

Zur Analyse und Optimierung von Faserverbund-Leichtbauteilen

vom Fachbereich Maschinenbau
der Universität-Gesamthochschule Kassel
genehmigte Dissertation
zur Erlangung des Grades

Doktor-Ingenieur

vorgelegt von:

Dipl.-Ing. Ulrich Knaust
aus Kassel

Fachgutachter:

Prof. Dr.-Ing. A. Puck (Betreuer)
Dr.-Ing. G. Knoll

Für die Nutzung dieser Dissertationen gelten folgende rechtlichen Bestimmungen:

- Die vorliegende Dissertation darf von der Universität Gh Kassel frei im Internet angeboten werden. Eine weitere Verbreitung oder öffentliche Wiedergabe ist nicht gestattet und kann nur mit ausdrücklicher Genehmigung des Autors (Promovierten) geschehen.
- Die Vervielfältigung ist nur im Rahmen des privaten und eigenen wissenschaftlichen Gebrauchs (§ 53 UrhG) erlaubt.
- Die Publikation darf nicht bearbeitet oder in anderer Weise verändert werden.
- Der Autor hat das Recht, sein Werk, auch auszugsweise, anderweitig verfügbar zu machen und zu verbreiten.
- Für den Inhalt des Dokuments ist allein der Autor verantwortlich.

This publication (dissertation) is subject to the following terms of use:

- The University Gh of Kassel is entitled to give open access to this publication. Further publication or public broadcasting needs explicit authorization of the copyright owner (doctor).
- Copying is permitted only for private or the own scientific purposes of the person who performs copying (according to § 53 of the German Copyright Act). The copyright owner grants production of complete single copies of this publication by means of a print on demand service.
- This publication may not be edited or changed otherwise.
- The copyright owner has got the right to publish or broadcast this publication as a whole or parts thereof elsewhere.
- The author is exclusively responsible for the content of this publication.

VORWORT

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachgebiet Faserverbundtechnik / Konstruktionstechnik der Universität - Gesamthochschule Kassel -. Angeregt zum Thema dieser Arbeit wurde ich durch die Mitarbeit in verschiedenen Projekten des Fachgebietes, in denen Leichtbauteile aus Faser-Kunststoff-Verbunden entwickelt werden.

Dem Leiter des Fachgebietes, Herrn Prof. Dr.-Ing. A. Puck gilt besonderer Dank für seine stete Diskussionsbereitschaft während der gesamten Dauer meiner Tätigkeit, insbesondere für seine Unterstützung und für die Gewährung des notwendigen Freiraumes zur Erstellung der Arbeit.

Herrn Dr.-Ing. habil. G. Knoll danke ich für die wissenschaftliche Diskussion und die Übernahme des Korreferates.

Die Mitarbeiter des Fachgebietes Faserverbundtechnik haben mich durch vielfältige Arbeiten unterstützt, die wissenschaftlichen Mitarbeiter haben durch anregende Diskussionen zum Gelingen der Arbeit beigetragen; ihnen allen gebührt mein Dank.

Ebenfalls möchte ich allen Studenten danken, die als wissenschaftliche Hilfskräfte, Studienarbeiter oder als Diplomanden engagiert an der Aufgabenstellungen mitgearbeitet haben.

Gefördert wurde ein Teil dieser Arbeit durch ein Projekt des BMFT; an dieser Stelle möchte ich dafür meinen Dank aussprechen.

Kassel, Oktober 1988

Ulrich Knaust

INHALTSVERZEICHNIS

Verwendete Abkürzungen, Symbole, Indizes	Seite
1. Einleitung	1
1.1 Problemstellung	1
1.2 Literaturübersicht	2
1.3 Aufgabenstellung und Zielsetzung	4
2. Berechnungsgrundlagen für Faser-Kunststoff-Verbunde	6
2.1 Stoffgesetze anisotroper Körper	6
2.2 Transformationsverhalten	11
2.3 Stoffgesetze spezieller Mehrschichtenverbunde	14
2.3.1 Ausgeglichene Winkel-Verbunde (AWV)	14
2.3.2 Kreuz-Verbunde (KV)	19
2.3.3 Spannungsanalyse an AWV/KV	21
2.4 Dickwandige und dünnwandige Strukturen	22
2.5 Bruchverhalten	25
2.5.1 Versagenskriterien anisotroper Körper für räumliche Spannungszustände	27
2.5.2 Bruchkriterien für transversal isotrope Körper	29
2.5.3 Werkstoffanstrengung und Reservefaktor	35
2.6 Grundelastizitätsgrößen und Materialkennwerte	37
2.6.1 Mikromechanische Beziehungen	37
2.6.2 Numerische Untersuchungen zur Mikromechanik von Verbundwerkstoffen	39
2.6.3 Materialkennwerte	47
3. Faserverbundanalyse mittels FEM	49
3.1 Klassische Laminattheorie und FEM	49
3.2 Integration der Schichtenverbundanalyse in den FEM-Berechnungsablauf	54
4. Analyse ausgeführter Faserverbundbauteile	56
4.1 Rotorblätter für Windkraftanlagen	56
4.1.1 Bauweise	57
4.1.2 Gestaltung und Dimensionierung	58
4.1.3 FEM-Anwendung	59

4.2 Blattfedern aus Glasfaser-Kunststoff	63
4.2.1 Schnittkraftermittlung	64
4.2.2 Krafteinleitungselemente	65
4.3 Antriebsgelenkwellen für Pkw	70
4.3.1 Tripode-Krafteinleitung	71
4.3.2 Delaminationen	73
4.3.3 Rotationssymmetrische AGW	75
4.4 Faserverbund-Drehstabfedern	79
4.4.1 Krafteinleitung in GFK-Drehstäbe	79
4.4.2 FEM-Kontaktanalyse	80
4.4.3 Spannungs- und Bruchanalyse	83
4.5 Leichte Innendruckbehälter	85
4.5.1 Bauweise und Gestaltung	85
4.5.2 FEM-Anwendung	87
4.5.3 Bewertung	90
5. Numerische Optimierung	92
5.1 Optimierungsaufgabe	92
5.2 Optimierungsstrategien	93
5.3 Optimierungsalgorithmen	94
6. Optimierung von Faserverbundbauteilen	97
6.1 Laminatoptimierung dünnwandiger Bauteile	97
6.1.1 Elastizitätsgesteuerte Lastbeeinflussung	98
6.1.2 Antriebswellen	99
6.1.3 Gleichmäßige Werkstoffausnutzung schubbelasteter Lamine	101
6.2 Laminatoptimierung dickwandiger Bauteile	102
6.2.1 Drehstabfedern	102
6.2.2 Verbesserte Ausnutzung von Faserverbund-Biegeträgern	105
6.3 Formoptimierung	108
6.3.1 Domschale	108
6.3.1.1 Vergleich verschiedener Schalenformen	108
6.3.1.2 Numerische Optimierung	110
6.3.2 Faserverbundbehälter mit zylindrischem Mittelteil	113
7. Zusammenfassung	118
8. Literatur	121

VERWENDETE ABKÜRZUNGEN, SYMBOLE, INDIZES

Abkürzungen

AFK	Aramid-Faser-Kunststoff (-Verbund)
AGW	Antriebsgelenkwelle
AWV	Ausgeglichener Winkel-Verbund
CFK	Kohlenstoff-Faser-Kunststoff (-Verbund)
CLT	Klassische Laminattheorie
DGL	Differentialgleichung
ESZ	Ebener Spannungszustand
EVZ	Ebener Verzerrungszustand
FAK	Feuchteausdehnungskoeffizient
FB	Faserbruch
FEM	Finite-Elemente-Methode
FKV	Faser-Kunststoff-Verbund
FW	Filament-Winding
GAP	FEM-Kontaktelement
GEVZ	Generalisierter ebener Verzerrungszustand
GFK	Glasfaser-Kunststoff (-Verbund)
ILS	Interlaminare Spannungen
KE	Krafteinleitung
KV	Kreuz-Verbund
Lkw	Lastkraftwagen
MSV	Mehrschichtenverbund
Pkw	Personenkraftwagen
SOP	Skalares Optimierungsproblem
UD	unidirektional faserverstärkt
VOP	Vektoroptimierungsproblem
WAK	Wärmeausdehnungskoeffizient

Symbole

A_u	mm^2	umschlossene Fläche
A		Werkstoffanstrengung
A	mm^2	Fläche
c_w		Widerstandsbeiwert
c_{ij}	N/mm^2	Steifigkeiten
D		Dämpfungsmatrix
E	N/mm^2	Elastizitätsmodul
$F(t)$	N	Inhomogener Teil der Bewegungsgleichung
F_i	mm^2/N	Festigkeitskoeffizienten des Tensorpolynoms
F_{ij}	$(\text{mm}^2/N)^2$	" " "

f		Zielfunktion
G	N/mm ²	Schubmodul
g, h		Restriktionen
I	mm ⁴	Flächenmoment 2. Grades
K		Steifigkeitsmatrix
l	mm	Länge
M		Massenmatrix
ΔM		Feuchtekonzentrationsänderung
m	Nmm/mm	Schnittmomente
n	N/mm	Schnittkräfte
q	N/mm ²	Staudruck
q _{ij}	N/mm ²	auf den ebenen Spannungszustand reduzierte Steifigkeiten
q _w	N/mm	Flächenlast
r	mm	Radius
S	mm ³	Flächenmoment 1. Grades
s _{ij}	N/mm ²	Nachgiebigkeiten
T		Transformationsmatrix
ΔT	K	Temperaturdifferenz
t	mm	Wanddicke
u	mm	Verschlebung
w	m/s	Windgeschwindigkeit
x		Entwurfsvariable
α	°	Faserrichtungswinkel (Schichtwinkel)
α	K ⁻¹	Wärmeausdehnungskoeffizient
β		Feuchteausdehnungskoeffizient
γ		Schubverformung, Schiebung
ε		Dehnung
ϑ	1/mm	Drillung des Rohres
λ		Lastfaktor bei der Kontaktanalyse
μ		Reibbeiwert
ν		Querkontraktionszahl
ρ	kg/m ³	Dichte
σ	N/mm ²	Normalspannung
τ	N/mm ²	Schubspannung
φ		Faservolumenanteil
φ		Verdrehwinkel des Rohres
ω	°	Faserrichtungswinkel des AWV
ω	s ⁻¹	Eigenkreisfrequenz
^		Verbund-....
'		relative

Indizes

Ä	Äquator
B	Bruch
d	Druck (Belastungsrichtung)
F	Faser
FB	Faserbruch
i, j	Indizierung der Koeffizienten
k	Nummer einer beliebigen Schicht
M	Matrix
M, U	Meridian-, Umfangsrichtung
max	Maximalwert
Mb	Matrixbruch
P	Pol
p	polar
r, z, t	in Richtung der jeweiligen Koordinatenachse
UD	unidirektional
x, y, z	Koordinatenrichtungen x, y, z eines kartesischen KOS
ZFB	Zwischenfaserbruch
z	Zug (Belastungsrichtung)
 , ⊥	parallel, senkrecht zur Faserrichtung
1, 2, 3	Koordinatenrichtungen 1, 2, 3 eines kartesischen KOS

1. EINLEITUNG

Im Rahmen technischer Entwicklungen in der Luft- und Raumfahrt, bei Straßen- und Schienenfahrzeugen und auch im allgemeinen Maschinenbau findet der Leichtbau als Konstruktionsprinzip vielseitige, unterschiedlichste Anwendung. Neben dem klassischen Leichtbau gewinnen einzelne Disziplinen als eigenständige Gebiete zunehmend an Bedeutung. Dazu zählt die Bauweisenentwicklung mit Faserverbundwerkstoffen und die Anwendung und Weiterentwicklung numerischer Analyse- und Optimierungsverfahren.

