysohn,* Fund. math. 9 (1927), p. 121; *P. Urysohn, K. Menger*[267]), *D. v. Dantzig-B. L. v. d. Waerden*[77]). Über „homogen n-dimensional" vgl. [265]).

90) Vgl. II C 9, p. 954.

91) Der übliche Sprachgebrauch unterschied nicht zwischen den Begriffen des mittleren und des (im Sinn von Nr. 8 verstandenen) inneren Punktes und

Eine Art Rangordnung der verschiedenen Umgebungstypen gewinnt man, wenn man höhere, niedrigere und gleichhohe Umgebungstypen zweier Punkte P, Q definiert[92]), und zwar im Anschluß an analoge von *Fréchet* für die Topologie im Großen aufgestellte Gesichtspunkte.[93])

Eine eindeutige stetige Abbildung A eines Raumes $\overline{\mathfrak{T}}$ auf einem anderen $\mathfrak{T}$ heiße „topologisch im Kleinen", wenn es zu jedem Punkt $\overline{P}$ von $\overline{\mathfrak{T}}$ eine Umgebung $\overline{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U}(\overline{P}\,|\,\overline{\mathfrak{T}})$ gibt, so daß die Abbildung von $\overline{\mathfrak{U}}$ auf ihre Bildmenge in $\mathfrak{T}$ topologisch (1-1-deutig und umkehrbar stetig) ist. $\overline{\mathfrak{T}}$ heißt dann ein *Überlagerungsraum* von $\mathfrak{T}$. Von besonderer Bedeutung ist dieser Begriff, der als Spezialfall ($m = 1$) in dem der topologischen (m, n)-*Involution* enthalten ist, für die Theorie der Flächen und ihre funktionentheoretischen Anwendungen geworden („Überlagerungsflächen").[94])

20. Herstellung neuer topologischer Räume aus gegebenen. Nach Nr. **11** stellt jede Teilmenge eines topologischen Raumes selbst einen solchen dar. Ein Gegenstück zu diesem Verfahren zur Gewinnung neuer topologischer Räume hat man beispielsweise vor sich bei jeder Ergänzung eines gegebenen Raumes durch Hinzunahme uneigentlicher (unendlich ferner) Elemente, wobei meist angestrebt wird, daß der ergänzte Raum absolutkompakt (Nr. **6**) und homogen (Nr. **19**) ausfalle.[95])

Weitere Mittel zur Herstellung neuer Räume (Bildung von Summen-, Produkt- und Potenzraum) sind bekannten Verfahren der allgemeinen Mengenlehre zur Bildung neuer Mengen aus gegebenen analog.

---

verwendete „innerer Punkt" in beiderlei Sinn. Auch das Wort „Rand" wurde oft synonym mit „Begrenzung" gebraucht; über andere Bedeutungen des Wortes Rand vgl. Nr. **32** („Randstück") und II C 9, p. 881, 927.

92) Vgl. *H. Tietze*[87]), p. 4 [40] sowie auch Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. 29 (1920), p. 103 und 112 (Anm. 21) und *T. Ważewski*, Ann. Soc. Math. Polon. 2 (1923), p. 54 (Definition einer Dimension „in micro").

93) Vgl. II C 9, p. 952 und Anm. 234a des vorliegenden Artikels. Die Frage des Vergleichs von Umgebungstypen (Vergleich von „lokalen Dimensionen") hat *M. Fréchet* neuerdings behandelt in Fund. math. 11 (1928), p. 287—290.

94) Vgl. die funktionentheoretischen Artikel (siehe [*])) sowie *H. Weyl*, R. Fl., p. 47. Die obige Definition betrifft die „unverzweigten" Überlagerungsflächen (-räume). Über Involutionen vgl. [189]).

95) Vgl. die allgemeinen Bemerkungen über solche Einführungen bei *E. Study*, Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, Abschn. III, § 27; ferner hinsichtlich der Erweiterung der topologischen Räume: *F. Riesz*[19]), p. 23; *H. Tietze*, Math. Ann. 91 (1924), p. 210/24; *P. Alexandroff*, ib. 92 (1924), p. 296; *M. Fréchet*, Fund. math. 10 (1927), p. 343, 14 (1929), p. 120; vgl. auch [183a]) über die hiermit verwandten Einbettungsprobleme.

Ist eine beliebige Menge paarweise punktfremder topologischer Räume $\mathfrak{T}', \mathfrak{T}'', \ldots$ gegeben, so wird als ihr *Summenraum*[96]) $\mathfrak{T}$ derjenige Raum bezeichnet, zu dessen Punkten jeder Punkt P eines jeden der Räume $\mathfrak{T}', \mathfrak{T}'', \ldots$ gezählt wird, wobei, wenn P etwa zu $\mathfrak{T}'$ gehört, als $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T})$ jede eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}')$ enthaltende Teilmenge von $\mathfrak{T}$ erklärt wird.

Sind $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$ zwei topologische Räume, so versteht man unter dem *Produktraum*[97]) die Menge aller Paare von Punkten (X_1, X_2), von denen X_1 in $\mathfrak{T}_1$ und X_2 in $\mathfrak{T}_2$ liegt, wobei als Umgebung eines Paares (X_1^0, X_2^0) jede Produktmenge[98]) einer Umgebung $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(X_1^0 | \mathfrak{T}_1)$ mit einer Umgebung $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}(X_2^0 | \mathfrak{T}_2)$ erklärt wird, sowie jede eine solche Produktmenge umfassende Menge von Paaren (X_1, X_2). Ist in $\mathfrak{T}_1$ ein Abstand $d_1(X_1, Y_1)$, in $\mathfrak{T}_2$ ein Abstand $d_2(X_2, Y_2)$ erklärt, so ist z. B. $d((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) = \sqrt{d_1(X_1, Y_1)^2 + d_2(X_2, Y_2)^2}$ ein Abstand im Produktraum. Sind $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$ etwa Kreise, so ist ihr Produkt ein Torus. Ist $\mathfrak{T}_1$ mit $\mathfrak{T}_1'$, $\mathfrak{T}_2$ mit $\mathfrak{T}_2'$ homöomorph, so ist auch das Produkt von $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ mit dem von $\mathfrak{T}_1'$ und $\mathfrak{T}_2'$ homöomorph. Diese Multiplikation kann daher als eine Multiplikation von Homöomorphietypen aufgefaßt werden. Als solche ist sie kommutativ und zur Summenbildung distributiv. Die wichtigste Anwendung des Begriffs des Produktraumes ist die Definition des n-dimensionalen Zahlenraumes $\mathfrak{R}^n$ als der n^{ten} Potenz des eindimensionalen Zahlenraumes $\mathfrak{R}^1$. Da dieser rein topologisch definiert worden ist[99]), hat man damit eine rein topologische Definition des $\mathfrak{R}^n$.[100]) Allerdings sind in einem so definierten $\mathfrak{R}^n$ zunächst gewisse Mengen („achsenparallele Gerade") ausgezeichnet.

Der *Potenzraum* eines Raumes $\mathfrak{T}$, ein Analogon zur Potenzmenge (Menge aller Untermengen) in der allgemeinen Mengenlehre, wird als ein Raum $\mathfrak{r}$ definiert, dessen Elemente die *abgeschlossenen* Mengen

---

96) Vgl. [30]) p. 298.

97) Vgl. für zwei und damit für endlich viele Faktoren: *E. Steinitz,* Sitz.-Ber. Berlin. Math. Ges. 7 (1907), p. 42; *M. Fréchet,* Math. Ann. 68 (1910), p. 146; *R. E. Root,* Amer. Math. J. 36 (1914), p. 90; *L. Vietoris,* Monatsh. Math. Phys. 33 (1923), p. 53; für eine beliebige Menge von Faktoren: *H. Tietze*[96]). Man kann auch Produkte von Umgebungstypen (Nr. **19**) bilden. Vgl. l. c. [87]), p. 5 [41], p. 7 [43].

98) Produktmenge $\mathfrak{U}\mathfrak{V}$ = Menge von Paaren (X_1, X_2), wo X_1 in $\mathfrak{U}$, X_2 in $\mathfrak{V}$ liegt.

99) Vgl. II C 9 a, p. 910; *A. Fraenkel,* Mengenlehre 1923, p. 119, 120. Vgl. auch [282]).

100) *H. Tietze,* Hamb. Sem., p. 5 [41]. Eine andere Charakterisierung des $\mathfrak{R}^n$ gab *P. Alexandroff,* Math. Ann. 94 (1925), p. 296—308. Über den $\mathfrak{R}^2$ vgl. noch *R. L. Moore*, Trans. Am. Math. Soc. 17 (1916), p. 131—164; 20 (1919), p. 169—178; *D. W. Woodard*[45]). Vgl. ferner [148]).

von $\mathfrak{T}$ sind. Wir begnügen uns, die Definition für einen *beschränkten metrischen* Raum anzugeben. Der Potenzraum $\mathfrak{t}$ wird dann selbst als ein (beschränkter) metrischer Raum erklärt, indem unter dem Abstand $\varrho(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ zweier abgeschlossener[101]) Mengen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ (*Mengenabstand*) die untere Grenze aller Zahlen ϱ verstanden wird, für welche es zu jedem Punkt P von $\mathfrak{A}$ einen Punkt Q von $\mathfrak{B}$ gibt, so daß der Abstand zwischen P und Q nicht größer als ϱ ist, und zu jedem Punkt Q' von $\mathfrak{B}$ einen Punkt P' von $\mathfrak{A}$, so daß der Abstand zwischen P' und Q' nicht größer als ϱ ist.[102])

Die auf Grund dieses Abstandes definierten Limes- und Häufungsbeziehungen zwischen Mengen eignen sich wegen der bekannten Eigenschaften dieser Beziehungen besser zum Studium von Folgen von Mengen und Mengen von Mengen als die älteren Begriffe der oberen und unteren Näherungsgrenze (II C 9a, Anm. 272, 272a), die sich übrigens nur auf Folgen von Mengen beziehen und nicht einmal *Fréchets* Limesaxiome erfüllen. Ist $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n, \ldots$ eine Folge abgeschlossener Mengen eines kompakten metrischen Raumes $\mathfrak{T}$, d. h. eine Punktfolge im Potenzraum $\mathfrak{t}$ von $\mathfrak{T}$, und bildet man in $\mathfrak{t}$ die Menge aller konvergenten Teilfolgen dieser Punktfolge und die Menge $\mathfrak{m}$ aller Limiten dieser Teilfolgen (diese Limiten sind also selbst abgeschlossene Mengen in $\mathfrak{T}$)', dann ist der Durchschnitt dieser Limiten die untere Näherungsgrenze, ihre Vereinigung die obere Näherungsgrenze der Folge der $\mathfrak{A}_n$. In nicht kompakten Räumen ist der Zusammenhang schwächer.[103])

Der Potenzraum eines allgemeinen topologischen Raumes $\mathfrak{T}$ ist regulär und lückenlos, ist kompakt und separabel, genügt dem ersten Abzählbarkeitsaxiom, genügt dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom, ist zusammenhängend, ist im Kleinen zusammenhängend (vgl. [193])), wenn

---

101) Würde man diese Abstandsdefinition auch auf nicht abgeschlossene Mengen anwenden, so erhielten zwei verschiedene Mengen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ mit derselben abgeschlossenen Hülle den Abstand Null voneinander. Axiom 2) des Abstandsbegriffs wäre dann nicht erfüllt. Die leere Menge faßt man am besten als isolierten Punkt des Potenzraumes auf.

102) Die Bildung des Potenzraumes (ohne Verwendung dieses Namens) findet sich zuerst bei *D. Pompeju,* Ann. Fac. Toulouse (2) 7 (1905), p. 281, 282 für Mengen im $\mathfrak{R}^2$. Für beliebige metrische Räume hat *Hausdorff*[22]), p. 293—298 diesen Raum untersucht, für kompakte metrische Räume sehr eingehend *T. Ważewski,* Fund. math. 4 (1923), p. 214—245. Den Potenzraum eines lückenlosen (vgl. [47])) topologischen Raumes hat (ohne Verwendung eines Abstandes) *L. Vietoris,* Monatsh. Math. Phys. 32 (1922), p. 258—280 und 33 (Jg. 1923, erschienen 1924), p. 49—62 definiert und untersucht, mit ungefähr denselben Ergebnissen wie *Ważewski.*

103) Vgl. *Hausdorff*[22]), p. 294.

$\mathfrak{T}$ die betreffende Eigenschaft hat. Die Kontinua des Raumes bilden einen abgeschlossenen Teilraum des Potenzraumes, der diese Eigenschaften ebenfalls vom gegebenen Raum erbt.

Ganz allgemein läßt sich hier die Frage stellen: Welche topologischen Eigenschaften haben die Vereinigung, der Durchschnitt, die äußere, innere Näherungsgrenze, kurz irgendeine Funktion einer Menge $\mathfrak{m}$ von abgeschlossenen Mengen $\mathfrak{A}$, wenn man entweder von $\mathfrak{m}$ oder von seinen Elementen oder von beiden bestimmte topologische Eigenschaften voraussetzt; z. B. ist die Vereinigungsmenge einer abgeschlossenen Menge von abgeschlossenen Mengen abgeschlossen, die einer zusammenhängenden Menge von abgeschlossenen Mengen, unter denen wenigstens eine zusammenhängend ist, wieder zusammenhängend.

W. Hurewicz[103a]) hat einen aus „Schnitten" eines topologischen Raumes gebildeten „Schnittraum" eingeführt.

21. Zerlegungsräume. Zu einer Herstellung eines neuen topologischen Raumes $\mathfrak{R}^*$ aus einem gegebenen $\mathfrak{R}$ führt auch jede eindeutige stetige Abbildung von $\mathfrak{R}$ auf einen Raum $\mathfrak{S}$. Wegen der Eindeutigkeit der Abbildung sind die „Gesamturbilder" $\mathfrak{Y}_1$ und $\mathfrak{Y}_2$ je zweier Punkte Y_1, Y_2 von $\mathfrak{S}$ zueinander fremd. Ist $\mathfrak{R}$ lückenlos, so ist für irgendwelche Bilder $\lim Y_i = Y$ gleichbedeutend mit $\overline{\lim}\sup \mathfrak{Y}_i \subseteq \mathfrak{Y}$. Nennt man eine Zerlegung eines Raumes in zueinander fremde abgeschlossene Teile (die „Elemente" der Zerlegung) oberhalb stetig[104]), wenn es zu jedem Element $\mathfrak{Y}$ der Zerlegung und jeder $\mathfrak{Y}$ enthaltenden offenen Menge $\mathfrak{U}$ eine zu $\mathfrak{Y}$ nicht fremde offene Menge $\mathfrak{V}$ gibt, für welche jedes zu $\mathfrak{V}$ nicht fremde Element $\mathfrak{Y}'$ der Zerlegung ganz in $\mathfrak{U}$ liegt, dann gilt: Die von einer eindeutigen stetigen Abbildung eines lückenlosen Raumes erzeugte Zerlegung desselben ist oberhalb stetig. Wird umgekehrt als Umgebung eines Elements $\mathfrak{Y}_0$ einer oberhalb stetigen Zerlegung die Menge aller Elemente derselben erklärt, welche in einer $\mathfrak{Y}_0$ enthaltenden offenen Menge $\mathfrak{U}$ liegen[104a]), dann erhält man den Zerlegungsraum $\mathfrak{R}^*$ als eindeutig-

103a) *W. Hurewicz,* Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 163—165.

104) Im Anschluß an *R. L. Moore,* Proc. Nat. Ac. 10 (1924), p. 356—360; Trans. Amer. 27 (1925), p. 416—428 und *P. Alexandroff,* Proc. Amsterdam 28 (1925), p. 997—999 und Math. Ann. 96 (1926), p. 555—571. Bezüglich unterhalb stetiger, bzw. (schlechtweg) stetiger Zerlegungen vgl. *L. Vietoris,* Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 443—453. Vgl. ferner *C. Kuratowski,* Fund. math. 11 (1928), p. 169—185, *W. L. Ayres,* ib. 14 (1929), p. 334—338.

104a) Diese Umgebungen befriedigen die Axiome $(\overline{A})$, $(\overline{B})$, $(\overline{C})$, $(\overline{D}_0)$ (vgl. Nr. **10**), dagegen ist das schärfere Trennungsaxiom $(\overline{D})$ im allgemeinen nicht erfüllt, auch wenn dies für den zerlegten Raum $\mathfrak{R}$ der Fall ist.

stetiges Bild des zerlegten Raumes $\mathfrak{R}$, wenn man einen beliebigen Punkt X aus $\mathfrak{R}$ und ein Element $\mathfrak{Y}$ aus $\mathfrak{R}^*$ einander in einer Abbildung $\mathfrak{Y} = f(X)$ zuordnet, sobald X in $\mathfrak{Y}$ liegt. Haben die Elemente der Zerlegung einfache Eigenschaften, so kann man aus Eigenschaften des zerlegten Raumes auf solche des Zerlegungsraumes schließen. So gilt unter anderem: Wird die Kugelfläche oberhalb stetig in lauter einfach zusammenhängende Kontinua zerlegt, dann ist der Zerlegungsraum mit der Kugelfläche homöomorph.[105]) So liefert eine eindimensionale oberhalb stetige Zerlegung (d. h. eine solche, durch welche ein eindimensionaler[106]) Zerlegungsraum entsteht) der Kugelfläche in lauter Kontinua als Zerlegungsraum einen Baum.[107]) So läßt eine eindeutige stetige Abbildung eines kompakten metrischen Raumes $\mathfrak{R}$, bei der alle Gesamturbilder die ersten n Zusammenhangszahlen 0 haben, die ersten n Zusammenhangszahlen von $\mathfrak{R}$ ungeändert.[108]) Umgekehrt läßt sich vom Zerlegungsraum und den Elementen der Zerlegung auch auf den zerlegten Raum schließen. So ist ein kompakter metrischer Raum höchstens $(n + m)$-dimensional, wenn er in lauter höchstens n-dimensionale Mengen so zerlegt werden kann, daß der Zerlegungsraum m-dimensional ist.[109]) Da die (von selbst oberhalb stetige) Zerlegung eines kompakten metrischen Raumes in seine Komponenten[109a]) einen 0-dimensionalen Zerlegungsraum liefert[110]), hat jeder n-dimensionale kompakte metrische Raum mindestens eine n-dimensionale Komponente.

Jeder kompakte metrische Raum $\mathfrak{R}$ ist stetiges Bild jeder perfekten 0-dimensionalen Menge, insbesondere der *Cantor*schen Dreiteilungsmenge[254]), d. h. kann als Zerlegungsraum derselben gemäß einer oberhalb stetigen Zerlegung erhalten werden, insbesondere hat $\mathfrak{R}$ eine Dimension $\leqq n$, wenn jeder Punkt von $\mathfrak{R}$ höchstens $(n + 1)$ Urbilder

105) *R. L. Moore,* l. c.[104]). Er spricht den Satz als Satz über die Euklidische Ebene aus. Vgl. noch *R. L. Moore,* Monatsh. Math. Phys. 36 (1929), p. 81—88, *C. Kuratowski,* Fund. math. 14 (1929), p. 143.

106) Dieser Begriff, sowie die sogleich folgenden des Baumes und der n-dimensionalen Menge $(n \geqq -1)$ werden in Nr. **41**, **42** erklärt.

107) *L. Vietoris,* l. c. [104]).

108) *L. Vietoris,* Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 1008—1013; Math. Ann. 97 (1927), p. 454—472.

109) Für $m = 0$ bei *L. Tumarkin,* Proc. Amsterdam 28 (1925), p. 1000—1001, allgemein bei *W. Hurewicz* [111a]), p. 163.

109a) Komponenten = umfassendste zusammenhängende Teile, s. *Hausdorff,* Grundz., p. 245. Über „Quasikomponenten" siehe ib. p. 248 und *S. Pointner,* Monatsh. Math. Phys. 35 (1928), p. 235—238.

110) *P. Alexandroff,* Proc. Amsterdam 28 (1925), p. 999; Math. Ann. 96 (1926), p. 570.

hat.[111]) Allgemeiner hat ein stetiges Bild eines m-dimensionalen kompakten Raumes $\mathfrak{R}$ eine Dimension $\leqq m + n$, wenn jeder Punkt von $\mathfrak{R}$ höchstens $n+1$ Urbilder besitzt.[111a])

22. Heftung topologischer Räume.[111b]) Von Bedeutung für das Spätere ist noch folgender Prozeß: Seien $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ zwei abgeschlossene, punktfremde, zueinander homöomorphe Mengen eines topologischen Raumes $\mathfrak{T}$, und H eine topologische Abbildung von $\mathfrak{A}_1$ auf $\mathfrak{A}_2$. Wir bilden einen Raum $\mathfrak{T}'$, indem wir jedem Paar vermöge H entsprechender Punkte X, Y von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, desgleichen jedem außerhalb $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ liegenden Punkt Z von $\mathfrak{T}$ je einen Punkt $X' = Y'$ bzw. Z' von $\mathfrak{T}'$ zuordnen (wodurch eine eindeutige Abbildung A von $\mathfrak{T}$ auf $\mathfrak{T}'$ entsteht), und indem wir als $\mathfrak{U}(Z')$ bzw. $\mathfrak{U}(X')$ jede Menge aus $\mathfrak{T}'$ erklären, die Bildmenge einer $\mathfrak{U}(Z)$ bzw. Bildmenge der Vereinigung einer $\mathfrak{U}(X)$ und einer $\mathfrak{U}(Y)$ ist. Dieser Prozeß der „*Verschmelzung*" oder „*Heftung*" (wie er im Anschluß an einen in III AB 3, p. 194 gebrauchten Ausdruck genannt werde) „*längs* $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ *gemäß* H" ist besonders bekannt bei Herstellung einer „im idealen Sinne" geschlossenen Fläche durch „Ränderzuordnung" aus einem Fundamentalpolygon (oder aus mehreren Polygonen, von denen vorerst der „Summenraum" (Nr. **20**) zu bilden ist; vgl. Nr. **25**), analog bei Herstellung einer 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit durch Zuordnung von Randpolygonen eines 3-dimensionalen Fundamentalpolyeders (Nr. **29**,[154])). Bei diesem Prozeß können an Stelle zweier $\mathfrak{A}_i$ auch endlich viele, paarweise punktfremde, treten, wenn zwischen je zweien $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{A}_k$ eine topologische Abbildung H_{ik} gegeben ist, derart daß stets die zusammengesetzte Abbildung $\mathsf{H}_{ik}\mathsf{H}_{kl} = \mathsf{H}_{il}$ ist. Es können auch mehrere solche Heftungen gleichzeitig vorgenommen werden (etwa längs $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_\lambda$ gemäß einem System von Abbildungen H_{ik}; sowie längs $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_\mu$ gemäß den Abbildungen K_{ik}; sowie längs $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_\nu$ gemäß den Abbildungen L_{ik}; usw.), wenn gewisse *Verträglichkeitsbedingungen* erfüllt sind (so daß z. B. wenn $\mathfrak{C}_1$ Teilmenge sowohl von $\mathfrak{A}_1$ wie von $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_2$ von $\mathfrak{A}_2$ wie von $\mathfrak{B}_2$ ist, dann die topologische Abbildung L_{12} von $\mathfrak{C}_1$ auf $\mathfrak{C}_2$ übereinstimmt mit jeder der topologischen

111) *W. Hurewicz*, Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 1014—1017. Vgl. [266]).

111a) *W. Hurewicz*, Proc. Amsterdam 30 (1927), p. 159—165. Spezielle Fälle dieses Satzes für $m = 1$ sind bekannte Sätze über *Peano*-Kurven, vgl. II C 9, p. 945/7.

111b) Der Heftungsprozeß läßt sich der Lehre von den Zerlegungsräumen (Nr. **21**) einordnen; vgl. hierzu die (in Vorbereitung befindliche) Münchener Dissertation von *G. Aumann*. Die (unabhängig von der in Nr. **21** genannten Literatur entstandenen) Betrachtungen von Nr. **22** sollen eine allgemein-topologische Grundlage für die Heftungen in Nr. **25**, **27** geben.

Abbildungen von $\mathfrak{C}_1$, die sich aus der Abbildung H_{12} von $\mathfrak{A}_1$ auf $\mathfrak{A}_2$ bzw. aus der Abbildung K_{12} von $\mathfrak{B}_1$ auf $\mathfrak{B}_2$ ergibt). Beispiele liefert (vgl. Nr. 25, 27) die gleichzeitige Ränderzuordnung längs *mehrerer* Kantenpaare (bzw. Randpolygonpaare) $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2; \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2; \ldots$ eines Fundamentalpolygons (bzw. Fundamentalpolyeders) unter Beachtung der damit verbundenen Verschmelzung ganzer Systeme von zugeordneten Ecken (bzw. von Kanten und von Ecken). — Die Anbringung von Schnitten derart, daß z. B. auf einer Fläche aus jedem Punkt einer Schnittlinie auf jeder ihrer beiden Seiten je ein (zur zerschnittenen Fläche hinzugerechneter) Randpunkt entsteht, kann als Beispiel eines zu einer Heftung inversen Prozesses angesehen werden.

III. n-dimensionale Topologie.

23. Vorbemerkungen. Homogene n-dimensionale Gebilde. Entsprechend der Art, wie wir die Erscheinungen der Erfahrungswelt mit Hilfe einer geeigneten Anzahl reeller Parameter mathematisch beschreiben, sind unter allen topologischen Räumen die n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, denen wir uns jetzt zuwenden, am wichtigsten. Ihr Studium in topologischer Hinsicht bildet den Gegenstand der n-dimensionalen Topologie. Obgleich für die niedrigsten Dimensionszahlen n derartige Räume ($n = 1$: Kurven, $n = 2$: Flächen) seit altersher in der Mathematik betrachtet wurden, geschah dies meist ohne feste Definitionen dieser Gebilde.[112]) Nun hat seit *B. Riemanns* Arbeiten die n-dimensionale Topologie, insbesondere für $n = 2$, eine hervorragende Anwendung in der Funktionentheorie gefunden, und *Riemann* selbst hat eine Topologie der Flächen (unter Benutzung ihrer Zerschneidung durch Querschnitte) entwickelt und sich auch mit n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten beschäftigt.[113]) Aber eine bestimmte Definition des Begriffes Fläche (bzw. n-dimensionale Mannigfaltigkeit) fehlt auch bei *Riemann*, ebenso wie in den an ihn anschließenden Darstellungen (und es wird nur etwa gelegentlich bemerkt[114]), daß nirgends eine Spaltung eines Blattes längs einer Linie in mehrere vorkommen soll), so daß für jene Anwendungen der Topologie lange eine ausreichende

112) Vgl. hierzu Artikel III AB 2 (*v. Mangoldt*). Über das Problem einer allgemeinen Definition n-dimensionaler Gebilde (Bereiche) vgl. auch *F. Enriques*, l. c. [1a]), *F. Riesz*, l. c. [20]), p. 345, Math. Ann. 61 (1905), p. 406. S. ferner die Bemerkungen über den Begriff „Fläche" bei *M. Fréchet*, Ann. Soc. Mat. Polon. 3 (1924), p. 4; *B. v. Kerékjártó*, Acta litt. ac. scient. Szeged 3 (1927), p. 49.

113) *B. Riemann*, Gesammelte Werke, 2. Aufl., p. 9/12, 91/96, sowie p. 479/82 (nachgelassenes Fragment über n-dimensionale Mannigfaltigkeiten).

114) l. c. [113]), p. 9 (in Nr. 5), p. 28.

Unterlage fehlte. Erst in neuerer Zeit hat sich eine präzise, topologisch brauchbare Charakterisierung der n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten herausgebildet, die in die Definition das aufnimmt, was sich bei *Riemann* erst nach den Zerschneidungen einstellt: die Zusammensetzbarkeit aus elementaren Stücken (Flächenstücken, n-dimensionalen Zellen).[115]) Es hat dann *H. Weyl*[116]) eine solche Charakterisierung des Flächenbegriffes einer Darstellung des *Riemann*schen funktionentheoretischen Ideenkreises zugrunde gelegt und zugleich eine diesem Zwecke angepaßte Topologie der Flächen (insbesondere der geschlossenen[117])) entwickelt.

Wie bei *Weyl* soll auch hier die Abgrenzung des Begriffs Fläche in zwei Schritten vorgenommen werden, gekennzeichnet durch die Begriffe: a) „*2-dimensionales Gebilde*" und b) „*2-dimensionale Mannigfaltigkeit*" = „*Fläche*"[118]) (analog für $n \neq 2$). Wir beschränken uns dabei zunächst auf die (s. u.) als „homogen" bezeichneten Gebilde bzw. Mannigfaltigkeiten, welch letztere bisher am meisten studiert wurden, während bezüglich nicht-homogener Mannigfaltigkeiten eine einheitlich angenommene Begriffsabgrenzung und Terminologie nicht vorliegt.[119])

Die folgenden Bemerkungen sollen zur fraglichen Abgrenzung des Mannigfaltigkeits-Begriffes, und zwar an Hand des Falles $n = 2$, hinüberleiten.

Bei der allmählichen Entwicklung des Begriffes Fläche war vormals die Beschränkung auf Flächen $\mathfrak{F}$ des euklidischen $\mathfrak{R}^3$ vorherrschend (was u. a. zur Folge hatte, daß die geschlossenen nicht-orientierbaren[120]) Flächen lange Zeit außer Betracht blieben), und hier wiederum auf solche Flächen, die, bezogen auf ein System cartesischer Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3, einer analytischen Darstellung mit Hilfe (eventuell mehrmals) differenzierbarer oder analytischer Funktionen fähig sind. Das Typische für den Flächenbegriff ist aber dabei stets folgendes: Entweder es besteht für die Umgebung einer *jeden* Stelle P der Fläche $\mathfrak{F}$ die Möglichkeit einer Parameterdarstellung $\xi_i = \xi_i(\tau_1, \tau_2)$

115) Wegen der einschlägigen Arbeiten vgl. Nr. 28.

116) *H. Weyl,* R. Fl., §§ 4—11.

117) Mit den ungeschlossenen Flächen hat sich dann insbesondere *B. v. Kerékjártó*[172]) beschäftigt.

118) *Weyl* sagt dafür: a) „2-dimensionale Mannigfaltigkeit", b) „Fläche". Die im Text gewählte Verwendung des Wortes „Mannigfaltigkeit" steht im Einklang mit *Brouwers* Definition der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit.[144])

119) Vgl. noch [155]). So versteht *Brouwer* unter Mannigfaltigkeit schlechtweg soviel wie homogene Mannigfaltigkeit (desgleichen *Weyl* für seine Definition der Mannigfaltigkeiten).

120) Vgl. [168]).

derart, daß ein Bereich $|\tau_1| < \varrho$, $|\tau_2| < \varrho$ eineindeutig und umkehrbar stetig auf eine Umgebung von P abgebildet wird; oder es ist diese Darstellung zwar nur für eine gewisse Gesamtheit von Stellen (die regulären Stellen) gesichert, derart aber, daß die übrigen (singulären) Stellen stets Häufungspunkte von regulären sind, so daß $\mathfrak{F}$ aus der Menge der regulären Stellen durch Hinzunahme ihrer Häufungspunkte entsteht. Die Möglichkeit der genannten Parameterdarstellung ist beispielsweise, wenn $\mathfrak{F}$ durch eine Gleichung $\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ mit stetig differenzierbarem φ gegeben ist, für alle P gesichert, für die in einer gewissen Umgebung von P wenigstens eine der drei Ableitungen $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} \neq 0$ ist. Während aber bei einer 1-1-deutigen, umkehrbar stetigen Abbildung von $\mathfrak{F}$ die Möglichkeit einer Darstellung durch eine solche Gleichung $\varphi = 0$ für die Bildfläche verloren gehen kann (sofern eben die abbildenden Funktionen wohl stetig, nicht aber auch differenzierbar zu sein brauchen), bleibt die Möglichkeit der 1-1-deutigen, umkehrbar stetigen (= topologischen) Abbildung der Umgebung einer Stelle auf den ebenen Bereich $|\tau_1|, |\tau_2| < \varrho$ bestehen. An diese letztere Eigenschaft war daher zur Gewinnung einer topologischen Definition der Flächen anzuknüpfen. Wenn man sich vorerst auf Flächen mit nur regulären Stellen beschränkt[121]) (das sind dann solche, die im Sinn von Nr. **19** topologisch homogen sind), so gelangt man dazu, die folgendermaßen definierten Gebilde zu betrachten: unter einem *„homogenen 2-dimensionalen* (bzw. *n-dimensionalen*) *Gebilde“*[122]) werde ein topologischer Raum verstanden, welcher in jedem seiner Punkte denselben Umgebungscharakter (Nr. **19**) wie die Ebene (bzw. der $\mathfrak{R}^n$) hat. Die vorerwähnten Flächen (mit nur regulären Stellen) gehören nach dem Gesagten zu den homogenen 2-dimensionalen Gebilden.

24. Homogene 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Den Flächen $\mathfrak{F}$ im $\mathfrak{R}^3$ kommt aber noch eine weitere Eigenschaft zu, die sie mit den allgemeinen in der Funktionentheorie betrachteten, gleichfalls als „Flächen“ bezeichneten Gebilden (*Riemann*sche Flächen; durch Fundamentalpolygone definierte in abstracto geschlossene Flächen, u. a.) gemein haben, und die als die *„Möglichkeit eines Zellenaufbaus“*[123]) von $\mathfrak{F}$ bezeichnet wird. Beispielsweise denke man an die Oktaederteilung

121) Mit andern Worten: wenn man, etwaige nicht-reguläre Punkte weglassend, zur Fläche nur die Gesamtheit der regulären Punkte rechnet.

122) Nach der Bezeichnung von *Tietze,* Hambg. Sem., p. 8 [44].

123) Statt „Zellenaufbau“ hat *Weyl,* R. Fl., p. 21 für den vorliegenden Fall (Dreieckszerlegung einer Fläche) das ausdrucksvolle Wort „Triangulation“ eingeführt.

der Kugelfläche: Die 8 sphärischen Dreiecksflächen $\mathfrak{Z}_1^2, \ldots, \mathfrak{Z}_8^2$ (denen ihre Randpunkte zugerechnet werden sollen) liefern als Vereinigung die ganze Fläche, die als topologischer Raum aufgefaßt mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet werde; jede „zweidimensionale Zelle" $\mathfrak{Z}_i^2$ ist topologisches Abbild einer ebenen Dreiecksfläche $\mathfrak{E}_i^2$, und es gibt topologische Abbildungen A_i von $\mathfrak{E}_i^2$ auf $\mathfrak{Z}_i^2$, die die Seiten bzw. Ecken von $\mathfrak{E}_i^2$ auf Seiten bzw. Ecken von $\mathfrak{Z}_i^2$ abbilden. Wenn man in jeder Dreiecksfläche $\mathfrak{E}_i^2$ 1. die mittleren[124]) Punkte, 2. die mittleren Punkte jeder Seite, 3. die Ecken unterscheidet, so läßt sich genauer folgendes sagen:

A 1) Die Menge der Bildpunkte der mittleren Punkte einer Dreiecksfläche $\mathfrak{E}_h^2$ gehört der *einen* Zelle $\mathfrak{Z}_h^2$ an und hat sonst mit keiner Zelle $\mathfrak{Z}_i^2$ $(i \neq h)$ einen Punkt gemein.

A 2) Die Menge der Bildpunkte der mittleren Punkte einer Seite eines Dreieckes $\mathfrak{E}_h^2$ gehört *zwei* Zellen an (nämlich der Zelle $\mathfrak{Z}_h^2$ und einer zweiten, etwa $\mathfrak{Z}_k^2$) und hat sonst mit keiner $\mathfrak{Z}_i^2$ $(i \neq h, k)$ einen Punkt gemein; — und zwar ist diese Menge, analog wie sie in $\mathfrak{Z}_h^2$ die Menge der Bildpunkte der mittleren Punkte einer Seite von $\mathfrak{E}_h^2$ ist, ebenso auch in $\mathfrak{Z}_k^2$ die Menge der Bildpunkte der mittleren Punkte einer Seite von $\mathfrak{E}_k^2$.

A 3) Jeder Bildpunkt einer Ecke eines Dreieckes $\mathfrak{E}_h^2$ gehört *endlich vielen* [in unserem Beispiel sind es allemal vier] Zellen $\mathfrak{Z}_h^2$, $\mathfrak{Z}_k^2$, $\mathfrak{Z}_l^2, \ldots$ an; — und zwar ist er, analog wie in $\mathfrak{Z}_h^2$, ebenso auch in jeder der Zellen $\mathfrak{Z}_k^2$, $\mathfrak{Z}_l^2, \ldots$ der Bildpunkt einer Ecke des entsprechenden Dreiecks $\mathfrak{E}_k^2$ bzw. $\mathfrak{E}_l^2, \ldots$

B) Jeder Punkt von $\mathfrak{R}$ hat in $\mathfrak{R}$ Umgebungen, bestehend aus Punkten nur derjenigen Zellen $\mathfrak{Z}_h^2$, denen er angehört.[125])

Um ein anderes Beispiel zu nennen: Wird die (ξ_1, ξ_2)-Ebene durch alle Geraden $\xi_1 = m$, $\xi_2 = m$, $\xi_2 - \xi_1 = m$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ in abzählbar unendlich viele Dreiecke $\mathfrak{Z}_i^2$ zerlegt, so sind wieder die eben ausgesprochenen Bedingungen A 1) 2) 3), B) erfüllt.

Wenn ein topologischer Raum $\mathfrak{T}$ a) ein homogenes 2-dimensionales Gebilde ist und b) sich als Vereinigung endlich oder unendlich vieler[126]) seiner Teilmengen so darstellen läßt, daß jede dieser Teilmengen $\mathfrak{Z}_i^2$ das topologische Bild einer ebenen Dreiecksfläche $\mathfrak{E}_i^2$ ist und dabei die Bedingungen A 1) 2) 3), B) erfüllt sind, dann sagen wir, $\mathfrak{T}$ sei eine *„homogene 2-dimensionale Mannigfaltigkeit"* (oder eine „homogene Fläche") $\mathfrak{M}^2$. Die Eigenschaft b) eines homogenen 2-dimen-

124) Vgl. Nr. **19**.

125) Vgl. [131]).

126) Bereits *W. Dyck*, Math. Ann. 32 (1888), p. 473, betrachtet auch den letzteren Fall.

sionalen Gebildes wird als „Triangulierbarkeit"[123]) oder „Möglichkeit eines Zellaufbaus" bezeichnet. Bei einem solchen Zellaufbau von $\mathfrak{M}^2$ heißen die $\mathfrak{Z}_i^2$ die 2-dimensionalen Zellen, ferner werden die Bilder der Seiten der $\mathfrak{E}_i^2$ (jede Seite einschließlich ihrer Endpunkte) als 1-dimensionale Zellen ($\mathfrak{Z}_j^1$), und die Bilder der Ecken der $\mathfrak{E}_i^2$ als 0-dimensionale Zellen ($\mathfrak{Z}_k^0$) bezeichnet.[127])

Ist eine $\mathfrak{M}^2$ durch einen Zellaufbau definiert, so ist sie ein absolut-kompakter (Nr. 6) topologischer Raum oder nicht, je nachdem der Zellaufbau endlich oder unendlich viele Zellen umfaßt (so daß die letztere Unterscheidung unabhängig vom gewählten Zellaufbau der betrachteten $\mathfrak{M}^2$ eine topologische Eigenschaft der $\mathfrak{M}^2$ darstellt).[128]) Die absolut-kompakten bzw. nicht-absolut-kompakten homogenen $\mathfrak{M}^2$ werden häufig als *geschlossene* bzw. *ungeschlossene* Flächen bezeichnet.[129]) Eine $\mathfrak{M}^2$, die als topologischer Raum zusammenhängend (Nr. 8) ist, kann nur aus endlich oder *abzählbar* unendlich vielen Zellen aufgebaut sein.[128])

Jede *Riemann*sche Fläche ist eine homogene $\mathfrak{M}^2$ im eben genannten Sinn[130]) (wenn man darauf verzichtet, die *Riemann*sche Fläche just als eine *Fläche im* $\mathfrak{R}^3$ aufzufassen und sich mit den Durchdringungen der Blätter längs Verzweigungsschnitten herumzuschlagen).

Man kann — und es ist dies auch geschehen (vgl. Anm. [146]) und Nr. 29) — die Bedingungen A 1) 2) 3) auch durch andere (sei es engere, sei es weitere) ersetzen, ferner auch allgemeinere Zellen (Poly-

127) Zur Frage der Triangulierbarkeit vgl. [147]), [148]). Daß es nicht-triangulierbare 2-dimensionale Gebilde gibt, zeigt ein von *H. Prüfer* herrührendes Beispiel bei *T. Radó,* Acta litt. ac. scient. Szeged 2 (1925), p. 107. Man erkennt dies auch nach *P. Alexandroff,* Math. Ann. 92 (1924), p. 295 an einem Beispiel, das zu anderem Zwecke von *L. Vietoris,* Monatsh. Math. Phys. 31 (1912), p. 183 gebildet wurde. (Entgegen einer Bemerkung von *P. Alexandroff,* l. c., stellen diese Gebilde, weil nicht triangulierbar, *keine* Flächen im Sinne *Weyl*s dar.)

128) Vgl. *H. Weyl,* R. Fl., p. 24.

129) Letztere auch als „offene Flächen" (z. B. *Weyl,* R. Fl., p. 24; *v. Kerékjártó,* Vorl. I, p. 132), was wir vermeiden wegen der abweichenden Bedeutung, in der das Wort „offen" in der Literatur (vgl. II C 9, p. 881, Anm. 85d) sich rasch eingebürgert hat und auch von uns verwendet wird (nämlich „offen in einem umfassenden Raum", vgl. Nr. 8). Analog: Wenn eine Fläche — in einem umfassenden Raum liegend gedacht — in diesem (als Punktmenge) *abgeschlossen* ist, so ist das natürlich nicht gleichbedeutend damit, daß sie im obigen Sinne eine *geschlossene* Fläche ist. Vgl. ebenso die verschiedenen Bedeutungen von *„fermé"* in *„ensemble fermé"* und *„surface fermée"*. — Sei noch angeführt, daß *S. Saks*, l. c. [172]) „surfaces compactes" (vgl. [16])) die absolut-kompakten $\mathfrak{M}^2$ nennt und „surfaces compactifiables" jene nicht-absolut-kompakten, die einem zusammenhängenden offenen Teil einer absolut-kompakten $\mathfrak{M}^2$ homöomorph sind.

130) *H. Weyl,* R. Fl., § 6.

gone statt speziell Dreiecke) verwenden, ohne daß mit dieser Änderung der zugelassenen Darstellungsformen eine Änderung in der Abgrenzung des Begriffs der homogenen 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit verbunden wäre.

25. Beschreibung des Zellaufbaus einer $\mathfrak{M}^2$. Wichtiger für das Ziel dieses Berichtes ist aber die Feststellung, daß sich aus dem oben Gesagten die Möglichkeit ergibt, den Aufbau einer $\mathfrak{M}^2$ aus ihren Zellen nach dem Prinzip der *Ränderzuordnung* in einer letzten Endes rein *kombinatorischen* Weise zu *beschreiben.* Seien beispielsweise bei einer Tetraederteilung der Kugelfläche die vier Zellen (Kugeldreiecke) $\mathfrak{Z}_i^2$ derart auf vier ebene Dreiecke $\mathfrak{E}_i^2$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ mit den Ecken A_i, B_i, C_i abgebildet, daß dabei die Dreiecksseiten $A_1 B_1$ von $\mathfrak{E}_1^2$ und $B_2 C_2$ von $\mathfrak{E}_2^2$ derselben 1-dimensionalen Zelle (sphärischen Dreiecksseite) $\mathfrak{Z}_j^1$ entsprechen; damit liegt dann auch eine topologische Abbildung H_j^1 von $A_1 B_1$ auf $B_2 C_2$ vor, wobei die Endpunkte einander in der angegebenen Reihenfolge entsprechen sollen: A_1 dem B_2, B_1 dem C_2; wir schreiben dafür „$A_1 B_1$ zugeordnet $B_2 C_2$“; alle Seitenzuordnungen, so geschrieben, seien die folgenden (die Indizes mod. 4 genommen):

(4) $\quad A_i B_i$ zugeordnet $B_{i+1} C_{i+1}$; $\quad C_i A_i$ zugeordnet $A_{i+2} C_{i+2}$.

Das wesentliche ist nun aber, daß durch die in (4) enthaltenen Angaben der topologische Charakter der betrachteten $\mathfrak{M}^2$ (Kugelfläche) und ihres betrachteten Zellaufbaues (Tetraederteilung) bereits vollständig gegeben ist. Sei nämlich jedes der vier (zueinander punktfremd vorausgesetzten) ebenen Dreiecke $\mathfrak{E}_i^2$ (seine Randpunkte mitgerechnet) als ein topologischer Raum angesehen (als Teilraum der Ebene $\mathfrak{R}^2$) und der Summenraum (Nr. 20) der $\mathfrak{E}_i^2$ gebildet; er heiße $\mathfrak{B}$; für jedes in (4) auftretende Seitenpaar werde dann eine topologische Abbildung H^1 gewählt (bei der die Endpunkte der beiden Seiten einander richtig entsprechen, sonst beliebig). Sei etwa $\mathfrak{A}_1$ bzw. $\mathfrak{A}_2$ die Menge der Punkte der Dreiecksseite $A_1 B_1$ bzw. $B_2 C_2$ und H_j^1 die zugehörige topologische Abbildung von $\mathfrak{A}_1$ auf $\mathfrak{A}_2$. Das Verfahren, um aus $\mathfrak{B}$ einen der Kugelfläche homöomorphen Raum $\mathfrak{R}$ zu erhalten, besteht nun, kurz gesagt, darin, daß wir Heftung (Nr. 22) längs $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ gemäß H_j^1 vornehmen und ebenso gleichzeitig Heftungen längs aller anderen Seitenpaare. Denn der so aus $\mathfrak{B}$ entstehende topologische Raum $\mathfrak{R}$ ist von der speziellen Wahl der Abbildungen H_j^1 unabhängig (m. a. W.: wie immer diese topologischen Abbildungen abgeändert werden — soferne nur die Randpunktezuordnung dieselbe bleibt —, die entstehenden topologischen Räume $\mathfrak{R}$ sind allemal untereinander homöomorph) und $\mathfrak{R}$ ist stets (mit seinem Zellaufbau) homöomorph der Kugelfläche (mit ihrer Tetraederteilung). — Wie für dieses Beispiel erkennt man ganz allgemein die Möglichkeit, eine $\mathfrak{M}^2$ mit einem bestimmten Zellaufbau durch Zuordnungen vom Typus (4) zu beschreiben.

Die besprochene Darstellung des Herstellungsverfahrens unserer Mannigfaltigkeit aus dem Summenraum $\mathfrak{B}$ der Dreiecke $\mathfrak{E}_i^2$ ist insofern noch zu ergänzen, als für eine systematische Darstellung dieser simultanen Heftungen im Sinne von Nr. 22 noch auf die Ecken der Dreiecke zu achten ist. In unserem Beispiel etwa gehört jeder Eckpunkt eines Dreieckes $\mathfrak{E}_i^2$ zwei Dreiecksseiten an und ist daher an zwei Heftungen von Seitenpaaren beteiligt. Es ergeben sich so Systeme zugeordneter Ecken, derart, daß alle Ecken eines Systems in einen Punkt von $\mathfrak{R}$ verschmolzen werden, in unserem Beispiel die vier Systeme:

(5) $$A_i \text{ zugeordnet } B_{i+1} \text{ zugeordet } C_{i+2}.$$

Man kann jede der Zuordnungen (5) für sich als eine Heftung ansehen längs dreier in $\mathfrak{B}$ enthaltener Punktmengen $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$, deren jede nur aus einem einzigen Punkt A_i bzw. B_{i+1} bzw. C_{i+2} besteht. Als zugehörige topologische Abbildung etwa von $\mathfrak{E}_1$ auf $\mathfrak{E}_2$ hat man dann einfach die Abbildung H_{12}^0 von A_i auf B_{i+1} zu betrachten, und die in Nr. 22 aufgestellte Bedingung $\mathsf{H}_{12}^0 \mathsf{H}_{23}^0 = \mathsf{H}_{13}^0$ ist natürlich erfüllt. *Man kann dann $\mathfrak{R}$ ansehen als aus $\mathfrak{B}$ entstanden durch die Gesamtheit aller der Heftungen, die man erhält, wenn man zu den durch* (4) *dargestellten Heftungen noch die durch* (5) *dargestellten dazunimmt* — hierbei für die Zuordnungen (4) geeignete topologische Abbildungen H^1 zugeordneter Seitenpaare, für die Zuordnungen (5) die eben genannten Abbildungen H^0 zugrundegelegt; und die Verträglichkeitsbedingungen (Nr. 22) für alle diese Heftungen bestehen hier in nichts anderem, als daß die Abbildungen H^0, d. h. die Zuordnungen (5), eben genau jene seien, die sich aus den Abbildungen H^1, d. h. aus den Zuordnungen (4) ablesen lassen.

26. Homogene n-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Bei Ausdehnung der Begriffsbildungen von Nr. 24 auf n Dimensionen treten an Stelle der in einem $\mathfrak{R}^2$ liegenden Dreiecke $\mathfrak{E}_i^2$ *„n-dimensionale Simplexe“*, d. h. Punktmengen des $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$-Raumes $\mathfrak{R}^n$, die sich aus $n+1$ Punkten $(\xi_{i1}, \ldots, \xi_{in})$ mit einer Determinante $|1, \xi_{i1}, \ldots \xi_{in}| \neq 0$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ durch $\xi_k = \tau_0 \xi_{0k} + \tau_1 \xi_{1k} + \cdots + \tau_n \xi_{nk}$ darstellen lassen, wobei die Parameter τ_i alle Wertsysteme annehmen, für die $\tau_0 + \tau_1 + \cdots + \tau_n = 1$, $\tau_i \geqq 0$. Die gegebenen $n+1$ Punkte heißen die „Ecken“ (oder „0-dimensionalen Seiten“) des Simplex, ferner (für $1 \leqq \nu < n$) die Teilmengen $\xi_k = \tau_{i_0} \xi_{i_0 k} + \cdots + \tau_{i_\nu} \xi_{i_\nu k}$ (wo $i_0, \cdots, i_\nu$

Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots, n$) seine „ν-dimensionalen Seiten" (auch „ν-dimensionalen Randsimplexe"). Die „mittleren Punkte" des Simplex bzw. einer ν-dimensionalen Seite sind dadurch gekennzeichnet, daß alle τ_i bzw. alle τ_{i_h} positiv sind; die „Randpunkte" dadurch, daß wenigstens ein τ_i bzw. τ_{i_h} null ist. (Unter dem „mittleren Punkt einer 0-dimensionalen Seite" ist die betreffende Ecke selbst zu verstehen.) Es wird dann die *homogene n-dimensionale Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{M}^n$ ($n \geqq 1$) definiert als ein topologischer Raum $\mathfrak{R}$, der a) ein homogenes n-dimensionales Gebilde ist (im Sinn von Nr. 23, vgl. [122]) und b) sich als Vereinigung von endlich oder unendlich vielen seiner Teilmengen so darstellen läßt, daß jede dieser Teilmengen $\mathfrak{Z}_i^n$ ($i = 1, 2, \ldots$) topologisches Abbild eines n-dimensionalen Simplex $\mathfrak{S}_i^n$ ist und dabei die folgenden Bedingungen A 1) bis 4), B) erfüllt sind:

A 1) Die Menge der Bildpunkte der mittleren Punkte eines Simplex $\mathfrak{S}_h^n$ gehört der *einen* Zelle $\mathfrak{Z}_h^n$ an und hat sonst mit keiner Zelle $\mathfrak{Z}_i^n (i \neq h)$ einen Punkt gemein.

A 2) Die Menge der Bildpunkte der mittleren Punkte einer ($n - 1$)-dimensionalen Seite eines Simplex $\mathfrak{S}_h^n$ hat mit nur *zwei* Zellen Punkte gemein (der Zelle $\mathfrak{Z}_h^n$ und einer zweiten, etwa $\mathfrak{Z}_k^n$) und gehört jeder von ihnen vollständig an; — und zwar ist diese Menge, analog wie in $\mathfrak{Z}_h^n$, ebenso auch in $\mathfrak{Z}_k^n$ die Menge der Bildpunkte der mittleren Punkte einer ($n - 1$)-dimensionalen Seite von $\mathfrak{S}_k^n$. (Im Falle $n = 1$ tritt an Stelle der Menge der mittleren Punkte einer 0-dimensionalen Seite [Ecke] von $\mathfrak{S}_k^n$ die aus nur einem Punkte, nämlich dieser Ecke selbst, bestehende Punktmenge.)

A 3) Die Menge der Bildpunkte der mittleren Punkte einer ν-dimensionalen Seite eines Simplex $\mathfrak{S}_h^n$ ($1 \leqq \nu < n - 1$) hat nur mit *endlich* vielen Zellen (außer $\mathfrak{Z}_h^n$ etwa noch $\mathfrak{Z}_k^n, \mathfrak{Z}_l^n, \ldots$) Punkte gemein, gehört jeder von ihnen vollständig an, — und zwar, analog wie der Zelle $\mathfrak{Z}_h^n$, ebenso auch jeder der Zellen $\mathfrak{Z}_k^n, \mathfrak{Z}_l^n, \ldots$ als Menge der Bildpunkte der mittleren Punkte einer ν-dimensionalen Seite von $\mathfrak{S}_k^n$, bzw. $\mathfrak{S}_l^n, \ldots$

A 4) Jeder Bildpunkt einer Ecke eines Simplex $\mathfrak{S}_h^n$ gehört nur *endlich* vielen Zellen an (außer $\mathfrak{Z}_h^n$ etwa noch $\mathfrak{Z}_k^n, \mathfrak{Z}_l^n, \ldots$), — und zwar jeder von ihnen als Bildpunkt einer Ecke des entsprechenden Simplex.

B) Jeder Punkt von $\mathfrak{R}$ hat in $\mathfrak{R}$ eine Umgebung, bestehend nur aus Punkten derjenigen $\mathfrak{Z}_i^n$, denen er angehört.[131])

131) Bedingung B) findet sich für $n = 2$ implizite bei *Weyl,* R. Fl., p. 22; explizite bei *Tietze,* Hambg. Sem., p. 9 [45], Anm. 8.

Bei einem solchen Zellaufbau einer $\mathfrak{M}^n$ heißen die Bilder der Ecken bzw. ν-dimensionalen Seiten der Simplexe $\mathfrak{E}_i^n$ „0-dimensionale" bzw. „ν-dimensionale Zellen" ($\mathfrak{Z}_h^0$ bzw. $\mathfrak{Z}_h^\nu$).

Beispiele homogener $\mathfrak{M}^n$ sind: die „sphärischen n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten" $\mathfrak{S}^n$, das sind[132]) die mit der Punktmenge $\xi_1^2 + \cdots + \xi_{n+1}^2 = 1$ des $\mathfrak{R}^{n+1}$ (und demnach mit der Menge der Randpunkte eines Simplex $\mathfrak{E}^{n+1}$) homöomorphen topologischen Räume; ferner der n-dimensionale Zahlenraum $\mathfrak{R}^n$ (der mit der Punktmenge $\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 < 1$ des $\mathfrak{R}^n$ homöomorph ist). — Das (in Nr. 24) über absolut-kompakte und nicht-absolut-kompakte $\mathfrak{M}^2$ Gesagte gilt analog für $\mathfrak{M}^n$.

Der Zellaufbau einer *zusammenhängenden* homogenen $\mathfrak{M}^n$ umfaßt stets nur *endlich* oder *abzählbar* unendlich viele Zellen, und für eine solche $\mathfrak{M}^n$ gelten die folgenden, mit dem Abzählbarkeitsaxiom $(\bar{F})$ (Nr. 12) und bekannten Überdeckungssätzen von *É. Borel, E. Lindelöf* und *W. H. Young*[133]) verwandten Aussagen: Jede zusammenhängende homogene $\mathfrak{M}^n$ läßt sich durch endlich bzw. abzählbar unendlich viele offene Teilmengen, deren jede dem $\mathfrak{R}^n$ homöomorph ist, überdecken. In jedem System von Mengen, die in einer zusammenhängenden homogenen $\mathfrak{M}^n$ offen sind und eine abgeschlossene Teilmenge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{M}^n$ überdecken, gibt es ein die Menge $\mathfrak{A}$ überdeckendes endliches bzw. abzählbares Teilsystem. Das gilt insbesondere, wenn für $\mathfrak{A}$ die $\mathfrak{M}^n$ selbst genommen wird.

27. Beschreibung des Zellaufbaus einer $\mathfrak{M}^n$.[133a]) Wie im Falle $n = 2$ läßt sich feststellen, daß der Zellaufbau einer $\mathfrak{M}^n$ in rein kombinatorischer Weise beschrieben werden kann. Zunächst erkennt man nämlich die Möglichkeit, die $\mathfrak{M}^n$ aus dem Summenraum $\mathfrak{B}$ einer Menge von Simplexen $\mathfrak{E}_i^n$ durch Heftungen (Nr. 22) zu erhalten; die einzelne Heftung betrifft (unter ν eine Zahl $< n$ und $\geqq 0$ verstanden) ein System $\mathfrak{f}^\nu$ endlich vieler zugeordneter ν-dimensionaler Randsimplexe $\mathfrak{A}_k^\nu$ der Simplexe $\mathfrak{E}_i^n$, nämlich aller jener, die auf dieselbe Zelle $\mathfrak{Z}_j^\nu$ der $\mathfrak{M}^n$ abgebildet werden; zwischen irgend zweien dieser Randsimplexe $\mathfrak{A}_k^\nu$, $\mathfrak{A}_l^\nu$ hat man dabei eine topologische Abbildung H_{kl}^ν (wobei $\mathsf{H}_{kl}^\nu \mathsf{H}_{lm}^\nu = \mathsf{H}_{km}^\nu$), und zwar eine solche, welche die einzelnen Ecken und μ-dimensionalen Seiten von $\mathfrak{A}_k^\nu$ auf Ecken bzw. μ-dimensionale Seiten von $\mathfrak{A}_l^\nu$

---

132) *W. Dyck,* Math. Ann. 37 (1890), p. 278.

133) Vgl. II C 9, Nr. 9.

133a) In anderer Weise, als hier dargestellt, gelangt *J. W. Alexander,* Trans. Am. Math. Soc. 23 (1922), p. 333, zum Zellaufbau einer $\mathfrak{M}^n$, die er von vornherein als aus den Zellen einer sphärischen Mannigfaltigkeit (Nr. 26) $\mathfrak{S}^q$ $(q > n)$ zusammengesetzt annimmt. Dabei werden die Zellen der $\mathfrak{S}^q$ $(\xi_1^2 + \cdots + \xi_{q+1}^2 = 1)$ durch lineare Gleichungen und Ungleichungen zwischen den ξ_ν bestimmt.

abbildet ($\mu = 1, \ldots, \nu - 1$); im Falle $\nu = n - 1$ enthält jedes System $\mathfrak{f}^{n-1}$ nur *zwei* einander zugeordnete $(n-1)$-dimensionale Randsimplexe $\mathfrak{A}^{n-1}$ der $\mathfrak{E}_i^n$. Die Verträglichkeitsbedingungen (Nr. 22) für die Gesamtheit aller Abbildungen H_{kl}^{ν} für alle Systeme $\mathfrak{f}^{\nu}$ $(0 \leqq \nu \leqq n-1)$ bestehen hier darin, daß alle Abbildungen H_{kl}^{ν} $(\nu < n-1)$ übereinstimmen müssen mit denjenigen Abbildungen, die sich aus den Abbildungen H_{kl}^{n-1} der paarweise einander zugeordneten $(n-1)$-dimensionalen Randsimplexe $\mathfrak{A}^{n-1}$ ableiten. Wie für $n = 2$ ist dabei von diesen Abbildungen H_{kl}^{n-1} für den topologischen Charakter der entstehenden $\mathfrak{M}^n$ nur wesentlich, wie die einzelnen μ-dimensionalen Randsimplexe $(0 \leqq \mu < n-1)$ von $\mathfrak{A}_k^{n-1}$ vermöge H_{kl}^{n-1} jenen von $\mathfrak{A}_l^{n-1}$ zugeordnet werden, während sonstige beliebige Abänderungen der topologischen Abbildungen H_{kl}^{n-1} allemal auf untereinander homöomorphe Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}^n$ führen, — und hierin liegt wieder die Möglichkeit einer Beschreibung des Zellaufbaus einer $\mathfrak{M}^n$ durch kombinatorische Zuordnungsvorschriften. Es ist aber für $n > 2$ zu beachten, daß zwar jeder Zellaufbau einer homogenen $\mathfrak{M}^n$ durch die *paarweisen Zuordnungen der* $(n-1)$-*dimensionalen Randsimplexe* $\mathfrak{A}^{n-1}$ der $\mathfrak{E}_i^n$ [nebst Angabe über die dabei einander entsprechenden μ-dimensionalen Randsimplexe der $\mathfrak{A}^{n-1}$ $(\mu < n-1)$] topologisch vollständig bestimmt ist, daß aber nicht jedem beliebigen, willkürlich vorgeschriebenen System solcher paarweiser Zuordnungen stets eine homogene $\mathfrak{M}^n$ entsprechen muß. Vielmehr kann es vorkommen, daß sich aus den Zuordnungen der $\mathfrak{A}^{n-1}$ überhaupt keine, den Verträglichkeitsbedingungen entsprechenden Abbildungen H^{ν} der ν-dimensionalen Randsimplexe der $\mathfrak{E}_i^n$ $(\nu < n-1)$ ableiten lassen[134]), daß also die vorgeschriebenen Heftungen überhaupt nicht ausführbar, durch die Zuordnungsvorschriften also überhaupt kein topologischer Raum bestimmt ist; oder aber, es ist dies zwar noch der Fall, der entstehende topologische Raum aber ist kein *homogenes* n-dimensionales Gebilde[135]) (man hat dann eine $\mathfrak{M}^n$ mit Singularitäten vor sich).

---

134) Vgl. *H. Tietze*[153]), p. 18, 24; [122]) p. 16/17 [52/53].

135) Als Bedingung für die Homogenität der $\mathfrak{M}^n$ ergibt sich, daß die aus den Zuordnungsvorschriften ableitbaren $(n-\nu)$-dimensionalen „Umgebungs-Mannigfaltigkeiten" der ν-dimensionalen Zellen $\mathfrak{Z}_h^{\nu}$ sämtlich sphärische Mannigfaltigkeiten sind; III A B 3 (*Dehn-Heegaard*), p. 161/2; *H. Tietze*[153]), p. 18/19, 24 und [122]), p. 17/18 [53/54]. Hierin ist die Bedingung, daß jede $\mathfrak{Z}_h^{\nu}$ nur *endlich* vielen $\mathfrak{Z}_i^{\mu}$ $(\mu > \nu)$ als Teilmenge angehört (wie sich aus der Endlichkeit der Zellenanzahl im Aufbau einer $\mathfrak{S}^{\nu}$ erkennen läßt), bereits enthalten. (Beispielsweise fallen also Gebietseinteilungen, wie sie sich aus Kreisbogenpolygonen — als Diskontinuitätsbereichen automorpher Funktionen [vgl. II B 3 und 4 (*R. Fricke*)] — durch fortgesetzte Spiegelungen ergeben, bei Auftreten von Polygonwinkeln der Größe

28. Entstehung des besprochenen Mannigfaltigkeitsbegriffes. Die in Nr. 24, 25 besprochene Definition des Begriffs der 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit (durch Homogenität und Zellaufbau) ist aus den Bedürfnissen der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen erwachsen; diesen Begriff der $\mathfrak{M}^2$ (und analog der $\mathfrak{M}^n$, Nr. 26, 27) hat bereits *W. Dyck* seinen topologischen Untersuchungen[136]) zugrunde gelegt.[137]) Der (von funktionentheoretischen Fundamentalbereichen geläufige) Prozeß der Verschmelzung von Flächenstücken längs Teilen des Randes kommt bei *Dyck*[138]) bereits entscheidend zur Geltung (zugleich in Verbindung mit der Herleitung der „Charakteristik“[139]) der $\mathfrak{M}^2$ bzw. $\mathfrak{M}^n$), und *Dyck* betont, daß diese „Vereinigung“ zu betrachten sei als nicht notwendig „wirklich (geometrisch) auszuführen“, sondern als nur durch die Zuordnung selbst in abstracto hergestellt[140]), daß es sich also, wie wir heute sagen, um allgemeine topologische Räume (nicht notwendig um Punktmengen eines $\mathfrak{R}^m$) handelt[141]); ebenso daß diese Herstellung einer kontinuierlichen 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit aus einer Menge von polygonalen Zellen sich rein kombinatorisch beschreiben läßt.[142]) Diese Zellen stellen dabei noch ein kontinuierliches Gegebenes dar, nur ihr Gefüge ist kombinatorischer Art[143]): Die zitierten Darstellungen haben die *Herstellung*

---

null, d. h. bei Zusammenstoßen unendlich vieler Polygone in einer Ecke nicht mehr unter die hier betrachteten Zellaufbauten einer $\mathfrak{M}^2$.)

136) *W. Dyck*[126]), p. 457—512; [132]) p. 273—316. Den gleichen Problemkreis betreffen die vorausgegangenen Arbeiten in Ber. Ges. d. Wiss. 1885, p. 314, 1886, p. 53, 1887, p. 40. Vgl. ferner *W. Dyck*, l. c. [224a]).

137) Bei *H. Poincaré* (vgl. die in III AB 3, Anm. 72, 76, 85 angeführten Arbeiten), der in besonders erfolgreicher Weise von der Zerlegung einer mehrdimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^n$ in Zellen bei Aufstellung neuer topologischer Invarianten Gebrauch gemacht hat, wird diese Zerlegung nicht zur *Definition* der $\mathfrak{M}^n$ herangezogen, vielmehr (analog wie bei *Riemann*, vgl. Nr. 23) nur ausgeführt an Mannigfaltigkeiten, die auf andere Weise (durch Gleichungen und Ungleichungen) definiert zu denken sind.

138) *W. Dyck*[126]), p. 473; vgl. dort und bei *Weyl*, R. Fl., p. 35, den Hinweis auf die Arbeiten von *Riemann*, *Schwarz*, *Dedekind*, *Klein* und *Poincaré*.

139) *W. Dyck*[126]), p. 474, [132]) p. 729 ff. Vgl. [224]).

140) Vgl. *F. Klein*, Math. Ann. 21 (1883), p. 141.

141) Vgl. auch bei *H. Tietze*[153]), p. 6 den Hinweis auf allgemeine abstrakt definierte Festlegungen von Nachbarschafts- oder Abstandsbeziehungen, ferner *Veblen*, Cambr. Coll., p. 1, 3, 6, 34.