Der Anwendung des Leichtbaus liegt die Absicht zugrunde, die Tragfunktion eines Bauteiles ohne Gewichtszunahme zu verbessern /1.1/. Konstruktionen in Faserverbundbauweise eignen sich dafür aufgrund der hohen gewichtsspezifischen Festigkeit und einer teilweise auch hohen gewichtsspezifischen Steifigkeit in besonderem Maße. Faserverbundkonstruktionen erfordern aber zur Berechnung und Optimierung nicht nur das theoretische und methodische Grundwissen des Statikers, sondern ein vertieftes Verständnis dieser Bauweise. Zum Rüstzeug des Faserverbundkonstruktors zählen Kenntnisse über den Werkstoff und dessen besondere Eigenschaften, über die Berechnung mit Hilfe der Schichtenverbundanalyse und über die Fertigungsverfahren. Erst mit Kenntnis aller Teilgebiete kann es gelingen, eine optimale Faserverbund-Leichtbaukonstruktion zu erzielen.

1.1 Problemstellung

Der Faserverbundleichtbau hat dort die bisher größte Verbreitung gefunden, wo die unabdingbare Forderung nach Leichtbau besteht, nämlich in der Luft- und Raumfahrt.

In neuerer Zeit wird zunehmend daran gearbeitet, Bauteile aus hochbelastbaren Faser-Kunststoff-Verbunden (FKV) auch im Fahrzeugbau und im allgemeinen Maschinenbau einzusetzen. Es handelt sich dabei ausnahmslos um hochbeanspruchte Bauteile mit gezielt gerichteten Endlosfasern.

Die Bauteilauslegung unterscheidet sich aber merklich von derjenigen metallischer Werkstoffe. Metalle werden als homogen und isotrop betrachtet, ein Faserverbund ist jedoch inhomogen und anisotrop. Der Werkstoff ist bereits eine Konstruktion - eine Mikrostruktur aus hochfesten Fasern, eingebettet in eine Matrix. Bei den heute in Betracht kommenden Fertigungsverfahren entstehen meistens "Lamine" aus mehreren unter verschiedenen Winkeln und mit verschiedenen Dicken abgelegten Einzelschichten.

Die Aufgabe des Faserverbund-Konstrukteurs besteht nun darin, das Bauteil so zu gestalten und den Laminataufbau so zu wählen, daß eine hinsichtlich Steifigkeit und Festigkeit optimale Konstruktion entsteht.

Dazu können analytische Berechnungsverfahren, wie die in der Faserverbundtechnik benutzte klassische Laminattheorie (Classical Lamination Theory - CLT) nur in Sonderfällen eingesetzt werden; die Krafteinleitungsbereiche entziehen sich meist völlig einer analytischen Behandlung.

Damit man aber das Deformations- und Festigkeitsverhalten von Faserverbundbauteilen trotzdem richtig erfassen kann, ist der Einsatz numerischer Berechnungsmethoden (FEM) zur verfeinerten rechnerischen Analyse von Faserverbundstrukturen unumgänglich.

Bei der Anwendung der FEM ergeben sich jedoch erhebliche Mängel bezüglich der Handhabbarkeit, der Spannungsauswertung und vor allem bei der Beurteilung der Werkstoffbeanspruchung. Insbesondere fehlen dem Konstrukteur Hinweise und Richtlinien bezüglich des FE-Einsatzes bei Bauteilen aus Faserverbundwerkstoff.

Zur Optimierung von Faserverbunden können numerische Verfahren eingesetzt werden; bisher wurden dünnwandige Flächentragwerke behandelt. Diese noch sehr junge Arbeitsrichtung hat bei den Konstrukteuren erst wenig Eingang gefunden; eine Vorreiterfunktion übernimmt auch hier wieder die Luft- und Raumfahrt.

Die Schwierigkeit bei der Faserverbund-Optimierung liegt darin, die für den jeweiligen Anwendungsfall am besten geeignete Kombination der Faserverbundtheorie mit einem Analyseverfahren und mit einem mathematischen Optimierungsprogramm zu finden.

1.2 Literaturübersicht

In dieser Übersicht werden Quellen zu den Gebieten Faserverbund (FV)-Leichtbauteile, Analyseverfahren für FV und Optimierung von FV angegeben. Spezielle Literaturstellen werden in den einzelnen Abschnitten direkt besprochen.

Zunächst soll ein Einblick in die Anwendung der Faserverbundbauweise mit Hochleistungsverbundwerkstoffen gegeben werden. Die Anwendungen findet man beispielsweise im Segelflugzeugbau, wo FV längst unverzichtbar geworden sind, im Flugzeugbau mit Komponenten wie Höhen- oder Seitenleitwerk, Zug/Druck-Streben zur Bodenabstützung, Rumpf- und Tragflügelausführungen. Außerdem in der Raumfahrt, wo Satelliten- oder Antennenstrukturen und auch Treibstoffbehälter aus FV verwendet werden.

Weitere angestrebte Anwendungen sind Antriebswellen, Schwungräder, Pleuel und Blattfedern. Bereits im Einsatz sind Rotorblätter für Hubschrauber und Windkraftanlagen. Veröffentlichungen zu den angesprochenen Anwendungen findet man meist als Einzelbeiträge in Tagungsbänden, z.B. /1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7/; HEISSLER /1.8/ berichtet ausschließlich über Luft- und Raumfahrtanwendungen.

Seit Beginn der 80er Jahre gibt es an der Universität - Gh Kassel - das Fachgebiet Faserverbundtechnik. Dieses Fachgebiet ist wohl die einzige Einrichtung dieser Art, die sich ausschließlich einer allgemeinen Konstruktionslehre für die Gestaltung und Dimensionierung von Faserverbundbauteilen widmet und diese in Forschung und Lehre vertritt.

Hier entstanden in den letzten Jahren eine Reihe von Bauteilen aus Hochleistungsfaserverbundwerkstoffen, auf die in dieser Arbeit Bezug genommen wird. Dabei handelt es sich um Rotorblätter für Windkraftanlagen /1.9/, Blattfedern /1.10/, Antriebsgelenkwellen /1.11/, Drehstabfedern /1.12/ und leichte Innendruckbehälter /1.13/.

Nach dieser Übersicht über Bauteilanwendungen soll auf die Analyseverfahren näher eingegangen werden.

Zur Berechnung dünnwandiger Flächentragwerke aus Faserverbundwerkstoff wird die klassische Laminattheorie (CLT) benutzt.

Lehrbücher finden sich hauptsächlich in der angloamerikanischen Literatur, dabei wählen ASHTON, HALPIN, PETIT /1.14/, JONES /1.15/, TSAI, HAHN /1.16/ und AGARWAL, BROUTMAN /1.17/ die ingenieurmäßige Betrachtungsweise, während ASHTON, WHITNEY /1.18/ und CHRISTENSEN /1.19/ eher die Betrachtungsweise des Elastizitätstheoretikers ansprechen.

In der deutschsprachigen Literatur existieren zumeist Einzelveröffentlichungen bzw. Dissertationen. WIEDEMANN /1.20/ untersucht Platten aus orthotropen Schichten; PUCK /1.21/ betrachtet das Scheibenproblem, die Mikromechanik und das Bruchverhalten. SCHNEIDER /1.22/ stellt mikromechanische Betrachtungen zu Bruchkriterien an und erarbeitet Grundlagen der Berechnung thermisch bedingter Eigenspannungen; GITSCHNER /1.23/ befaßt sich mit feuchtebedingten Eigenspannungen.

Weiterhin seien noch die Berechnung und Verfahren zu gezielt eingebrachten Eigenspannungen erwähnt, die SCHÜRMAN /1.24/ bearbeitet hat.

Als Sammlung existieren die Luftfahrttechnischen Handbücher /1.25, 1.26/; eine VDI-Richtlinie /1.27/, die die Berechnung nach der CLT zusammenfaßt, befindet sich in Vorbereitung.

Für dickwandige, rohrförmige Bauteile aus Faser-Kunststoff-Verbunden hat JAKOBI /1.28/ die Berechnungsgrundlagen erweitert und für den Konstrukteur aufgearbeitet.

Neben diesen speziellen Analyseverfahren für mehrschichtige Faserverbunde hat im Ingenieurbereich die numerische Methode der finiten Elemente (FEM) mit der Entwicklung immer leistungsfähigerer Rechner eine weite Verbreitung gefunden. Für den FV-Konstrukteur, der die FEM anwenden will, ist es zur Modellbildung und Ergebnisinterpretation unerlässlich, den strukturmechanischen Hintergrund der FE-Methode zu kennen.

Die Bücher von ZIENKIEWICZ /1.29/, ARGYRIS /1.30/, LINK /1.31/ und BATHE /1.32/, - um nur einige zu nennen - geben eine umfassende und allgemein verständliche Darstellung der FE-Methode. Eine geschlossene Darstellung zur FV-Analyse mit Hilfe der FEM existiert bisher lediglich in Einzelveröffentlichungen.

Die Arbeiten zur Optimierung von Mehrschichtenverbunden aus Faserverbundwerkstoff beginnen Anfang der siebziger Jahre; FÖRSTER /1.33, 1.34/ stellt Arbeiten vor, die analytische Verfahren zur Optimierung benutzen. Diese scheitern jedoch, wenn die Zahl der Entwurfsvariablen bzw. der Einzelschichten zu groß wird. HELWIG /1.35/ setzt dann die mathematische Optimierung für Glasfaser-Kunststoffverbunde ein, BAIER /1.36/ zeigt die Anwendung der mathematischen Strukturoptimierung auf Raumfahrtkomponenten aus CFK-Laminaten. BROWN, NACHLAS /1.37/ beziehen fertigungstechnische Aspekte in ihre Laminatoptimierung mit ein.

ESCHENAUER /1.38/ setzt die Vektoroptimierung an ebenen Flächentragwerken aus Verbundwerkstoffen ein. Dabei verknüpft er mehrere miteinander konkurrierende Ziele (Gewicht und Verformung) mittels einer skalaren Optimierungsstrategie. ESCHENAUER und FUCHS /1.39, 1.40/ optimieren Sandwichplatten mit CFK-Deckschichten. FUCHS /1.41/ erweitert schließlich Arbeiten von ESCHENAUER /1.38/ auf Schalen aus Faserverbund-Werkstoff.

BAIER, GOOS, HELLWIG /1.42/ stellen das Konzept der Quasi-Optimierung vor. In diesem Konzept ist auch ein Laminatoptimierungsmodul vorgesehen, der als Postprozessor auf FEM-Berechnungsergebnisse zugreift.

1.3 Aufgabenstellung und Zielsetzung

Die vorliegende Arbeit hat zum Ziel, Richtlinien für den Faserverbund-Konstrukteur bezüglich des Einsatzes numerischer Analyseverfahren (FEM) zu erarbeiten. Dies erfolgt exemplarisch an ausgeführten Faserverbund-Leichtbauteilen. Weiterhin soll aufgezeigt werden, wie die verfeinerte Laminatanalyse in Verbindung mit leistungsfähigen Optimierungsalgorithmen vorteilhaft zur Optimierung von FV-Bauteilen eingesetzt werden kann.

Zunächst werden die Berechnungsgrundlagen für Faser-Kunststoff-Verbunde bereitgestellt und erweitert. Ausgehend von der in der Faserverbundtechnik üblichen ebenen Betrachtungsweise ist es sinnvoll, zu einer räumlichen Betrachtung überzuwechseln; moderne FEM-Berechnungsprogramme machen dies erforderlich. Insbesondere werden die Stoffgesetze anisotroper, orthotroper und isotroper Körper behandelt, die dreidimensionalen Spannungs-, Verzerrungsbeziehungen werden für spezielle Mehrschichtenverbunde hergeleitet.

Neben der richtigen Berücksichtigung der Materialeigenschaften werden materialgerechte Versagenskriterien entwickelt, die es gestatten, auch komplexe dreidimensionale Spannungszustände sicher zu beurteilen.

Anschließend wird die Frage diskutiert, wie man für die Dimensionierung einer Verbundstruktur zu den benötigten Elastizitätsgrößen kommt.

Ein weiterer Abschnitt behandelt die Einbindung der Berechnung finiter Schichten (klassische Laminattheorie - CLT) in die Strukturberechnung mit der FEM.

Üblicherweise ist die Materialdateneingabe bei der FE-Anwendung auf Bauteile aus isotropen Werkstoffen recht einfach; bei Faserverbunden ist der Aufwand aber ungleich höher. Je nach verwendetem Elementtyp ist der Anwender gezwungen, die Materialeigenschaften des FV-Werkstoffes zu "verschmieren", spezielle geschichtete Elemente bieten die Möglichkeit der Eingabe von Einzelschichteigenschaften.