142) Durch eine „Tabelle“ nach dem Ausdruck von *Dyck*[126]), p. 473, oder ein „Register“ nach dem Ausdruck von *W. Wirtinger* (vgl. *H. Tietze*[153]), p. 7; [122]) p. 19 [55]).

143) Die Weiterentwicklung (vgl. *Dehn-Heegaard*, III AB 3 und *H. Tietze*[153]), p. 2, 24), bei der auch dieses Kontinuierliche fortfällt, wird noch in Abschnitt IV

der einzelnen $\mathfrak{M}^2$ (bzw. $\mathfrak{M}^n$) *durch Beschreibung der Ränderzuordnungen* elementarer Raumstücke im Auge. Demgegenüber hat für n Dimensionen *L. E. J. Brouwer* [144]) und für 2 Dimensionen ausführlicher *H. Weyl* [145]) die *allgemeine Kennzeichnung des Zellaufbaus einer* $\mathfrak{M}^n$ *durch Bedingungen* ähnlich denen gegeben, die wir in Nr. **24** bzw. **26** unter A) B) angeführt haben.[146])

Es ist vielfach als ein Notbehelf empfunden worden [147]), daß die angegebene Definition des Begriffs der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit an eine bestimmte Herstellungsweise und Darstellungsform (durch einen Zellaufbau) anknüpft, statt aus der Gesamtheit aller topologischen Räume durch einzelne charakteristische topologische Eigenschaften die n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten herauszuheben. Es ist die Frage am Platze, inwieweit etwa eine der am Schluß von Nr. **26** ausgesprochenen Abzählbarkeits-(Überdeckungs-)aussagen geeignet ist, ein homogenes n-dimensionales Gebilde als homogene n-dimensionale Mannigfaltigkeit zu kennzeichnen, derart daß die Möglichkeit eines unseren Bedingungen A), B) genügenden Zellaufbaus daraus *gefolgert* werden könnte. In diesem Falle [148]) wäre es nicht unangebracht, eine solche

---

zu besprechen sein. Vorerst handelt es sich nur um die kombinatorische Beschreibung des Zellaufbaus kontinuierlicher Mannigfaltigkeiten; vgl. die Darstellung bei *H. Tietze*, l. c., §§ 2—4; *O. Veblen*, Cambr. Coll., p. 1 ff., 34 ff., 73 ff.

144) *L. E. J. Brouwer*, Math. Ann. 71 (1912), p. 97.

145) *H. Weyl*, R. Fl.

146) Über eine gewisse Einschränkung der betrachteten Zellaufbauten gegenüber obiger Darstellung durch eine Forderung über „Simplexsterne" bzw. „Dreiecksterne" vgl. *Brouwer* [144]) und *Weyl*, R. Fl., p. 64 „Zusatz". Die Gesamtheit der betrachteten $\mathfrak{M}^n$ erfährt dabei aber keine Einschränkung. In anderer Weise spezialisierte Zellaufbauten legt *J. W. Alexander* seiner Darstellung, l. c. [133a]), zugrunde.

147) Vgl. *H. Tietze* [153]), p. 5; *L. E. J. Brouwer* [144]), p. 98 Anm. — Eine andere Bewertung hingegen bei *H. Weyl*, Math. Ztschr. 10 (1921), p. 78. — Wie er dem Ref. *Tietze* freundlicherweise mitteilte, ist unabhängig Herr *A. Rosenthal* von der gleichen Auffassung wie im Text ausgegangen, als er die Anregung zu der Arbeit von Frl. *J. Gawehn* [148]) gab, die nach Abschluß ihrer Untersuchungen Einsicht in die ersten Fahnen dieses Artikels erhielt und dann, l. c. p. 322, die gleiche Auffassung wie oben zum Ausdruck brachte.

148) Vgl. hierzu *B. v. Kerékjártó*, Vorl. I, p. 5; ferner *H. Kneser* [185]), p. 137, [198b]) p. 3. Neuerdings ist im Falle $n = 2$ tatsächlich die Triangulierbarkeit eines homogenen Gebildes als Folge des Abzählbarkeitsaxioms ($\bar{F}$) festgestellt worden; vgl. die unabhängig voneinander ausgeführten Untersuchnngen von *T. Radó*, Acta litt. ac scient. Szeged 2 (1925), p. 101 (vorher Math. Ann. 90 [1923], p. 35) und die (auf eine Anregung von *A. Rosenthal* aus dem Winter 1923/24 zurückgehenden) von *J. Gawehn*, Math. Ann. 98 (1928), p. 321—354.

Über topologisch charakterisierende Eigenschaften der Kugelfläche vgl. *C. Kuratowski*, Fund. math. 13 (1929), p. 307—318.

Abzählbarkeitseigenschaft (zusammen mit der n-dimensionalen Homogenität) zur *Definition* der zusammenhängenden homogenen $\mathfrak{M}^n$ zu benützen.

29. Allgemeine Zellen und Zellaufbauten. Von den Aufbauten einer $\mathfrak{M}^2$ bzw. $\mathfrak{M}^n$ aus dreieckigen bzw. simplizialen Zellen, mit denen *Brouwer*[144]) arbeitet, sind die schon vorher[149]) verwendeten Zellaufbauten aus allgemeineren polygonalen bzw. polyedrischen Zellen grundsätzlich nicht verschieden, nur die vollständigen Auseinandersetzungen umständlicher, weshalb wir uns mit einigen Andeutungen begnügen. Für $n = 2$ tritt an Stelle jedes Dreieckes $\mathfrak{S}_i^2$ eine Kreisscheibe wie z. B. $\xi_1^2 + \xi_2^2 \leqq 1$, deren Peripherie durch $m \geqq 2$ Punkte in m Teile („Polygonseiten") zerlegt ist. Die Zellen $\mathfrak{Z}_i^2$ der $\mathfrak{M}^2$ sind die topologischen Bilder solcher Polygone, die $\mathfrak{Z}_h^1$ sind die Bilder von Polygonseiten, die $\mathfrak{Z}_h^0$ von Polygonecken, — im übrigen ist alles ganz analog wie in Nr. **24**, wo nichts anderes als ein Spezialfall vorliegt: nämlich $m = 3$ für jedes Polygon. Für $n > 2$ tritt an Stelle eines jeden Simplex $\mathfrak{S}_i^n$ eine Kugel wie z. B. $\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 \leqq 1$, für deren Oberfläche $\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 = 1$ (die eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist; vgl. Nr. **26**) ein bestimmter Zellaufbau aus ν-dimensionalen Zellen $(0 \leqq \nu \leqq n - 1)$ gegeben ist. — Man kann von jedem Zellaufbau einer $\mathfrak{M}^n$ mit solchen allgemeinen Zellen zu einem mit simplizialen Zellen gelangen (z. B. durch eine sog. „reguläre Unterteilung"[150])); der Begriff der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit erfährt also mit der besprochenen Verallgemeinerung keine Erweiterung, und das gleiche gilt von einer anderen, sogleich zu besprechenden Verallgemeinerung.

Wir haben bisher die als „Zellen" $\mathfrak{Z}_i^\nu$ bezeichneten Teilmengen einer $\mathfrak{M}^n$ als durchweg 1-1-deutige stetige Bilder der (simplizialen oder kugelartigen) Elementarraumstücke[151]) $\mathfrak{S}_i^\nu$ vorausgesetzt.[152]) Für manche Zwecke ist es nützlich, noch allgemeinere Zellaufbauten unserer $\mathfrak{M}^n$ zuzulassen. Ein Beispiel hierfür ist das folgende. Eine Torusfläche im $\mathfrak{R}^3$, etwa die Punktmenge $\xi_1 = (2 + \cos\varphi)\cos\vartheta$, $\xi_2 = (2 + \cos\varphi)\sin\vartheta$, $\xi_3 = \sin\varphi$ (wo φ, ϑ von 0 bis 2π) werde durch einen Längenkreis $(\vartheta = \vartheta_0)$ und einen Breitenkreis $(\varphi = \varphi_0)$ zerschnitten zu einer einzigen rechteckigen Zelle; diese ist eindeutiges — am Rand aber nicht mehr 1-1-deutiges — stetiges Bild eines

149) III A B 3 (*Dehn-Heegaard*); *H. Tietze*[153]).

150) *Veblen,* Cambr. Coll., p. 41, 85.

151) Wegen der Definition des „Elementarraumstücks" vgl. Nr. **30**.

152) Diesen Standpunkt (in die kombinatorische Topologie übertragen) nimmt auch III A B 3 (*Dehn-Heegaard*) ein.

ebenen Viereckes (oder einer Kreisscheibe) $\mathfrak{E}^2$. Der Kürze halber verzichten wir auf eine allgemeine Auseinandersetzung der solcher Art zuzulassenden Zellaufbauten[153]) (für welche die Fundamentalpolyeder n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten[154]) Beispiele bilden, für $n = 2$ speziell auch die Fundamentalpolygone automorpher Funktionen).

30. Berandete Mannigfaltigkeiten. n-dimensionale Komplexe. Die durch $\xi_1^2 + \xi_2^2 \leqq 1$ gegebene Menge des $\mathfrak{R}^2$ kann für sich selbst als ein topologischer Raum $\mathfrak{E}^2$ betrachtet werden, der jedoch nicht homogen ist (Nr. **19**); denn die Umgebung $\mathfrak{U}(P \mid \mathfrak{E}^2)$ eines Punktes P auf der Peripherie ist nicht gleichartig der Umgebung eines Punktes im Inneren des Kreises (dabei ist $\mathfrak{U}(P \mid \mathfrak{E}^2)$ der Durchschnitt von $\mathfrak{E}^2$ mit einer $\mathfrak{U}(P \mid \mathfrak{R}^2)$; vgl. Nr. **11**). Eine Erweiterung des Mannigfaltigkeitsbegriffes, die auch topologische Räume wie $\mathfrak{E}^2$ bzw. allgemein $\mathfrak{E}^n$ (definiert durch $\xi_1^2 + \cdots \xi_n^2 \leqq 1$) umfaßt, erhält man folgendermaßen. Man betrachtet topologische Räume $\mathfrak{R}$, deren sämtliche Punkte Umgebungen von einer der Arten haben, wie sie die Umgebungen $\mathfrak{U}(P \mid \mathfrak{E}^n)$ der Punkte von $\mathfrak{E}^n$ aufweisen, also entweder wie die Punkte P im Inneren von $\mathfrak{E}^n$ oder wie die Punkte P auf $\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 = 1$; die ersteren Punkte sollen mittlere Punkte, die letzteren Randpunkte von $\mathfrak{R}$ heißen (vgl. Nr. **19**). Ein solcher topologischer Raum heiße ein berandetes topologisches Gebilde (soferne überhaupt Randpunkte da sind), und im besonderen eine *berandete n-dimensionale Mannigfaltigkeit*[155]), wenn $\mathfrak{R}$ einen Zellaufbau aus n-dimensionalen Zellen gestattet. Dieser Zellaufbau soll dabei noch gewissen Bedingungen, analog denen von Nr. **26**, genügen, nämlich allen dortigen Bedingungen A) 1) bis 4) B) mit Ausnahme von A) 2), an Stelle von A 2) aber der milderen Bedingung:

A 2*) Die Menge der Bildpunkte der mittleren Punkte einer $(n-1)$-dimensionalen Seite eines Simplex $\mathfrak{E}_h^n$ hat entweder mit nur *zwei* Zellen oder nur mit der *einen* Zelle $\mathfrak{Z}_h^n$ Punkte gemein; im ersteren Falle so, wie in A 2) näher ausgeführt. (Im letzteren Falle besteht die genannte Menge aus lauter Randpunkten der $\mathfrak{M}^n$.)

Der „Rand" einer berandeten $\mathfrak{M}^n$ (d. h. die Menge ihrer Rand-

153) Vgl. *H. Tietze*, Monatsh. Math. Phys. 19 (1908), §§ 2—4.

154) Vgl. (speziell für $n = 3$) *H. Poincaré*, J. Éc. Polyt. (2) 1 (1895), p. 49ff

155) Das Wort „n-dimensionale Mannigfaltigkeit" (bei *H. Poincaré*[154]) „variété à n dimensions") erhält in der hiermit gegebenen Abgrenzung — als entweder homogene oder berandete n-dimensionale Mannigfaltigkeit — eine ganz andere Bedeutung als bei *G. Cantor*, der „n-dimensionale Punktmannigfaltigkeit" im Sinne von Punktmenge in einem n-dimensionalen Zahlenraum gebraucht. Über noch andere Verwendungen des Wortes Mannigfaltigkeit vgl. [118]) und [204]).

punkte) bildet eine homogene (nicht notwendig zusammenhängende) $\mathfrak{M}^{n-1}$. Das einfachste Beispiel einer berandeten $\mathfrak{M}^n$ ist ein n-dimensionaler Simplex (aus einer einzigen n-dimensionalen Zelle bestehend) und jeder ihm homöomorphe topologische Raum (als *„elementare“* $\mathfrak{M}^n$ oder *„n-dimensionales Elementarraumstück“* $\mathfrak{E}^n$ bezeichnet).[156]) Bisher untersucht wurden vorwiegend aus endlich vielen Zellen aufgebaute berandete $\mathfrak{M}^n$ (für $n = 2$ zusammen mit den „geschlossenen“ Flächen (Nr. 24) auch Polyederflächen genannt).[157])

Bei Beschreibung eines bestimmten Zellaufbaus einer berandeten $\mathfrak{M}^n$ durch *Ränderzuordnungen* werden nicht, wie bei einer homogenen $\mathfrak{M}^n$ (vgl. Nr. 27) *alle* $(n - 1)$-dimensionalen Randsimplexe oder n-dimensionalen Simplexe $\mathfrak{E}_i^n$ je einem zweiten $(n - 1)$-dimensionalen Randsimplex zugeordnet sein, sondern es werden auch freie $(n - 1)$-dimensionale Randsimplexe auftreten, die keinem zweiten zugeordnet sind. (Analoges gilt für einen Aufbau aus allgemeineren Zellen als Simplexen, vgl. Nr. 29). Andererseits erhält man sogenannte *n-dimensionale Komplexe*[158]) $\mathfrak{K}^n$, wenn man zuläßt, daß beim Aufbau eines topologischen Raumes aus n-dimensionalen Simplexen auch mehr als zwei $(n - 1)$-dimensionale Randsimplexe einander zugeordnet und durch Heftung (Nr. 22) miteinander verschmolzen werden. Noch allgemeinere topologische Räume erhält man, wenn man an einem System von Zellen verschiedener Dimension Heftungen ausführt. Einen solchen allgemeineren *mehrdimensionalen Komplex* stellt z. B. jede Teilmenge einer $\mathfrak{M}^n$ (oder $\mathfrak{K}^n$) dar, die aus allen jenen Punkten besteht, die irgend einer Menge von Zellen $\mathfrak{Z}^\nu$ $(0 \leqq \nu \leqq n)$ der $\mathfrak{M}^n$ angehören.

Der Bereich jener topologischen Räume, die bisher in Untersuchungen der n-dimensionalen Topologie aufgetreten sind, ist damit umschrieben.

31. Topologische Invarianz der Dimensionszahl. Die wichtigste Grundlage für die Einteilung der n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten

156) Andererseits hat *W. Dyck*, Math. Ann. 37 (1890), p. 277 die Bezeichnung „Elementarmannigfaltigkeit n^{ter} Dimension“ für die Punktmenge $\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 < 1$ (und jede ihr homöomorphe) verwendet, die nicht berandet sondern homogen (und dem $\mathfrak{R}^n$ homöomorph) ist.

157) *B. v. Kerékjártó*, Vorl. I, p. 133; *Weyl*, R. Fl. p. 52 nennt „Polyeder“ das, was man aus einer solchen Fläche erhält, wenn man alle etwa vorhandenen Randpunkte wegläßt.

158) Vgl. III A B 3, Nr. 1, 5. Dabei werden Punkte mit komplizierterem Umgebungscharakter vorkommen, als ihn die mittleren Punkte und Randpunkte haben. Vgl. die „verallgemeinerten Mannigfaltigkeiten“ („generalized manifolds“) bei *Veblen*, Cambr. Coll., p. 92. Sie treten z. B. auf (in Fragen der topologischen Klassifikation von Mannigfaltigkeiten von Bewegungszuständen) bei *H. Hotelling*, Trans. Am. Math. Soc. 27 (1924), p 341.

n Klassen homöomorpher bildet der für beliebiges m und n zuerst von *L. E. J. Brouwer* bewiesene Satz, daß eine $\mathfrak{M}^m$ für $m \neq n$ niemals einer $\mathfrak{M}^n$ homöomorph sein kann[159]); das gleiche gilt für Komplexe $\mathfrak{K}^m$ und $\mathfrak{K}^n$; und ein mehrdimensionaler Komplex, unter dessen (unendlich vielen) Zellen solche von beliebig hoher Dimension vorkommen, kann nur einem ebensolchen Komplex homöomorph sein.

Innerhalb der Gesamtheit aller Mannigfaltigkeiten gleicher Dimensionen ist aber für $n \geqq 3$ das Homöomorphieproblem (Nr. 2) noch völlig ungelöst.[160]) Für $n = 1$ ist leicht zu sehen, daß es keine anderen zusammenhängenden $\mathfrak{M}^1$ gibt als die vier durch $\mathfrak{S}^1$, $\mathfrak{R}^1$, $\mathfrak{E}^1$ und durch die Punktmenge $\xi \geqq 0$ des $\mathfrak{R}^1$ (Halbgerade) dargestellten. Mit $n = 2$ beschäftigen wir uns in Nr. 32.

32. Homöomorphie der Flächen. Wie es lange an einer strengen Abgrenzung des Begriffs der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit fehlte, so waren auch mancherlei Resultate, die man über die Topologie der Flächen und n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten besaß, zunächst noch nicht strenge begründet und sind es z. T. auch heute noch nicht. Auf einige Fragen, die mit der Entwicklung einer selbständigen *kombinatorischen* Topologie zusammenhängen, ist im Abschnitt IV einzugehen. Indessen ist für die Topologie der homogenen 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, die für die Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen eine so große Bedeutung erlangt hat, von *H. Weyl*[161]) eine strenge (nicht bloß auf anschauliche Betrachtungen gestützte) Begründung und im besonderen für die schon lange bekannten Tatsachen der Topologie „geschlossener" Flächen ein strenger Nachweis gegeben worden.[162])

Nach eingehender Erläuterung des Begriffs der „Fläche" $\mathfrak{F}$ (= „homogene $\mathfrak{M}^2$" nach unserer Terminologie — hingegen sagt *Weyl* „2-dimensionale Mannigfaltigkeit" für unsere „homogenen 2-dimensionalen Gebilde"[118])) wird in dem *Weyl*schen Buche der Begriff „(geschlossenes) Polygon auf $\mathfrak{F}$" (in einem bestimmten Zellaufbau $\mathfrak{z}$ der Fläche $\mathfrak{F}$)

---

159) Vgl. II C 9, Nr. 17 und diesen Art. Nr. 41, Anm. [262]). Wegen des Satzes von der Invarianz des Gebiets (s. II C 9, p. 954) für $n = 2$ vgl. *Kerékjártó,* Vorl. I, p. 77 und *A. Winternitz,* Math. Ztschr. 26 (1927), p. 165. Einen neuen Beweis für die Dimensionsinvarianz hat *E. Sperner,* Abh. Math. Sem. Hamburg 6 (1928), p. 265—272 gegeben; desgleichen *W. Hurewicz* [262]); vgl. dazu noch *B. Knaster-C. Kuratowski-S. Mazurkiewicz,* Fund. math. 14 (1929), p. 132—135, § 4.

160) Auf gewisse Ausblicke weist *v. Kerékjártó,* Vorl. I, p. 12/14 hin.

161) *H. Weyl,* R. Fl., §§ 4ff., Math. Ann. 77 (1916), p. 349, Anm. ** und [169]).

162) Bezüglich der älteren Literatur vgl. III AB 3.

definiert; ferner nach *Koebe*[163]) eine $\mathfrak{F}$ „*schlichtartig*" genannt[164]), wenn $\mathfrak{F}$ zerlegt wird durch jedes Polygon in $\mathfrak{z}$ — und dann (wie bewiesen wird) auch durch jedes Polygon in jedem anderen Zellaufbau $\mathfrak{z}_1$. Auf Grund des Begriffes (vgl. Nr. **19**) der „unverzweigten unbegrenzten Überlagerungsflächen $\overline{\mathfrak{F}}$" einer Fläche wird $\mathfrak{F}$ „*einfach zusammenhängend*" genannt, wenn es keine andere $\overline{\mathfrak{F}}$ gibt als die einblätterige (mit $\mathfrak{F}$ übereinstimmende). Gestützt auf einen Beweis, daß die Fläche $\mathfrak{K}$: $\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2 < 1$ in diesem Sinne einfach zusammenhängend ist, wird gezeigt, daß zu entsprechenden Punkten P, $\overline{P}$ und jeder zu $\mathfrak{K}$ homöomorphen Umgebung von P eine auf sie topologisch abgebildete Umgebung von $\overline{P}$ gehört, worauf zu jeder $\mathfrak{F}$ ihre „*universelle Überlagerungsfläche*" $\widetilde{\mathfrak{F}}$ eingeführt wird.[165]) Bezeichnen wir mit $\overline{\mathsf{A}}$ (bzw. $\widetilde{\mathsf{A}}$) die eindeutige stetige Abbildung von $\overline{\mathfrak{F}}$ (bzw. $\widetilde{\mathfrak{F}}$) auf $\mathfrak{F}$, gemäß welcher (nach Nr. **19**) $\overline{\mathfrak{F}}$ ($\widetilde{\mathfrak{F}}$) eine Überlagerungsfläche von $\mathfrak{F}$ ist, so ist $\widetilde{\mathfrak{F}}$ charakterisierbar dadurch, daß jeder auf $\widetilde{\mathfrak{F}}$ liegenden geschlossenen Kurve $\tilde{\gamma}$ vermöge $\widetilde{\mathsf{A}}$ eine solche Bildkurve γ auf $\mathfrak{F}$ entspricht, daß auf *jeder* $\overline{\mathfrak{F}}$ von $\mathfrak{F}$ jede Kurve $\bar{\gamma}$, welche γ zur Bildkurve vermöge $\overline{\mathsf{A}}$ hat, gleichfalls geschlossen ist. Ist P ein Punkt von $\mathfrak{F}$ und sind $\widetilde{P}$, $\widetilde{P}'$ zwei beliebige Punkte von $\widetilde{\mathfrak{F}}$, die beide P zum Bild haben, dann gibt es eine und nur eine $\widetilde{P}$ in $\widetilde{P}'$ überführende „Decktransformation von $\widetilde{\mathfrak{F}}$ in sich", d. h. eine solche topologische Abbildung von $\widetilde{\mathfrak{F}}$ auf sich selbst, bei der nur Punkte mit gleichem Bildpunkt auf $\mathfrak{F}$ einander entsprechen. Die Gruppe Γ aller Decktransformationen von $\widetilde{\mathfrak{F}}$ in sich ist eine topologische Invariante von $\mathfrak{F}$.[166]) Für die im genannten Sinn „einfach zusammenhängenden" Flächen ist kennzeichnend, daß Γ sich auf die Identität reduziert. In diesem Sinne einfach-zusammenhängend sind, ebenso wie die Fläche $\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2 < 1$, auch alle jene und nur jene berandeten, absolut-kompakten (d. h. aus endlich vielen Zellen aufzubauenden) Flächen („Polyederflächen"), die durch jeden Querschnitt zerlegt werden.[167])

163) *P. Koebe*, Nachr. Gött. Ges. 1908, p. 11. Des Einflusses, den *Koebes* Gedanken auf die Gestaltung des Buches hatten, gedenkt *Weyl*, R. Fl., p. IX.

164) Vgl. den Begriff der „developpabelen" (= in einem $\mathfrak{S}^n$ ausbreitbaren) $\mathfrak{M}^n$ bei *H. Poincare*, Rend. Circ. mat. Pal. 18 (1904), § 5, p. 90.

165) Vgl. II B 4 (*R. Fricke*), p. 455 ff.

166) Γ ist (als abstrakte Gruppe aufgefaßt, d. h. wenn man vom Wesen ihrer Elemente absieht), die *Poincare*sche Fundamentalgruppe (III A B 3, p. 207) von $\mathfrak{F}$, für deren topologische Invarianz hier ein strenger Nachweis für den 2-dimensionalen Fall gegeben wird. — Über unverzweigte Überlagerungen (einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit) in Zusammenhang mit der Fundamentalgruppe s. noch *K. Reidemeister*[224]).

167) Dadurch erhält man Übereinstimmung mit der sonst üblichen Definition der „einfach zusammmenhängenden Fläche" (für die auch die *Betti*sche Zu-

Die Eigenschaft der Orientierbarkeit oder Nicht-Orientierbarkeit[168]) einer Fläche $\mathfrak{F}$ wird als topologisch invariant nachgewiesen; desgleichen für Polyederflächen die Zusammenhangszahl (der „Zusammenhangsgrad") mit Hilfe von „Integralfunktionen" auf $\mathfrak{F}$, deren Betrachtung im Wesen mit der Betrachtung der durch Γ bestimmten kommutativen Gruppe $\hat{\Gamma}$ parallel läuft. Daran schließt sich: Besprechung von Rückkehrschnitten, kanonischer Zerschneidung und Geschlecht p geschlossener orientierbarer Flächen, sowie eine strenge Begründung der Charakteristikentheorie auf orientierbaren Flächen.[169])

Die Gleichheit des Geschlechts p ist für Homöomorphie geschlossener orientierbarer Flächen nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, für jene von berandeten außerdem Gleichheit der Randkurvenzahl; und für nicht-orientierbare Flächen gilt ein analoger Satz.[170])

Nicht nur die absolut-kompakten (besonders für die Theorie der algebraischen Funktionen wichtigen) sondern auch die nicht-absolut-kompakten homogenen Flächen haben in der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen besondere Bedeutung erlangt.[171])[171a])

---

sammenhangszahl P_1 [III AB 3, p. 180] gleich 1 wird). Da für $n > 2$ die Übereinstimmung der analogen Definitionen vermöge Fundamentalgruppe bzw. Zerschneidungen aufhört und überdies durch das Vorhandensein *mehrerer* „Zusammenhangszahlen" (*Betti*scher Zahlen) $P_1, \ldots, P_{n-1}$ der Ausdruck „einfach zusammenhängend" eine gewisse Unsicherheit bekommt, ist er im vorliegenden Bericht im allgemeinen vermieden. Vgl. noch Nr. 40 bei [230a]), ferner die Begriffe: „Kontinuum ohne Henkel" bei *L. Vietoris,* Proc. Amsterdam Ak. 29 (1926), p. 445f., „unicohérent" bei *C. Kuratowski,* Fund. math. 14 (1929), p. 304, „zweigradiger Zusammenhang" bei *H. Hornich,* Akad. Anzeiger, Wien 1929, Nr. 17.

168) Über diese Ausdrücke, die *H. Tietze* an Stelle der (meist im selben, bisweilen — korrekter — in einem anderen Sinne gebrauchten) Ausdrücke „Zweiseitigkeit" und „Einseitigkeit" vorgeschlagen hat, und die Begründung hierfür nebst zugehöriger Literatur (*Dyck, Steinitz*) vgl. etwa Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 29 (1920), p. 106, 114, 118. S. ferner [226a]).

169) *H. Weyl,* Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 25 (1916), p. 265.

170) Vgl. III AB 3, p. 196; vgl. auch *J. W. Alexander,* Ann. of math. (2) 16 (1915), p. 158; *Kerékjártó,* Vorl. I, p. 143/58.

171) In dieser Hinsicht genüge es, auf die Theorie der Uniformisierung algebraischer und allgemeiner analytischer Kurven und die Arbeiten von *Koebe* hinzuweisen, in denen die bezüglichen topologischen Fragen für orientierbare, sowie für nicht-orientierbare Flächen bereits wesentlich zur Geltung kommen. Vgl. *P. Koebe,* Acta math. 50 (1927), p. 32, Anm. sowie [171a]), Preuß. Sitz.-Ber. 1928, p. 345, 385.

171a) Über die Darstellung (orientierbarer und nicht-orientierbarer) nicht-absolut-kompakter Flächen durch Normalformen, die denen für absolut-kompakte in III AB 3, p. 197 analog sind, vgl. *Kerékjártó,* Vorl. I, p. 171ff., und die neuerdings in Preuß. Sitz.-Ber. 1927, p. 164, Kap. I veröffentlichten, z. T. schon

Das Homöomorphieproblem für diese Flächen hat *B. v. Kerékjártó* erledigt.[172]) Sei $\mathfrak{F}$ eine solche Fläche. Eine unendliche Folge $\pi_1, \pi_2, \ldots$ von (paarweise punktfremden, aus 1-dimensionalen Seiten einer Dreiecksteilung von $\mathfrak{F}$ bestehenden) Rückkehrschnitten heißt eine Fundamentalfolge, wenn stets π_{k-1} und π_{k+1} durch π_k getrennt werden; zwei Fundamentalfolgen $\pi_1, \pi_2, \ldots$ und $\pi_1', \pi_2', \ldots$ heißen äquivalent, wenn es zu jedem π_h ein π_k' gibt, das durch π_h von π_1 getrennt wird und umgekehrt zu jedem π_l' ein π_m, das durch π_l' von π_1' getrennt wird. Jeder Klasse äquivalenter Fundamentalfolgen wird ein „Randstück" von $\mathfrak{F}$ zugeordnet, das durch jede der Fundamentalfolgen dieser Klasse repräsentiert erscheint. Das Randstück heißt von 1. Art, wenn für hinlänglich großes k der π_{k+1} enthaltende durch π_k bestimmte Teil $\mathfrak{T}_k$ von $\mathfrak{F}$ schlichtartig ist; von 2. Art, wenn $\mathfrak{T}_k$ für kein k schlichtartig, für hinlänglich großes k aber orientierbar ist; von 3. Art, wenn $\mathfrak{T}_k$ für jedes k nicht-orientierbar ist. Durch Einführung von Limesbeziehungen zwischen den Randstücken (m. a. W. durch Einführung eines aus ihnen gebildeten Limesraumes) und damit des Begriffes: Homöomorphie der Randstückmengen zweier Flächen gelangt *Kerékjártó* zu dem Satz: Für die Homöomorphie von zwei nicht-absolut-kompakten homogenen Flächen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ ist notwendig und hinreichend: 1) daß Homöomorphie der Randstückmengen $\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'$ von $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$ besteht, derart, daß zwischen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ eine topologische Abbildung existiert, die die Randstückmengen 1., 2. und 3. Art von $\mathfrak{F}$ auf jene derselben Art von $\mathfrak{F}'$ abbildet; 2) wenn keine Randstücke 3. Art auftreten, daß außerdem $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ beide orientierbar oder beide nicht-orientierbar sind; und im letzteren Falle ein (und dann jeder) in eine orientierbare Fläche verwandelnder Rückkehrschnitt auf beiden Flächen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ ein Ufer oder auf beiden zwei Ufer hat; 3) wenn keine Randstücke 2. und 3. Art auftreten[172a]), daß $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ gleiches Geschlecht haben. — Es ergibt sich, daß die Menge der topologisch verschiedenen homogenen Flächen die Mächtigkeit des Kontinuums hat. Eine konstruktive Herstellung der homogenen Flächen aus 5 Typen berandeter

längere Zeit zurückliegenden Untersuchungen von *P. Koebe* (vgl. die historischen Bemerkungen, l. c. p. 165).

172) *B. v. Kerékjártó*, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 31 (1922), II. Teil, p. 98 und Vorl. I, 5. Abschnitt. Vgl. ferner die unabhängigen Untersuchungen von *S. Saks*, Fund. math. 5 (1923), p. 288—320 [= I. Teil der Thèse, Varsovie 1922] sowie *de Possel*, Paris C. R. 188 (1929[1]), p. 1589. Bezüglich der folgenden Begriffsbildungen (Theorie der Randstücke) vgl. die Analogie mit der Theorie der Primenden von *C. Carathéodory*, Math. Ann. 73 (1913), p. 323, II C 9, p. 926/29.

172a) Diesen letzteren Typus von Flächen, die er „surfaces compactifiables" (vgl. [129])) nennt, behandelt *S. Saks*, l. c. [172]).

Flächen (mit 1, 2 oder 3 Randlinien) durch Zusammensetzen längs der Randlinien rührt von *Koebe*[173]) her.

33. Weitere Untersuchungen der n-dimensionalen Topologie. Ein Teil der neueren topologischen Untersuchungen über n-dimensionale Mannigfaltigkeiten betrifft *absolute* topologische Eigenschaften einer $\mathfrak{M}^n$ (über absolut- und relativ-topologisch vgl. Nr. 2)[173a]) — hierher gehören: Fixpunkt-[174]), Translations-[175]) und Deformationssätze[176]);

---

173) *Kerékjártó,* Vorl. I, p. 172, *P. Koebe,* Sitz.-Ber. Preuß. Akad. 1927, p. 164.

173a) Hierher gehören auch neuere Beweise dafür, daß die *Betti*schen Zahlen, die *Euler*sche Charakteristik und andere aus einem Zellsystem einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^n$ (oder eines Komplexes $\mathfrak{K}$) ableitbare Merkmale gegenüber topologischen Abbildungen der $\mathfrak{M}^n$ (von $\mathfrak{K}$) invariant sind, während dies vorher auf Grund von Betrachtungen der kombinatorischen Topologie nur vermutet werden konnte. Vgl. *J. W. Alexander* [211])[215]); *H. Hopf,* Math. Ann. 96 (1926), p. 245; *H. Kneser,* Deutsch. Math.-Ver. 34 (1925), p. 12, Anm. 2.