Darüber hinaus erfordern Faserverbunde einen zusätzlichen Aufwand bei der Ermittlung der Schichtspannungen und der Werkstoffanstrengung.

Deshalb werden in diesem Abschnitt vor allem Berechnungsmöglichkeiten von Standard FEM-Programmen für Faserverbunde herausgearbeitet und die erforderlichen faserverbundspezifischen Erweiterungen im Pre- und Postprocessing diskutiert.

Danach erfolgt die rechnerische Analyse ausgeführter Faserverbundbauteile. Insbesondere werden Berechnungen zu Rotorblättern für Windkraftanlagen, Blattfedern, Antriebswellen, Drehstabfedern und Innendruckbehältern durchgeführt.

Zur Optimierung von Faserverbunden werden einige grundlegende Überlegungen angestellt. Insbesondere wird die Optimierungsaufgabe definiert, eine Optimierungsstrategie gewählt und Optimierungsalgorithmen vorgestellt.

Die zuvor erarbeitete Vorgehensweise wird auf konkrete Fragestellungen aus der FV-Berechnung angewandt. Einerseits handelt es sich um Laminatoptimierungen flächiger und auch dickwandiger Bauteile, andererseits um die Formoptimierung von Faserverbundschalen (Domkonturen von Behältern) mit Hilfe der FEM.

2. BERECHNUNGSGRUNDLAGEN FÜR FASER-KUNSTSTOFF-VERBUNDE

Faserverstärkte Kunststoffe sind Werkstoffe aus mehreren, im allgemeinen zwei, Materialien unterschiedlicher Eigenschaften. Ein Körper aus faserverstärktem Werkstoff ist mikroskopisch betrachtet inhomogen, d.h. es liegen Bereiche aus Verstärkungsmaterial (Fasern) und umgebendem Bettungsmaterial (Matrix) vor. Zur Berechnung von Faser-Kunststoff-Verbunden (FKV) stellt man sich die Bauteilwandungen oft aus mehreren faserverstärkten Schichten zusammengefügt vor; man spricht von einem Mehrschichtenverbund (MSV). Die einzelnen Schichten des MSV betrachtet man - im Gegensatz zur mikroskopischen Betrachtungsweise - makroskopisch als homogenes anisotropes Kontinuum, wobei die Fasern gedanklich unendlich fein in der Matrix "verschmiert" werden.

2.1 Stoffgesetze anisotroper Körper

Die Beziehungen zwischen den Spannungen und den Verzerrungen eines Körpers werden in den Elastizitäts- oder Stoffgesetzen formuliert. Dabei gelten die für linear-elastische Körper in der Elastizitätstheorie üblicherweise getroffenen Annahmen :

- geometrische Linearität,
- physikalische Linearität, d.h. lineare Beziehungen zwischen den Spannungen, den Verzerrungen und der Temperatur.

Außerdem wird vorausgesetzt, daß der betrachtete Körper homogen ist, die Material-Konstanten also ortsunabhängig sind, sie können allerdings richtungsabhängig sein, das Material ist also anisotrop.

Zunächst sei ein infinitesimales Volumenelement eines anisotropen Körpers betrachtet. Die Beanspruchung, die auf ein solchen Würfel wirkt, kann in Komponenten in Richtung der Koordinatenachsen zerlegt werden. Dabei treten drei Normalspannungen und sechs Schubspannungen auf. Jede der neun Spannungen kann neun Verzerrungen bewirken. Damit ergeben sich 81 Koeffizienten in den Spannungs-, Verzerrungsbeziehungen; diese sind Elemente der sog. Elastizitätsmatrix¹⁾. Wegen der paarweisen Zuordnung der Schubspannungen $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ redu-

1) In der Elastizitätstheorie wird oft die Tensorschreibweise benutzt, /2.1, 2.2/; Spannungen und Verzerrungen sind dann Tensoren 2. Stufe, die Elastizitätskoeffizienten werden in einem Tensor 4. Stufe zusammengefaßt.

In dieser Arbeit wurde bewußt auf die tensorielle Darstellung zugunsten der anschaulichen Matrixform verzichtet. Der Zusammenhang zwischen "verkürzter" Schreibweise und Tensorschreibweise wird von LEKHNITSKII in /2.3/ eingehend erläutert.

ziert sich die Zahl der Elastizitätskoeffizienten auf 36. Aus Energiebetrachtungen bzw. der Gleichheit der Formänderungsarbeit (Maxwell-Betti) ergibt sich schließlich eine Anzahl von 21 verschiedenen Koeffizienten; die Elastizitätsmatrix wird symmetrisch zur Hauptdiagonalen ($c_{ij} = c_{ji}$; $s_{ij} = s_{ji}$).

Die Verzerrungs-, Spannungsbeziehungen für den allgemein anisotropen Körper lauten :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ & & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ & & & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ & \text{sym.} & & & s_{55} & s_{56} \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (2.1).$$

In abkürzender Matrixschreibweise:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.2).$$

Nach den Spannungen aufgelöst ergibt sich :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.3).$$

Der Zusammenhang zwischen Nachgiebigkeiten und Steifigkeiten ist durch die Inversion :

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1} ; \mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1} \quad (2.4)$$

gegeben.

Durch Symmetriebetrachtung an Faserverbunden kann man von der allgemeinen Anisotropie zu speziellen Anisotropien kommen. Hier sei auf CUNTZE /2.4/ verwiesen, der u. a. in anschaulicher Form eine Analogie zwischen der Kristallphysik z. B. /2.5/ und technisch wichtigen Faserverbunden herstellt.

Ein unidirektional-faserverstärkter Werkstoff (eine UD-Schicht) zählt beispielsweise zu den transversal isotropen Körpern .

Für einen dickwandigen UD-Schichtkörper wird das Elastizitätsgesetz mit den typischen Verbundbezeichnungen \parallel für parallel zur Faserrichtung und \perp für senkrecht zur Faserrichtung im "natürlichen" $1 = \parallel$, $2 = \perp$, $3 = z$ - Koordinatensystem formuliert /2.4/, siehe auch Bild 2.1.

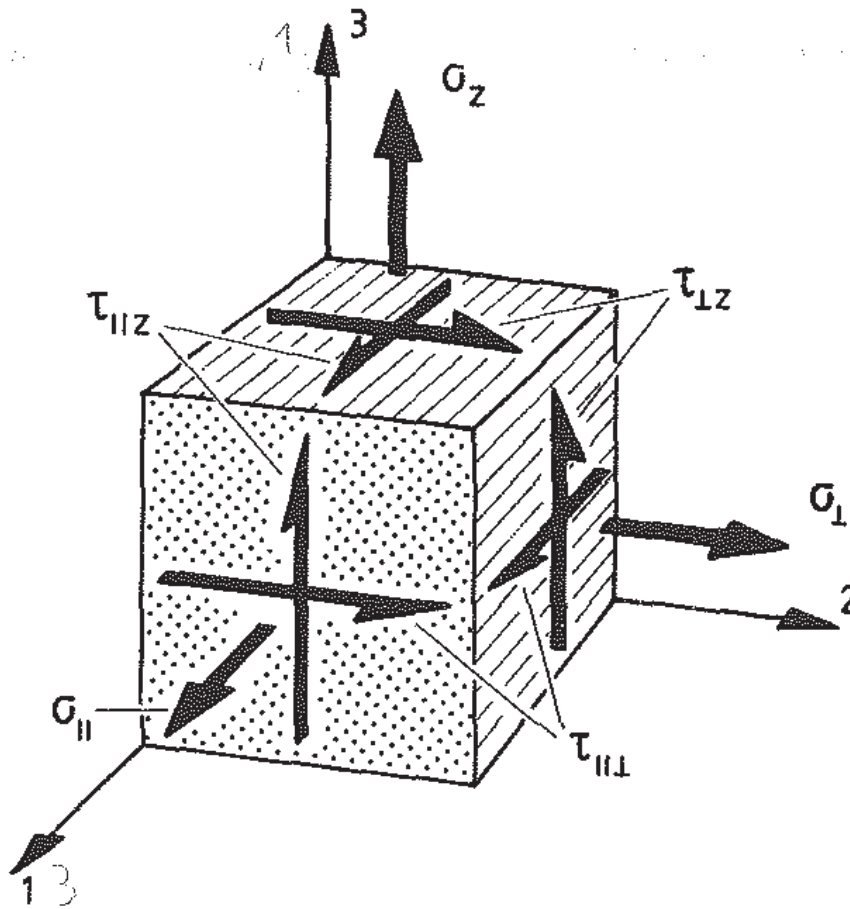


Bild 2.1 : Spannungen am UD-Schichtkörper (transversale Isotropie)

Das Stoffgesetz (2.1) vereinfacht sich dann zu :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{||} \\ \epsilon_{\perp} \\ \epsilon_z \\ \gamma_{\perp z} \\ \gamma_{||z} \\ \gamma_{||\perp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & s_{55} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{||} \\ \sigma_{\perp} \\ \sigma_z \\ \tau_{\perp z} \\ \tau_{||z} \\ \tau_{||\perp} \end{bmatrix} \quad (2.5).$$

Dehnungen sind hier nur noch mit Normalspannungen und Schubverzerrungen nur mit den zugehörigen Schubspannungen gekoppelt.

Infolge der Gleichwertigkeit der Eigenschaften in 2 - und 3 - Richtung (jeweils \perp zur Faserrichtung) gelten außerdem folgende Vereinfachungen :

$$s_{12} = s_{13} \quad ; \quad s_{22} = s_{33} \quad ; \quad s_{55} = s_{66} .$$

Weiterhin gilt für die "isotrope" 2, 3 - Ebene folgende Beziehung zwischen den Nachgiebigkeiten :

$$s_{44} = 2 (s_{22} - s_{23})$$

Es verbleiben somit nur noch fünf voneinander unabhängige Elastizitätskoeffizienten ($s_{11}, s_{12}, s_{22}, s_{23}, s_{55}$), die die Verzerrungs-Spannungs-Beziehung eines transversal isotropen Körpers - einer UD-Schicht - bestimmen; siehe z. B. /1.15, 2.3/.

Die Nachgiebigkeitskoeffizienten für eine UD-Schicht lassen sich aus den fünf Grundelastizitätsgrößen ($E_{II}, E_I, \nu_{III}^2), G_{III}$ und ν_{II} der Einzelschicht herleiten.

Das Elastizitätsgesetz (2.5) mit den elastischen Eigenschaften des UD-Körpers im II, I, z - Koordinatensystem lautet dann in expliziter Form mit den richtungsabhängigen "Ingenieurkonstanten" E, ν und G :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{II} \\ \epsilon_I \\ \epsilon_z \\ \gamma_{Iz} \\ \gamma_{IIz} \\ \gamma_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_{II} & -\nu_{III}/E_{II} & -\nu_{III}/E_{II} & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E_I & -\nu_{II}/E_I & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/E_I & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/G_{III} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & 1/G_{III} & 0 \\ & & & & & 1/G_{III} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{II} \\ \sigma_I \\ \sigma_z \\ \tau_{Iz} \\ \tau_{IIz} \\ \tau_{III} \end{bmatrix} \quad (2.6),$$

nach den Spannungen aufgelöst :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{II} \\ \sigma_I \\ \sigma_z \\ \tau_{Iz} \\ \tau_{IIz} \\ \tau_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{II} \\ \epsilon_I \\ \epsilon_z \\ \gamma_{Iz} \\ \gamma_{IIz} \\ \gamma_{III} \end{bmatrix} \quad (2.7),$$

$\begin{matrix} 23 & 21 \\ 13 & 13 \\ 42 & 32 \end{matrix}$

2) Bei Querkontraktionszahlen bezeichnet der erste Index die Richtung der Kontraktion, der zweite die Richtung der Beanspruchung, die diese Kontraktion hervorruft.

oder auch in expliziter Form :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{II} \\ \sigma_I \\ \sigma_Z \\ \tau_{IZ} \\ \tau_{IZ} \\ \tau_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\nu_{II}^2)E_{II}/N & \nu_{III}(1+\nu_{II})E_{II}/N & \nu_{III}(1+\nu_{II})E_{II}/N & 0 & 0 & 0 \\ & (1-\nu_{III}\nu_{III})E_I/N & (\nu_{II}+\nu_{III}\nu_{III})E_I/N & 0 & 0 & 0 \\ & & (1-\nu_{III}\nu_{III})E_I/N & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_{II} & 0 & 0 \\ & & & & G_{III} & 0 \\ & & & & & G_{III} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{II} \\ \epsilon_I \\ \epsilon_Z \\ \gamma_{IZ} \\ \gamma_{IZ} \\ \gamma_{III} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

mit $N = (1 + \nu_{II}) (1 - \nu_{II} - 2 \nu_{III} \nu_{III})$

Der Schubmodul G_{II} läßt sich, wie bei isotropen Materialien aus dem Elastizitätsmodul E_I und der Querkontraktion ν_{II} errechnen. Weiterhin gilt nach dem Vertauschungsgesetz von Maxwell-Betti: $\nu_{III} E_{II} = \nu_{III} E_I$.