174) Vgl. II C 9, p. 961. Ferner *L. E. J. Brouwer,* Math. Ann. 82 (1921), p. 280, Proceed. Amsterdam Ak. 29 (1926), p. 864; *J. W. Alexander,* Trans Am. Math. Soc. 25 (1923), p. 173; *Kerékjártó,* Vorl. 1, p. 191 ff.; *J. Nielsen,* Abh. Math. Sem. Hamburg 3 (1924), p. 246, Matemat. Tidsskr. (B) 1924, p. 1—22, 1928, p. 39—46, VI. Skandinav. Mat. Kongr. Beretn. København 1926, p. 263, Acta math. 50 (1927), p. 189, 53 (1929), p. 1—76; *T. Radó,* Acta litt. ac scient. Szeged 2 (1924), p. 57; *G. Birkhoff,* Acta math. 47 (1926), p. 297 (Anwendungen auf dynamische Probleme ib. 43 [1922], p. 1—119; 50 [1927], p. 359—379); *S. Lefschetz,* l. c. [177]); *G. Feigl,* Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 34 (1925), 2. Teil, p. 124, Math. Ann. 98 (1927), p. 355; *H. Hopf,* Math. Ann. 95 (1925), p. 340—367, 96 (1926), p. 225—250, Proc. Nat. Acad. 14 (1928), p. 149—153, Math. Ztschr. 26 (1927), p. 762, 29 (1929), p. 493—524, Gött. Nachr. 1928, p. 127—136; *B. Knaster-C. Kuratowski-S. Mazurkiewicz,* Fund. math. 14 (1929), p. 132—137. Über die Beziehung von Fixpunktsätzen zur Eigenschaft eines geeignet definierten (vgl. [167])) „einfachen Zusammenhangs" siehe *C. Kuratowski,* Fund. math. 14 (1929), p. 304—310. Für die Einführung des „Index" eines Fixpunktes werden auch Maßverhältnisse herangezogen (Einbettung einer $\mathfrak{M}^n$ in einen euklidischen $\mathfrak{R}^{n+p}$, speziell für $p = 1$; Vektorfelder, speziell tangentiale). Vgl. *Hadamard,* L'ind. de Kronecker, p. 437—477, und Literaturangaben bei *G. Feigl,* l. c. Weitgehende Beziehungen topologischer zu nicht-topologischen (differentialgeometrischen) Eigenschaften ergeben auch die Untersuchungen über das *Clifford-Klein*sche Raumproblem und die Curvatura integra, s. *H. Hopf,* Nachr. Gött. Ges. 1925, p. 131—141, Math. Ann. 95 (1925), p. 313—339, 340—367, Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 34 (1925), zweiter Teil, p. 130—133; *M. Morse,* Proc. Nat. Acad. 14 (1928), p. 428—430.

175) *L. J. E. Brouwer* (s. II C 9, p. 962); vgl. ferner *B. v. Kerékjártó,* Ann. of math. (2) 27 (1925), p. 105, Paris C. R. 186 (1928[1]), p. 1699—1701, 187 (1928[2]), p. 20—23; *W. Scherrer,* Vierteljahrssch. Naturf. Ges. Zürich 70 (1925), p. 77.

176) Vgl. II C 9, p. 959 ff.; *J. W. Alexander,* Proc. Nat. Acad. of Sc. 9 (1923), p. 406—407; *B. v. Kerékjártó,* Paris C. R. 180 (1925), p. 1565, Acta litt. ac scient. Szeged 2 (1925), p. 162; *W. Süß,* Tôhoku Math. J. 26 (1926), p. 90; *H. Kneser,* Math. Ztschr. 25 (1926), p. 362 (ib. p. 364 wird der Begriff der Fundamentalgruppe eines Konvergenzraumes [10a]) entwickelt); *Reinh. Baer,* J. f. Math. 156 (1927),

Untersuchung und Klassifikation der Gruppen topologischer Abbildungen einer $\mathfrak{M}^n$ auf sich selbst[177]); Orientierbarkeit oder Nicht-Orientierbarkeit einer $\mathfrak{M}^n$.[178]) Ein anderer Teil betrifft *relative* topologische Eigenschaften einer $\mathfrak{M}^m$ $(m \leqq n)$, die als Teilmenge in einer $\mathfrak{M}^n$ enthalten ist, z. B. geschlossener Linien $\mathfrak{S}^1$ (Abbilder der Kreislinie) in der Ebene $\mathfrak{R}^2$ bzw. im Raume $\mathfrak{R}^3$; sphärischer oder allgemeiner beliebiger „geschlossener" d. h. absolut-kompakter (homogener) $\mathfrak{M}^n$ im Raume $\mathfrak{R}^{n+1}$; der Kreisscheibe $\xi_1^2 + \xi_2^2 < 1$ homöomorpher Gebiete in $\mathfrak{R}^2$. Hierher gehören: der *Jordan*sche Kurvensatz[179]) und allgemeinere Zer-

p. 231—246, 159 (1928), p. 101—116. Vgl. ferner *L. Lusternik-L. Schnirelmann*, Paris C. R. 188 (1929[1]), p. 295—297.

177) Vgl. II C 9, p. 959ff.; ferner *H. Gieseking*, Diss. Münster 1912; *J. Nielsen*, Diss. Kiel 1913, p. 40ff., Math. Ann. 78 (1918), p. 396f., Abh. Math. Sem. Hamburg 3 (1924), p. 246, Mat. Tidsskr. (B) 1923, p. 53—61 und 1924, p. 1—22, sowie l. c. [174]); *L. E. J. Brouwer*, Paris C. R. 168 (1919[1]), p. 845, Versl. Amsterdam Akad. 27 (1919), p. 609, 1363, 28 (1920), p. 1186, 29 (1920), p. 610 = Proc. Amsterdam Akad. 21 (1918/19), p. 707, 1352, 22 (1920), p. 811, ferner Proc. Amsterdam Akad. 29 (1926), p. 864; *B. v. Kerékjártó*, ibid. (Versl.) 28 (1919), p. 555, sowie l. c. [175]) und Ann. of math. (2) 29 (1927/28), p. 169—179; *W. Scherrer*, Vierteljahrsschr. Naturf. Ges. Zürich 70 (1925), p. 278; *S. Lefschetz*, Proc. Nat. Ac. 11 (1925), p. 290—292, 12 (1926), p. 737—739, Trans. Am. Math. Soc. 28 (1926), p. 1—49, 29 (1927), p. 429—462, 848; *Reinh. Baer*, J. f. Math. 160 (1928), p. 1—25. Vgl. auch *H. Hopf*, Math. Ann. 96 (1926), p. 209—224, Gött. Nachr. 1928, p. 127—136; *M. Morse*, Am. J. of Math. 51 (1929), p. 165—178. Auch die eindeutigen (nicht notwendig eineindeutigen) stetigen Abbildungen einer $\mathfrak{M}^n$ auf sich selbst sind studiert worden (und liefern absolute topologische Eigenschaften der betreffenden $\mathfrak{M}^n$): vgl. [189]). Eine als „transformations intérieures" bezeichnete Kategorie stetiger Abbildungen untersucht *S. Stoïlow*, Fund. math. 13 (1929), p. 186—194, sowie Ann. Éc. Norm. (3) 45 (1928), p. 347—382. Über analytische Approximationen topologischer Abbildungen vgl. *P. Franklin-N. Wiener*, Trans. Amer. Math. Soc. 28 (1926), p. 762.

178) Vgl. II C 9, p. 956, Anm. 332, 332a; *R. Furch*, Abh. Math. Sem. Hamburg 1 (1922), p. 210; *J. Lense*, Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 34 (1925), p. 243. Zur Terminologie vgl. [168]); über den Sinn von Kurven in der Ebene s. *J. R. Kline*, Ann. of math. (2) 19 (1917/18), p. 185, 21 (1919/20), p. 113.

179) Vgl. II C 9, p. 916, *B. v. Kerékjártó*, Math. naturw. Berichte der Ungar. Akad. d. Wiss. 38 (1919), p. 194 und Vorl. 1, p. 59; *Erhardt Schmidt*, Sitz.-Ber. Preuß. Akad. 1923, p. 318; *A. Schoenflies*, Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 33 (1924), p. 147, 160; *F. Hartogs*, Math. Ztschr. 22 (1925), p. 62; *P. Alexandroff*, Math. Ann. 96 (1926), p. 527; *C. Zarankiewicz*, Fund. math. 13 (1929), p. 264—268. Vgl. auch *D. W. Woodard*[45]). Über *Jordan*sche Kurven und Kurvenbogen s. ferner *Kerékjártó*, Vorl. I, p. 103; *G. Feigl*, Math. Ztschr. 27 (1927), p. 161. — Als *Jordansche Kurve* (= einfache geschlossene Kurve) bzw. *Jordanscher* (= einfacher) *Kurvenbogen* soll dabei das in der Ebene $\mathfrak{R}^2$ (eventuell allgemeiner in einem $\mathfrak{R}^{1+p}$, wo $p \geqq 1$) gelegene topologische Bild von $\mathfrak{S}^1$ (Kreislinie) bzw. einer Strecke verstanden werden; analog als *Jordansche Fläche* (oder *Jordansche Mannigfaltigkeit*) das im $\mathfrak{R}^{n+1}$ (eventuell $\mathfrak{R}^{n+p}$) gelegene topologische Bild der sphärischen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{S}^n$. Bisweilen wird „*Jordan*sche Fläche" auch für

legungssätze[180]), Sätze über „Erreichbarkeit“ und „Unbewalltheit“[181]), Verknotungs- und Verkettungsprobleme[182]) (letztere vom kontinuier-

das im $\mathfrak{R}^{n+1}$ gelegene topologische Bild irgendeiner orientierbaren geschlossenen $\mathfrak{M}^n$ gesagt (wobei zu beachten ist, daß nicht zu *jeder* orientierbaren geschlossenen $\mathfrak{M}^n$ topologische Bilder im $\mathfrak{R}^{n+1}$ existieren (wohl aber in geeigneten $\mathfrak{R}^{n+p}$ gemäß einer Bemerkung von *J. W. Alexander*).

In vorstehender Bedeutung war das Wort „*Jordan*sche Kurve“ bis vor kurzem allgemein gebraucht — im Einklang damit, daß der „*Jordan*sche Kurvensatz“ von eben diesen Kurven handelt, und im Einklang mit dem besonderen Verdienst von *C. Jordan* gerade um diesen wichtigen Satz. Vor einiger Zeit sind manche Autoren hiervon abgewichen und haben beliebige stetige Bilder einer Strecke (das sind die „im kleinen zusammenhängenden Kontinua“) als *Jordan*sche Kurven bezeichnet. Wir glauben an der alten Bedeutung festhalten zu sollen.

180) Vgl. II C 9, p. 917 ff., 930/31, ferner *A. M. Mullikin,* Trans. Am. Math. Soc. 24 (1922), p. 144 (p. 148—154); *E. Stenfors,* Soc. Scient. Fenn. 1923; *S. Mazurkiewicz,* Fund. math. 6 (1924), p. 37/38; *C. Zarankiewicz,* Fund. math. 11 (1928), p. 19. Verwandte Fragen behandeln *W. Sierpiński,* Tôhoku Math. J. 13 (1918), p. 300, Monatsh. Math. Phys. 35 (1928), p. 239—242; *R. L. Moore,* Math. Ztschr. 15 (1922), p. 254—260, Trans. Am. Math. Soc. 24 (1922), p. 145, 27 (1925), p. 416—428, Fund. math. 6 (1924), p. 189—202, 12 (1928), p. 295—297, 13 (1929), p. 261—263, Proc. Nat. Acad. 11 (1925), p. 469—476, 13 (1927), p. 711—716, 14 (1928), p. 85—88; *J. Pál,* Matemat. Tidskrift 1923, p. 66; *S. Mazurkiewicz,* Fund. math. 5 (1924), p. 188—205, 10 (1927), p. 305; *S. Straszewicz,* Fund. math. 7 (1925), p. 159; *P. Knaster,* Fund. math. 7 (1925), p. 264, 10 (1927), p. 276; *C. Kuratowski,* Fund. math. 6 (1924), p. 130—146, 8 (1926), p. 137, 14 (1929), p. 304—310, Monatsh. Math. Phys. 36 (1929), p. 77—80, sowie [148]); *B. Knaster-C. Kuratowski,* Proc. Nat. Acad. 13 (1927), p. 647—649; *C. Zarankiewicz,* Fund. math. 9 (1927), p. 124—171, 12 (1928), p. 121—125, Bull. Acad. Polon. 1926, p. 361—371, 1927, p. 193, Ann. Soc. Polon. de Math. 5, 1926 (1927), p. 103, vgl. auch l. c. [292]); *C. Kuratowski-C. Zarankiewicz,* Bull. Am. Math. Soc. 33 (1927), p. 571—575; *J. R. Kline,* Math. Ztschr. 26 (1927), p. 687—690; *P. Urysohn,* Fund. math. 10 (1927), p. 175—176; *G. T. Whyburn,* Fund. math. 10 (1927), p. 180, 13 (1929), p. 42—57, Bull. Am. Math. Soc. 32 (1926), p. 659, 35 (1929), p. 87—104, Trans. Am. Math. Soc. 29 (1927), p. 746, 30 (1927), p. 597—609, Monatsh. Math. Phys. 36 (1921), p. 305—314; *P. Alexandroff,* Paris C. R. 183 (1926[2]), p. 722—724; *R. G. Lubben* [188]), Trans. Am. Math. Soc. 31 (1929), p. 503; *Wall. A. Wilson,* Bull. Am. Math. Soc. 33 (1927), p. 733—744, Ann. of math. (2) 29 (1927/28), p. 382—388, Trans. Am. Math. Soc. 31 (1929), p. 552—562, Am. J. of Math. 51 (1929), p. 19—30; *W. L. Ayres,* Proc. Nat. Acad. 14 (1928), p. 201—206, Monatsh. Math. Phys. 36 (1929), p. 135—148; *E. Kamke,* Preuß. Sitz.-Ber. 1928, p. 283—299; *P. Szymański,* Fund. math. 10 (1927), p. 363—374, 11 (1928), p. 1—15; *C. Kuratowski-S. Straszewicz,* Fund. math. 12 (1928), p. 152—157; *A. Tarski,* Fund. math. 12 (1928), p. 188—205; *J. H. Roberts-J. L. Dorroh,* Fund. math. 13 (1929), p. 58—61; *J. H. Roberts,* ib. 14 (1929), p. 96—102. Vgl. auch [227b]), ferner: *R. Furch,* Math. Ztschr. 28 (1928), p. 556—566. Mit der Theorie der die Ebene bzw. den $\mathfrak{R}^n$ zerlegenden Mengen hängt auch die Theorie der „Hauptpunkte“, *F. Hartogs-A. Rosenthal,* Math. Ann. 100 (1928), p. 212—263, III. Kap., zusammen.

Die Zerlegung des sphärischen $\mathfrak{S}^n$ durch eingebettete $\mathfrak{M}^{n-1}$ erscheint als lichen Standpunkt in strenger Weise bis vor kurzem noch wenig in Angriff genommen), zweiseitige oder einseitige Lagerung einer (orientierbaren oder nichtorientierbaren) $\mathfrak{M}^n$ in einer $\mathfrak{M}^{n+p}$ [182a]), Fragen der Erweiterung von topologischen Abbildungen von Teilräumen auf die umfassenden Räume [183]) [183a]), Theorie der Primenden (auch Randelemente genannt) für Gebiete im $\mathfrak{R}^2$ [184]), das topologische Studium von Kurven-

---

spezieller Fall eines allgemeinen Dualitätstheorems von *J. W. Alexander* über die Zusammenhangszahlen einer in $\mathfrak{S}^n$ eingebetteten $\mathfrak{M}^m$ und jene des Restraumes $\mathfrak{S}^n - \mathfrak{M}^m$, Trans. Am. Math. Soc. 23 (1922), p. 333; vgl. hierzu auch eine ältere Arbeit von *G. Mannoury,* Nieuw Archief voor Wiskunde, Amsterdam (2) 3 (1898), p. 126—152. Weitere Verallgemeinerungen geben *P. Alexandroff,* Paris C. R. 184 (1927), p. 425—427, Gött. Nachr. 1927, p. 323—329 und [182]); *L. Pontrjagin,* Gött. Nachr. 1927, p. 315—322, 446—456; *E. R. van Kampen,* Proc. Amsterdam Akad. 31 (1928), p. 899—905 und Diss. Leiden 1929; *S. Lefschetz,* Proc. Nat. Acad. of Sc. 13 (1927), p. 614—622, 805—807, 14 (1928), p. 367—369; *Felix Frankl,* Wien. Ber. 136 (1927), p. 689—699.

181) II C 9, p. 920/22, 923/24, 931, 955, *B. v. Kerékjártó,* Abh. Math. Sem. Hamburg 4 (1925), p. 164—171; *S. Mazurkiewicz,* Fund. math. 13 (1929), p. 146—150, 14 (1929), p. 107—115, 271—276; *C. Kuratowski,* ib. p. 116—117; *G. T. Whyburn,* Proc. Nat. Ac. 14 (1928), p. 657—666, Bull. Am. Math. Soc. 34 (1928), p. 429 und p. 504—510, Monatsh. Math. Phys. 35 (1928), p. 289—304; *R. G. Lubben,* Bull. Am. Math. Soc. 32 (1926), p. 14 und l. c. [180]). Vgl. ferner *R. L. Wilder* [255a]), *G. T. Whyburn,* Fund. math. 14 (1929), p. 311—326. Weitere Fragen über Randpunktmengen bei *R. L. Moore,* Fund. math. 6 (1924), p. 203—213, Trans. Am. Math. Soc. 27 (1925), p. 329.

182) Vgl. III A B 3, p. 207—216. *L. E. J. Brouwer,* Amsterdam Akad. Versl. 20_2 (1912), p. 1049 = Proc. Amst. 14 (1911), p. 300—310; *J. W. Alexander,* Proc. Nat. Acad. of Sc. 9 (1923), p. 93—95; *S. Mazurkiewicz-S. Straszewicz,* Fund. math. 9 (1927), p. 205—211; *P. Alexandroff,* Fund. math. 11 (1928), p. 222—227. Vgl. auch die damit verwandten in Anm. 224 (zweiter Absatz) genannten Arbeiten sowie [227]). — Verknotete und verkettete Flächen im $\mathfrak{R}^4$ betrachtet *E. Artin,* Abh. Math. Sem. Hamburg 4 (1926), p. 174; *E. R. van Kampen,* ib. 6 (1928), p. 216.

182a) Vgl. [168]) [226a]).

183) Vgl. II C 9, p. 958f., ferner *S. Saks* [172]), p. 307ff.; *R. L. Moore,* Am. J. of Math. 48 (1926), p. 67; *H. M. Gehman,* Trans. Am. Math. Soc. 28 (1926), p. 252—265, 31 (1929), p. 241—252; Am. J. of Math. 51 (1929), p. 385. Vgl. ferner eine demnächst erscheinende Münchener Dissertation von *H. Wolkenstörfer.*

183a) Auch Fragen wie die, ob eine gegebene Mannigfaltigkeit ein (singularitätenfreies) Bild hat in einer anderen von bestimmten Eigenschaften, z. B. einer sphärischen der nächsthöheren Dimension (Einbettungsprobleme) können als hierher gehörig angesehen werden. Vgl. hierzu *H. Hopf,* Math. Ann. 95 (1925), p. 362 und die l. c. [153]) p. 15, Anm. 13 aufgeworfene allgemeine Frage; ferner die in Nr. **41** (bei [271]) ff.) angeführten Einbettungssätze. Vgl. auch [95]) und [224b]).

184) Vgl. II C 9, p. 926/9, 958, ferner *P. Urysohn,* Fund. math 6 (1924), p. 229; *R. L. Moore,* Proc. Nat. Acad. 10 (1924), p. 170—175, Math. Ztschr. 22 (1925), p. 307, Trans. Am. Math. Soc. 27 (1925), p. 425. Analoge Fragen für Ge-

systemen[185]) (neuerdings von irgendwelchen abgeschlossenen Mengen[185a])) in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, speziell auf Flächen. Dabei stellt die Möglichkeit oder Unmöglichkeit des Auftretens von Kurvensystemen mit bestimmten Eigenschaften (z. B. Erfülltsein von Verknüpfungsbeziehungen, Auftreten von Singularitäten) auf einer Fläche eine absolute topologische Eigenschaft dieser Fläche dar und es entsteht die Frage, ob sie zur vollen topologischen Kennzeichnung der betreffenden Fläche hinreichen.[186]) Geeignete Systeme geschlossener Kurven oder allgemeinerer Punktmengen auf einer Fläche führen zur Definition einer („zyklomatischen") Zusammenhangszahl bzw. einer „Basis der Zyklose".[187])

Im besonderen ist die Topologie von Punktmengen (speziell „Kurven") in n-dimensionalen Zahlenräumen (vgl. Abschnitt I) studiert worden.[188])

---

biete im $\mathfrak{R}^3$ behandelt die Heidelberger Diss. von *B. Kaufmann* (erscheint demnächst in Math. Ann.).

185) *J. Nielsen,* Diss. Kiel 1913, Matemat. Tidsskr. (B) 1924, p. 1—24; *R. L. Moore,* Trans. Am. Math. Soc. 22 (1921), p. 41, Fund. math. 4 (1923), p. 106—117; *H. Hamburger,* Sitz.-Ber. Preuß. Akad. 1922, p. 285, Math. Ztschr. 19 (1923), p. 50; *F. Levi,* Math. Ztschr. 16 (1923), p. 148, 22 (1925), p. 45, Ber. Sächs. Ges. 75 (1923), p. 62 u. 127, 78 (1926), p. 256; *H. Kneser,* Math. Ann. 91 (1924), p. 135; *H. R. Brahana,* l. c. [224a]); *Reinhold Baer,* J. f. Math. 156 (1927), p. 231—246; *B. v. Kerékjártó,* Gött. Nachr. 1922, p. 71 (behandelt insbesondere auch Systeme von Flächen im dreidimensionalen Raum), Paris C. R. 180 (1925), p. 1565, Acta litt. ac scient. Szeged 2 (1925), p. 162—166; über topologisch-differentialgeometrische Probleme siehe *W. Blaschke,* Math. Ztschr. 28 (1928), p. 150, 158, Abh. Math. Sem. Hamburg 7 (1929), p. 37—45, 67—69; *K. Mayrhofer,* ib. p. 1—10, Math. Ztschr. 28 (1928), p. 728, 30 (1929), p. 131, 144; *K. Reidemeister,* Math. Ztschr. 29 (1929), p. 427—435. Vgl. auch [186]). Ältere Literatur s. III AB 3, p. 204—205 sowie *W. Dyck,* Sächs. Ber. 1885, p. 314f., Math. Ann. 32 (1888), p. 463; *Hamburger,* l. c. p. 54.

185a) *P. Alexandroff,* Paris C. R. 184 (1927), p. 317—319, 425—427; *S. Lefschetz,* Ann. of math. (2) 29 (1928), p. 232—254.

186) Über die topologische Kennzeichnung der Ebene vgl. *R. L. Moore,* Trans. Am. Math. Soc. 17 (1916), p. 131—164; *W. Süß,* Proc. Imper. Acad. Tōkyō 2 (1926), p. 368.

187) *L. E. J. Brouwer,* Paris C. R. 154 (1912^1), p. 862; 169 (1919^2), p. 953. Speziell für Gebiete (= zusammenhängende offene Mengen) in der Ebene $\mathfrak{R}^2$ vgl. II C 9, p. 906 und 955, Anm. 329. Vgl. ferner *L. E. J. Brouwer,* Amsterdam Akad. Versl. 28 (1919/20), p. 373 = Proceed. 22 (1919), p. 471. Siehe auch Nr. **40** bei [230b]). Über den Zusammenhang ebener Gebiete siehe *P. Urysohn,* Math. Ztschr. 21 (1924), p. 133—150.

188) Vgl. außer den mannigfachen einschlägigen Untersuchungen, über die in Artikel II C 9 (Nr. **11**—**13a** und **16**—**17b**) berichtet wird, *A. Denjoy,* Amsterdam Akad. Versl. 28 (1919/20), p. 1100 = Proceed. 21 (1919), p. 125—130; *L. Antoine* [5]); *R. L. Wilder,* Fund. math. 6 (1924), p. 214—228, 7 (1925), p. 311; *R. L. Moore,* Trans. Am. Math. Soc. 27 (1925), p. 416; *W. A. Wilson,* Trans. Am. Math. Soc. 27 (1925), p. 429, Bull. Am. Math. Soc. 34 (1928), p. 599—606; *B. Knaster,*

Zu den topologisch invarianten Eigenschaften gehören natürlich alle jene, die bei *beliebigen eindeutigen stetigen* (nicht notwendig ein-

Fund. math. 7 (1925), p. 191—197; *J. R. Kline*, Fund. math. 7 (1925), p. 314; *C. Kuratowski*, Fund. math. 8 (1926), p. 201, 10 (1927), p. 225—275, 12 (1928), p. 20—42 u. 214—239, 14 (1929), p. 116—117; *P. Urysohn*, Fund. math. 10 (1927), p. 175—176; *W. Sierpiński*, ib. 13 (1919), p. 230, 14 (1929), p. 234; *S. Mazurkiewicz*, Fund. math. 14 (1929), p. 107—115; *H. M. Gehman*, Proc. Nat. Acad. of Sc. 12 (1926), p. 544; *R. G. Lubben*, Bull. Am. Math. Soc. 32 (1926), p. 114; *G. T. Whyburn-C. M. Cleveland*, ib. p. 109; *G. T. Whyburn*, Trans. Am. Math. Soc. 29 (1927), p. 369; Bull. Am. Math. Soc. 33 (1927), p. 685, Ann. of math. (2) 29 (1928), p. 399—411. Vgl. auch (nicht rein topologisch): *C. Carathéodory*, l. c. [193]), p. 17 ff.

Über Kurven (insbesondere in der Ebene) sowie allgemeinere Kontinua s. Nr. **42**, ferner II C 9, Nr. **12, 13, 17 a** und l. c. [181]); einen Bericht über Kurven gibt *R. L. Moore*, Bull. Am. Math. Soc. 29 (1923), p. 289, einen Überblick über verschiedene Kurvenbegriffe *A. Rosenthal*, Unterrichtsblätter f. Math. u. Naturwiss. 1924, Nr. 7/8. Siehe ferner *R. L. Moore*, Math. Ztschr. 15 (1922), p. 254, Bull. Am. Math. Soc. 29 (1923), p. 438, Fund. math. 7 (1925), p. 302, Proc. Nat. Acad. of Sc. 9 (1923), p. 101, Bull. Am. Math. Soc. 32 (1926), p. 331; *G. T. Whyburn-W. L. Ayres*, Bull. Am. Math. Soc. 34 (1928), p. 349—360; *W. A. Wilson*, Trans. Am. Math. Soc. 28 (1926), p. 536, Amer. J. 48 (1926), p. 147—168, Bull. Am. Math. Soc. 34 (1928), p. 81; *J. R. Kline*, Bull. Am. Math. Soc. 23 (1917), p. 753, 27 (1921), p. 399; 28 (1922), p. 8, Proc. Nat. Acad. 6 (1920), p. 529—531, Fund. math. 10 (1927), p. 298; *J. R. Kline-R. L. Moore*, Bull. Am. Math. Soc. 28 (1922), p. 380; *B. v. Kerékjártó*, l. c. [181]); *W. Scherrer*, Vierteljahrsschr. Naturf. Ges. Zürich 69 (1924), p. 251, Math. Ztschr. 24 (1925), p. 125—130; *H. M. Gehman*, Ann. of math. (2) 27 (1925), p. 29 = Thesis Philadelphia 1925, Am. J. of Math. 49 (1927), p. 189, Ann. of math. (2) 27 (1926), p. 381, 28 (1927), p. 103, Bull. Am. Math. Soc. 32 (1926), p. 218, Trans. Am. Math. Soc. 29 (1927), p. 553, 30 (1928), p. 63, Proc. Nat. Acad. 14 (1928), p. 431—433, 433—435 und l. c. [183]); *G. T. Whyburn*, Bull. Am. Math. Soc. 32 (1926), p. 659—663, 33 (1927), p. 185—188, 305—308, Proc. Nat. Acad. 12 (1926), p. 761—767, 13 (1927), p. 31—38, 650—657, Am. J. of Math. 50 (1928), p. 167—194, Fund. math. 11 (1928), p. 296—301, 14 (1929), p. 103—106, Ann. of math. (2) 29 (1928), p. 399—411; *C. M. Cleveland*, Bull. Am. Math. Soc. 32 (1926), p. 311 u. 420, Proc. Nat. Acad. 13 (1927), p. 275; *R. L. Wilder*, Fund. math. 6 (1924), p. 214—228, 7 (1925), p. 340—377, 11 (1928), p. 127—131, Proc. Nat. Acad. 11 (1925), p. 725—728, 14 (1929), p. 614—621, Bull. Am. Math. Soc. 32 (1926), p. 217; *W. L. Ayres*, Bull. Am. Math. Soc. 32 (1926), p. 37 u. 307, 33 (1927), p. 201 u. 565, Ann. of math. 28 (1927), p. 396 = Thesis Philadelphia 1927, Ann. of math., ib. p. 501, Proc. Nat. Acad. of Sc. 13 (1927), p. 749, 15 (1929), p. 91 u. 94, Fund. math. 11 (1928), p. 132—140 u. 661, ib. 14 (1929), p. 92—95, Am. J. of. Math. 50 (1928), p. 521—534; Trans. Am. Math. Soc. 30 (1927), p. 567—578; 31 (1928), p. 595—612, Bull. Acad. Polon. 1928, p. 127—142, Math. Ann. 101 (1929), p. 194—209, Monatsh. Math. Phys. 36 (1929), p. 301; *B. Knaster-C. Kuratowski*, Bull. Am. Math. Soc. 33 (1927), p. 106; *M. H. A. Newman*, J. of London Math. Soc. 2 (1926), p. 100—102; *St. Nikodym*, Fund. math. 12 (1928), p. 160—187, 240—243; *P. Urysohn*, Math. Ann. 98 (1928), p. 296—308; *N. E. Rutt*, Am. J. of Math. 51 (1929), p. 217—246; *T. C. Benton*, Fund. math. 13 (1929), p. 151—177. — Vgl. auch *G. Landsberg*, *J. v. Sz. Nagy*, l. c. [224]); *C. Kuratowski*, eindeutigen) Abbildungen erhalten bleiben[189]), z. B. die (absoluten[190])) Eigenschaften (eines topologischen Raumes): absolut-kompakt[191]), zusammenhängend[192]), zusammenhängend im kleinen[193]); ferner gehören hierher die Untersuchungen von *L. E. J. Brouwer*[194]) über den *Abbildungsgrad* einer eindeutigen stetigen Abbildung einer $\mathfrak{M}^n$, die in gewissem Sinne eine Weiterbildung der in Nr. **31** genannten Untersuchungen darstellen.

Bei einer von unserer Darstellung abweichenden Auffassungsweise wird von der Gesamtheit der genannten (eindeutigen stetigen) Abbildungen nach *A. Schoenflies* als von der „weiteren Gruppe" gesprochen, im Gegensatz zu der „engeren Gruppe" der eineindeutigen stetigen Abbildungen[195]) (letztere wird auch als „Gruppe der Analysis situs" schlechtweg bezeichnet). Diese Ausdrucksweise setzt voraus, daß die betrachteten Gebilde (Punktmengen) alle in einem und demselben um-

---

Fund. math. 14 (1929), p. 138—144; *R. L. Moore,* Bull. Am. Math. Soc. 35 (1929), p. 185.

Über Flächen in euklidischen Räumen s. *B. v. Kerékjártó,* Proc. Nat. Acad. 10 (1924), p. 267, Acta litt. ac scient. Szeged 3 (1927), p. 49. Vgl. auch *J. W. Alexander,* Bull. Am. Math. Soc. 28 (1922), p. 10; *R. L. Moore,* ib. 29 (1923), p. 302; *M. Fréchet,* Ann. Soc. math. Polon. 1924.

189) Diese Bemerkung gilt natürlich bereits in der allgemeinen Topologie. Über die genannten Abbildungen vgl. II C 9, p. 954, 959, Anm. 325, 341, 342, 346; ferner *L. E. J. Brouwer,* Amsterdam Akad. Proceed. 29 (1926), p. 864; *W. Wilson,* Amsterdam Proc. Akad. 29 (1926), p. 1129, Diss. Amsterdam 1928, Math. Ann. 100 (1928), p. 552; *H. Hopf,* Proc. Nat. Acad. 14 (1928), p. 206—214, Math. Ann. 100 (1928), p. 579—608; *H. Kneser,* Math. Ann. 100 (1928), p. 609—617. Über gewisse als „topologische Involutionen" bezeichnete (nicht eineindeutige) Abbildungen s. *L. E. J. Brouwer,* Amsterdam Ak. Versl. 27 (1918/19), p. 1201 = Proceed. 21 (1919), p. 1143; *B. v. Kerékjártó,* Math. Ztschr. 8 (1920), p. 310, Acta litt. ac scient. Szeged 3 (1927), p. 49; *W. Scherrer,* Vierteljahrsschr. Naturf. Ges. Zürich 70 (1925), p. 268; vgl. ferner *T. Radó,* Acta litt. ac scient. Szeged 1 (1922), p. 55 (speziell nur konforme Abbildungen behandelnd).

190) Wegen absoluter und relativer Eigenschaften vgl. Nr. 2.

191) Vgl. Nr. 6, [15]).

192) Vgl. Nr. 8, [29]) und II C 9, p. 949.

193) Vgl. II C 9, p. 947 sowie *C. Kuratowski,* Fund. math. 4 (1923), p. 155; *H. Tietze,* Monatsh. Math. Phys. 32 (1923), p. 15. Ferner stellt die Eigenschaft eines topologischen Raumes $\mathfrak{R}$, *„im Punkte P" zusammenhängend im kleinen* zu sein, eine gegenüber den genannten Abbildungen invariante, *relative* Eigenschaft der aus dem einzigen Punkt P bestehenden Menge bezüglich $\mathfrak{R}$ dar. Den Begriff „zusammenhängend im kleinen" (in anderer Bezeichnung) führt auch *C. Carathéodory,* Bull. Soc. Math. de Grèce 5 (1924), p. 13, bei einer Untersuchung über die eindeutige Umkehrbarkeit stetig differenzierbarer Abbildungen des $\mathfrak{R}^n$ ein.

194) Vgl. II C 9, p. 956/7.

195) Vgl. II C 9, p. 948/59.

fassenden (Über-) Raum $\mathfrak{R}$ (gewöhnlich in einem n-dimensionalen Zahlenraum $\mathfrak{R}^n$) liegen und den Abbildungen dieses Überraumes auf sich selbst unterworfen werden.[196]) Die eineindeutigen stetigen unter diesen Selbstabbildungen von $\mathfrak{R}$ bilden dann tatsächlich eine (und zwar die „engere") Gruppe.[197]) Legt man aber diese Gruppe dem Studium einer in $\mathfrak{R}$ gelegenen Punktmenge $\mathfrak{M}$ zugrunde, so erscheinen die absoluten topologischen Eigenschaften[190]) von $\mathfrak{M}$ stets in unlösbarer Verknüpfung mit den relativen von $\mathfrak{M}$ bezüglich $\mathfrak{R}$. Will man die grundlegenden absoluten Eigenschaften herausarbeiten, so ist man genötigt, die Gebilde (Punktmengen) losgelöst von einem sie etwa umfassenden Überraum zu betrachten, wie es dem Standpunkt des vorliegenden Artikels entspricht (vgl. Nr. 2 ff.). Dann aber bilden die eineindeutigen stetigen (topologischen) Abbildungen dieser Gebilde aufeinander *keine Gruppe* mehr.[198])

Von unserem Standpunkt aus kann also *nicht* von einer „Gruppe der topologischen Abbildungen" oder „Gruppe der Analysis situs" gesprochen werden.

IV. Kombinatorische Topologie.

34. Problem einer kombinatorischen Topologie.[198a])[198aα]) Wie in Nr. **25**, **27**, **28** besprochen, hat die Untersuchung des Aufbaus n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}^n$ aus Zellen zu der Erkenntnis geführt, daß

196) Analog wie z. B. in der projektiven Geometrie die in einem projektiven Raum $\mathfrak{R}$ liegenden Figuren den projektiven Selbstabbildungen von $\mathfrak{R}$ unterworfen werden.

197) Man muß dazu natürlich von diesen Abbildungen noch voraussetzen, daß auch ihre inversen Abbildungen stetig, die Abbildungen selbst also topologisch sind. Die sogenannte „weitere Gruppe" ist überhaupt *keine* Gruppe (vgl. *A. Schoenflies,* Ber. II, p. 152, Anm. 1), weil sie nicht zu jeder ihrer Abbildungen die inverse enthält.

198) Denn wenn $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ vier topologisch äquivalente (homöomorphe) Mengen sind, ferner A eine topologische Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{N}$, B eine von $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{Q}$, so läßt sich A mit B nur zusammensetzen, wenn $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{P}$ dieselbe Menge sind.

198a) Auf die Rolle der kombinatorischen Topologie in einer Reihe neuerer Arbeiten kommen wir in Nr. **39** und **40** kurz zu sprechen. In den Nrn. **34**—**37** soll die Rolle auseinandergesetzt werden, die man der kombinatorischen Topologie zur Zeit ihrer Entstehung zugewiesen hat.

198aα) *Vorbemerkung.* Unter „kombinatorischer Topologie" verstehen wir hier *nicht* einen Zweig der in den Abschnitten I—III dargestellten Topologie, sondern jenen in III AB 3, p. 156—168 dargestellten „Teil der Kombinatorik" (III AB 3, p. 170, Nr. **10**), in welchem überhaupt nicht von Limes-, Häufungs- oder Umgebungsbeziehungen die Rede ist. In dieser kombinatorischen Topologie bedeutet z. B. das Wort „Strecke" (oder „Linienstück", „eindimensionale ein solcher Zellaufbau beschrieben und damit die $\mathfrak{M}^n$ in topologischer Hinsicht festgelegt werden kann durch bloße kombinatorische Zuordnungsvorschriften zwischen den Randzellen eines Systems n-dimensionaler Zellen. Für jede n-dimensionale Zelle, deren Rand eine $\mathfrak{S}^{n-1}$ (d. h. sphärische $\mathfrak{M}^{n-1}$) ist, wird dabei ein Zellaufbau dieser $\mathfrak{S}^{n-1}$ als vorgegeben angenommen. Dieser Zellaufbau ist seinerseits wieder durch kombinatorische Zuordnungsvorschriften zwischen den Randzellen $(n-1)$-dimensionaler Zellen beschreibbar. Das analoge gilt für den Zellaufbau (aus $(n-2)$-dimensionalen Zellen) aller jener $\mathfrak{S}^{n-2}$, die den Rand dieser $(n-1)$-dimensionalen Zellen bilden u. s. f. Hieran knüpft sich nun die Frage, inwieweit es möglich ist, 1. *vollständig kombinatorische Gebilde an Stelle der $\mathfrak{M}^n$ bzw. ihrer Zellaufbauten der Untersuchung zugrunde zu legen* (während bei der bisher entwickelten Auffassung die Zellen selbst Bausteine von kontinuierlicher Beschaffenheit darstellen und kombinatorisch nur die Beschreibung ihres Gefüges war) und 2. *den Problemen der die (kontinuierlichen) $\mathfrak{M}^n$ betreffenden n-dimensionalen Topologie — oder wenigstens einem Teil dieser Probleme — äquivalente Probleme betreffs der genannten kombinatorischen Gebilde an die Seite zu stellen, so daß die Erledigung der letzteren Probleme zugleich die (wenigstens teilweise) Erledigung der ersteren*

Zelle", „eindimensionaler Simplex") gar nicht eine Menge von Punkten; sondern „Punkte" („nulldimensionale Zellen") einerseits und „Strecken" („eindimensionale Zellen") andererseits sind nur Namen für zwei Kategorien von (nicht weiter erklärten) Gedankendingen, aus denen — zusammen mit (ebenfalls nicht weiter erklärten) „zweidimensionalen" und „mehrdimensionalen Zellen" — durch gewisse Verknüpfungsregeln kombinatorische Gebilde — „Mannigfaltigkeiten" bzw. „Komplexe" (in unserer Darstellung „Zellsysteme") genannt — hergestellt werden. In dieser kombinatorischen Topologie stellt z. B. die als „Zellteilung" oder „interne Transformation" (III A B 3, p. 159) bezeichnete Operation nur ein Verfahren dar, aus *einem* solchen kombinatorischen Gebilde ein anderes zu gewinnen; dabei ist aber, wenn es sich etwa um die „Teilung einer Strecke $S = (P'P'')$ in zwei Teile $(P'Q)$, (QP'')" handelt, da S ja gar nicht als eine Punktmenge aufgefaßt wird, auch der eingeführte „Teilungspunkt" Q nicht als ein schon vorher vorhandener Punkt einer solchen Punktmenge anzusehen, sondern als ein bei dieser Operation neu eingeführtes Ding der Kategorie „Punkte".

Diese Vorbemerkung über den Sinn des Wortes „kombinatorische Topologie" ist vielleicht deshalb nicht überflüssig, weil neuerdings, und zwar in sehr wichtigen Arbeiten, die Bezeichnung „kombinatorische Topologie" (combinatorial analysis situs) für denjenigen mit (kontinuierlichen) Zellen arbeitenden Teil der n-dimensionalen Topologie benützt worden ist, den wir oben (Nr. **25**—**30**) beschrieben haben.

Auf den Namen „kombinatorische Topologie" kann aber doch wohl kaum eine andere Disziplin einen größeren Anspruch erheben als diejenige bereits 1908 in III A B 3 dargestellte Theorie, die wirklich rein kombinatorisch ist.

Probleme in sich schließt. Vor allem handelt es sich offenbar, soll eine solche kombinatorische Topologie von größerem Wert sein[198b]), um die Übertragbarkeit des *Homöomorphieproblems*[198c]) der kontinuierlichen $\mathfrak{M}^n$ auf ein kombinatorisches Problem.

35. Kombinatorische Zellsysteme. Was die eben genannte Frage 1. betrifft, so entnimmt man dem in Nr. **34** gesagten, daß die Rolle einer jeden n-dimensionalen Zelle im Zellaufbau einer $\mathfrak{M}^n$ wesentlich durch ihren Rand und im besonderen dadurch bestimmt ist, wie dieser Rand, der eine $\mathfrak{S}^{n-1}$ ist, aus $(n-1)$-dimensionalen Zellen aufgebaut ist. Der Begriff „Zellaufbau einer $\mathfrak{S}^{\nu}$“ ist dabei zunächst in kontinuierlicher Weise definiert als Zellaufbau einer $\mathfrak{M}^{\nu}$, die mit der Punktmenge $\xi_1^2 + \cdots + \xi_{\nu+1}^2 = 1$ des $\mathfrak{R}^{\nu+1}$ homöomorph ist. Nehmen wir aber einmal an, es sei möglich, diese Definition des Zellaufbaus einer $\mathfrak{S}^{\nu}$ durch eine *rein kombinatorische* Definition zu ersetzen und damit diese Zellaufbauten innerhalb der Gesamtheit aller Zellaufbauten ν-dimensionaler Mannigfaltigkeiten rein kombinatorisch zu kennzeichnen, so ergibt sich damit folgendermaßen die Möglichkeit einer stufenweisen Gewinnung des Begriffes „Zellaufbau einer $\mathfrak{M}^n$“.

Als „Zellaufbau einer $\mathfrak{M}^0$“ wird eine Menge von Elementen („Punkten“) erklärt, die entweder aus einem Punkt oder aus zwei Punkten besteht (der eine Punkt bzw. jeder der beiden Punkte heißt eine 0-dimensionale Zelle $\mathfrak{Z}^0$ der $\mathfrak{M}^0$); im Falle zweier Punkte sprechen wir im besonderen vom „Zellaufbau einer $\mathfrak{S}^0$ (sphärischen 0-dimensionalen Mannigfaltigkeit)“. — Angenommen es sei bereits für alle $\nu < n$ erklärt, was unter „Zellaufbau einer $\mathfrak{M}^{\nu}$“ und unter „ν-dimensionaler Zelle“ $\mathfrak{Z}^{\nu}$ eines solchen Zellaufbaus zu verstehen ist, und

198b) Das hiermit formulierte Problem einer kombinatorischen Topologie hat neuerdings *H. Kneser*, Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 34 (1925), p. 1 auseinandergesetzt. Vgl. auch *H. Weyl*, L'Enseignement mathématique 19 (1917), p. 95. *H. Lebesgue*, Bull. Soc. math. de France 52 (1924), p. 315, gebraucht (p. 319) den Ausdruck „Analysis situs énumérative“.

198c) Bei diesem Problem (vgl. Nr. 2) handelt es sich um die Auffindung einer Methode, zu entscheiden, ob zwei vorgegebene $\mathfrak{M}^n$ homöomorph sind oder nicht, allgemeiner um die Klassifikation der n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten durch ein vollständiges (für die Homöomorphie hinreichendes) System topologischer Invarianten (vgl. für $n = 2$ Nr. 32). Die im Text gestellte Frage sucht eine solche Methode bzw. ein solches Invariantensystem durch Übertragung des Problems auf ein rein kombinatorisches Gebiet. (Natürlich könnte man die Lösung von Homöomorphiefragen auch in anderer Richtung suchen. Wenn man z. B. zeigt, daß die orientierbaren geschlossenen Flächen durch die Maximalzahl der gegenseitig punktfremden, in ihrer Gesamtheit die Fläche nicht zerlegenden *Jordan*kurven [Rückkehrschnitte] topologisch vollständig charakterisiert sind, so hat man damit eine nicht-kombinatorische Lösung einer Homöomorphiefrage.)

wann im besonderen von einem „Zellaufbau einer $\mathfrak{S}^\nu$ (sphärischen ν-dimensionalen Mannigfaltigkeit)" zu sprechen ist. Es liege dann ein System von Zellaufbauten sphärischer $(n-1)$-dimensionaler Mannigfaltigkeiten vor (vom kontinuierlichen Standpunkt aus könnten wir die entsprechenden $\mathfrak{S}^{n-1}$ als Ränder n-dimensionaler Zellen auffassen; z. B. im Falle $n=1$ als Randpunktepaare von Strecken); durch paarweise Zuordnungen zwischen den $\mathfrak{Z}^{n-1}$ dieser Zellaufbauten[199]) gewinnen wir hieraus einen „Zellaufbau einer $\mathfrak{M}^n$"; unter diesem ist also nichts anderes zu verstehen als das System der Zellaufbauten der $\mathfrak{S}^{n-1}$ zusammen mit den Zuordnungsvorschriften.

Man sieht hieraus tatsächlich: Will man zu einer rein kombinatorischen Topologie gelangen, so wird man vor allem vor die Frage gestellt: Läßt sich eine Definition des „Zellaufbaus einer $\mathfrak{S}^n$" geben, die sich nur auf die kombinatorischen Zuordnungsvorschriften des Zellaufbaus bezieht? Hierzu ist zu sagen: Es ist leicht, für jedes n *einen speziellen* Zellaufbau der $\mathfrak{S}^n$ anzugeben, — z. B. (vgl. Nr. **26**) den durch die $n+2$ Randsimplexe eines $(n+1)$-dimensionalen Simplex dargestellten Zellaufbau oder etwa den durch die $2n+2$ Seiten eines $(n+1)$-dimensionalen Würfels dargestellten Zellaufbau — er heiße Σ_0^n. Jeder beliebige Zellaufbau der $\mathfrak{S}^n$ ist dann gekennzeichnet als ein solcher „Zellaufbau einer $\mathfrak{M}^n$", daß die durch ihn definierte kontinuierliche $\mathfrak{M}^n$ *homöomorph* ist mit der durch den eben genannten speziellen Zellaufbau Σ_0^n definierten $\mathfrak{M}^n$. Die aufgeworfene Frage ist also nichts anderes als ein spezieller Fall der folgenden Frage (nämlich diese Frage gestellt für den Fall: $\zeta_1^n = \Sigma_0^n$): Läßt sich eine nur auf die kombinatorischen Merkmale der Zellaufbauten ζ_1^n, ζ_2^n zweier n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten bezügliche Beziehung angeben, *notwendig und hinreichend* dafür, daß die durch diese Zellaufbauten definierten Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_1^n$ und $\mathfrak{M}_2^n$ homöomorph sind? (Wir verlangen hier nur eine *Definition* für eine der Homöomorphiebeziehung äquivalente kombinatorische Beziehung, wir verlangen kein *Kriterium*, das in jedem konkreten Einzelfall von dem Zellaufbau einer $\mathfrak{M}^n$ zu *entscheiden* gestattet, ob er eine Mannigfaltigkeit liefert, die einer durch einen anderen Zellaufbau definierten $\mathfrak{M}^n$ homöomorph ist, im besonderen ob er eine $\mathfrak{S}^n$ liefert oder nicht; ein solches Kriterium ist übrigens für $n \geqq 3$ auch nicht bekannt.)

Tatsächlich läßt sich nun eine rein kombinatorische Beziehung zweier Zellaufbauten angeben — wir bezeichnen sie im folgenden (Nr. **36**) als „Verwandtschaft" — die jedenfalls *hinreichend* für die

199) Wir übergehen Einzelheiten und bemerken nur, daß diese Zuordnungen den Verträglichkeitsbedingungen von Nr. 27 genügen müssen.

Homöomorphie der entsprechenden Mannigfaltigkeiten ist, wenngleich — wenigstens für beliebiges n — noch nicht feststeht, ob sie auch notwendig ist (doch wird auch dies vielfach für wahrscheinlich gehalten). Nehmen wir einmal an, dieser Begriff „Verwandtschaft" sei bereits definiert. Dann können wir zwecks Gewinnung kombinatorisch definierter Zellaufbauten folgendermaßen vorgehen.

Wir greifen für jedes n einen speziellen Zellaufbau der $\mathfrak{S}^n$ heraus (man pflegt dabei einen noch einfacheren Zellaufbau zu wählen als den oben genannten für den Rand eines $(n+1)$-dimensionalen Simplex[200]); bezeichnen wir mit Σ^n jeden damit „verwandten" Zellaufbau, so ist jedes Σ^n ein Zellaufbau von $\mathfrak{S}^n$. Solange die Frage nicht völlig geklärt ist, ob auch umgekehrt jeder Zellaufbau von $\mathfrak{S}^n$ ein Σ^n ist, müssen wir nun allerdings mit der Möglichkeit rechnen, daß der Begriff „Zellaufbau Σ^n" enger sei als der Begriff „Zellaufbau einer $\mathfrak{S}^n$" Immerhin können wir, wie sogleich skizziert werden soll, für die Grundlegung einer rein kombinatorischen Analysis situs von diesen beiden Begriffen den ersteren an Stelle des letzteren treten lassen; und damit ergibt sich die Möglichkeit, den Begriff „Zellaufbau einer $\mathfrak{M}^n$" — vielleicht wieder mit einer gewissen Einengung seines Umfanges — in einer *rein kombinatorischen* stufenweisen Entwicklung zu gewinnen. Jeder unter den *solcher Art* erhaltenen Zellaufbauten einer $\mathfrak{M}^n$ — der also ein rein kombinatorisches Gedankending darstellt — soll als ein *„Zellsystem"* Z^n bezeichnet werden (jedem Z^n entspricht ein Zellaufbau einer $\mathfrak{M}^n$, das umgekehrte ist wie gesagt noch fraglich); und für die stufenweise Entwicklung des Begriffes „Zellsystem" ergibt sich sonach, wenn wir unsere Überlegungen zusammenfassen, folgendes Bild:

Eine Menge von Elementen, die „0-dimensionale Zellen" oder „Punkte" heißen mögen, werde als „0-dimensionales Zellsystem" und mit Z^0 bezeichnet; zwei Z^0 heißen „verwandt", wenn sie gleich viele Punkte haben (gleich mächtig sind); jede aus zwei Punkten bestehende Z^0 werde als ein Zellsystem Σ^0 (sphärisches Z^0) bezeichnet. — Sei nun für alle $\nu < n$ das „ν-dimensionale Zellsystem Z^ν", die Verwandtschaft zweier Z^ν und die Gesamtheit der als sphärische Zellsysteme Σ^ν bezeichneten Z^ν erklärt (als die zu einem speziellen Zellsystem $\Sigma_0{}^\nu$ verwandten); ferner sei für jede Z^ν erklärt, was unter ihren μ-dimensionalen Zellen $(0 \leqq \mu \leqq \nu)$ zu verstehen ist. Es liege dann ein System von Σ^{n-1} vor. Ein solches System, zusammen mit (wieder an gewisse Verträglichkeitsbedingungen gebundenen) paarweisen Zuordnungen der $(n-1)$-dimensionalen Zellen dieser Σ^{n-1} bildet dann das,

200) Vgl. III A B 3, p. 160/161, 163 und l. c. [153]), p. 15, 24.

was wir ein „n-dimensionales Z^n“ nennen.[201]) Es bleibt noch übrig, durch besondere Festsetzungen (vgl. Nr. **36**) die „Verwandtschaft“ zweier Z^n zu erklären, ein spezielles Z^n als „Σ_0^n“ und die „sphärischen“ Systeme Σ^n (als die zu Σ_0^n verwandten) zu kennzeichnen und den Begriff μ-dimensionale Zelle eines Zellsystems Z^n für $0 \leqq \mu \leqq n$ zu erklären.

Damit haben wir — abgesehen von der Einzelausführung[202]) bezüglich der Zuordnungen, der Verwandtschaftsdefinition usw. — die „Zellsysteme“[203]) gekennzeichnet, d. h. die Gedankendinge, mit denen sich die kombinatorische Analysis situs beschäftigt. Sie sind nichts anderes als Register zur Beschreibung der Lagerung von Zellen. *Durch jedes Zellsystem Z^n wird also eine bestimmte kontinuierliche $\mathfrak{M}^n$ definiert,* nämlich jene, deren Zellaufbau mit Z^n übereinstimmt. Zufolge dieser Tatsache wird das Studium der Zellsysteme nur insoweit etwas für die kontinuierliche n-dimensionale Analysis situs zu leisten vermögen, als es gelingt, zu den Problemen der kontinuierlichen Analysis situs Probleme der kombinatorischen Analysis situs zu finden, die jenen — im Sinn der Frage 2. von Nr. **34** — äquivalent sind.[204]) [204a])

201) Wenn hierbei, wie bisher üblich, von einer *Dimensions*zahl der Zellsysteme gesprochen wird, so ist damit nichts anderes gemeint als eine bestimmte *Stufen*zahl im Aufbau dieser kombinatorischen Gebilde. Eine n-fache *Ausdehnung* kommt nur den kontinuierlichen in der *n-dimensionalen Topologie* betrachteten Gebilden zu.

202) Vgl. *Dehn-Heegaard,* III AB 3, Nr. **1—5**; *H. Tietze*[153]), §§ 2—4; *E. Steinitz,* Sitz.-Ber. d. Berlin. Math. Ges. 7, p. 29 [im Arch. d. Math. u. Phys. (3) 13 (1908)]; eine besonders eingehende und sorgfältige Darstellung neuerdings bei *E. Bilz*[207]), p. 3/24; siehe ferner *H. Kneser,* l. c. [198b]).

203) Sie wurden auch als „(n-dimensionale) Schemata“ bezeichnet, vgl. *H. Tietze*[153]), p. 7 ff. Das Wort „Schema“ (einer Mannigfaltigkeit) in ähnlicher Bedeutung bei *H. Weyl,* R. Fl., p. 29. Zuerst hatte *Poincaré,* Rend. Circ. mat. Palermo 13 (1899), p. 290, das Wort Schema zur Bezeichnung eines (die Mannigfaltigkeit im allgemeinen *nicht* vollständig kennzeichnenden) Systems von gewissen Berandungrelationen („Kongruenzen“ genannt) bzw. Matrizen gebraucht.

204) Im Hinblick auf eine solche (zumindest vermutete) Äquivalenz wurden von *Dehn-Heegaard,* III A B 3, die kombinatorischen Zellsysteme selbst als „Mannigfaltigkeiten“ (bzw. „Komplexe“) bezeichnet. *Dehn-Heegaard* sagen ferner „homöomorph“ (oder „elementarverwandt“) für „verwandt“. Es werden also verwandte Zellsysteme von *Dehn-Heegaard* als homöomorphe Mannigfaltigkeiten bezeichnet, was natürlich bei Verbleiben ganz im Rahmen der kombinatorischen Topologie zulässig ist. Bei Betrachtungen, die gleichzeitig die kontinuierliche n-dimensionale Topologie betreffen, sind unterschiedliche Bezeichnungen nötig. *H. Tietze,* der l. c [203]) das Wort „homöomorph“ gleichfalls im Sinn von verwandt verwendet, unterscheidet dort „homöomorphe Mannigfaltigkeiten“ (im kontinuierlichen Sinn) und „homöomorphe Schemata“ (im kombinatorischen Sinn).

204a) So läßt sich z. B. leicht einsehen, daß der Begriff *„zusammenhängend“*, wie ihn *E. Bilz*[207]), p. 6, 18, 23 für kombinatorische Zellsysteme definiert hat,

36. Verwandtschaft von Zellsystemen. Die wichtigste Frage in dieser Hinsicht ist die (in einem speziellen Fall schon aufgetauchte) nach einem dem *Homöomorphieproblem* kontinuierlicher Mannigfaltigkeiten *äquivalenten Problem für Zellsysteme.* Nun gibt es einen Prozeß, um aus einem Zellsystem Z^n andere abzuleiten, von denen man unmittelbar einsieht, daß die durch sie definierten Mannigfaltigkeiten zu der durch Z^n definierten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^n$ homöomorph sind: es ist der (allein mit Hilfe der kombinatorischen Merkmale eines Zellsystems definierbare) Prozeß der *Zweiteilung einer μ-dimensionalen Zelle* a^μ $(1 \leqq \mu \leqq n)$ von Z^n, bewirkt durch Einführung einer neuen $(\mu - 1)$-dimensionalen Zelle $b^{\mu-1}$ und Ersatz von a^μ durch die beiden längs $b^{\mu-1}$ aneinanderstoßenden Teilzellen a_1^μ und a_2^μ. Das gleiche gilt von jeder durch eine endliche Anzahl sukzessiver Zweiteilungen herstellbaren *Unterteilung einer Zelle* a^μ in endlich viele Teilzellen (wobei einzelne der sukzessiven Zweiteilungen auch an Zellen vorgenommen werden können, die erst bei den vorhergehenden Zweiteilungen neu eingeführt wurden, wie oben $b^{\mu-1}$), sowie auch von jeder *Zellteilung des Zellsystems* Z^n, die durch solche, simultan an einer Gesamtheit von Zellen von Z^n ausgeführten Unterteilungen erhalten werden kann: Jedes aus Z^n durch eine solche Zellteilung gewonnene „*abgeleitete*“ Zellsystem Z' definiert eine Mannigfaltigkeit, die der durch Z^n definierten homöomorph ist. (Zu den „aus Z^n abgeleiteten“ Zellsystemen soll auch Z^n selbst gezählt werden.) Ist Z' aus Z und Z'' aus Z' abgeleitet, so auch Z'' aus Z. (Falls ein Zellsystem Z nur *endlich* viele Zellen hat, können die aus Z abgeleiteten Zellsysteme auch definiert werden als solche, die durch endlich viele sukzessive Zell-Zweiteilungen aus Z entstehen.[205]) Nennen wir zwei Zellsysteme Z_0, Z *verwandt*[206]), wenn es eine endliche Folge von Zellsystemen gibt: $Z_0, Z_1', Z_1, \ldots, Z_k', Z_k = Z$, so daß jedes Z_i' sowohl ein aus Z_{i-1} als auch ein aus Z_i abgeleitetes Zellsystem ist, so definieren je zwei in dieser Folge benachbarte Zellsysteme und daher auch Z_0 und Z homöomorphe Mannigfaltigkeiten: *Verwandtschaft zweier Zellsysteme ist hinreichend für die Homöomorphie der entsprechenden Mannigfaltigkeiten.* Zwei einem dritten Zellsystem

---

im obigen Sinne völlig äquivalent ist dem Begriff „zusammenhängend“ (im Sinne von Nr. 8) für die zugehörigen kontinuierlichen Mannigfaltigkeiten bzw. Komplexe. Vgl. hierzu *M. Fréchet,* Fund. math. 8 (1926), p. 154 und die dort zitierte Thèse von *B. Z. Linfield.*

205) So *Dehn-Heegaard,* III A B 3, p. 159, 163 (Ausführung sukzessiver „interner Transformationen“) und *H. Tietze*[153]), p. 13.

206) Von *Dehn-Heegaard,* III AB 3, l. c. [205]) und *H. Tietze,* l. c. [205]), wird (für die dort allein betrachteten Zellsysteme mit endlich vielen Zellen) ein etwas engerer Verwandtschaftsbegriff zugrunde gelegt. Zur Terminologie vgl. dabei [204]).

verwandte Zellsysteme sind untereinander verwandt, die Zellsysteme verteilen sich also auf Klassen untereinander verwandter.[207]) Zugehörigkeit zur selben *Verwandtschaftsklasse* bedeutet, anders gesagt, Übereinstimmung in allen Eigenschaften, die sich bei Zellteilungen nicht ändern („*zellteilungsinvariant*“ sind).

Rechnet man andererseits in eine *Homöomorphieklasse* zwei Zellsysteme, wenn die durch sie definierten Mannigfaltigkeiten homöomorph sind, so sieht man; jede Verwandtschaftsklasse ist ganz in einer Homöomorphieklasse enthalten. Man ersieht hieraus die Bedeutung der (für $n > 2$ noch völlig ungelösten) Frage nach einem vollen System von Zellteilungsinvarianten, derart, daß die Übereinstimmung in ihnen für die Zugehörigkeit zweier Zellsysteme zur selben Verwandtschaftsklasse nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist.

Zusammengefaßt gilt nach dem bisherigen: Wenn von zwei n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten je ein Zellaufbau vorliegt, der einem *Zellsystem* im Sinn von Nr. **35** entspricht (man beachte, daß wir dort mit der Möglichkeit anderer Zellaufbauten, die keine Zellsysteme sind, rechnen mußten), dann ist die Verwandtschaft dieser Zellsysteme für die Homöomorphie der beiden $\mathfrak{M}^n$ *hinreichend.*

37. Eine Hypothese. Viel weiter tragende Beziehungen zwischen kombinatorischer und kontinuierlicher n-dimensionaler Analysis situs ergeben sich aber, wenn die Richtigkeit des folgenden Satzes zugrundegelegt werden kann (die erst für die niedrigsten Fälle bestätigt, für die höheren ($n > 2$) vorerst nur als *Arbeitshypothese* anzusehen ist), *daß nämlich für die Homöomorphie zweier durch Zellsysteme definierten* $\mathfrak{M}^n$ *die Verwandtschaft der Zellsysteme* (nicht nur hinreichend sondern auch) *notwendig ist.* Denn als Folge dieses Satzes hätte man: 1. die Unterscheidung (die wir in Nr. **35** machen mußten) zwischen den Zellsystemen Σ^n und beliebigen Zellsystemen Z^n, denen die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{S}^n$ entspricht, fällt fort; demzufolge fallen desgleichen fort 2. die Unterscheidung (die wir ebenda wegen der vorigen Unterscheidung machen mußten) zwischen den durch Zellsysteme Z^n dargestellten Zellaufbauten und beliebigen Zellaufbauten einer $\mathfrak{M}^n$; sowie 3. die Unterscheidung zwischen Verwandtschaftsklassen und Homöomorphieklassen. Anders gesagt:

Insoweit der Nachweis des genannten (in voller Allgemeinheit hypothetischen) Satzes erbracht wird, wird durch ihn die Äquivalenz zwischen dem Homöomorphieproblem mehrdimensionaler kontinuierlicher Mannig-

207) Mit der Frage, ob dieser Satz auch für den [206]) erwähnten engeren Verwandtschaftsbegriff gilt, beschäftigt sich *E. Bilz,* Math. Ztschr. 18 (1923), p. 1/41, und erledigt sie bejahend für $n \leq 4$.

faltigkeiten und dem rein kombinatorischen Problem der Verwandtschaft von Zellsystemen gesichert.

Die Vermutungen von der Richtigkeit des genannten Satzes stützen sich auf eine schon von *Riemann*[208]) im Falle $n = 2$ angestellte Überlegung: Sind die durch die Zellsysteme Z_1^n, Z_2^n definierten $\mathfrak{M}_1^n$, $\mathfrak{M}_2^n$ homöomorph, so ergibt eine topologische Abbildung von $\mathfrak{M}_2^n$ auf $\mathfrak{M}_1^n$ in letzterer Mannigfaltigkeit ein Bild des Zellaufbaus Z_2^n, der sich dem Zellaufbau Z_1^n überlagert (bei *Riemann* die Überlagerung zweier Querschnittsysteme einer $\mathfrak{M}^2$). Die Vorstellung einer aus der Durchdringungsfigur zu gewinnenden engeren Zellzerlegung der $\mathfrak{M}_1^n$ führt zu der Annahme der Existenz eines Zellsystems Z', das sowohl aus Z_1^n wie aus Z_2^n ableitbar ist (und damit zur Verwandtschaft von Z_1^n und Z_2^n). Doch trägt diese heuristische Überlegung noch nicht den Komplikationen Rechnung, die die Durchdringungsfigur darbieten kann (Zerlegung einer Zelle des einen Systems durch die Zellwände des anderen in unendlich viele eventuell recht komplizierte Teile).[209])

Eine Reihe von Untersuchungen, in denen die Zellteilungsinvarianten eines Zellsystems unmittelbar als topologische Invarianten der durch das Zellsystem definierten Mannigfaltigkeit angesprochen werden, stützt sich (ausgesprochen oder stillschweigend) auf den angeführten hypothetischen Satz.[210]) Wäre dieser Satz bewiesen, so würden damit alle Zellteilungsinvarianten der Zellsysteme als topologische Invarianten der durch sie definierten Mannigfaltigkeiten nachgewiesen sein.

Einen wichtigen Beitrag zu dieser Fragestellung hat *J. W. Alexander*[211]) geliefert. Er hat nämlich speziell für die (als Zellteilungsinvarianten von Zellsystemen mit endlich vielen Zellen leicht nachweisbaren) *Betti*schen Zahlen[212]), sowie für die Torsionszahlen[213]) und gewisse andere von *O. Veblen* und *J. W. Alexander*[214]) eingeführte Zahlen bewiesen, daß diese Zahlen topologische Invarianten der durch die Zellsysteme defi-

208) *B. Riemann,* l. c. [113]), p. 10.

209) Vgl. *H. Tietze*[153]), p. 14, Anm.; *Weyl,* R. Fl., p. 71, Anm. 1. Im Falle $n = 2$ hat *Kerékjártó,* Vorl. 1, p. 134f. diese heuristische Überlegung zu einem strengen Beweis ausgestaltet.