Ein isotroper Werkstoff (Schichten) ist schließlich auch nur ein Sonderfall der Anisotropie, der bezüglich der physikalischen Eigenschaften keine Vorzugsrichtung mehr aufweist. Die Zahl der unabhängigen Elastizitätsgrößen reduziert sich auf zwei, den Elastizitätsmodul E und die Querkontraktionszahl ν , /2.6, 2.7/. Der Schubmodul läßt sich aus der einfachen Beziehung

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.9)$$

gewinnen. Verstärkte Werkstoffe, die keine Vorzugsrichtung der Verstärkungspartikel aufweisen, kann man daher als "quasiisotrop" betrachten.

Zusätzlich zu den mechanischen Beanspruchungen verursachen Temperatur- und Feuchtekonzentrationsänderungen ebenfalls Spannungen und Verzerrungen in einem Mehrschichtenverbund.

Dies liegt daran, daß die Einzelkomponenten der UD-Schicht, die Faser- und Matrixwerkstoffe bei Temperatur- und Feuchtekonzentrationsänderung ein sehr unterschiedliches Verformungsverhalten zeigen. Dadurch werden "mikromechanische" und "makromechanische" Eigenspannungen hervorgerufen.

Hier sollen nur die makromechanischen Eigenspannungen betrachtet werden, wie sie beispielsweise bei der Abkühlung von der Härtetemperatur auf Umgebungstemperatur durch eine gegenseitige Verspannung der UD-Schichten entstehen /2.8, 2.9/.

Unterliegt ein MSV einer Feuchtekonzentrationsänderung, so wird ebenfalls ein Eigenspannungszustand erzeugt /1.23, 2.10/, weil die Kunststoffmatrix (bei Aramidfasern auch die Faser) durch Quellung ihr Volumen vergrößert.

Thermische Eigenspannungen werden im Stoffgesetz durch die Wärmeausdehnungskoeffizienten α und eine Temperaturdifferenz ΔT berücksichtigt. Bei isotropen Werkstoffen ist die Wärmeausdehnung nicht richtungsabhängig, es gibt nur einen Wärmeausdehnungskoeffizienten α . Bei transversal isotropen Schichten (UD-Schichten) sind die Wärmeausdehnungskoeffizienten richtungsabhängig. Der Ausdehnungskoeffizient $\alpha_{||}$ in fasernparalleler Richtung unterscheidet sich wesentlich von dem Wert α_{\perp} senkrecht zur Faserrichtung; in Dickenrichtung der UD-Schicht wird ebenfalls α_{\perp} wirksam.

Feuchtigkeitsbedingte Eigenspannungen werden im Stoffgesetz durch die Quellkoeffizienten β und eine Feuchtigkeitskonzentrationsänderung ΔM (Feuchteaufnahme) berücksichtigt. Für den isotropen Kunstharz-Werkstoff genügt zur Beschreibung ein Quellkoeffizient β , für transversal isotrope Schichten gelten wieder zwei Koeffizienten $\beta_{||}$ und β_{\perp} , in Dickenrichtung wird ebenfalls β_{\perp} wirksam. Temperatur- und feuchtigkeitsbedingte Verzerrungen überlagern sich den Verzerrungen, die aus der mechanischen Beanspruchung herrühren. Das Stoffgesetz, Gl. (2.2), erhält dann die Form:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \Delta T + \boldsymbol{\beta} \cdot \Delta M \quad (2.10).$$

2.2 Transformationsverhalten

In den meisten Fällen deckt sich die Richtung der äußeren Belastung nicht mit dem natürlichen $||, \perp, z$ - Koordinatensystem der UD-Schicht. Ein häufig vorkommender Sonderfall ist die um ihre Hochachse ($z = \perp = z$) um einen Winkel α ³⁾ gedrehte UD-Schicht, siehe *Bild 2.2*.

3) Dabei gilt folgende Vorzeichenfestlegung für den Faserrichtungswinkel α :

α hat einen positiven Wert, wenn man durch eine mathematisch positive Drehung ($\hat{=}$ entgegen dem Uhrzeigersinn) von der $||$ -Richtung in die x -Richtung gelangt.

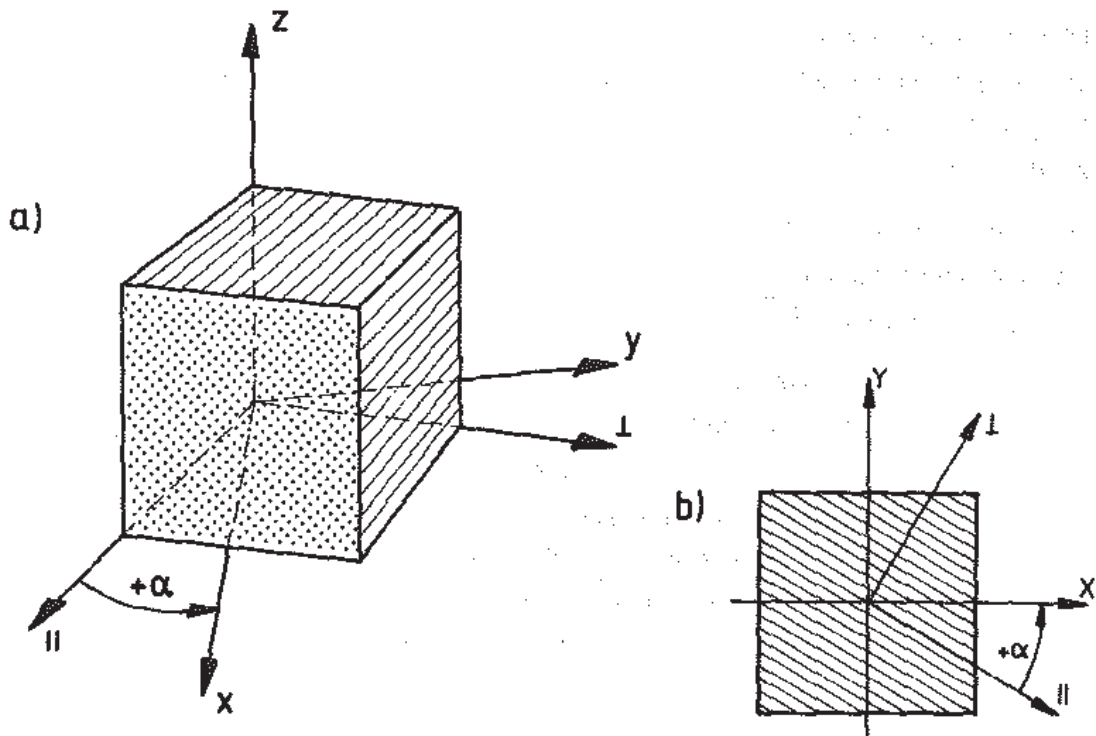


Bild 2.2 Transformationen an einer UD-Schicht vom II, I, z - in das x, y, z - Koordinatensystem
 a) Volumenelement b) Scheibenelement

Beim Übergang von einem Koordinatensystem II, I, z in ein neues Koordinatensystem x, y, z gelten folgende Transformationsvorschriften für Spannungen und Verzerrungen :

$$\begin{aligned} \sigma &= T_{\sigma} \cdot \sigma_{UD} \\ \epsilon &= T_{\epsilon} \cdot \epsilon_{UD} \end{aligned} \tag{2.11}.$$

Wärmeausdehnungs- und Querkoeffizienten transformieren sich genauso wie Verzerrungen.

Mit diesen Transformationsbeziehungen kann man das Stoffgesetz für das neue Koordinatensystem herleiten. Bei einer Drehung um die z-Koordinate ergeben sich folgende Transformationsvorschriften für die Elastizitätsgrößen:

$$\begin{aligned} C &= T_{\sigma} \cdot C_{UD} \cdot T_{\sigma}^T \\ S &= T_{\epsilon} \cdot S_{UD} \cdot T_{\epsilon}^T \end{aligned} \tag{2.12}.$$

Die Transformationsmatrizen sind dabei:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 2sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -2sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -sc & sc & 0 & 0 & 0 & (c^2-s^2) \end{bmatrix} \quad (2.13),$$

$$T_{\epsilon} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -2sc & 2sc & 0 & 0 & 0 & (c^2-s^2) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

mit $s = \sin \alpha$ und $c = \cos \alpha$.

Im übrigen gelten folgende Beziehungen der Transformationsmatrizen untereinander:

$$T_{\epsilon}^{-1} = T_{\sigma}^T \quad (2.15),$$

$$T_{\sigma}^{-1} = T_{\epsilon}^T$$

Das Elastizitätsgesetz für eine unidirektional-faserverstärkte Schicht, Gl. (2.6), lautet jetzt mit thermischen und feuchtigkeitsbedingten Verzerrungen:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & s_{16} \\ & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & s_{26} \\ & & s_{33} & 0 & 0 & s_{36} \\ & & & s_{44} & s_{45} & 0 \\ & \text{sym.} & & & s_{55} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \Delta T + \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_z \\ 0 \\ 0 \\ \beta_{xy} \end{bmatrix} \Delta M \quad (2.16),$$

Als wichtige Ergebnisse kann man folgendes festhalten :

- Es gibt eine Kopplung zwischen den Normalspannungen σ_x , σ_y , σ_z und der Schubverzerrung γ_{xy} . Weiterhin entsteht eine Kopplung zwischen der Schubspannung τ_{xy} und den Dehnungen ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z .
Das bedeutet, daß auch Normalspannungen eine Schiebung in der Ebene bewirken und die Schubspannung in der Ebene auch Dehnungen hervorruft.
- Außerdem entsteht eine Kopplung von den in Schicht-Dickenrichtung wirkenden Schubspannungen τ_{yz} , τ_{xz} und den Schiebungen γ_{yz} , γ_{xz} .
- Bei Temperatur- oder Feuchtigkeits-Beanspruchung stellt sich neben den Dehnungen in Richtung der Koordinatenachsen auch eine Schubverzerrung γ_{xy} in der x, y - Ebene ein.

2.3 Stoffgesetze spezieller Mehrschichtenverbunde

Innerhalb der Gruppe mehrschichtig aufgebauter Faser-Kunststoff-Verbunde finden sich zwei einfache Sonderfälle von MSV, die eine besondere Bedeutung erlangt haben. Es sind dies der ausgeglichene Winkel-Verbund (AWV) und der Kreuz-Verbund (KV). Beide Verbunde sind orthotrop und werden gedanklich als unendlich fein "verschmiert" betrachtet. Die Orthotropie ist ebenfalls eine spezielle Form der Anisotropie, bei der 9 voneinander unabhängige Elastizitätsgrößen zu bestimmen sind.

PUCK /2.11/ stellt die beiden Sonderfälle AWV und KV bei ebener Betrachtungsweise vor und gibt Beziehungen zur Ermittlung der Elastizitätskonstanten an. SCHNEIDER /2.8, 2.9/ baut auf diesen Arbeiten auf und leitet für diese speziellen Verbunde die Wärmeausdehnungskoeffizienten in der Ebene her. Als Grundelement wird von beiden Autoren die UD-Einzelschicht benutzt. Ausgehend von der ebenen Betrachtungsweise ist es sinnvoll, zu einer räumlichen Betrachtung dieser speziellen MSV überzuwechseln, FEM-Analysen /2.12/ und "dickwandige" Berechnungsmethoden /1.28/ machen dies zwingend erforderlich; moderne FEM-Programme verlangen sogar bei ebenen Modellen die Eingabe der Stoffgesetze in dreidimensionaler Formulierung.