210) Dem entspricht, daß innerhalb der kombinatorischen Analysis situs die Worte „Mannigfaltigkeit" bzw. „homöomorph" vielfach in der Bedeutung „Zellsystem" bzw. „verwandt" gebraucht wurden. Vgl. [204]).

211) *J. W. Alexander,* Trans. Am. Math. Soc. 28 (1926), p. 324—330.

212) Vgl. III A B 3, p. 182.

213) Vgl. III A B 3, p. 184.

214) *O. Veblen-J. W. Alexander,* Ann. of math. 14 (1913), p. 169 und *J. W. Alexander,* l. c. [211]), p. 301—324.

nierten Mannigfaltigkeiten sind.[215]) Das Verfahren bedient sich, wenn wir wie oben aus der Homöomorphie der durch Z_1^n und Z_2^n definierten Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_1^n$, $\mathfrak{M}_2^n$ eine Überlagerungsfigur zweier Zellaufbauten von $\mathfrak{M}_1^n$ herleiten, — einer hinlänglich verfeinerten Zellteilung des einen Zellaufbaus, um mit Hilfe der Zellen des verfeinerten Zellaufbaus die Bilder der Zellen des anderen Zellaufbaus zu approximieren. In der Flächentopologie hat bereits *H. Weyl*[216]) mit derartigen Approximationen gearbeitet.

Es ist noch auf die Möglichkeit hinzuweisen, daß der genannte hypothetische Satz zwar für den hier (im Anschluß an *Dehn-Heegaard* und *Tietze*) auseinandergesetzten Verwandtschaftsbegriff *nicht* richtig ist[217]), jedoch richtig wäre bei einer geeignet abgeänderten umfassenderen Definition der Verwandtschaft kombinatorischer Zellsysteme.[218])

38. Neuere kombinatorische Theorien. In Nr. 34—37 haben wir von demjenigen Aufbau einer kombinatorischen Topologie (und seinen Beziehungen zur kontinuierlichen n-dimensionalen Topologie) gesprochen, wie er von *Dehn* in Encykl. III AB 3[219]) entwickelt wurde. Andere Wege für den Aufbau einer kombinatorischen Topologie haben neuerdings *H. Weyl*[220]) und *M. H. A. Newman*[221]) angegeben.

215) Vgl. auch *J. W. Alexander,* Trans. Am. Math. Soc. 16 (1915), p. 148. Auf diese Arbeit beruft sich auch *O. Veblen* in seinem Buch (Cambr. Coll., p. III), um die behandelten Zellteilungsinvarianten als topologische Invarianten von kontinuierlichen Mannigfaltigkeiten anzusprechen.

216) *H. Weyl,* R. Fl., p. 44 und Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 25 (1916), p. 265 = R. Fl., 2. Aufl. 1923, p. 167.

217) Vgl. eine skeptische Bemerkung von *E. Steinitz*[202]), p. 32, Anm.

218) Vgl. hierzu zwei, die Fragen der Beziehung zwischen kombinatorischer und kontinuierlicher Analysis situs (für $n = 3$) behandelnde Arbeiten von *R. Furch,* Abh. Math. Sem. Hamburg 3 (1924), p. 69 u. 237. Außerdem sei auf die Frage hingewiesen, die (wie Ref. von Herrn *E. Bilz* erfuhr) kürzlich Herr *H. Kneser* aufwarf (vgl. den inzwischen erschienenen Bericht *H. Kneser,* l. c.[198b]), p. 11, Anm. 2), ob jede reguläre Zellteilung (vgl. etwa *Veblen,* Cambr. Coll., p. 41, 86) auf Zell-Zweiteilungen zurückführbar sei (für jede Dimension). Insbesondere, wenn die Antwort auf diese Frage negativ lauten sollte, käme eine allgemeinere Verwandtschaftsdefinition in Betracht, die beispielsweise außer Zell-Zweiteilungen noch reguläre Zellteilungen zugrundelegt. (Nach einer neueren Mitteilung von Herrn *H. Kneser* an den zweiten Ref. ist die genannte Frage zu bejahen.)

219) Auf Grund unabhängiger Untersuchungen im Wesen gleichartig in der später veröffentlichten Arbeit von *H. Tietze,* Monatsh. Math. Phys. 19 (1908); vgl. Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 29 (1920), p. 110.

220) *H. Weyl,* Revista hispano-americana, 1923. Zur Einführung behandelt *Weyl* (ebenda) in einer vorhergehenden Arbeit den Fall $n = 1$ an Hand der Frage nach der Stromverteilung in einem beliebig verzweigten Leitungsnetz.

221) *M. H. A. Newman,* Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 611—626, 627—641. Berichtigende Ergänzungen ib. 30 (1927), p. 670. Siehe ferner Math. Ann. 99

So wie in dem Aufbau nach III AB 3 ist auch bei *Weyl* die Definition des n-dimensionalen Zellsystems eine rekursorische. Die Definition für $n - 1$ als erledigt angesehen, werden zunächst gewisse Zellsysteme durch eine Reihe von Forderungen als sphärische eingeführt. Der Begriff der Zellteilung wird nicht wie in III AB 3 auf Zweiteilungen zurückgeführt, sondern es werden sogleich, gestützt auf den Begriff des sphärischen n-dimensionalen Zellsystems allgemeine Zellteilungen einer n-dimensionalen Zelle definiert. Auf dieser Grundlage läßt sich außer der Lehre von den *Betti*schen Zahlen und Torsionszahlen auch eine Charakteristikentheorie (für den Fall $n = 2$ vgl. *Weyl*, l. c. [169])) entwickeln. Der Begriff der Indikatrix wird verallgemeinert.

Auch für die solcherart aufgebaute kombinatorische Topologie spielt eine noch unbewiesene Hypothese eine Rolle[222]) — ähnlich der in Nr. **37** für den Aufbau nach *Dehn* —, wenn man begründen will, daß den Klassen der als gleichwertig (verwandt) angesehenen Zellsysteme beim Übergang zu *kontinuierlichen* aus Zellen aufgebauten Mannigfaltigkeiten genau die Homöomorphieklassen dieser Mannigfaltigkeiten entsprechen. Während aber, solange die Hypothese in Nr. **37** noch unbewiesen ist, die Möglichkeit besteht, daß jeder Homöomorphieklasse mehrere der dort betrachteten Verwandtschaftsklassen entsprechen, so liegt bei dem *Weyl*schen Aufbau der Fall umgekehrt so, daß die Möglichkeit noch nicht ausgeschlossen ist, daß eine seiner Verwandtschaftsklassen mehreren Homöomorphieklassen entspricht.

Neuerdings hat *M. H. A. Newman*[221]) einen von III AB 3 abweichenden Aufbau einer kombinatorischen Topologie angegeben, wobei als Zellen nur Simplexe verwendet werden. Der Übergang von einem Zellsystem zu einem als verwandt („equivalent") erklärten geschieht bei *Newman* nicht mittels Zweiteilungen und aus solchen zusammengesetzten Zellunterteilungen, sondern durch gewisse Heftungs- und Ersetzungsprozesse, die als „moves" bezeichnet werden. Analog wie für die kombinatorische Topologie nach III AB 3 gilt auch hier, daß je zwei verwandten Zellsystemen beim Übergang zu kontinuierlichen Mannigfaltigkeiten allemal notwendig zwei homöomorphe Mannigfaltigkeiten entsprechen. Darüber hinaus zeigt *Newman*[222a]), daß es zu zwei in diesem Sinne verwandten Zellsystemen stets ein drittes aus jedem von ihnen durch Unterteilung erhältliches gibt.

(1928), p. 399; Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 1401; Proc. London Math. Soc. (2) 30 (1929), p. 339—346.

222) Vgl. hierzu l. c. [220]), § 6 (p. 29 der Arbeit).

222a) *M. H. A. Newman,* J. of London Math. Soc. 2 (1926), p. 56—64; vgl. auch ib. 1 (1926), p. 162—163.

Wichtige Teile der kombinatorischen Topologie (z. B. Sätze über *Betti*sche Zahlen u. a.) lassen sich nach *W. Mayer*[222b]) auf Grund einiger weniger Axiome entwickeln.

39. Kombinatorische und n-dimensionale Topologie. Wie schon in Nr. **34** gesagt, ist der Wert einer rein kombinatorischen Topologie in hohem Maße davon abhängig, daß in ihr zu Begriffen und Sätzen der kontinuierlichen n-dimensionalen Topologie parallellaufende Begriffe und Sätze existieren. Speziell beschäftigten wir uns mit der Frage nach der Auffindung von rein kombinatorischen Begriffen, die zu den Begriffen „homöomorph", „Mannigfaltigkeit" und „sphärische Mannigfaltigkeit" in diesem Sinne parallellaufen, und wir haben gesehen, daß man dabei z. Z. allgemein (für jedes n) nicht ohne Hypothese auskommt. Schon für das fundamentale Homöomorphieproblem der kontinuierlichen n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten ist also ein glattes Hinüberschieben auf ein reines Problem kombinatorischer Topologie z. Z. nicht gelungen. Andere Probleme der kontinuierlichen n-dimensionalen Topologie (man denke etwa an Fixpunktprobleme) sehen so aus, daß die Aufstellung paralleler kombinatorisch-topologischer Probleme überhaupt nicht oder nur sehr gekünstelt möglich erscheint. Diese Umstände haben es bewirkt, daß in einem großen Teil der neuesten topologischen Produktion, und darunter gerade in Arbeiten von besonderer Wichtigkeit, die kombinatorische Topologie nicht selbständig auftritt, sondern in fortgesetzter Verbindung mit kontinuierlich-topologischen Untersuchungen. Nicht nur daß die kombinatorischen Zellsysteme sogleich zu dem Zwecke eingeführt werden, um den Zellaufbau kontinuierlicher n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten zu beschreiben[222c]), auch alle weiteren kombinatorisch-topologischen Entwicklungen (z. B. über Homologien, Zusammenhangszahlen u. dgl.) werden sogleich benützt, um Sätze der kontinuierlichen n-dimensionalen Topologie herzuleiten. Auf diese in vollem Fluß befindlichen Entwicklungen soll hier nicht näher eingegangen[222d]) und nur die Gelegenheit benützt werden, einige Literaturangaben über neuere topo-

222b) *Walther Mayer,* Monatsh. Math. Phys. 36 (1929), p. 1—42, 219—258.

222c) Man vgl. hierzu die Darstellung bei *Veblen,* Cambr. Coll., oder *J. W. Alexander,* Trans. Am. Math. Soc. 28 (1926), p. 301.

222d) Als Beispiele von Untersuchungen, die nach dieser Methode — von *H. Kneser,* Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 34 (1925), p. 12 als „methode mixte" bezeichnet — geführt werden, seien die Arbeiten von *J. W. Alexander,* l. c. [180]) (über seinen Dualitätssatz) und [222c]) angeführt. In der letzteren Arbeit gibt *J. W. Alexander* eine systematische Darstellung der Grundzüge dieser Theorie (sie wird dort als „combinatorial analysis situs" bezeichnet, was aber nicht der Bezeichnung „kombinatorische Topologie" in diesem Artikel entspricht; vgl. [198aα])).

logische Arbeiten beizufügen, und zwar speziell auch über die in Artikel III AB 3 referierten Gegenstände[223]) und anschließende Fragen. (Daß die Verteilung topologischer Arbeiten auf kombinatorische und kontinuierliche n-dimensionale Topologie nicht immer möglich ist, wurde bereits erwähnt; vgl. [1])). Hierher gehören Arbeiten über topologische Invarianten[224]), spezielle Darstellungen und Normalformen

---

223) Von der III AB 3, Anm. 17 und 72 zitierten, wenig zugänglichen Diss. von *P. Heegard* erschien inzwischen eine französische Übersetzung in Bull. Soc. Math. de France 44 (1916), p. 161.

Über die *Poincaré*schen Homologien s. *G. Dumas-J. Chuard,* Paris C. R. 171 (1920^2), p. 1113; *J. Chuard,* Palermo Rend. 46 (1922), p. 185.

224) Die „*Listing-Dyck*sche Charakteristik" behandelt *H. Brunn,* Arch. Math. Phys. (3) 22 (1914), p. 43 (vgl. auch *L. Münch,* Chr. Huygens [Internat. Math. Tijdschrift] 4 (1925/26), p. 9); es ist das, bis auf das Vorzeichen, die im verallgemeinerten *Euler*schen Polyedersatz (III AB 3, p. 182) auftretende, aus den Zahlen α_ν (= Anzahl der ν-dimensionalen Zellen eines Zellsystems) gebildete topologische Invariante $\Sigma(-1)^\nu\alpha_\nu$, die dementsprechend auch als „*Euler*sche Charakteristik" (so bei *H. Hopf,* Gött. Nachr. 1925, p. 131, Math. Ann. 96 (1926), p. 226) oder als „*Euler*sche topologische Invariante" (l. c. [122]), p. 27 [63]) bezeichnet wurde. (Wegen ihrer Beziehungen zur *Kronecker*schen Charakteristik eines Funktionensystems sowie zur Curvatura integra vgl. *W. Dyck*[136]), *H. Hopf,* l. c. und Math. Ann. 95 (1925), p. 340—367, sowie die dort p. 341 und von *Dyck* in Sächs. Ber. 1885, p. 315 genannte ältere Literatur.) Geschlossene Kurven in der Ebene bzw. auf einer Kugel (z. T. im Anschluß an *Gauß*) behandeln *G. Landsberg,* Math. Ann. 70 (1911), p. 563, *J. v. Sz. Nagy,* Math. Ztschr. 26 (1927), p. 579. Zum *Poincaré*schen Dualitätssatz für die *Betti*schen Zahlen vgl. *L. Vietoris,* Monatsh. Math. Phys. 35 (1928), p. 165; *E. R. v. Kampen,* Diss. Leiden 1929. Sätze über Homologiegruppen bzw. *Betti*sche Zahlen entwickeln *W. Mayer,* l. c. [222b]) und *L. Vietoris* in einer demnächst in Monatsh. Math. Phys. erscheinenden Arbeit. Über die Herleitbarkeit der ersten *Betti*schen Zahl und der Torsionszahlen niederster Ordnung aus der *Poincaré*schen Fundamentalgruppe siehe *H. Tietze*[153]), p. 77. Weitgehende Untersuchungen über unendliche diskrete Gruppen im Zusammenhang mit topologischen Problemen, speziell über das topologische Gruppenbild und über Kurven auf Flächen gab *M. Dehn,* l. c. [227]) sowie Math. Ann. 72 (1912), p. 413; s. ferner *H. Gieseking*[177]); *J. Nielsen,* Acta math., l. c. [174]); *Hopf,* Math. Ann. 95 (1925), p. 313; vgl. auch opalographierte Vorträge (Breslau, Math. Kolloquium) von *M. Dehn,* (Dez. 1920, Febr. 1922) und *J. Nielsen* (März 1921) über Gruppentheorie und Topologie; *Dehn,* Leipziger Vortrag [s. Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 31 (1922), II. Teil, p. 97]; *O. Veblen,* Bull. Am. Math. Soc. 30 (1924), p. 405. Über den Zusammenhang der Fundamentalgruppe einer $\mathfrak{M}^n$ mit unverzweigten Überlagerungen s. *K. Reidemeister,* Gött. Nachr. 1928, p. 69—76; vgl. auch Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 38 (1929), II. Teil, p. 71—72. Über verschiedene, den *Betti*schen Zahlen verwandte (aus ihnen und den Torsionszahlen herleitbare) Invarianten s. *H. Tietze,* l. c. [153]), p. 49; *J. W. Alexander-O. Veblen,* Ann. of math. (2) 14 (1913), p. 163; *J. W. Alexander,* Trans. Am. Math. Soc. 23 (1922), p. 333, 28 (1926), p. 301. Über Flächenkomplexe in einer $\mathfrak{M}^n$ s. *M. Dehn,* Math. Ann. 69 (1910), p. 147; über „*Poincaré*sche Räume" *M. Dehn,* ib. p. 159; speziell

von Mannigfaltigkeiten[224a]) [224b]), Vierfarbensatz und Verwandtes[225]), Abbildungen von Mannigfaltigkeiten auf sich[226]), zweiseitige oder einseitige

---

über dreidimensionale Mannigfaltigkeiten s. *M. Dehn,* Math. Ann. 69 (1910), p. 137; *H. Kneser,* Gött. Nachr. 1925, p. 128. Nicht orientierbare (vgl. [168])) $\mathfrak{M}^n$ bei *D. König,* Arch. Math. Phys. (3) 19 (1912), p. 214, Cambr. Congr. 1912, t. 2 (1913), p. 129, Acta litt. ac scient. Szeged 2 (1924), p. 34. Topologische Invarianten von Produktmannigfaltigkeiten (d. h. Produkträume [Nr. **20**] von Mannigfaltigkeiten) untersucht *H. Künneth,* Sitz.-Ber. Bayer. Akad. 1922, p. 213, Math. Ann. 90 (1923), p. 65, 91 (1924), p. 125, Sitz.-Ber. Erlang. Phys. med. Soc. 54/55 (1922/23), p. 190. *J. W. Alexander,* Trans. Am. Math. Soc. 20 (1919), p. 339 gibt zwei nicht homöomorphe orientierbare dreidimensionale Mannigfaltigkeiten mit gleicher Fundamentalgruppe, womit zugleich eine von *H. Tietze,* l. c. [153]), p. 116 für eben diese Mannigfaltigkeiten aufgeworfene Frage beantwortet wird.

Eine Reihe von Untersuchungen betrifft die Durchsetzungen zweier geschlossener orientierter Linien auf einer Fläche $\mathfrak{M}^2$ bzw. die Durchsetzungen von n Mannigfaltigkeiten der Dimension $n-1$ in einer $\mathfrak{M}^n$; ferner die Durchsetzungen einer k- und einer $(n-k)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit in einer $\mathfrak{M}^n$, bzw. von r Mannigfaltigkeiten der Dimensionen $k_1, k_2, \ldots, k_r$ in einer $\mathfrak{M}^n$ (wobei $k_1 + \cdots + k_r = n$, oder auch $> n$). Diese Untersuchungen gehen zurück auf die Arbeiten von *Kronecker* über die Charakteristik eines Funktionensystems (Monatsber. Akad. Berlin, 1869, p. 159, 688; 1878, p. 145 = Werke I, p. 175, 213, II, p. 71) und *Poincaré,* J. de math. (4) 1 (1885), p. 167, 2 (1886), p. 151. Diese Betrachtungen führen auf die *Euler*sche Charakteristik der $\mathfrak{M}^2$ (s. o.) bzw. auf Invarianten der $\mathfrak{M}^n$; vgl. für $n = 2$ *H. Weyl*[169]), für n beliebig *H. Weyl,* Rev. de Mat. Hisp. Amer. 1923 und *O. Veblen,* Trans. Am. Math. Soc. 25 (1923), p. 540 (Ausdehnung auf nicht-orientierte Mannigfaltigkeiten), ferner *G. de Rahm,* Paris C. R. 186 (1928[1]), p. 670—672; vgl. auch *S. Lefschetz,* Trans. Am. Math. Soc. 29 (1927), p. 431, Anm. †. In dieser Richtung weitergehende Untersuchungen, bei denen auch Anregungen von *O. Veblen* mitgewirkt haben (vgl. eine Bemerkung von *J. W. Alexander,* Proc. Nat. Acad. 10 (1924), p. 103) ergaben weitere wichtige neue topologische Invarianten, wobei auch Durchsetzungen allgemeiner Komplexe in einer $\mathfrak{M}^n$ betrachtet werden; *J. W. Alexander,* Proc. Nat. Acad. 10 (1924), p. 99, 101, 493; 11 (1925), p. 143; *S. Lefschetz,* ib. 11 (1925), p. 287, l. c. [177]), Ann. of math. 29 (1928), p. 232—254.

224a) Vgl. außer den in Nr. **32** zitierten Arbeiten: *H. R. Brahana,* Ann. of math. (2) 23 (1922), p. 144. Die Darstellbarkeit jeder geschlossenen orientierbaren $\mathfrak{M}^n$ als endlichblättriger *Riemann*scher Raum über dem sphärischen $\mathfrak{S}^n$ beweist *J. W. Alexander,* Bull. Am. Math. Soc. 26 (1920), p. 370. Vgl. auch *H. Hotelling,* Trans. Am. Math. Soc. 28 (1926), p. 479. In einer wenig bekannten älteren Arbeit, British Assoc. Report 1884 (Montreal) bespricht *W. Dyck* ein Erzeugungsverfahren gewisser spezieller dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten (vgl. dazu auch *H. Tietze*[153]), § 17).

224b) Über nicht-orientierbare, in gewissem Sinne singularitätenfreie Flächen im $\mathfrak{R}^3$ siehe außer *W. Boy,* l. c. III A B 3, Anm. 153: *F. Schilling,* Math. Ann. 92 (1924), p. 69—79, *J. A. de Séguier,* Bull. Soc. Math. de Fr. 55 (1927), p. 80—88.

225) *G. D. Birkhoff,* Ann. of math. (2) 14 (1912—13), p. 42, Amer. J. of math. 35 (1913), p. 115; *O. Veblen,* ib. p. 88; *P. Franklin,* Amer. J. of math. 44 (1922), p. 225; *H. R. Brahana,* Bull. Am. Math. Soc. 29 (1923), p, 198; *J. Chuard,* L'ens.

Lagerung einer $\mathfrak{M}^n$ in eine $\mathfrak{M}^{n+p}$ [226a]), Knoten im $\Re^3$ [227]), Liniensysteme (Graphe) [227a]), Zerlegungssätze [227b]).

---

math. 22 (1923), p. 373; *C. N. Reynolds,* Ann. of math. (2) 28 (1926/27), p. 1—5, 477—492 (mit Bibliographie), C. R. Assoc. Franç. p. Avanc. des Sciences (1926), p. 88—91, Proceed. West Virginia Acad. of Sc. 1 (1927), p. 91. Vgl. auch *D. König,* l. c. [227a]), p. 456 und zwei dort (p. 457, Anm.) zitierte Arbeiten in Mathematikai és természet Andományi Értesítö 29 (1911), p. 112, 345; *F. Levi,* Math. Ztschr., l. c. [227a]); *A. Errera,* Thèse Bruxelles (Paris, Gauthier-Villars, 1921) (mit Bibliographie), L'ens. Math. 23 (1923), p. 95—96. Paris C. R. 177 (1923), p. 489—491, C. R. de l'Assoc. Franç. p. l'Avanc. des Sciences (1924), p. 95—96, Congress Toronto, Abstracts (1924), p. 57, Bull. Soc. Math. de France 53 (1925), p. 42—55; *H. Lebesgue* [198b]); *T. Kubota,* Tôhoku Math. J. 24 (1925), p. 273—276; *H. R. Brahana-A. B. Coble,* Amer. J. 48 (1926), p. 1; *H. R. Brahana,* ib. p. 225; *A. Sainte Laguë,* Paris C. R. 182 (1926), p. 747. Weitere Literatur bei *A. Errera* und *C. N. Reynolds,* l. c.

226) Vgl. [174]) bis [178]), ferner *S. Lefschetz,* Proc. Nat. Acad. 9 (1923), p. 90, 11 (1925), p. 290, 12 (1926), p. 737. Hiermit verwandt sind Untersuchungen über mehrdeutige Abbildungen von Mannigfaltigkeiten aufeinander bzw. über mehrblättrige Überlagerungsräume (-flächen). Vgl. [177]), ferner *L. E. J. Brouwer,* Paris C. R. 168 (1919), p. 677.

226a) Vgl. *W. Dyck, E. Steinitz,* l. c. [168]), *W. Ephrämowitsch,* Math. Ztschr. 29 (1929), p. 55—59.

227) Vgl. [182]), ferner *H. Tietze* [153]), § 18 und den dortigen Hinweis auf *W. Wirtinger; M. Dehn,* Math. Ann. 69 (1910), p. 137, 71 (1911), p. 116, 75 (1914), p. 1; *O. Schreier,* Abh. Math. Sem. Hamburg 3 (1927), p. 167—169; *E. Artin,* ib. 4 (1926), p. 47—72; *K. Reidemeister,* ib. 5 (1926), p. 7, 24, 33, 6 (1928), p. 46, Math. Ztschr. 29 (1929), p. 713—729; *J. W. Alexander-G. B. Briggs,* Ann. of math. (2) 28 (1927), p. 562—586; *J. W. Alexander,* Trans. Am. Math. Soc. 30 (1928), p. 275—306. Spezielle Entwicklungen im Hinblick auf funktionentheoretische Anwendungen bei *K. Brauner,* Abh. Math. Sem. Hamburg 6 (1928), p. 1. An *O. Simonys* Untersuchungen (III A B 3, p. 215) knüpft an: *Ernst Müller,* Monatsh. Math. Phys. 33 (1923), p. 113. An dieser Stelle sei auch auf die ältere Arbeit: *F. Dingeldey,* Topologische Studien über die aus ringförmig geschlossenen Bändern durch gewisse Schnitte erzeugbaren Gebilde, Leipzig 1890, hingewiesen.

227a) *D. König,* Math. Ann. 77 (1916), p. 453, Acta litt. sc. Szeged 2 (1924), p. 32 und l. c. [225]); *D. König-St. Valkó,* Math. Ann. 95 (1925), p. 135 (vgl. hierzu *B. L. v. d. Waerden,* Abh. Math. Sem. Hamburg 5 (1927), p. 185—188); *H. R. Brahana,* Ann. of math. (2) 19 (1917), p. 59; *P. Heegaard,* Beretn. 3. Skand. Mat. Kongr. 1913, Nyt Tidsskr. Mat. 29 (1919), p. 81; *F. Levi,* Chr. Huygens (Internat. Math. Tijdschrift) 2 (1922/23), p. 307; *H. Weyl* [220]); *A. Sainte Laguë,* Paris C. R. 176 (1923), p. 1202; *Sainte Laguë,* Réseaux (mit vielen Literaturangaben); *O. Frink,* Ann. of math. (2) 27 (1926), p. 491; *F. Fitting,* Nieuw Archief (2) 13 (1921), p. 348—360. Vgl. auch *F. Levi,* Math. Ztschr. 16 (1923), p. 148, 22 (1925), p. 45. Sei hier auch noch die Arbeit von *G. Kirchhoff,* Poggendorf Ann. d. Phys. 72 (1847), p. 497 über lineare Verteilung galvanischer Ströme genannt, nach *Veblen,* Cambr. Coll., p. 25 wohl die älteste wichtige Arbeit über Graphe.

227b) *H. Kneser,* Amsterdam Akad. Proc. 27 (1924), p. 601; ein spezieller Fall wurde vorher von *E. Bilz,* erledigt (vgl. l. c. [207]), p. 19); vgl. auch *H. Kneser,* Gött. Nachr. 1925, p. 128. Im übrigen vgl. [179]) [180]).

40. Anwendung der kombinatorischen auf die allgemeine Topologie. Jeder kompakte metrische Raum $\mathfrak{R}$ ist für beliebiges $\varepsilon > 0$ Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen[227c]) Teilmengen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_s$, deren Durchmesser $< \varepsilon$ sind. Wählt man in jedem dieser Teile $\mathfrak{A}_i$ einen Punkt P_i, so liegt in jeder Umgebung ε jedes Punktes X von $\mathfrak{R}$ mindestens ein Punkt P_i. Der Mengenabstand (Nr. **20**) zwischen $\mathfrak{R}$ und der Menge $\mathfrak{P}$ aller P_i ist $< \varepsilon$. Diese Aussage läßt sich auf folgende Weise noch erheblich verschärfen. Wir verstehen unter einem (abstrakten) n-dimensionalen Simplex (im Gegensatz zu den gewöhnlich betrachteten geometrischen Simplexen) jede Menge $\mathfrak{S}$ von $(n+1)$ Punkten. Die in $\mathfrak{S}$ enthaltenen Punkte-$(k+1)$-tupel mögen für $k = 0, 1, \ldots, n$ die k-dimensionalen Seiten von $\mathfrak{S}$ heißen. Unter einem simplizialen Komplex verstehen wir eine Gesamtheit $\mathfrak{K}$ von Simplexen (sie heißen die „Seiten" von $\mathfrak{K}$), in welcher mit jedem Simplex $\mathfrak{S}$ auch alle Seiten von $\mathfrak{S}$ vorkommen. Auf Grund dieser Definition läßt sich die ganze kombinatorische Topologie der simplizialen Komplexe (die nunmehr aus abstrakten Simplexen bestehen) ebenso entwickeln, wie mit Hilfe der geometrischen Simplexe.[228]) Wir sagen, ein (abstrakter) Komplex liege in einer Menge $\mathfrak{M}$, wenn seine Ecken in $\mathfrak{M}$ liegen. Aus $\mathfrak{P}$ können wir nun einen in $\mathfrak{R}$ liegenden Komplex $\mathfrak{K}$ machen, indem wir festsetzen: Der Simplex $[P_{i_0} P_{i_1} \ldots P_{i_k}]$ sei dann und nur dann Seite von $\mathfrak{K}$, wenn der Durchschnitt der zugehörigen Mengen $\mathfrak{A}_{i_0} \mathfrak{A}_{i_1} \ldots \mathfrak{A}_{i_k}$ nicht leer ist. Damit ist jede Seite jeder Seite von $\mathfrak{K}$ von selbst wieder eine Seite von $\mathfrak{K}$, also $\mathfrak{K}$ tatsächlich ein Komplex. Nun können wir sagen, der Komplex $\mathfrak{K}$ approximiere $\mathfrak{R}$ mit der Genauigkeit ε, wenn wir folgende Definition zugrunde legen: Ein Komplex $\mathfrak{K}$ approximiert eine Menge $\mathfrak{M}$ mit der Genauigkeit ε, wenn 1) jeder Ecke P_i von $\mathfrak{K}$ ein in $\mathfrak{M}$ abgeschlossener Teil $\mathfrak{A}_i$ zugeordnet werden kann, dessen sämtliche Punkte von P_i einen Abstand $< \varepsilon$ haben, wenn 2) $\mathfrak{M}$ die Vereinigung dieser $\mathfrak{A}_i$ ist und wenn 3) der Durchschnitt $\mathfrak{A}_{i_0} \mathfrak{A}_{i_1} \ldots \mathfrak{A}_{i_k}$ dann und nur dann nicht leer ist, sobald $[P_{i_0} P_{i_1} \ldots P_{i_k}]$ eine Seite von $\mathfrak{K}$ ist.[229]) Der in Nr. **41**

---

227 c) Diese Aussage bleibt richtig, wenn man das Wort „abgeschlossenen" durch „offenen" ersetzt.

228) *P. Alexandroff,* Math. Ann. 96 (1926), p. 489—511, 101 (1929), p. 452—456; *L. Vietoris,* Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 1008—1013; Math. Ann. 97 (1927), p. 454—472. Vgl. auch den Begriff des „n-dimensionalen Gerüstes" bei *Alexandroff,* Math. Ann. 94 (1925), p. 296, der sich im wesentlichen mit unserem abstrakten n-dimensionalen Simplex deckt. Die n-dimensionalen Simplexe im Sinn von *Alexandroff,* Math. Ann. 96 (1926), p. 490, 495 sind $(n+1)$-tupel von Elementen einer Hilfsmenge, insbesondere von natürlichen Zahlen.

229) Die approximierenden Komplexe *Alexandroff*s, l. c., bestehen aus seinen Simplexen, d. i. Zahlen-$(n+1)$-tupeln. Er definiert durch eine unendliche Folge

erwähnte Satz von der $(\varepsilon, n+1)$-Überdeckbarkeit der n-dimensionalen Mengen nimmt dann folgende Form an: Eine kompakte abgeschlossene Menge ist dann und nur dann n-dimensional, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ n-dimensionale, nicht aber zu jedem $\varepsilon > 0$ $(n-1)$-dimensionale, $\mathfrak{R}$ mit der Genauigkeit ε approximierende Komplexe gibt. In ähnlicher Weise spiegeln sich auch andere topologische Eigenschaften von $\mathfrak{R}$ — wie höherer Zusammenhang (*Betti*sche Zahlen), Zusammenhang im Kleinen — in kombinatorischen Eigenschaften der approximierenden Komplexe, bzw. der Folgen approximierender Komplexe.[230])

Die Anwendung der kombinatorischen Topologie auf Punktmengen läßt sich aber auf eine noch allgemeinere Art durchführen. Das einfachste und älteste Beispiel einer solchen Anwendung ist *Cantor*s Zusammenhangsbegriff. Eine Menge heißt nach *Cantor* zusammenhängend zwischen A und B, wenn sie A und B enthält und für jedes $\varepsilon > 0$ auch eine ε-Kette von endlich vielen Punkten von A nach B, anders ausgedrückt, wenn sie zu jedem $\varepsilon > 0$ einen zwischen A und B zusammenhängenden Komplex enthält, dessen Kanten (= eindimensionale Seiten) eine Länge $< \varepsilon$ haben. Ganz analog hat *L. E. J. Brouwer*[287]) den einfachen Zusammenhang einer Menge $\mathfrak{M}$ definiert. Er versteht unter einer „ε-Abänderung" in $\mathfrak{M}$ einer geschlossenen ε-Kette $\mathfrak{K} = A_0 A_1 \ldots A_{l-1} A_0$ von Punkten aus $\mathfrak{M}$ die Zwischenschaltung eines Punktes A_i' von $\mathfrak{M}$ zwischen zwei aufeinanderfolgende Punkte A_i, A_{i+1} der Kette, wenn dadurch aus $\mathfrak{K}$ eine ε-Kette wird, desgl. die Umkehrung dieser Operation. *Brouwer* nennt dann $\mathfrak{M}$ einfach zusammenhängend[230a]), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß jede geschlossene in $\mathfrak{M}$ liegende δ-Kette durch ε-Abänderungen in $\mathfrak{M}$ auf einen Punkt zusammengezogen werden kann. Im Anschluß an *Brouwer* schreiben wir $\mathfrak{M}$ eine h-fache Basis der Zyklosis zu, wenn h die kleinste[230b]) ganze

---

solcher Komplexe, bzw. durch Auswahlfolgen von Seiten derselben einen topologischen Raum $\mathfrak{R}'$, welcher mit einem vorgegebenen Raum, dem obigen $\mathfrak{R}$, homöomorph ist. Daher rechtfertigen diese Komplexe den Namen approximierend zunächst in bezug auf $\mathfrak{R}'$ und dann auf $\mathfrak{R}$. — Approximationen in weitergehendem Ausmaß nicht durch abstrakte, sondern durch geometrische Komplexe behandelt *P. Alexandroff*, Paris C. R. 183 (1926), p. 640/2.