2.3.1 Ausgeglichene Winkel-Verbunde (AWV)

Schon recht früh haben verschiedene Autoren die elastischen Eigenschaften von AWV behandelt. In erster Linie finden sich Angaben über Elastizitätsgrößen bei ebener Beanspruchung, vgl. /1.15, 1.16, 2.11/. WILSON /2.13/ zeigt, wie man orthotrope Werkstoffeigenschaften in den Berechnungsablauf mit axialsymmetrischen finiten Elementen einbezieht. Hier findet sich auch der Hinweis, daß diese Elementtypen zur Behandlung von Filamentstrukturen geeignet sind; es fehlen

Jedoch jegliche Angaben darüber, wie die Steifigkeitsmatrix einer solchen Faserstruktur zu ermitteln ist. TANG /2.14/ und UEMURA, FUKUNAGA /2.15/ berechnen axialsymmetrische Faserverbundstrukturen, benutzen jedoch die "ebenen Beziehungen" für AWW. MURAKAMI, HEGEMIER /2.16/ gehen von der räumlichen Steifigkeitsmatrix für UD-Schichten aus, ermitteln jedoch auch die AWW-StEIFigkeiten nur für den ebenen Fall. Wenn AWW aus diskreten Einzelschichten aufgebaut sind, bietet sich die Möglichkeit, jede einzelne UD-Schicht durch Volumenelemente mit Elastizitätsgrößen nach Gl. (2.6) oder Gl. (2.8) nachzubilden, wie dies beispielsweise in /2.15, 2.17/ durchgeführt wird.

Ein Beispiel für einen wirklich feinstverschmierten AWW kommt interessanterweise aus dem Bereich der Biomedizin; hier ist die Intervertebralscheibe (Bandscheibe) gemeint. Sie besteht aus einem äußerem Faserring (annulus fibrosus), einem Gallertkern (nucleus pulposus) und einem elastischen Zwischenpuffer (pars intermedia). Der Faserring wird in rechnerischen Untersuchungen als AWW behandelt. BELYTSCHKO, KULAK, SCHULTZ, GALANTE /2.18/ schlagen vor, die Steifigkeiten des AWW mit den Steifigkeiten einer UD-Faserlage gleichzusetzen. Dies trifft jedoch in bezug auf die Schubsteifigkeiten nicht zu, die korrekte Form ist in /2.12/ niedergelegt. LIN, LIU, RAY, NIKRAVESH /2.19/ gehen einen anderen Weg zur Bestimmung der elastischen Eigenschaften des AWW-Faserringes; sie ermitteln die Elastizitätskonstanten mittels einer Systemidentifikation aus Meßwerten. SPILKER, JAKOBS, SCHULTZ /2.20/ schließlich verwenden in ihrer Arbeit (FEM-Berechnung einer Intervertebralscheibe) die Nachgiebigkeiten einer Faserschicht, die sie als Nachgiebigkeiten für den AWW ihren Berechnungen zugrundelegen.

Diese Vorgehensweise ist auf den hier betrachteten Fall eines AWW aus Faserverbundwerkstoff allerdings nicht übertragbar, wie im folgenden gezeigt wird.

Der AWW soll gedanklich aus zwei gleich dicken "feinstverschmierten" UD-Schichten gleichen Materials bestehen, die dadurch gekennzeichnet sind, daß die Faserrichtungswinkel dem Betrage nach gleich groß sind, aber unterschiedliche Vorzeichen haben. Da der AWW orthotrop in bezug auf das Koordinatensystem x, y, z ist, verschwinden die Nachgiebigkeiten $s_{16}, s_{26}, s_{36}, s_{45}$ bzw. die Ausdehnungskoeffizienten α_{xy}, β_{xy} im Elastizitätsgesetz (2.16). Das Stoffgesetz lautet:

$$\begin{bmatrix} \hat{E}_x \\ \hat{E}_y \\ \hat{E}_z \\ \hat{\gamma}_{yz} \\ \hat{\gamma}_{xz} \\ \hat{\gamma}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{s}_{11} & \hat{s}_{12} & \hat{s}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & \hat{s}_{22} & \hat{s}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & \hat{s}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \hat{s}_{44} & 0 & 0 \\ & & & & \hat{s}_{55} & 0 \\ & \text{sym.} & & & & \hat{s}_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_x \\ \hat{\sigma}_y \\ \hat{\sigma}_z \\ \hat{\tau}_{yz} \\ \hat{\tau}_{xz} \\ \hat{\tau}_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_x \\ \hat{\alpha}_y \\ \hat{\alpha}_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta T + \begin{bmatrix} \hat{\beta}_x \\ \hat{\beta}_y \\ \hat{\beta}_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta M \quad (2.17).$$

Normalspannungen sind nur noch mit Dehnungen und Schubspannungen nur noch mit Schiebungen verbunden. In den Orthotropieachsenrichtungen x und y treten nur Dehnungen auf, jedoch keine Schubverformung. Zur Berechnung der Nachgiebigkeiten und Ausdehnungskoeffizienten des AWW gibt es mehrere Wege /2.12, 2.21/, die alle von den gleichen Voraussetzungen ausgehen.

Die Verzerrungen in der x, y - Ebene sind für beide Schichten des AWW wegen der Parallelschaltung gleich :

$$\hat{\epsilon}_x = \epsilon_{xk} , \hat{\epsilon}_y = \epsilon_{yk} , \hat{\gamma}_{xy} = \gamma_{xyk} , (k=1,2) \quad (2.18).$$

In Dickenrichtung z sind die Spannungen für beide Schichten gleich denen des AWW; hier liegt eine Hintereinanderschaltung vor :

$$\hat{\sigma}_z = \sigma_{zk} , \hat{\tau}_{yz} = \tau_{yzk} , \hat{\tau}_{xz} = \tau_{xzk} , (k=1,2) \quad (2.19).$$

Da beim AWW beide Schichten miteinander verklebt sind, stellen sich Behinderungen in den Verformungsmöglichkeiten der einzelnen Schichten ein. Zur Ermittlung der Elastizitätskoeffizienten des AWW geht man zweckmäßigerweise so vor, daß man eine äußere Belastung aufbringt und die Verzerrungen der Einzelschichten betrachtet. Dabei muß man als Randbedingung die Verformungen zugrunde legen, die der AWW den Einzelschichten aufzwingt.

Für die Spannungen in der x, y - Ebene gilt :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_x &= 0.5 \sigma_{x1} + 0.5 \sigma_{x2} \\ \hat{\sigma}_y &= 0.5 \sigma_{y1} + 0.5 \sigma_{y2} \\ \hat{\tau}_{xy} &= 0.5 \tau_{xy1} + 0.5 \tau_{xy2} \end{aligned} \quad (2.20).$$

Solange die beiden Schichten nicht miteinander verklebt sind, bewirkt eine Spannung $\hat{\sigma}_x$ Dehnungen $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ und eine Schubverzerrung γ_{xy} . Beide Schichten würden die gleichen Dehnungen erfahren, die Schubverzerrungen ergeben sich zwar dem Betrage nach gleich groß, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen :

$$\gamma_{xy1} = - \gamma_{xy2} \quad (2.21).$$

Hinsichtlich der Dehnungen passen auch die verformten Schichten noch zueinander, nicht jedoch bezüglich ihrer Schubverformungen.

Bei einem AWW kann aufgrund einer Belastung $\hat{\sigma}_x$ wegen der Symmetrieeigenschaften bezüglich der x - und der y -Achse keine Schubverformung eintreten. Dies bedeutet aber auch (wegen der oben genannten "Verträglichkeitsbedingung" Gl. (2.18)), daß in den Schichten keine Schubverformung γ_{xyk} eintritt; der Verbund zwingt den Einzelschichten diese Verformungsbehinderung auf.

Aufgrund der Verhinderung von γ_{xy} tritt eine Zwängungsspannung τ_{xy} in den Schichten auf. Bei einer äußeren Belastung von $\hat{\sigma}_x$ ergibt sich dann aus der 6. Zeile des Elastizitätsgesetzes, Gl. (2.16):

$$\gamma_{xy} = 0 = s_{16} \hat{\sigma}_x + s_{66} \tau_{xy}$$

oder

$$\tau_{xy} = - \frac{s_{16}}{s_{66}} \hat{\sigma}_x \quad (2.22).$$

Die Zwängungsspannung τ_{xy} ist in den einzelnen Schichten dem Betrage nach gleich groß, hat aber entgegengesetztes Vorzeichen. Für die Dehnungen der Einzelschichten folgt mit Gl. (2.22) aus dem Elastizitätsgesetz, Gl. (2.16):

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= s_{11} \hat{\sigma}_x + s_{16} \left(- \frac{s_{16}}{s_{66}} \right) \hat{\sigma}_x = \left(s_{11} - \frac{s_{16}^2}{s_{66}} \right) \hat{\sigma}_x \\ \epsilon_y &= \left(s_{12} - \frac{s_{26} s_{16}}{s_{66}} \right) \hat{\sigma}_x \\ \epsilon_z &= \left(s_{13} - \frac{s_{36} s_{16}}{s_{66}} \right) \hat{\sigma}_x \\ \gamma_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (2.23).$$

Berechnet man die Dehnungen für die Einzelschichten unter positivem Schichtwinkel und unter negativem Schichtwinkel, so ergeben sich gleiche Werte. Wenn für beide Schichten die Verzerrungen gleich sind, so gelten sie auch für den Verbund. Damit ergibt sich folgende Vorschrift zur Ermittlung der Nachgiebigkeiten eines AWW mittels des transformierten Stoffgesetzes Gl. (2.16) einer UD-Schicht:

$$\hat{s}_{ij} = s_{ij} - \frac{s_{i6} s_{j6}}{s_{66}} \quad \text{mit } i, j = 1, 2, 3 \quad (2.24.a)$$

Für die Schubnachgiebigkeiten in Dickenrichtung des AWW gilt:

$$\begin{aligned} \hat{s}_{44} &= s_{44} \\ \hat{s}_{55} &= s_{55} \end{aligned} \quad (2.24.b)$$

Die Schubnachgiebigkeit \hat{s}_{66} des AWW erhält man über eine ähnliche Vorgehensweise, indem man eine Schicht durch eine Schubspannung $\hat{\tau}_{xy}$ belastet, wobei die Dehnungen nach Gl. (2.17) und Gl. (2.18) gleich Null sind.

Nach Einsetzen in das Stoffgesetz Gl. (2.16) und einigen Umformungen erhält man für die Schubnachgiebigkeit des AWV:

$$\hat{s}_{66} = s_{66} - \frac{s_{11} s_{26}^2 - 2 s_{12} s_{16} s_{26} + s_{22} s_{16}^2}{s_{11} s_{22} - s_{12}^2} \quad (2.24.c).$$

In ähnlicher Weise können auch die Wärme- und Feuchtigkeitsausdehnungskoeffizienten (WAK und FAK) des AWV ermittelt werden. Die Vorgehensweise ist für WAK und FAK analog. Die WAK für den ausgeglichenen Winkel-Verbund errechnen sich beispielsweise aus dem Stoffgesetz der Einzelschichten; vgl. /2.12/, zu:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_x &= \alpha_x - \frac{s_{16}}{s_{66}} \alpha_{xy} \\ \hat{\alpha}_y &= \alpha_y - \frac{s_{26}}{s_{66}} \alpha_{xy} \\ \hat{\alpha}_z &= \alpha_z - \frac{s_{36}}{s_{66}} \alpha_{xy} \end{aligned} \quad (2.25).$$

Eine ähnliche Formulierung gibt SCHNEIDER /2.8., 2.9/ für $\hat{\alpha}_x$ und $\hat{\alpha}_y$ an; KEDWARD /2.22/ kommt für die ebene Betrachtungsweise von AWV zu den gleichen Ergebnissen.

Für den Wärmeausdehnungskoeffizienten (WAK) in Dickenrichtung des AWV geben FAHMY, RAGAI-ELLOZY /2.23/ erstmals eine geschlossene Formel an; diese wird von PAGANO /2.24/ korrigiert. CUNTZE /2.4/ kommt zum gleichen Ergebnis wie PAGANO.

BEIL', PORTNOV, SANINA, YAKUSHIN /2.25/ finden unter anderem eine Formulierung ähnlich den hier vorgestellten Gleichungen (2.25).

In den aufgeführten Gleichungen (2.24 a-c, 2.25) müssen immer alle mit dem Winkel des AWV ⁴⁾ transformierten Nachgiebigkeiten einer UD-Schicht eingesetzt werden. Die Transformation erfolgt dabei nach Gl. (2.12), für die WAK und FAK ist die Verzerrungstransformation nach Gl. (2.11) anzuwenden.

4)Bei AWV wird immer der positive Faserrichtungswinkel zur Kennzeichnung angegeben.

2.3.2 Kreuz-Verbunde (KV)

Beim Kreuz-Verbund (KV) gibt es nur zwei Faserrichtungen, die sich rechtwinklig kreuzen; die Dicken der Einzelschichten können verschieden sein. Ebenso wie der AWW ist der Kreuz-Verbund orthotrop bezüglich des x, y, z - Koordinatensystemes, es gilt daher das gleiche Stoffgesetz, Gl. (2.17). Die Koeffizienten dieses Stoffgesetzes ermittelt man jedoch anders; dies ist in /2.26/ ausführlich beschrieben, hier soll der Vollständigkeit halber angegeben werden, wie man sie ermittelt.

Wie beim AWW sind auch beim KV die Verzerrungen der Einzelschichten in der x, y - Ebene wegen der "Parallelschaltung" der Schichten gleich, siehe Gl. (2.18). In Dickenrichtung liegt eine "Hintereinanderschaltung" vor, hier gilt die Gleichgewichtsbeziehung Gl. (2.19). Beide Schichten des KV werden als im Verbund "feinstverschmiert" betrachtet. Die Stoffgesetze der Einzelschichten sind jeweils orthotrop, siehe Gl. (2.6), wobei die zweite Schicht um 90° gegenüber der ersten gedreht ist. Die Gleichgewichtsbedingung für die x, y - Ebene Gl. (2.20) wird mit den relativen Schichtdicken der Einzelschichten zu :

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_x &= t_1' \sigma_{x1} + t_2' \sigma_{x2} \\ \hat{\sigma}_y &= t_1' \sigma_{y1} + t_2' \sigma_{y2} \\ \hat{\tau}_{xy} &= t_1' \tau_{xy1} + t_2' \tau_{xy2}\end{aligned}\quad (2.26)$$

Die Vorgehensweise zur Ermittlung der Koeffizienten des Stoffgesetzes des KV ist analog zu der, die beim AWW angewendet wurde. Man gibt eine Belastung (beispielsweise eine Spannung $\hat{\sigma}_x$) vor und stellt mittels der Gleichgewichtsbedingung Gl. (2.26), den "Verträglichkeitsbedingungen" Gl. (2.18) und den Stoffgesetzen der UD-Schichten eine Beziehung zwischen den Verzerrungen und den Spannungen des Verbundes her. In Dickenrichtung des Verbundes muß man dabei zusätzlich noch beachten, daß gilt :

$$\hat{\epsilon}_z = t_1' \epsilon_{z1} + t_2' \epsilon_{z2}\quad (2.27).$$

Auf diese Art lassen sich die Nachgiebigkeitskoeffizienten ermitteln. Die Wärme- und Feuchteausdehnungskoeffizienten (WAK und FAK) des Kreuzverbundes können auf analoge Weise ermittelt werden.

Für einen Kreuzverbund lauten die Beziehungen zur Ermittlung der Koeffizienten des Stoffgesetzes, unter Berücksichtigung gleichen Materials in beiden Schichten, mit den Grundelastizitätsgrößen $E_{II}, E_I, \nu_{II}, \nu_{II}, G_{II}, \alpha_{II}, \alpha_I$ (β_{II}, β_I) und den relativen Schichtdicken t_1' für die 0° -Schicht bzw. t_2' für die 90° -Schicht :

$$\hat{s}_{11} = \frac{M}{N} \frac{N_1}{E_1}, \quad \hat{s}_{22} = \frac{M}{N} \frac{N_2}{E_1}, \quad (2.28)$$

$$\hat{s}_{12} = - \frac{M}{N} \frac{v_{III}}{E_1},$$

$$\hat{s}_{13} = \frac{v_{III} K_{12} - N_1 K_{34}}{N} \frac{1}{E_1},$$

$$\hat{s}_{23} = \frac{v_{III} K_{34} - N_2 K_{12}}{N} \frac{1}{E_1},$$

$$\hat{s}_{33} = \frac{M_1 (1 - v_{II} - 2v_{III} v_{III}) - \hat{s}_{13} E_1 (t_1' v_{III} M_1 + t_2' M_2) - \hat{s}_{23} E_1 (t_1' M_2 + t_2' v_{III} M_1)}{M} \frac{1}{E_1},$$

$$\hat{s}_{44} = t_1' \frac{1}{G_{II}} + t_2' \frac{1}{G_{III}},$$

$$\hat{s}_{55} = t_1' \frac{1}{G_{III}} + t_2' \frac{1}{G_{II}},$$

$$\hat{s}_{66} = \frac{1}{G_{III}},$$

$$\hat{\alpha}_x = \frac{N_1 K_{64} - v_{III} K_{52}}{N},$$

$$\hat{\alpha}_y = \frac{N_2 K_{52} - v_{III} K_{64}}{N},$$

$$\hat{\alpha}_z = \frac{M_1 (\alpha_{II} v_{III} + \alpha_I) - \hat{\alpha}_x K_{34} - \hat{\alpha}_y K_{12}}{M}.$$

Dabei gelten folgende Abkürzungen :

$$N_1 = t_1' + t_2' \frac{v_{III}}{v_{III}}, \quad N_2 = t_1' \frac{v_{III}}{v_{III}} + t_2',$$

$$N = N_1 N_2 - v_{III}^2,$$

$$M = (1 - v_{III} v_{III}), \quad M_1 = (1 + v_{II}), \quad M_2 = (v_{II} + v_{III} v_{III}),$$

$$K_1 = t_1' v_{III} + t_2', \quad K_2 = t_1' + t_2' v_{III},$$

$$K_{12} = v_{III} K_1 + v_{II} K_2,$$

$$K_3 = t_1' + t_2' v_{III}, \quad K_4 = t_1' v_{III} + t_2',$$

$$K_{34} = v_{III} K_3 + v_{II} K_4,$$

$$K_5 = t_1' + t_2' \frac{1}{v_{III}}, \quad K_6 = t_1' \frac{1}{v_{III}} + t_2',$$

$$K_{52} = \alpha_{II} v_{III} K_5 + \alpha_I K_2,$$

$$K_{64} = \alpha_{II} v_{III} K_6 + \alpha_I K_4.$$

Die Auswertung der Formeln (2.28) führt für den ebenen Fall (nur Elastizitäts-, und Wärmeausdehnungskoeffizienten in der x, y - Ebene) zu den gleichen Werten wie mit den in /2.11/ und /2.8/ angegebenen Beziehungen.

2.3.3 Spannungsanalyse an AWV/KV

Die bisherigen Betrachtungen haben gezeigt, wie man das Stoffgesetz für AWV und KV herleitet. Jetzt ist es erforderlich, noch einiges zur Spannungs- und Verformungsanalyse an diesen speziellen Mehrschichtenverbunden zu sagen.

Im allgemeinen sind zunächst die Spannungen im Bauteilkoordinatensystem bekannt. Bei einer UD-Schicht können die Schichtspannungen durch eine Transformation Gl. (2.11) gewonnen werden. Die Schichtspannungsanalyse an AWV/KV ist jedoch wegen der gegenseitigen Behinderung der Schichten etwas aufwendiger. Falls nicht schon z. B. aus einer FEM-Berechnung bekannt, ermittelt man zunächst die Verzerrungen des Verbundes mit Gl. (2.17):

$$\hat{\epsilon} = \hat{S} \hat{\sigma} + \hat{\alpha} \Delta T + \hat{\beta} \Delta M \quad (2.29).$$

Mit den Gln. (2.18) kennt man jetzt bereits die Verzerrungen in der x, y - Schichtebene der einzelnen UD-Schicht. Mit Gl. (2.19) sind auch die sog. interlaminaren Spannungen (in Dickenrichtung der Schicht) bekannt. Durch Transformation mit dem jeweiligen Schichtwinkel gewinnt man die auf das "natürliche" \parallel, \perp, z - Koordinatensystem der Schicht bezogenen Spannungen $\sigma_z, \tau_{\perp z}, \tau_{\parallel z}$, sowie die Verzerrungen $\epsilon_{\parallel}, \epsilon_{\perp}, \gamma_{\parallel}$. Die restlichen Spannungen ermittelt man mit dem Elastizitätsgesetz einer Schicht unter Berücksichtigung der Dehnungsanteile, die durch eine Normalspannung in Dickenrichtung und Eigen-Wärme- und Querdehnungen hervorgerufen werden zu:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\parallel} \\ \sigma_{\perp} \\ \tau_{\parallel\perp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{\parallel} & q_{\parallel\perp} & 0 \\ & q_{\perp} & 0 \\ \text{sym.} & & q_{\#} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{\parallel} - s_{13} \sigma_z - \alpha_{\parallel} \Delta T - \beta_{\parallel} \Delta M \\ \epsilon_{\perp} - s_{23} \sigma_z - \alpha_{\perp} \Delta T - \beta_{\perp} \Delta M \\ \gamma_{\parallel\perp} \end{bmatrix} \quad (2.30).$$

Die restlichen Verzerrungen ermittelt man aus der dritten, vierten und fünften Zeile des Stoffgesetzes, Gln. (2.5, 2.6), zu:

$$\begin{aligned} \epsilon_z &= s_{13} \sigma_{\parallel} + s_{23} \sigma_{\perp} + s_{33} \sigma_z + \alpha_1 \Delta T + \beta_1 \Delta M \\ \gamma_{\perp z} &= s_{44} \tau_{\perp z} \quad ; \quad \gamma_{\parallel z} = s_{55} \tau_{\parallel z} \end{aligned} \quad (2.31).$$

Zur Spannungsanalyse an AWW/KV benötigt man lediglich das Stoffgesetz des Verbundes sowie die Grundelastizitätsgrößen einer Einzelschicht. Die Transformation wird mit dem jeweiligen Faserrichtungswinkel ($\pm\omega$, $0^\circ/90^\circ$) durchgeführt. Die in den Gln. (2.30, 2.31) benutzten Nachgiebigkeiten s_{ij} kann man den Gln. (2.5, 2.6) entnehmen, die Steifigkeitskoeffizienten q_{ij} werden im nächsten Abschnitt erläutert.

2.4 Dickwandige und dünnwandige Strukturen

Die im Abschn. 2.1 gezeigten Zusammenhänge sind der Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen zu ebenen Modellen. Unter bestimmten Voraussetzungen vereinfachen sich dabei die Stoffgesetze.

Ein häufig vorkommender Sonderfall ist der ebene Spannungszustand (ESZ). Er liegt dann vor, wenn die Normalspannung in Dickenrichtung $\sigma_z = 0$ gesetzt wird. Die Schubspannungen in Dickenrichtung τ_{yz} , τ_{xz} , die dann auch Null sind, können gesondert behandelt werden, hierauf wird noch eingegangen.

Für die dritte Zeile des Stoffgesetzes einer transformierten UD-Schicht ergibt sich damit für σ_z :

$$\sigma_z = 0 = c_{13} \epsilon_x + c_{23} \epsilon_y + c_{33} \epsilon_z + c_{36} \gamma_{xy} \quad (2.32).$$

Diese Gleichung wird nach ϵ_z aufgelöst zu

$$\epsilon_z = - \frac{c_{13} \epsilon_x + c_{23} \epsilon_y + c_{36} \gamma_{xy}}{c_{33}} \quad (2.33).$$

Jetzt können in dem Elastizitätsgesetz alle Dehnungen in Dickenrichtung durch Gl. (2.33) ersetzt werden.