230) *P. Alexandroff*, Math. Ann. 94 (1925), p. 296—308, 96 (1926), p. 489—511, 512—554, 98 (1928), p. 617—636, 101 (1929), p. 452—456, Paris C. R. 184 (1927), p. 317—319, 425—427, 575—579, 186 (1928[1]), p. 1340—1342, 1696—1698, Ann. of math. (2) 30 (1928), p. 101—187, Fund. math. 13 (1929), p. 34—41; *S. Lefschetz*, Proc. Nat. Acad. 13 (1927), p. 614, 805, Ann. of math. 29 (1928), p. 232—254; *Felix Frankl*[180]), p. 691.

230a) Über den Ausdruck „einfach zusammenhängend" vgl. [167]).

230b) Wir weichen insofern von *Brouwers* Ausdrucksweise, l. c. [287]) ab, als

Zahl ist, für welche es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ und h von einem gemeinsamen Anfangspunkt O ausgehende und nach O zurückkehrende in $\mathfrak{M}$ liegende δ-Ketten $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_h$ gibt, so daß jede in $\mathfrak{M}$ von O nach O laufende δ-Kette durch ε-Abänderungen in eine Kette[230c]) $\varkappa_1 \mathfrak{K}_1 + \varkappa_2 \mathfrak{K}_2 + \cdots + \varkappa_h \mathfrak{K}_h$ übergeführt werden kann. Diese Zahl h ist, wenn $\mathfrak{M}$ kompakt und abgeschlossen ist, eine topologische Invariante. Damit ist ein Merkmal der *Poincaré*schen Fundamentalgruppe für kompakte abgeschlossene Mengen definiert. In analoger Weise gelingt eine Definition beliebig hoher *Betti*scher Zahlen[231]) für kompakte abgeschlossene Mengen. Man kann aber auch eine Definition der Fundamentalgruppe sowie der Homologiegruppen beliebiger Dimension (Gruppe der Addition von n-dimensionalen Zykeln im Sinne von *Poincaré*) auf ähnlichem Wege aus der kombinatorischen Topologie in die Mengenlehre übertragen, indem man als Elemente dieser Gruppen in geeigneter Weise Fundamentalfolgen von Ketten bzw. n-dimensionalen Zykeln definiert.[232]) Diese Gruppen sind für kompakte abgeschlossene Mengen topologische Invarianten; d. h. homöomorphe kompakte abgeschlossene Mengen haben (im Sinn der abstrakten Gruppentheorie) dieselben Fundamentalgruppen und Homologiegruppen.[233])[233a])

Brouwer auch dann $\mathfrak{M}$ eine h-fache Basis der Zyklosis zuschreibt, wenn h nicht die kleinste, sondern irgendeine derartige Zahl ist.

230c) $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_h$ bedeuten ganze Zahlen. Ist $\mathfrak{K}_1 = A_0 A_1 \ldots A_{l-1} A_0$, $\mathfrak{K}_2 = A_0 B_1 \ldots B_{m-1} A_0$, so soll sein: $-\mathfrak{K}_1 = A_0 A_{l-1} \ldots A_1 A_0$, $\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 = A_0 A_1 \ldots A_{l-1} A_0 B_1 \ldots B_{m-1} A_0$, $2\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_1$ usw.

231) Auf eine mündliche Anregung von *L. E. J. Brouwer* bei *L. Vietoris*, Math. Ann. 97 (1927), p. 464.

232) *L. Vietoris*, Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 1008—1013; Math. Ann. 97 (1927), p. 454—472; 101 (1929), p. 219—225; 102 (1929), p. 176; *S. Lefschetz*[230]); *P. Alexandroff*[230]).

233) Diese Invarianz ist — wie die des *Cantor*schen Zusammenhangs und der *Brouwer*schen Basis der Zyklosis — eine fast triviale Folge der gleichmäßigen Stetigkeit der topologischen Abbildungen kompakter abgeschlossener Mengen. *Vietoris*, Math. Ann. 97 (1927), p. 465—472, beweist die Invarianz dieser Gruppen gegenüber einer viel allgemeineren Klasse von mehr-mehrdeutigen stetigen Abbildungen.

233a) Über den hieraus sich ergebenden Beweis dafür, daß die entsprechenden kombinatorisch definierten Gruppen kontinuierlicher n-dimensionaler Komplexe topologisch invariant sind, vgl. *L. Vietoris*, Math. Ann. 101, p. 220. Über den ersten Beweis hierfür vgl. *J. W. Alexander*, l. c. [211]), p. 324—330.

V. Der Dimensionsbegriff.

41. Allgemeines.[233b]) Im Abschnitt I, wo wir Punktmengen im reellen n-dimensionalen Zahlenraum $\mathfrak{R}^n$ betrachteten, bedeutete „Dimension" nichts anderes als die Anzahl der Koordinaten eines Punktes. Im Abschnitt III haben wir allgemeinere topologische Räume betrachtet — die homogenen n-dimensionalen Gebilde — von denen nur verlangt war, daß sie sich in der Umgebung eines jeden ihrer Punkte so verhalten, wie sich der $\mathfrak{R}^n$ (oder eine offene Menge des $\mathfrak{R}^n$) in der Umgebung eines jeden Punktes verhält; und das gleiche forderten wir im besonderen von den homogenen n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}^n$ (Nr. **26**).[233c]) Auch da bedeutete die Dimensionszahl n des Gebildes bzw. der $\mathfrak{M}^n$ zunächst eine Anzahl von Koordinaten, nämlich derjenigen, die zur Kennzeichnung des Umgebungscharakters verwendet werden, wobei der Satz von der Invarianz der Dimension und des n-dimensionalen Gebiets (Nr. **31**) zeigt, daß zu verschiedenen Werten des n stets topologisch verschiedene Umgebungstypen gehören.[233d]) Die fragliche Anzahl n war damit als topologische Invariante erkannt.

Mit der Aufgabe, das Wesen der Dimension mit Hilfe der Punktmengenlehre zu erfassen, hat sich schon *G. Cantor* beschäftigt. Er schuf beim Suchen nach einer Lösung die Lehre von den Mächtigkeiten[234]), beseitigte aber zugleich das naheliegende Vorurteil, daß die Dimension eine Art Elementenzahl sei, indem er zeigte, daß die cartesischen Räume $\mathfrak{R}^n$ beliebig hoher Dimensionen alle dieselbe Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ haben.

Einen anderen Versuch zur Lösung des Problems einer mengen-

233b) Für die in Nr. **41**, **42** behandelten Gegenstände sei noch besonders hingewiesen auf die zusammenfassenden Darstellungen von *P. Urysohn*, Fund. math. 7 (1925), p. 30—137, 8 (1926), p. 225—359, Verhandelingen Amsterdam, I. sect. 13 (1928), Nr. 4; *K. Menger*, Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 35 (1926), p. 113—150; *W. Hurewicz*, Math. Ann. 98 (1927), p. 64—88; *P. Alexandroff*, Math. Ann. 98 (1927), p. 31—63 und *Menger*, Dim. — Zur Geschichte der Entstehung der Theorie s. außerdem *K. Menger*, Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 1122—1124; *L. E. J. Brouwer*, ib. 31 (1928), p. 953—957; *K. Menger*, Monatsh. Math. Phys. 36 (1929), p. 411—432.

233c) Ebenso von den berandeten Mannigfaltigkeiten (Nr. **30**) in der Umgebung eines jeden „mittleren Punktes".

233d) Für die aus diskreten Elementen und Zuordnungen bestehenden kombinatorischen Zellensysteme des Abschnittes IV bedeutet das Wort „Dimension" überhaupt nur eine Stufenzahl (vgl. [201])), die im folgenden außer Betracht bleibt.

234) *G. Cantor*, J. f. Math. 84 (1877), p. 242—258.

theoretischen Kennzeichnung der Dimensionszahlen hat *M. Fréchet*[234a]) gemacht. Bereits in II C 9[234a]) ist über diese Untersuchungen berichtet worden, die übrigens in anderer Richtung liegen als die im folgenden nach *K. Menger* und *P. Urysohn* dargestellte Dimensionstheorie. Hier sei nur hervorgehoben, daß die *Fréchet*sche Theorie miteinander unvergleichbare Dimensionstypen kennt und andererseits auch gebrochene Dimensionszahlen einführt, während im folgenden jeder Menge eine ganze Zahl $\geqq -1$ oder ∞ als Dimensionszahl zugewiesen wird.[234a])[234b])

Poincaré[235]), dem es vor allem um eine Analyse der n-Dimensionalität des $\mathfrak{R}^n$ zu tun war, schlug auf Grund der Tatsache, daß die Dimension einer Menge um 1 größer ist, als die gewisser Begrenzungen in ihr, eine rekurrente Definition vor, welche durch *Brouwer*[236]) die strenge Fassung erhielt. Eine eingehende Untersuchung der Punktmengen[236a]) hinsichtlich ihrer Dimension kam aber erst

234a) *M. Fréchet,* Math. Ann. 68 (1910), p. 145—168; vgl. II C 9, p. 952. *Fréchets* Dimensionsdefinition ist der *Cantor*schen Mächtigkeitsdefinition analog. Gewisse gegen *Fréchets* Definition gemachte Einwände (daß z. B. ihr zufolge eine Strecke eine kleinere Dimension erhält wie eine Kreislinie; oder daß die Dimension einer Kugelfläche und einer Torusfläche miteinander nicht vergleichbar sind; vgl. II C 9, l. c.) fallen fort, wenn das *Fréchet*sche Klassifikationsprinzip angewendet wird auf „Umgebungstypen" statt auf „Raumtypen", wie es die ursprünglichen *Fréchet*schen Dimensionstypen sind. Vgl. hierzu *Fréchet,* Esp. abstr., p. 111—113 und [93]). Angesichts der neueren dimensionstheoretischen Untersuchungen von *Menger* und *Urysohn* sind die Meinungen darüber geteilt, ob die Beibehaltung des *Wortes „Dimension"* zur Bezeichnung der *Fréchet*schen „Dimensions"typen empfehlenswert ist. Die *symbolischen* Bezeichnungen sind in der bisherigen Literatur insofern unterschieden, als $d\mathfrak{A}$ den *Fréchet*schen Dimensionstypus einer Menge $\mathfrak{A}$ und $dim\,\mathfrak{A}$ ihre *Menger-Urysohn*sche Dimensionszahl bedeutet (analog $d_P\mathfrak{A}$ bzw. $dim_P\mathfrak{A}$ den lokalen Dimensionstypus bzw. die lokale Dimension im Punkte P). Einen Vergleich zwischen seiner Auffassung von dem Wesen der Dimension und der *Poincaré-Brouwer*schen zieht *M. Fréchet,* Paris C. R. 178 (1924), p. 1782 und Esp. abstr., p. 28, 110. Über den durch *Fréchets* Typentheorie geschaffenen Problemkreis vgl. ferner *Fréchet,* Esp. abstr., p. 23—60; *C. Kuratowski*-*W. Sierpiński,* Fund. math. 8 (1926), p. 193; *C. Kuratowski,* ib. p. 201; *M. Fréchet,* Paris C. R. 178 (1924[1]), p. 1511—1513, 180 (1925), p. 419—421; *K. Kunugui,* Paris C. R. 187 (1928[2]), p. 876—878, 188 (1929[1]), p. 297—299; *W. Sierpiński,* Fund. math. 13 (1929), p. 117—120, 277—280, 14 (1929), p. 122.

234b) Dimensionsdefinitionen nicht-topologischer Art wurden gegeben von *F. Hausdorff,* Math. Ann. 79 (1918), p. 157—179, *G. Bouligand,* Paris C. R. 180 (1925[1]), p. 246—248, 187 (1928[2]), p. 524—525, 593—594.

235) Revue Metaph. Mor. 1912, p. 486—487.

236) J. f. Math. 142 (1913), p. 146—152; Proc. Amsterdam 26 (1923), p. 795—800; J. f. Math. 153 (1924), p. 253; Math. Ztschr. 21 (1924), p. 312—314; Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 861, Anm. 3.

236a) In dieser und der folgenden Nr. kommen Punktmengen in allgemeineren als separablen metrischen Räumen nicht in Betracht.

mit der Auffassung der Dimension als einer *lokalen*[236b]) Eigenschaft bei *Menger* und *Urysohn*.

Die leere Menge und nur sie heißt (— 1)-dimensional. Eine Menge $\mathfrak{M}$ heißt für $n \geqq 0$ *im Punkt P n-dimensional*[237]) ($\dim_P \mathfrak{M} = n$), wenn n die kleinste ganze Zahl ist, für welche es beliebig kleine Umgebungen von P gibt, deren Begrenzungen mit $\mathfrak{M}$ einen Durchschnitt von niedrigerer als der n^{ten} Dimension haben. Eine Menge $\mathfrak{M}$ heißt *n-dimensional* (*schlechtweg*) ($\dim \mathfrak{M} = n$), wenn ihre Dimension in allen Punkten $\leqq n$, in mindestens einem Punkt gleich n ist. Kommt einer Menge in einem Punkt P nach dieser Definition keine Dimension zu, so heißt sie in P *unendlich-dimensional* ($\dim_P \mathfrak{M} = \infty$).[238])[238a])

Durch vollständige Induktion[239]) zeigt man, daß für $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{N}$ immer $\dim_X \mathfrak{M} \leqq \dim_X \mathfrak{N}$ und damit $\dim \mathfrak{M} \leqq \dim \mathfrak{N}$ ist, daß die Dimension eine topologische Invariante ist und daß $\dim(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \leqq 1 + \dim \mathfrak{A} + \dim \mathfrak{B}$ ist.

In separabeln Räumen gilt ferner: Ist $\dim \mathfrak{A} \leqq n$ und $\dim \mathfrak{B} \leqq n$ und ist $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}$ abgeschlossen, dann ist $\dim(\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}) \leqq n$[240]); allgemeiner: Ist jede der abzählbar vielen Mengen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$, deren Dimensionen $\leqq n$ seien, in der Vereinigung $\mathfrak{A}_1 \dotplus \mathfrak{A}_2 \dotplus \cdots$ abgeschlossen, dann hat diese eine Dimension $\leqq n$ („Summensatz").[241])

236b) Zu diesem Gesichtspunkt vgl. auch [92]).

237) *K. Menger*, Hinterlegung bei der Ak. Wiss. Wien 1921, abgedruckt in Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 1122—1124; Monatsh. Math. Phys. 33 (1923), p. 148—160; *P. Urysohn*, Paris C. R. 175 (1922), p. 440—442. Die gewählte Fassung ist diejenige *Mengers*. Die Definition *Urysohns* ist (nicht wesentlich) metrisch und mit ihr in allen metrischen Räumen äquivalent. Über Nicht-äquivalenz in allgemeineren Räumen siehe *L. W. Cohen*, Paris C. R. 184 (1927[1]) p. 1368—1370. Bezüglich einer axiomatischen Einführung des Dimensionsbegriffs s. *K. Menger*, Monatsh. Math. Phys. 36 (1929), p. 193—218.

238) Diese Definition weist einer Menge $\mathfrak{M}$ auch in Punkten, die nicht in $\mathfrak{M}$ liegen, eine Dimension zu, wenn man noch festsetzt, daß die Dimension von $\mathfrak{M}$ in P gleich (— 1) ist, dann und nur dann, wenn P nicht in $\overline{\mathfrak{M}}$ liegt. Die Dimension von $\mathfrak{M}$ in den Punkten von $\overline{\mathfrak{M}}$ ist, soweit es sich um separable metrische Räume handelt, von dem Raum, in dem $\overline{\mathfrak{M}}$ liegend gedacht ist, unabhängig; s. *W. Hurewicz*, Math. Ann. 96 (1927), p. 761.

238a) Über abzählbar-dimensionale Räume siehe *W. Hurewicz*, Proceed. Amsterdam Acad. 31 (1928), p. 916—922.

239) Entsprechend der Induktion in der Definition der Dimension.

240) Dies ist eine Verallgemeinerung des „lemme fondamental"[268]) von *Urysohn*, Fund. math. 8 (1926), p. 225—359, 260.

241) Für kompakte abgeschlossene $\sum A_i$ bei *Urysohn*, Paris C. R. 175 (1922), p. 440—442 ausgesprochen, bewiesen Fund. math. 8, l. c. [240]), Kap. II, und *Menger*, Monatsh. Math. Phys. 33 (1923), p. 152; 34 (1926), p. 147, 153, in der obigen Allgemeinheit bei *W. Hurewicz*, Math. Ann. 96 (1927), p. 736—764 und

Dieser Satz hat eine Reihe wichtiger Folgen:

In jeder Menge $\mathfrak{M}$ einer Dimension $\leqq n$ gibt es zu irgend zwei fremden in $\mathfrak{M}$ relativ abgeschlossenen Mengen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ eine nicht mehr als $(n-1)$-dimensionale Menge $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{M} - \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$, welche $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{M}$ trennt.[242][243] Da umgekehrt aus dieser Eigenschaft unmittelbar[244] $\dim \mathfrak{M} \leqq n$ folgt, ist eine Menge $\mathfrak{M}$ dann und nur dann n-dimensional, wenn n die kleinste ganze Zahl ist, für welche je zwei in $\mathfrak{M}$ relativ abgeschlossene Mengen durch eine Menge von einer Dimension $< n$ in $\mathfrak{M}$ getrennt werden können, was eine zweite Kennzeichnung der n-dimensionalen Mengen darstellt (Dimension im Großen).[245]

Ist $\dim \mathfrak{M} \leqq n$, so gibt es in $\mathfrak{M}$ ein dem System aller Relativumgebungen in $\mathfrak{M}$ gleichwertiges System von abzählbar vielen Umgebungen, deren Begrenzungen nicht mehr als $(n-1)$-dimensional sind. Nach dem Summensatz ist die Vereinigung $\mathfrak{B}$ dieser Begrenzungen nicht mehr als $(n-1)$-dimensional. Der Rest $\mathfrak{M} - \mathfrak{B}$ hat die Dimension 0, d. h.: Jede nicht mehr als n-dimensionale Menge ist Summe einer nicht mehr als $(n-1)$-dimensionalen und einer nulldimensionalen Menge. Ist $\mathfrak{M}$ n-dimensional, so ist $\mathfrak{B}$ $(n-1)$-dimensional wegen $\dim(\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}) \leqq 1 + \dim \mathfrak{A} + \dim \mathfrak{B}$. Jede n-dimensionale Menge ist daher Summe von $n+1$, aber nicht von weniger als $n+1$ nulldimensionalen Mengen. Das ergibt eine dritte Kennzeichnung der n-dimensionalen Mengen.[246][247][248]

L. Tumarkin, Proc. Amsterdam 28 (1925), p. 994—996, Math. Ann. 98 (1928), p. 637—656.

242) Zwei fremde Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen *in $\mathfrak{M}$ durch $\mathfrak{C}$ getrennt,* wenn es zwei komplementäre Teile $\mathfrak{A}_1 \supseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_1 \supseteq \mathfrak{B}$ von $\mathfrak{M} - \mathfrak{C}$ gibt, von denen keine einen Häufungspunkt der andern enthält. (Vgl. [44].)

243) Die Zurückführung auf den Summensatz geschieht durch den *Heine-Borel-Lebesgue*schen Satz. *Brouwer,* Proc. Amsterdam 27 (1924), p. 636; *Menger,* Monatsh. Math. Phys. 34, l. c. Satz VI; *Hurewicz* [241]), p. 763; *Tumarkin* [241]).

244) Man nehme $\mathfrak{A}$ als aus einem Punkt P bestehend und $\mathfrak{B}$ als Komplement einer Umgebung von P an.

245) Vgl. *Brouwer*s Dimensionsdefinition [236]).

246) Bei *Urysohn,* Fund. math 8, l. c. Kap. VI, für abgeschlossene kompakte Mengen, allgemein bei *Hurewicz* und *Tumarkin,* l. c. [241]). — Unabhängig von der Dimensionstheorie hat *W. Sierpiński,* Fund. math. 4 (1923), p. 1—6 eine Zerlegung der Ebene in drei nulldimensionale Mengen angegeben.

247) Aus ihr schließt *Tumarkin,* Proc. Amsterdam 28 (1925), p. 996 mit Hilfe des in Nr. 18 mitgeteilten Satzes von *Lavrentieff* [81a]): Jede in einem separabeln vollständigen Raum $\mathfrak{R}$ liegende Menge $\mathfrak{M}$ ist in einem G_δ von $\mathfrak{R}$ derselben Dimension wie $\mathfrak{M}$ enthalten.

248) Aus dem Ergebnis von *Tumarkin* [247]) folgt nach einem Satz von *Alexandroff* (vgl. [81])): Jeder separable metrische Raum $\mathfrak{R}$ ist einer Teilmenge eines die-

Die nulldimensionalen Mengen sind jene, in denen je zwei fremde relativ abgeschlossene Teile schon durch die leere Menge getrennt sind. Daher sind alle nulldimensionalen Mengen *total zusammenhanglos*, d. h. in ihnen sind je zwei Punkte durch die leere Menge getrennt, oder, was dasselbe bedeutet, alle ihre Quasikomponenten[249]) bestehen aus je einem Punkt; dagegen ist nicht jede total zusammenhanglose Menge nulldimensional. Eine noch weitere Klasse sind die *zusammenhanglosen* Mengen (ensembles *dispersés*), d. h. jene, in denen keine mehr als einen Punkt enthaltenden zusammenhängenden Teile enthalten sind, oder, was dasselbe ist, deren sämtliche Komponenten aus je einem Punkt bestehen; noch allgemeiner sind die *diskontinuierlichen* Mengen (ensembles *punctiformes*), das sind jene, die kein aus mehr als einem Punkt bestehendes kompaktes Teilkontinuum enthalten.[250]) Im Bereich der halbkompakten[250a]) abgeschlossenen Mengen decken sich diese vier Klassen[251]); ebenso in der geraden Linie.[252]) Eine Menge ist dann und nur dann nulldimensional, wenn sie einer Menge von Irrationalzahlen, oder, was dasselbe ist, einem Teil des *Baire*schen Nullraumes[253]), oder auch, wenn sie einem Teil der *Cantor*schen Dreiteilungsmenge[254]) homöomorph ist (nulldimensionale Universalräume, von denen der letzte auch kompakt ist). Jede abgeschlossene nulldimensionale Teilmenge eines kompakten im Kleinen zusammenhän-

---

selbe Dimension wie $\mathfrak{R}$ besitzenden vollständigen metrischen Raumes homöomorph. Siehe ferner *S. Mazurkiewicz*, Fund. math. 8 (1926), p. 311.

249) *Hausdorff*, Grundz., p. 248.

250) Daß diese vier Klassen verschieden sind, zeigen Beispiele von *Sierpiński*, Fund. math. 1 (1920), p. 7; Fund. math. 2 (1921), p. 81; *Knaster* und *Kuratowski*, Fund. math. 2 (1921), p. 206. Nach *Mazurkiewicz*, Fund. math. 2 (1921), p. 201, kann eine total zusammenhanglose Menge sogar in jedem ihrer Punkte eine Dimension > 0 haben. Siehe ferner *R. L. Wilder*, Trans. Am. Math. Soc. 29 (1927), p. 332; *P. Alexandroff-P. Urysohn*, Math. Ann. 98 (1928), p. 89—106; *K. Menger*, Akad. Anzeig. Wien 12. I. 1928, Dim., p. 138—150, 309—310; *S. Mazurkiewicz*, Fund. math. 12 (1928), p. 111—117, 13 (1929), p. 210—217.

250a) *K. Menger*, Monatsh. Math. Phys. 34 (1926), p. 144.

251) *K. Menger*, Monatsh. Math. Phys. 33 (1923), p. 149, 159; *P. Urysohn*, Fund. math. 7 (1925), p. 75.

252) Zufolge eines Satzes von *W. Sierpiński*, Fund. math. 2 (1921), p. 89. Vgl. hierzu *L. W. Cohen*, Fund. math. 14 (1929), p. 281—303; *W. Sierpiński*, ib. p. 345—349.

253) Auf Grund zweier Sätze von *Sierpiński*, der auf die 0-dimensionalen Mengen vor Entwicklung der Dimensionstheorie aufmerksam geworden war, Fund. math. 2 (1921), p. 81—95 und *Fréchet*, Math. Ann. 68 (1910), p. 154. Vgl. noch *W. Sierpiński*, Fund. math. 1 (1920), p. 16; *M. Fréchet*, Bull. Acad. Polon. 1920, p. 107.

254) = dyadisches Diskontinuum im Sinne von *Hausdorff*, Mengenlehre 1927, p. 134.

genden Kontinuums liegt auf einem einfachen Bogen, d. i. dem topologischen Bild einer abgeschlossenen Strecke.[255])[255a])

Eine vierte Charakterisierung der n-dimensionalen Mengen besteht in der Möglichkeit gewisser Überdeckungen derselben. Wir verstehen unter einer (ε, n)-*Überdeckung*[256]) einer Menge $\mathfrak{M}$ eines metrischen Raumes $\mathfrak{R}$ eine Menge von Mengen, deren Durchmesser kleiner als ε sind $(\varepsilon > 0)$, so daß jeder Punkt von $\mathfrak{M}$ innerer Punkt mindestens einer derselben ist und der Durchschnitt von $(n+1)$ dieser Mengen leer ist.

Jede nicht mehr als n-dimensionale Menge $\mathfrak{M}$ (eines separabeln metrischen Raumes) hat für jedes $\varepsilon > 0$ eine $(\varepsilon, n+1)$-Überdeckung. Das ist für $n = 0$ einfach zu zeigen und folgt für $n > 0$ unmittelbar daraus, daß $\mathfrak{M}$ Summe von $(n+1)$ nulldimensionalen Mengen ist. Jeder nicht mehr als n-dimensionale separable metrische Raum ist sogar für jedes $\varepsilon > 0$ Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen Hüllen offener Mengen, von denen jede einen Durchmesser $< \varepsilon$ hat und von denen je k $(1 \leqq k \leqq n+1)$ einen Durchschnitt haben, dessen Dimension $\leqq n + 1 - k$ ist.[257])

Ist $\mathfrak{M}$ total beschränkt[258]), bzw. außerdem im Kleinen zusammenhängend, so können, wenigstens für $k = n + 1$[259]), alle diese Teile in endlicher Anzahl, bzw. außerdem zusammenhängend angenommen werden.

Daß diese „Überdeckbarkeiten" für die n-dimensionalen Mengen, die n-dimensionalen totalbeschränkten, die n-dimensionalen totalbeschränkten im Kleinen zusammenhängenden Mengen auch charakte-

---

255) *F. Riesz,* Paris C. R. 141 (1905), p. 650—653; *Schoenflies,* Ber. II (1908), p. 257 (Satz XVII); *L. Antoine*[5]), p. 82 ff.

255a) Über nulldimensionale Mengen in euklidischen Räumen s. *R. L. Wilder,* Trans. Am. Math. Soc. 31 (1929), p. 345—359.

256) Bei *Tumarkin,* l. c.[109]), findet sich der Ausdruck (ε, n)-Überdeckung von $\mathfrak{M}$ in etwas umfassenderer Bedeutung, indem dort nicht verlangt wird, daß jeder Punkt von $\mathfrak{M}$ *innerer* Punkt einer der überdeckenden Mengen ist.

257) Für kompakte abgeschlossene Mengen: Für $k = n + 1$ bei *P. Urysohn,* Paris C. R. 175 (1922[2]), p. 441; Fund. math. 8 (1926), p. 292—301; *K. Menger,* Monatsh. Math. Phys. 33 (1923), p. 153; für separable metrische Räume und $k = 2$: *W. Hurewicz,* Math. Ann. 96 (1927), p. 763; für separable metrische Räume und beliebiges k: *K. Menger,* Math. Ann. 98 (1927), p. 81.

258) Eine Menge heißt *total beschränkt,* wenn sie für jedes $\varepsilon > 0$ Vereinigung endlich vieler Teilmengen mit Durchmessern $< \varepsilon$ ist (*Hausdorff,* Grundz., p. 311).

259) *Urysohn,* Fund. math. 8 (1926), p. 301. Siehe ferner *P. Urysohn,* Math. Ann. 98 (1928), p. 296—308.

ristisch[259a]) sind (vierte Charakterisierung), steht zur Zeit (außer für $k = 2$) nur für die kompakten abgeschlossenen Mengen fest.[259a])

Da für $m > n$ das abgeschlossene Intervall[260]) des m-dimensionalen *Cartes*ischen Raumes $\mathfrak{R}^m$ nach *Lebesgue*[261]) die Eigenschaft, für jedes $\varepsilon > 0$ eine $(\varepsilon, n + 1)$-Überdeckung zuzulassen, *nicht* hat, ist für $m > n$ $\dim \mathfrak{R}^m > n$, somit $\dim \mathfrak{R}^{n+1} \geqq n + 1$. Umgekehrt folgt aus der Existenz beliebig kleiner würfelförmiger Umgebungen leicht $\dim \mathfrak{R}^{n+1} \leqq n + 1$; also ist[262]) $\dim \mathfrak{R}^n = n$, wie es für einen vernünftigen Dimensionsbegriff sein muß. Jede Menge des $\mathfrak{R}^n$, welche einen inneren Punkt enthält, ist daher n-dimensional. Aber auch umgekehrt[263]): Jede Menge des $\mathfrak{R}^n$ ohne inneren Punkt hat eine Dimension $< n$. Daher hat im $\mathfrak{R}^n$ jede Begrenzung eine Dimension $\leqq n - 1$. Da nach *Lebesgue*[264]) die Begrenzung einer beschränkten offenen Menge des $\mathfrak{R}^n$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ nur für $n' \geqq n$ (ε, n')-Überdeckungen hat, ist eine solche Begrenzung genau $(n - 1)$-dimensional. Daher ist auch das Komplement jeder nicht mehr als $(n - 2)$-dimensionalen Menge zum $\mathfrak{R}^n$, ebenso zu jedem Gebiet des $\mathfrak{R}^n$, zusammenhängend.[265])

259a) Eine für allgemeine separable Mengen gültige Charakterisierung der Dimension durch andere Überdeckbarkeitseigenschaften haben neuerdings *W. Hurewicz,* Proc. Amsterdam 30 (1927), p. 425, 429 und *K. Menger,* Dim. p. 155 ff. angegeben.

260) Intervall des $\mathfrak{R}^n$ = Menge aller Punkte $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, für welche $\xi_i' \leqq \xi_i \leqq \xi_i''$ ist.

261) Dieser Satz wurde von *H. Lebesgue,* Math. Ann. 70 (1911), p. 166—168 ausgesprochen. Den ersten richtigen Beweis gab *L. E. J. Brouwer,* J. f. Math. 142 (1913), p. 146—152. Vgl. ferner *H. Lebesgue,* Fund. math. 2 (1921), p. 256—285, 6 (1924), p. 96—99 und [262]).

262) Der älteste Beweis ist der von *Brouwer.* Er arbeitet mit der Dimension im Großen, J. f. Math. 142 (1913), p. 146—152, Math. Ztschr. 21 (1924), p. 313. Vgl. auch Proc. Amsterdam 27 (1924), p. 635—638 und die intuitionistische Einführung des Dimensionsbegriffs in Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 855—863. Der oben angedeutete Gedankengang bei *Urysohn,* Paris C. R. 175 (1922[2]), p. 440; Fund. math. 8 (1926), p. 307; *Menger,* Monatsh. Math. Phys. 34 (1924), p. 153; eine Zurückführung des Satzes auf zwei andere allerdings noch zu beweisende Annahmen bei *Menger,* Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 648—649. Einen sehr einfachen Beweis gab *E. Sperner*[159]), fast gleichzeitig *W. Hurewicz,* Math. Ann. 101 (1929), p. 210—218. Vgl. dazu noch *B. Knaster-C. Kuratowski-S. Mazurkiewicz*[159]).

263) *Urysohn,* Paris C. R. 175 (1922[2]), p. 440—442; Fund. math. 8 (1926), p. 309; *Menger,* Monatsh. Math. Phys. 34 (1924), p. 157.

264) *H. Lebesgue,* Fund math. 2 (1921), p. 274.

265) *Urysohn* versteht (Fund. math. 7 (1925), p. 124) unter einer „multiplicité *Cantor*ienne de dimension n" ein kompaktes Kontinuum, welches nach Weglassen irgendeiner abgeschlossenen, nicht mehr als $(n - 2)$-dimensionalen Menge immer noch zusammenhängend ist, allgemeiner unter einer „multiplicité

Eine fünfte Charakterisierung der n-dimensionalen kompakten metrischen Räume ist die folgende: Ein kompakter metrischer Raum ist dann und nur dann n-dimensional, wenn er eindeutig-stetiges Bild einer nulldimensionalen Menge derart ist, daß jeder seiner Punkte höchstens $(n+1)$ Urbilder hat, wenn er aber nicht eindeutig-stetiges Bild einer nulldimensionalen Menge derart sein kann, daß jeder seiner Punkte höchstens n Urbilder hat.[266])

Für jedes ganzzahlige $k \geqq 0$ ist die Menge aller Punkte, in denen ein separabler metrischer Raum $\mathfrak{R}$ nicht mehr als k-dimensional ist, nach *Menger*[266a]) ein G_δ[80]), die Menge $N_k(\mathfrak{R})$ aller Punkte von $\mathfrak{R}$, in denen $\mathfrak{R}$ mindestens k-dimensional ist, also ein $\mathfrak{F}_\sigma$, die Menge aller Punkte von $\mathfrak{R}$, in denen $\mathfrak{R}$ k-dimensional, mithin eine Differenz zweier G_δ oder, was dasselbe ist, zweier F_σ. Ist $\mathfrak{R}$ n-dimensional, so heißt $\overline{N_n(\mathfrak{R})}$ (die abgeschlossene Hülle von $N_n(\mathfrak{R})$) der Dimensionskern von $\mathfrak{R}$. Alle $\overline{N_k(\mathfrak{R})}$ für $k \leqq n$ haben in jedem Punkte von $N_k(\mathfrak{R})$ dieselbe Dimension, wie $\mathfrak{R}$ selbst. Die Punkte k^{ter} Dimension von $N_k(\mathfrak{R})$ liegen daher für $k > 0$ in $N_k(\mathfrak{R})$ dicht. $N_n(\mathfrak{R})$ ist mithin homogen n-dimensional.[267]) Die $N_k(\mathfrak{R})$ sind in sich dicht.[268]) Ferner ist $\dim N_k(\mathfrak{R}) \geqq k - 1$.[268a]) Ist $\mathfrak{R}$ *halbkompakt*[269]), so hat $N_k(\mathfrak{R})$ für $k > 0$ in

---

*Cantor*ienne generalisée de dimension n" ein beliebiges homogen n-dimensionales kompaktes Kontinuum, d. h. ein solches n-dimensionales kompaktes Kontinuum, in dem die Punkte n^{ter} Dimension dicht liegen. Vgl. auch *P. Alexandroff,* Paris C. R. 183 (1926), p. 722—724; *K. Menger,* Proc. Amsterdam 30 (1927), p. 705—709; *Hurewicz-Menger,* Math. Ann. 100 (1928), p. 618—633.

266) *W. Hurewicz,* Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 1014—1017. *Hurewicz* verallgemeinert diese Charakterisierung auf beliebige separable metrische Räume mit Hilfe einer hierzu eigens definierten Stetigkeit mehrdeutiger Abbildungen.

266a) *K. Menger,* l. c. [267]), p. 141, 142.

267) *K. Menger,* Monatsh. Math. Phys. 34 (1924), p. 144; *P. Urysohn,* Fund. math. 8 (1926), p. 269 ff. Über „homogen n-dimensional" siehe [265]).

268) *P. Urysohn* spricht diese Sätze nur für „Mengen F", d. h. für kompakte abgeschlossene Mengen aus. Da aber sein Fundamentallemma (vgl. [240])) „aus $\dim(\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2) < n$ und $\dim_X \mathfrak{F}_2 < n$ (wobei $\mathfrak{F}_2 \subseteqq \mathfrak{F}_1$) folgt $\dim_X \mathfrak{F}_1 < n$" schon gilt, wenn $\mathfrak{F}_1$ ein separabler metrischer Raum ist und $\mathfrak{F}_2$ in $\mathfrak{F}_1$ abgeschlossen ist, gelten auch seine Folgerungen in weiterem Umfang. Vgl. *Hurewicz*, Math. Ann. 96 (1927), p. 762; *Tumarkin,* Proc. Amsterdam 28 (1925), p. 995, Paris C. R. 186 (1928¹), p. 420. Für die N_k anstatt der $\overline{N}_k$ gelten ähnliche Sätze nicht: *Urysohn,* Fund. math. 8 (1926), p. 282.

268a) *K. Menger,* Proc. Amsterdam 30 (1927), p. 141.

269) Die Definition von halbkompakt siehe *K. Menger,* Wiener Ber. 133 (1924), p. 432. Für *beliebige* $\mathfrak{R}$ gilt der Satz nicht, wie *P. Urysohn* (Fund. math. 8 (1926), p. 276) an einem Beispiel von *W. Sierpiński* (Fund. math. 2 (1921), p. 82—83) zeigt. Eine nähere Untersuchung dieses Falles gibt *Menger,* l. c., p. 442.

jedem seiner Punkte eine Dimension $\geqq k$.[270]) Ist $\mathfrak{R}$ kompakt, so ist jeder Punkt von $N_k(\mathfrak{R})$ für $k > 0$ in einem Teilkontinuum von $N_k(\mathfrak{R})$ enthalten.[270a]) Jeder n-dimensionale kompakte Raum hat mindestens eine n-dimensionale Komponente.[109])[110])

Wie schon erwähnt[271]) ist jede separable nulldimensionale Menge homöomorph mit einem Teil des eindimensionalen Zahlenraumes $\mathfrak{R}^1$, ja sogar mit einem Teil der *Cantor*schen Dreiteilungsmenge.[254]) *Menger*[272]) hat auch bewiesen: Jeder kompakte eindimensionale metrische Raum $\mathfrak{M}$ ist homöomorph mit einer Menge des dreidimensionalen Zahlenraumes $\mathfrak{R}^3$, ja sogar mit einer Teilmenge eines festen (für alle $\mathfrak{M}$ gemeinsamen) kompakten eindimensionalen Kontinuum des $\mathfrak{R}^3$, d. h. mit einer Teilmenge einer festen kompakten Kurve[273]) des $\mathfrak{R}^3$ (Universalkurve). Ferner ist nach *Menger*[273a]) jeder n-dimensionale kompakte Raum homöomorph mit einer Teilmenge des $\mathfrak{R}^{2n+1}$. Nach *Sierpiński*[274]) gibt es eine kompakte ebene Kurve (kompaktes ebenes eindimensionales Kontinuum), welche zu jeder kompakten ebenen Kurve ein topologisches Bild enthält. Nach *Menger*[275]) gibt es im $\mathfrak{R}^n$ ein $(n - 1)$-dimensionales kompaktes im Kleinen zusammenhängendes Kontinuum, welches zu jeder nicht mehr als $(n - 1)$-dimensionalen Menge des $\mathfrak{R}^n$ ein topologisches Bild enthält. Nach *W. Hurewicz*[275a]) ist jeder n-dimensionale separable Raum mit einer Teilmenge eines n-dimensionalen kompakten Raumes homöomorph. Nach *Alexandroff* und *Tumarkin*[275aα]) ist jede abgeschlossene Menge positiver Dimension einer Teilmenge eines im Kleinen zusammenhängenden Kontinuums derselben Dimension homöomorph.

Auf Grund der in kompakten metrischen Räumen definierten *Betti*schen Zahlen (Nr. **40**) hat *P. Alexandroff*[275aβ]) einen Dimensionsbegriff gegeben und in weitem Ausmaß dessen Äquivalenz mit dem hier besprochenen Dimensionsbegriff festgestellt.

---

270) *K. Menger*, Proceed. Amsterdam 30 (1927), p. 138—144.

270a) *W. Hurewicz*, Math. Ann. 96 (1927), p. 762.

271) Vgl. *W. Sierpiński*, Fund. math. 2 (1921), p. 89.

272) *K. Menger*, Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 476—482 und *Menger*, Dim., p. 287—301.

273) Über den Begriff der Kurve vgl. Nr. **42**.

273a) *Menger*, Dim., p. 301—303.

274) *W. Sierpiński*, Paris C. R. 162, p. 629; eine Verschärfung dieses Satzes bei *Menger*, Fund. math. 10 (1926), p. 106.

275) *K. Menger*, Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 1125—1128.

275a) *W. Hurewicz*, Proc. Amsterdam 30 (1927), p. 425—430.

275aα) *P. Alexandroff-L. Tumarkin*, Fund. math. 11 (1928), p. 141—144.

275aβ) *P. Alexandroff*, Gött. Nachr. 1928, p. 25—44.

42. Kurven.[275b] Unter Kurve verstehen wir eine zusammenhängende, im Sinn von Nr. **41** eindimensionale Punktmenge.[276]

Zufolge dieser Erklärung gibt es um jeden Punkt P jeder Kurve $\mathfrak{K}$ beliebig kleine Relativumgebungen in $\mathfrak{K}$, deren in $\mathfrak{K}$ genommene Relativbegrenzungen nulldimensional sind, hingegen nicht beliebig kleine Relativumgebungen mit leeren Relativbegrenzungen. P heißt von der *Ordnung* α (indice α), wenn α die kleinste Kardinalzahl ist, für welche es beliebig kleine Relativumgebungen von P in $\mathfrak{K}$ gibt, deren Relativbegrenzungen aus höchstens α Punkten bestehen. Ein Punkt heißt *regulär*, wenn es in jeder Umgebung von P Relativumgebungen von P mit endlichen (d. h. aus endlich vielen Punkten bestehenden) Relativbegrenzungen gibt. Die regulären Punkte der Ordnung $\aleph_0$ heißen kurz Punkte *wachsender* Ordnung (Ordnung w).[277] Punkte der Ordnung 1 heißen *Endpunkte*, Punkte der Ordnung 2 *gewöhnliche Punkte*, alle Punkte höherer als zweiter Ordnung *Verzweigungspunkte*. Kurven mit lauter regulären Punkten heißen regulär. Da bei topologischen Abbildungen Umgebungen in Umgebungen und Begrenzungen in Begrenzungen derselben Dimension und Mächtigkeit übergehen, sind die Begriffe „Kurve", „Ordnung", „regulär" topologische Invarianten.

Die Menge $\mathfrak{K}^\alpha$ aller Punkte der Ordnungen $< \alpha$ ist ein G_δ in $\mathfrak{K}$ für jedes α. Auf jeder total vollständigen[278] Kurve $\mathfrak{K}$ liegen die Punkte von höherer als der ersten Ordnung dicht und bilden eine eindimensionale Menge F_σ in $\mathfrak{K}$, während die Menge der Endpunkte höchstens nulldimensional ist.[278a]

Ein in sich kompaktes Kontinuum ist a) eine Kurve, b) eine Kurve ohne Punkte der Ordnung $\mathfrak{c}$, c) eine reguläre Kurve, je nachdem in ihm irgend zwei fremde abgeschlossene Teile a) durch eine dis-

---

275b) Vgl. auch [188]).

276) *K. Menger,* Hinterlegung Nr. 778 (1921) bei der Wien. Ak. d. Wiss.; Monatsh. Math. Phys. 33 (1923), p. 148—160; Math. Ann. 95 (1925), p. 277—306; Proceed. Amsterdam 28 (1925), p. 67—71; *P. Urysohn,* Paris C. R. 175 (1922), p. 481—483; Fund. math. 7 (1925), p. 93.

277) *Menger* und *Urysohn* rechnen durch besondere Festsetzung die Punkte wachsender Ordnung nicht zu den Punkten der Ordnung $\aleph_0$.

278) Nach *Menger* heißt eine in einem metrischen Raum gelegene Menge $\mathfrak{M}$ *total vollständig,* wenn jede beschränkte Teilmenge von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{M}$ kompakt ist.

278a) *W. Sierpiński,* Paris C. R. 160 (1915[1]), p. 302 hat eine ebene Kurve konstruiert, die nur Punkte der Ordnungen 3 und 4 hat. Über die Ordnung von Punkten einer Kurve s. ferner *H. Künneth,* Monatsh. Math. Phys. 36 (1929), p. 149—152; *G. T. Whyburn,* Bull. Am. Math. Soc. 35 (1929), p. 218—224; *C. Zarankiewicz,* Bull. Acad. Pollon. 1928, p. 445—453; *C. Kuratowski-S. Mazurkiewicz,* Fund. math. 11 (1928), p. 29—34.

kontinuierliche (vgl. Nr. **41**, [250])), b) durch eine abzählbare, c) durch eine endliche Menge getrennt werden, oder je nachdem es für jedes $\varepsilon > 0$ mit endlich vielen Umgebungen $< \varepsilon$ überdeckbar ist, deren Begrenzungen a) diskontinuierlich, b) abzählbar, c) endlich sind; oder je nachdem es für jedes $\varepsilon > 0$ Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Umgebungen ist, die zu je zweien a) diskontinuierliche, b) abzählbare, c) endliche Durchschnitte haben. Ein kompaktes Kontinuum ist dann und nur dann eine im Kleinen zusammenhängende Kurve, d. h. ein eindimensionales stetiges Bild der Strecke $[0\,1]$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ Vereinigung von endlich vielen Kontinuen $< \varepsilon$ ist, die zu je zweien einen diskontinuierlichen Durchschnitt haben.[279])

Ein in sich kompaktes Kontinuum ist dann und nur dann eine reguläre Kurve, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ Vereinigung endlich vieler Kontinuen $< \varepsilon$ ist, die zu je zweien höchstens endliche Durchschnitte haben. Daher ist jede in sich kompakte Kurve, die regulär ist, stets im Kleinen zusammenhängend; aber nicht umgekehrt.[280]) Ist ferner P ein Punkt n^{ter} Ordnung der regulären in sich kompakten Kurve $\mathfrak{K}$, so enthält $\mathfrak{K}$ n einfache Bögen, welche in P enden und sonst fremd sind.[281])[281a])

Eine in sich kompakte Kurve ist dann und nur dann eine topologische Strecke bzw. ein topologischer Kreis, wenn sie außer zwei Punkten erster Ordnung lauter Punkte zweiter Ordnung bzw. wenn sie lauter Punkte zweiter Ordnung besitzt.[281b])

Ein kompakter metrischer Raum ist dann und nur dann topologisches Bild einer Kreislinie, wenn er für jedes $\varepsilon > 0$ Vereinigung endlich vieler Kontinua eines Durchmessers $< \varepsilon$ ist, von denen jedes mit genau zwei anderen unter ihnen gemeinsame Punkte hat.[282])

Auch das Verhältnis der älteren Kurvenbegriffe zum neuen ist geklärt. Nach *Painlevé* und *Zoretti*[283]) verstand man unter einer *ebenen* Kurve ein ebenes Kontinuum ohne inneren Punkt. Diese „ebenen Kurven" haben, da im $\mathfrak{R}^n$ jede Menge ohne inneren Punkt eine Dimension $< n$ hat, eine Dimension < 2, und da sie Kontinua sind, eine

279) *Menger,* Math. Ann. 95, p. 296.

280) *Menger,* l. c. [279]), p. 300—301.

281) *K. Menger,* Fund. math. 10 (1926), p. 96—115.

281a) Über reguläre Kurven s. noch *G. T. Whyburn,* Fund. math. 12 (1928), p. 264—294; *J. H. Roberts,* Fund. math. 14 (1929), p. 327—333.

281b) *P. Urysohn,* Paris C. R. 175 (1922), p. 481; *K. Menger,* l. c. [279]), p. 303; *P. Alexandroff* [282]), p. 552. Vgl. ferner *Felix Frankl,* Fund. math. 11 (1928), p. 96—104.

282) *P. Alexandroff,* Math. Ann. 96 (1926), p. 552.

283) Vgl. II C 9a, p. 907.

Dimension > 0, sind also die eindimensionalen ebenen Kontinua, d. i. die ebenen Kurven im neuen Sinn.[284])

Schoenflies[285]) verstand unter einer *geschlossenen* ebenen Kurve eine beschränkte Punktmenge $\mathfrak{K}$, welche in der Ebene $\mathfrak{E}$ genau zwei Gebiete bestimmt (als Komponenten von $\mathfrak{E} - \mathfrak{K}$), deren jedes $\mathfrak{K}$ zur Begrenzung hat. *Brouwer* zeigte, daß es auch ebene beschränkte Kontinua $\mathfrak{K}$ gibt, welche gemeinsame Begrenzung aller von ihnen in der Ebene bestimmten Gebiete sind, deren Anzahl beliebig hoch endlich und abzählbar unendlich sein kann, ferner, daß diese Anzahl m gleich der Vielfachheit der Basis der Zyklosis von $\mathfrak{K}$ ist.[286]) Da diese für in sich kompakte Mengen eine topologische Invariante ist, war damit gezeigt, daß jedes mit $\mathfrak{K}$ homöomorphe ebene Kontinuum $\mathfrak{K}'$ in seiner Ebene genau soviele Gebiete bestimmt wie $\mathfrak{K}$. Für $m = 2$ bedeutet das die „Invarianz der *Schoenflies*schen geschlossenen Kurve".[287]) *Alexandroff*[288]) zeigte, daß jedes echte Teilkontinuum einer solchen *Brouwer*schen Begrenzung mehrerer von ihr bestimmten Gebiete einer Ebene eine einfache Basis der Zyklosis[286]) hat. Er erhält deshalb eine auch die genannten *Brouwer*schen Gebietsgrenzen enthaltende Verallgemeinerung der *Schoenflies*schen geschlossenen Kurve, indem er eine Kurve *geschlossen* nennt, wenn alle ihre echten Teilkontinua eine einfache Basis der Zyklosis haben. Er nennt sie regelmäßig oder unregelmäßig geschlossen, je nachdem sie eine zwei- oder mehrfache Basis der Zyklosis haben, und beweist unter anderem: Jede unregelmäßig geschlossene Kurve ist entweder ein unzerlegbares Kontinuum oder Vereinigung zweier unzerlegbarer Kontinuen, ein Satz, der eine direkte Verallgemeinerung des analogen von *C. Kuratowski*[289]) für ebene Kontinuen bewiesenen Satzes ist. Bei im Kleinen zusammenhängenden Kurven[290]) können solche merkwürdige Erscheinungen nicht auftreten. Unter ihnen sind die von endlich vielfacher Basis der

---

284) *P. Urysohn*, Paris C. R. 175 (1922²), p. 441; Fund. math. 7 (1925), p. 93; *K. Menger*, Monatsh. Math. Phys. 33 (1923), p. 159. *Urysohn*s „multiplicité *Cantor*ienne" (vgl. [265])) ist eine Verallgemeinerung.

285) *A. Schoenflies*, Math. Ann. 59 (1904), p. 147; vgl. II C 9 a, p. 919 f.

286) Vgl. Nr. 40.

287) *L. E. J. Brouwer*, Math. Ann. 72 (1912), p. 422—425.

288) *P. Alexandroff*, Math. Ann. 96 (1926), p. 534.

289) *C. Kuratowski*, Fund. math. 6 (1924), p. 136—139. S. ferner *C. Kuratowski*, Math. Ann. 98 (1928), p. 399—405.

290) Die „stetigen Kurven (Bahnkurven)" im Sinne *Jordans* (II C 9 a, p. 908), das sind die „im Kleinen zusammenhängenden Kontinua", sind natürlich nicht immer Kurven im obigen Sinne, weshalb sich für sie die Bezeichnung „stetige Kurve" nicht empfiehlt. Über die Bezeichnung *„Jordankurve"* siehe [179]).

Zyklosis ausgezeichnet.[291]) Diese sind regulär und überdies im Kleinen homöomorph[291]) mit den im Kleinen zusammenhängenden kompakten Kurven von einfacher Basis der Zyklosis, den *Bäumen*.[292]) Jeder Baum ist regulär[293]) und homöomorph mit einem ebenen Baum.[294]) Es gibt ebene Bäume, die zu jedem Baum ein topologisches Bild enthalten.[295])

---

291) Eingehend untersucht von *P. Alexandroff*, Math. Ann. 96 (1926), p. 541—554.

292) Der Begriff des Baumes als Punktmenge zuerst bei *S. Mazurkiewicz*, Fund. math. 2 (1921), p. 119—130. [Bezüglich des viel älteren Begriffes „Baum" unter den Graphen vgl. III AB 3, p. 174 und Anm. 47.] Vgl. ferner *T. Ważewski*, Ann. de la Soc. Polon. de Math. 2 (1923), p. 49—170; *J. R. Kline*, Fund. math. 5 (1924), p. 3—10; *C. Zarankiewicz*, ib. p. 11—13, Fund. math. 9 (1927), p. 124—171, 13 (1929), p. 264—268; *C. Kuratowski*, Fund. math. 5 (1924), p. 112—122; *St. Mazurkiewicz*, ib. p. 137—146; *W. Scherrer*, Math. Ztschr. 24 (1925), p. 125.

293) *K. Menger*, Math. Ann. 96 (1926), p. 573.

294) *K. Menger*, Math. Ann. 96 (1926), p. 579—582.

295) *K. Menger*, Fund. Math. 10 (1926), p. 108.

(Abgeschlossen 15. Oktober 1929.)

Register zu Band III, 1. Teil.

Von A. Boy in Treuburg.

Die Stichworte des Registers sind durch gesperrten Druck hervorgehoben; die Wiederholung des Stichworts ist durch einen Strich angedeutet. Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten des Bandes. Unter dem einzelnen Stichworte sind die Nachweise im allgemeinen nach steigender Seitenzahl geordnet; dabei ist zu beachten, daß die Seiten mit schrägstehenden Zahlen (*1—237*) hinter den Seiten mit aufrechtstehender Zahl (1—1595) angeordnet sind.

B

F

H

J

K

L

N

O

S

T

U

Z

Erschienene Bände bzw. Hefte:

Band I. **Arithmetik und Algebra**, in 2 Teilen. Vollständig erschienen.
- II. **Analysis**, in 3 Teilen. Teil I in zwei Hälften, Teil II und Teil III in zwei Hälften vollständig erschienen.
- III. **Geometrie**, in 3 Teilen. Teil I in zwei Hälften vollständig erschienen, Teil II, 1. Hälfte vollständig erschienen, 2. Hälfte in 6 Heften, davon 4 erschienen. Teil III vollständig erschienen.
- IV. **Mechanik**, in 4 Teilbänden und 1 Registerband. Teilband I, III und IV vollständig erschienen. II. Teilband in 4 Heften, davon 3 erschienen. Registerband in 1 Heft (in Vorbereitung).
- V. **Physik**, in 3 Teilen. Vollständig erschienen.
- VI, 1. **Geodäsie und Geophysik**, in 1 Teilband. I. und II. Hälfte vollständig erschienen.
- VI, 2. **Astronomie**, 1. Hälfte vollständig erschienen, 2. Hälfte in 5 Heften, davon 3 erschienen.

Unter der Presse:

Band III. Teil 2. Spezielle algebraische Flächen. II. Teil: Flächen vierter und höherer Ordnung. Von **W. Fr. Meyer** in Königsberg i. Pr.
- VI. - 2. Astronomische Kolorimetrie. Von **I. Hopmann** in Bonn. — Photometrie und ihre Anwendungen. Von **P. Guthnick** in Berlin-Neubabelsberg.

Band III: Geometrie, in 3 Teilen.
Redigiert von W. Fr. Meyer in Königsberg und H. Mohrmann in Darmstadt.

* erschienen, † unter der Presse.

I. Teil.

*Vorwort zu Band III von **W. Fr. Meyer** in Königsberg.

A. Rein geometrische Theorien.

B. Grundlagen der Anwendung von Algebra und Analysis auf die Geometrie.

1. Hälfte.

*Inhaltsverzeichnis von Band III, Teil 1, 1. Hälfte.

*1. Prinzipien der Geometrie: **F. Enriques** in Bologna.
*2. Die Begriffe „Linie" und „Fläche": **H. v. Mangoldt** (†).
*3. Analysis situs: **M. Dehn** in Frankfurt a. M. und **P. Heegaard** in Oslo.
*4a. Beziehung und Gegensatz von synthetischer und analytischer Geometrie in seiner historischen Entwicklung im XIX. Jahrhundert: **G. Fano** in Turin.
*4b. Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip: **G. Fano** in Turin.
*5. Projektive Geometrie: **A. Schoenflies** (†).
*5a. Konfigurationen der projektiven Geometrie: **E. Steinitz** (†).
*6. Darstellende Geometrie: **E. Papperitz** i. Freiberg i. S.
*7. Die verschiedenen Koordinatensysteme: **E. Müller** (†).

2. Hälfte.

Inhaltsverzeichnis von Band III, Teil 1, 2. Hälfte

*8. Elementare Geometrie vom Standpunkte der neueren Analysis aus: **J. Sommer** in Danzig.
*9. Elementargeometrie u. elementare nichteuklidische Geometrie in synthetischer Behandlung: **M. Zacharias** in Berlin.
*10. Neuere Dreiecksgeometrie: **G. Berkhan** (†) und **W. Fr. Meyer** in Königsberg i. Pr.
*11a. Systeme geometrischer Analyse I: ***H. Rothe** (†).
b. Systeme geometr. Analyse II: ***A. Lotze** in Stuttgart.
*12. Polyeder u. Raumeinteilungen: **E. Steinitz** (†).
*13. Beziehungen zwischen den verschiedenen Zweigen der Topologie: **H. Tietze** in München und **L. Vietoris** in Wien.
*Register zu Band III, A B.

II. Teil.

C. Algebraische Geometrie.

1. Hälfte.

*Inhaltsverzeichnis von Band III, Teil 2, 1. Hälfte.

*1. Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme: **F. Dingeldey** in Darmstadt.
*2. Flächen II. Ordnung und ihre Systeme und Durchdringungskurven: **O. Staude** (†).
*3. Abzählende Methoden: **H. G. Zeuthen** (†).
*4. Allgemeine Theorie d. höheren ebenen algebraischen Kurven: **L. Berzolari** in Pavia.
*5a. u. *5b. Spezielle ebene algebr. Kurven: ***G. Kohn** (†) und ***G. Loria** in Genua.
*6a. Grundeigenschaften der algebraischen Flächen: **G. Castelnuovo** in Rom und **F. Enriques** in Rom.
*6b. Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus: **G. Castelnuovo** in Rom und **F. Enriques** in Rom.

2. Hälfte.

Inhaltsverzeichnis von Band III, Teil 2, 2. Hälfte.

*7. Mehrdimensionale Räume: **C. Segre** (†).
*8. Algebr. Liniengeometrie: **K. Zindler** in Innsbruck.
*9. Algebraische Raumkurven u. abwickelbare Flächen: **K. Rohn** (†) und **L. Berzolari** in Pavia.
*10a. Spezielle algebraische Flächen: Flächen dritter Ordnung. **W. Fr. Meyer** in Königsberg i. Pr.
†10b. Spezielle algebraische Flächen: Flächen vierter und höherer Ordnung. **W. Fr. Meyer** in Königsberg i. P.
11. Algebraische Transformationen u. Korrespondenzen: **L. Berzolari** in Pavia.

Register zu Band III, C.

III. Teil.

*Inhaltsverzeichnis von Band III, Teil 3.

D. Differentialgeometrie.

*1. 2. Anwendung d. Differential- u. Integralrechnung auf Kurven, Flächen u. d. Raum: **H. v. Mangoldt** (†).
*3. Kurven a. d. Flächen: **R. v. Lilienthal** in Münster i. W.
*4. Besondere transcendente Kurven: **G. Scheffers** in Charlottenburg.
*5. Besondere transcendente Flächen: **R. v. Lilienthal** in Münster i. W.
*6. Abwickelung und Abbildung zweier Flächen aufeinander: **A. Voss** in München.
*7. Berührungstransformat.: **H. Liebmann** in Heidelberg.
*8. Geometrische Theorie der Differentialgleichungen: **H. Liebmann** in Heidelberg.
*9. Dreif. orthogon. Systeme: **E. Salkowski** in Charlottenburg.
*10. Neuere Arbeiten der algebraischen Invariantentheorie. Differentialinvarianten: **R. Weitzenböck** in Amsterdam.
*11. Differentialinvarianten in d. Geometrie. Riemannsche Mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen: **L. Berwald** in Prag.

*Register zu Band III, D.

Bisher erschien:

Teil I Heft 1	(A, B 1—3).	[220 S.]	1907.	RM	8.—
— I — 2	(A, B 4 a u. 4 b).	[168 S.]	1907.	RM	6.40
— I — 3	(A, B 5).	[92 S.]	1909.	RM	2.60
— I — 4	(A, B 5 a, 6, 7).	[290 S.]	1910.	RM	11.—
— I — 5	(A, B 8, 9 I).	[191 S.]	1914.	RM	7.20
— I — 6	(A, B 9 II).	[210 S.]	1919.	RM	8.—
— I — 7	(A, B 10, 11 I).	[252 S.]	1921.	RM	9.40
— I — 8	(A, B 11).	[172 S.]	1924.	RM	6.40
— I — 9	(A, B 12).	[139 S.]	1922.	RM	5.—
— I — 10	(A, B 13)	[124 S.]	1930.		
— II — 1	(C 1).	[160 S.]	1903.	RM	6.—
— II — 2	(C 2).	[96 S.]	1904.	RM	3.60
— II — 3	(C 3, 4).	[199 S.]	1906.	RM	7.40
Teil II Heft 4	(C 5 a)	[114 S.]	1909.	RM	4.40
— II — 5	(C 5 b).	[64 S.]	1915.	RM	2.40
— II — 6	(C 6 a u. b).	[133 S.]	1915.	RM	5.—
— II — 7	(C 7).	[204 S.]	1918.	RM	7.60
— II — 8	(C 8).	[256 S.]	1922.	RM	11.—
— II — 9	(C 9).	[208 S.]	1927.	RM	7.80
— II — 10	(C 10).	[93 S.]	1928.	RM	3.60
— III — 1	(D 1—3).	[183 S.]	1903.	RM	8.60
— III — 2/3	(D 4—6 a).	[254 S.]	1903.	RM	9.60
— III — 4	(D 7—8).	[98 S.]	1915.	RM	3.80
— III — 5	(D 9).	[66 S.]	1920.	RM	2.40
— III — 6	(D 10).	[72 S.]	1922.	RM	4.60
— III — 7	(D 11).	[134 S.]	1927.	RM	5.60

Soeben erschien
mit Unterstützung der Kongelige Frederiks Uni

Sophus Lie / Theorie der Trans

Mit Zusätzen und Berichtigungen von Pr

I. Band. Geh. RM 26.—. II. Band. Geh. RM 23.—.

Das Werk gibt eine ausführliche und systematische Darstellung von Lies langjährigen Untersuchungen über die endlichen kontinuierlichen Gruppen. Es ist auch heute noch die vollständigste Einführung in die Liesche Theorie. Geradezu unentbehrlich ist es für alle, welche die „Gesammelten Abhandlungen" von Lie lesen. Es ist daher sehr erfreulich, daß die Unterstützung der Norwegischen Universität Oslo einen Neudruck des Werkes ermöglicht hat. Dieser gibt den ersten Druck vollständig unverändert wieder.

Bericht über neuere Untersuchungen u. Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper

Von Prof. Dr. H. Hasse

Teil I: Klassenkörpertheorie. Teil Ia: Beweise zu Teil I. Zus. geh. RM 7.40. (Sonderdruck aus Bd. 35 u. 36 d. Jahresber. d. Dtsch. Math.-Vereinigung.) Teil II: Reziprozitätsgesetz. (Die ausführl. Beweise enthaltend.) Geh. RM 11.80. (Ergänzungsband 6 zum Jahresber. d. Dtsch. Math.-Vereinigung.)

In der Theorie der algebraischen Zahlkörper hat sich das Interesse, nachdem die allgemeine Grundlegung in den letzten Jahrzehnten des vergangenen Jahrhunderts durchgeführt war, vornehmlich der besonderen Klasse der relativ-Abelschen Zahlkörper zugewendet, die von sehr einfach auszusprechenden, aber außerordentlich tief liegenden Gesetzen beherrscht werden. Durch die Arbeiten von Hilbert, Furtwängler, Takagi und Artin, zu denen dann auch der Verfasser einiges beisteuern konnte, ist diese Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper zu einem gewissen Abschluß gekommen. Es erschien daher gerechtfertigt, mit dem vorliegenden Bericht einen zusammenhängenden Abriß dieser eleganten, in ihrer Eigenart reizvollen Theorie zu geben.

Lehrbuch der Differentialgeometrie

Von Privatdoz. Dr. A. Duschek und Privatdoz. Dr. W. Mayer

I. Band: Kurven und Flächen im euklidischen Raum. Von A. Duschek. Mit 14 Fig. i. T. Geb. RM 17.—. II. Band: Riemannsche Geometrie. Von W. Mayer. Mit 7 Fig. i. T. Geb. RM 17.—

Aus den Urteilen:

„Ich bin mit dem Wege und den Methoden des Buches vollkommen einverstanden und halte es für ein sehr instruktives Buch, das eine große Verbreitung verdient. Ich habe es daher auch bei Beginn meiner Vorlesungen über Differentialgeometrie meinen Zuhörern aufs beste empfohlen." (Prof. Dr. O. Volk, Würzburg.)

„Ich werde das originelle, vortreffliche Werk meinen Schülern angelegentlichst empfehlen." (Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. G. Rost, Würzburg.)

„Die sehr schöne, moderne, wissenschaftliche und klare Darstellung wird dem Werke sicher viel Freunde verschaffen, und auch ich werde es gerne den Studierenden empfehlen." (Prof. Dr. A. Loewy, Freiburg i. Br.)

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Durch das Erscheinen des vorliegenden Heftes III, 1, 10 wird der Teilband III, 1, 2. Hälfte komplett. Einbanddecken in Halbleder dafür sind zum Preise von $\mathcal{RM}$ 5.– erhältlich. Ich bitte zu bestellen.

B. G. Teubner.