Exemplarisch wird dies anhand der ersten Zeile des Stoffgesetzes durchgeführt. Man erhält:

$$\sigma_x = c_{11} \epsilon_x + c_{12} \epsilon_y + c_{13} \left(- \frac{c_{13} \epsilon_x + c_{23} \epsilon_y + c_{36} \gamma_{xy}}{c_{33}} \right) + c_{16} \gamma_{xy} \quad (2.34).$$

Nun faßt man die mit den einzelnen Verzerrungen verknüpften Steifigkeiten zusammen:

$$\sigma_x = \left(c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}} \right) \epsilon_x + \left(c_{12} - \frac{c_{13} c_{23}}{c_{33}} \right) \epsilon_y + \left(c_{16} - \frac{c_{13} c_{36}}{c_{33}} \right) \gamma_{xy} \quad (2.35).$$

Es entstehen neue "reduzierte Steifigkeiten", die nachfolgend mit "q" bezeichnet werden und folgender Gesetzmäßigkeit unterliegen, vgl. auch /1.15/ :

$$q_{ij} = c_{ij} - \frac{c_{i3} c_{j3}}{c_{33}} \quad (2.36)$$

für $i, j = 1, 2, 6$ (für $i, j = 4, 5$ bleiben die 3D-Steifigkeiten erhalten).

Mit Gl. (2.36) erhält man für eine "dicke" Schicht unter Berücksichtigung der Schubverformung in Dickenrichtung folgendes Elastizitätsgesetz für den ESZ :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{16} & 0 & 0 \\ & q_{22} & q_{26} & 0 & 0 \\ & & q_{66} & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & c_{44} & c_{45} \\ & & & & c_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Für "dünne" Schichten, deren Verhältnis Länge/Dicke größer als 20 ist, kann man in guter Näherung die transversalen Schubspannungen (in Dickenrichtung) vernachlässigen /2.27/.

Das Elastizitätsgesetz für dünne Schichten nimmt somit folgende Form an:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{16} \\ & q_{22} & q_{26} \\ \text{sym.} & & q_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.38),$$

nach den Verzerrungen aufgelöst :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} \\ & s_{22} & s_{26} \\ \text{sym.} & & s_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.39),$$

die Nachgiebigkeitskoeffizienten sind identisch mit denen der dreidimensionalen Betrachtung.

Für den Sonderfall der "dünnen" transversal isotropen Schicht erhält man für das natürliche \parallel, \perp - Koordinatensystem folgendes Elastizitätsgesetz, wie es z.B. auch in /2.4/ zu finden ist.

Nach den Spannungen aufgelöst ergibt sich unter Berücksichtigung von Wärme- und Quell-Dehnungen:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{II} \\ \sigma_I \\ \tau_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{II} & q_{III} & 0 \\ & q_I & 0 \\ \text{sym.} & & q_{\#} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{II} - \alpha_{II} \Delta T - \beta_{II} \Delta M \\ \varepsilon_I - \alpha_I \Delta T - \beta_I \Delta M \\ \gamma_{III} \end{bmatrix} \quad (2.40),$$

mit:

$$q_{II} = \frac{E_{II}}{1 - \nu_{III} \nu_{III}}, \quad q_I = \frac{E_I}{1 - \nu_{II} \nu_{III}}$$

$$q_{III} = q_{III} = \frac{\nu_{III} \cdot E_{II}}{1 - \nu_{II} \nu_{III}}, \quad q_{\#} = G_{III}$$

Nach den Verzerrungen aufgelöst erhält man:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{II} \\ \varepsilon_I \\ \gamma_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{II} & s_{III} & 0 \\ & s_I & 0 \\ \text{sym.} & & s_{\#} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{II} \\ \sigma_I \\ \tau_{III} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{II} \\ \alpha_I \\ 0 \end{bmatrix} \Delta T + \begin{bmatrix} \beta_{II} \\ \beta_I \\ 0 \end{bmatrix} \Delta M \quad (2.41),$$

mit:

$$s_{II} = \frac{1}{E_{II}} \quad ; \quad s_I = \frac{1}{E_I} \quad ; \quad s_{III} = s_{III} = -\frac{\nu_{III}}{E_I} \quad ; \quad s_{\#} = \frac{1}{G_{III}}$$

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Stoffgesetze, Gln. (2.38, 2.39) oder Gln. (2.40, 2.41) sind der Ausgangspunkt der Schichtenverbundanalyse mittels der Kontinuumstheorie /1.21/, der klassischen Laminattheorie (CLT), vgl. /1.15/.

2.5 Bruchverhalten

Faser-Kunststoff-Verbunde weisen neben der bereits besprochenen Elastizitätsanisotropie auch eine sehr ausgeprägte Festigkeitsanisotropie auf. In UD-Schichten beispielsweise erreicht man in faserparalleler Richtung Festigkeiten von hochfestem Stahl, senkrecht zur Faserrichtung und unter Schubbeanspruchung liegen die Festigkeiten jedoch deutlich niedriger, etwa bei den Werten des unverstärkten Matrixmaterials. Innerhalb eines Mehrschichtenverbundes können manche Schichten bis zur Bruchgrenze belastet sein, während andere noch große Reserven aufweisen. Daher ist es nicht sinnvoll, eine Bruchspannung für das gesamte Laminate anzugeben. Eine Bruchanalyse muß also vernünftigerweise schichtenweise erfolgen; eine sinnvolle Optimierung z. B. in Richtung gleicher Ausnutzung aller Schichten wird hierdurch erst möglich.

Die Spannungen werden dann mit Hilfe eines geeigneten Bruchkriteriums mit den entsprechenden Festigkeitswerten verglichen. Bei Faser-Kunststoff-Verbunden (FKV) muß man grundsätzlich zwei Brucharten unterscheiden, Faserbruch (FB) und Zwischenfaserbruch (ZFB). Beim Faserbruch handelt es sich meist um das Zerreißen von Fasern unter Zugbeanspruchung. Im Fall des Zwischenfaserbruchs spielt sich das Bruchgeschehen im wesentlichen zwischen den Fasern ab; entweder in Form von Kohäsivbrüchen in der Matrix oder als Adhäsivbruch an der Faser/Matrix-Grenzfläche. Diese Unterscheidung im Bruchverhalten wurde erstmalig von PUCK /2.28, 2.29/ vorgenommen und ist die Basis wirklichkeitstreuere Bruchkriterien für Faserverbunde aus UD-Schichten. In neuerer Zeit kommen auch andere Autoren /2.30, 2.31/ durch experimentelle Untersuchungen an Rohrprobekörpern zu dem Ergebnis, daß es bei Faserverbundwerkstoffen zwei Versagensarten gibt; sie bestätigen damit die von PUCK vorgeschlagene Unterscheidung nach der Bruchart.

Für den Faserbruch gilt folgendes Kriterium:

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11B}} \right)^2 = 1 \quad (2.42).$$

Als geeignete Bruchhypothese für den ebenen Spannungszustand schlugen PUCK, SCHÜRMANN /2.32/ ein auf der 1-Achse verschobenes Ellipsoid vor, das den unterschiedlichen Querkzug- und Querkdruckfestigkeiten Rechnung trägt.

Aufgrund von physikalisch begründeten und experimentell gestützten Vorstellungen lautet das Kriterium für Zwischenfaserbruch:

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11Mb}} \right)^2 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_{1dB} \sigma_{1zB}} + \frac{\sigma_{1dB} - \sigma_{1zB}}{\sigma_{1dB} \sigma_{1zB}} \sigma_1 + \left(\frac{\tau_{111}}{\tau_{111B}} \right)^2 = 1 \quad (2.43).$$

Man kann sich die Bruchkriterien, Gln. (2.42, 2.43) veranschaulichen, indem man sie in einem dreidimensionalen Spannungsraum darstellt, vgl. /2.32/. Auf diese Weise erhält man den in Bild 2.3 dargestellten Ellipsoid-Stumpf ("Bruchzigarre"). Spannungszustände $(\sigma_{II}/\sigma_I/\tau_{III})$, die zu Punkten auf der Mantelfläche des Versagenskörpers führen, ist Zwischenfaserbruch zugeordnet. Spannungszustände $(\sigma_{II}/\sigma_I/\tau_{III})$, die zu Punkten auf den Ebenen führen, die die Spitze des Ellipsoids abschneiden, führen zu Faserbruch. Der Schnittpunkt der σ_{II} -Achse mit der Ellipsoidmantelfläche stellt eine fiktive Bruchfestigkeit dar, die sich ergeben würde, wenn die Fasern die gleiche Bruchdehnung wie die Matrix ertragen könnten ($\sigma_{II MB} \approx E_{II} \cdot \epsilon_{BM}$).

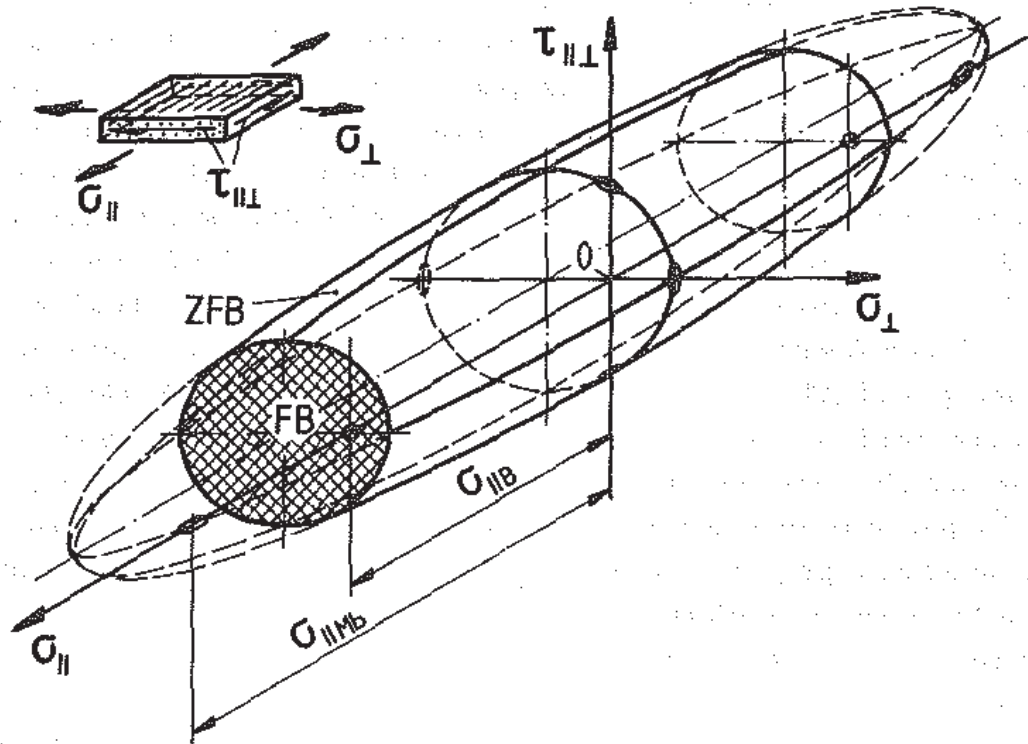


Bild 2.3: Bruch-Ellipsoid für unidirektionale Faserverbundwerkstoffe. σ_{II} -Achse gegenüber σ_I - und τ_{III} -Achse etwa 1:5 verkürzt gezeichnet.
FB: Faserbruch, ZFB: Zwischenfaserbruch

2.5.1 Versagenskriterien anisotroper Körper für räumliche Spannungszustände

Verfeinerte Analyseverfahren machen es heutzutage möglich, die Beanspruchung selbst kompakter Bauteile sicher zu ermitteln. Dabei treten in der Regel räumliche Spannungszustände auf, die man mit geeigneten Bruchkriterien bewerten muß. Für isotrope Werkstoffe sind solche Kriterien seit langem bekannt. Für anisotrope Werkstoffe sind zumeist Versagenskriterien für ebene Beanspruchungen im Gebrauch; NAHAS /2.33/ stellt in einer Übersicht 30 Versagenskriterien unterschiedlicher Autoren für Faserverbundwerkstoffe ("laminated composites") zusammen. Diese Pauschalbruchkriterien werden teilweise auf das gesamte Laminat angewendet, teilweise auf einzelne Schichten eines Mehrschichtenverbundes. Für räumliche Spannungszustände sind nur einige wenige geeignet, diese stammen von HILL, NORRIS, HOFFMAN, GOL'DENBLAT/KOPNOV, TSAI/WU. Dreidimensionale Spannungszustände werden von HASHIN /2.34/ beurteilt; er unterscheidet Faser- und Matrixversagen mit zwei einfachen Kriterien, die für Zug- und Druckbeanspruchung jeweils gesondert formuliert werden. Eine Anwendung dieser nicht einfach zu handhabenden Kriterien findet sich in /2.35/.

Im weiteren wird speziell auf das Versagenskriterium in Form des Tensorpolynoms eingegangen, da hiermit größtmögliche Freiheit in der Beschreibung des Werkstoffversagens anisotroper Körper gegeben ist. Die ursprüngliche Fassung stammt von GOL'DENBLAT,KOPNOV /2.36/; ihr liegt die Annahme zugrunde, daß eine Versagensfläche im mehrdimensionalen Spannungsraum existiert, die durch eine skalare Funktion (Potentialfläche) der Form

$$(F_{ij} \sigma_{ij})^\alpha + (F_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl})^\beta + (F_{ijklmn} \sigma_{ijk} \sigma_{lmn})^\gamma + \dots = 1 \quad (2.44)$$

mit $\alpha = 1$, $\beta = 1/2$, $\gamma = 1/3$, etc. beschrieben wird. TSAI,WU /2.37/ greifen diese Formulierung auf und betrachten nur lineare und quadratische Terme; damit beschreibt die Funktion (in verkürzter Tensorschreibweise)

$$f(\sigma) = F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad (2.45)$$

einen "Ellipsoiden" im mehrdimensionalen Spannungsraum. Dabei sind F_i und F_{ij} Festigkeitstensoren 2. und 4. Stufe.

Für einen anisotropen Körper im dreidimensionalen Raum ($i, j = 1,2,3,4,5,6$) lauten die Festigkeitstensoren:

$$F_i = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} ; F_{ij} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & F_{15} & F_{16} \\ & F_{22} & F_{23} & F_{24} & F_{25} & F_{26} \\ & & F_{33} & F_{34} & F_{35} & F_{36} \\ & & & F_{44} & F_{45} & F_{46} \\ & & & & F_{55} & F_{56} \\ & & & & & F_{66} \end{bmatrix} \quad (2.46).$$

Hier sind also 6 und 21 voneinander unabhängige Festigkeiten zu bestimmen. Ebenso wie bei den Stoffgesetzen kann man auch hier spezielle Symmetrien nutzen, um die Anzahl der Festigkeitskoeffizienten zu reduzieren. Für einen transversal isotropen Körper (eine UD-Schicht) lauten die Festigkeiten dann:

$$F_i = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; F_{ij} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & F_{22} & F_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & F_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & F_{44} & 0 & 0 \\ & & & & F_{55} & 0 \\ & & & & & F_{66} \end{bmatrix} \quad (2.47a).$$

Rein formal gelten wie bei den Nachgiebigkeitskoeffizienten Gl. (2.5) außerdem folgende Beziehungen für die "isotrope" 2, 3 - Ebene:

$$\begin{aligned} F_2 &= F_3 \\ F_{12} &= F_{13} ; F_{22} = F_{33} ; F_{55} = F_{66} \\ F_{44} &= 2 (F_{22} - F_{23}) \end{aligned} \quad (2.47b).$$

Damit verbleiben also noch 2 (F_i) und 5 (F_{ij}) voneinander unabhängige Festigkeitskoeffizienten.

Für isotrope Materialien mit gleicher Zug- und Druckfestigkeit reduziert sich die Zahl der Festigkeitskoeffizienten auf nur eine einzige Größe.

2.5.2 Bruchkriterien für transversal isotrope Körper

Nachdem im vorigen Abschnitt die allgemeine Formulierung einer Versagensfläche anisotroper Körper vorgestellt wurde, soll nun die mathematische Formulierung Gl. (2.45) mit physikalisch begründeten und experimentell gestützten Vorstellungen zur Bruchanalyse an unidirektional faserverstärkten Schichten aufgearbeitet werden. "Bruch" soll dabei als Ausdruck für die verschiedenen möglichen Versagensformen wie "Fließen", "Einsetzen nichtlinearen Werkstoffverhaltens", "Trennbruch" oder "Delamination" gelten.

Die Autoren des Tensorpolynoms /2.37/ hatten die Absicht, ein Kriterium zur Beschreibung des Versagens einer Schicht oder eines Laminats zu entwickeln. Dieses Kriterium findet in der reduzierten Form auf den ebenen Spannungszustand Anwendung; das Versagen einer Schicht wird als "first-ply-failure" gekennzeichnet, vgl. /2.38/. Diese Vorgehensweise hat den entscheidenden Nachteil, daß keine Aussage über die tatsächliche Versagensart, Faserbruch oder Zwischenfaserbruch gemacht werden kann und eine über den Zwischenfaserbruch einer Schicht hinausgehende Berechnung⁵⁾, wie von PUCK /2.29/ vorgeschlagen wird, nicht möglich ist.

In dieser Arbeit wird daher folgendes vorgeschlagen: für den Faserbruch gelte das bereits bekannte Kriterium Gl. (2.42), für Zwischenfaserbruch soll ein Kriterium gelten, das in der äußeren Form dem Tensorpolynom Gl. (2.45) entspricht.

Dazu ist es erforderlich, die Betrachtungen an einer UD-Schicht im "natürlichen" \parallel, \perp, z - Koordinatensystem durchzuführen; mit den Schichtspannungen wird Gl. (2.25) zu:

$$\begin{aligned} & F_1 \sigma_{\parallel} + F_2 \sigma_{\perp} + F_3 \sigma_z + \\ & + F_{11} \sigma_{\parallel}^2 + F_{22} \sigma_{\perp}^2 + F_{33} \sigma_z^2 + \\ & + 2 F_{12} \sigma_{\parallel} \sigma_{\perp} + 2 F_{13} \sigma_{\parallel} \sigma_z + 2 F_{23} \sigma_{\perp} \sigma_z + \\ & + F_{44} \tau_{\perp z}^2 + F_{55} \tau_{\parallel z}^2 + F_{66} T_{\parallel\perp}^2 = 1 \end{aligned} \quad (2.48).$$

Mit den Koeffizienten F_1, F_2, F_3 werden Unterschiede in den Zug- und Druckfestigkeiten berücksichtigt. F_{11}, F_{22}, F_{33} sind Festigkeitskoeffizienten, die zu den

5) Ein Faserverbundbauteil kann über die Zwischenfaserbruchgrenze hinaus belastet werden, da die intakten Fasern oder benachbarte Schichten die Kräfte aufnehmen. Das endgültige Versagen des Bauteils geschieht dann durch Faserbruch in einer oder mehreren Schichten.

Normalspannungen gehören; F_{44} , F_{55} , F_{66} sind Schubfestigkeitskoeffizienten. Die Festigkeitskoeffizienten $2F_{12}$, $2F_{13}$, $2F_{23}$ beschreiben die gegenseitige Einflußnahme von Normalspannungen aufeinander.

Nun erhebt sich die Frage, wie diese Festigkeitskoeffizienten bestimmt werden. Dazu benötigt man Werkstoffversuche an einfachen Probekörpern, wie z.B. in /2.32/ für ebene Belastungsfälle beschrieben sind. Sind beispielsweise die Querkzugfestigkeit σ_{1zB} und die Querkdruckfestigkeit σ_{1dB} einer UD-Schicht bekannt, lassen sich die zugehörigen Festigkeitskoeffizienten bestimmen, indem man in Gl. (2.48) die jeweiligen Festigkeiten einsetzt.

$$\begin{aligned} F_2 \sigma_{1zB} + F_{22} \sigma_{1zB}^2 &= 1 \\ -F_2 \sigma_{1dB} + F_{22} \sigma_{1dB}^2 &= 1 \end{aligned} \quad (2.49)$$

Aus diesen beiden Gleichungen mit je zwei Unbekannten ergeben sich dann:

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{\sigma_{1zB}} - \frac{1}{\sigma_{1dB}} = \frac{\sigma_{1dB} - \sigma_{1zB}}{\sigma_{1dB} \sigma_{1zB}} \\ F_{22} &= \frac{1}{\sigma_{1dB} \sigma_{1zB}} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Für den Fall der Belastung durch eine Normalspannung in Dickenrichtung $\sigma_z \hat{=} \sigma_1$ kommt man zu gleichen Ergebnissen, es gilt:

$$F_3 = F_2 ; \quad F_{33} = F_{22} \quad (2.51)$$

Bei einer Belastung in Faserlängsrichtung $\sigma_{||}$ wird der Bruchkörper durch "fiktive" Bruchfestigkeiten beschrieben, genauso wie dies eingangs für den ebenen Fall dargestellt wurde. Die Festigkeitskoeffizienten ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\sigma_{||Mb d} - \sigma_{||Mb z}}{\sigma_{||Mb d} \sigma_{||Mb z}} \\ F_{11} &= \frac{1}{\sigma_{||Mb d} \sigma_{||Mb z}} \end{aligned} \quad (2.52)$$

mit $\sigma_{||Mb z} \approx E_{||} \cdot \epsilon_{zBM}$. Im Falle gleicher Bruchdehnungen ϵ_{BM} folgt $F_1 = 0$.

$$F_{11} = \left(\frac{1}{\sigma_{||Mb}} \right)^2$$

Die "Schubfestigkeiten" F_{55} , F_{66} ergeben sich aus den Werten eines Schubversuches, vgl. /2.32/, einfach zu:

$$F_{55} = F_{66} = \left(\frac{1}{\tau_{IIIB}} \right)^2 \quad (2.53).$$

Die Interaktionsterme, z. B. F_{12} sind nicht einfach zu bestimmen und geben selbst für den einfachen ebenen Fall immer wieder Anlaß zu intensiven experimentellen Untersuchungen und Veröffentlichungen, siehe /1.16, 2.39, 2.40/. Eigene Untersuchungen haben gezeigt, daß man diese Koeffizienten bei der vorliegenden Formulierung zu Null setzen kann; damit können Versuchsergebnisse, beispielsweise /2.30/, gut beschrieben werden.

SCHNEIDER, BARDENHEIER /2.41/ geben den Fehler kleiner als sechs Prozent an, wenn diese Größen vernachlässigt werden. Daher soll gelten:

$$2 F_{12} = 2 F_{13} = 0 \quad (2.54).$$

Als letzte noch zu bestimmenden Koeffizienten verbleiben F_{44} und $2 F_{23}$; Dazu ist es sinnvoll, einen Zusammenhang dieser Größen mit bereits bekannten Querkzug-/Querkdruckfestigkeiten herzustellen. Es seien also nur Spannungen in der "isotropen" $1, z$ - Ebene betrachtet, siehe *Bild 2.4*.

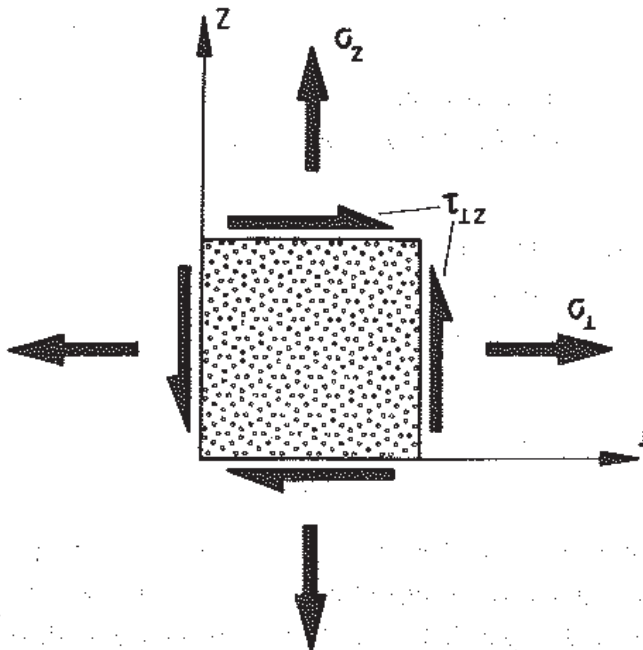


Bild 2.4: Ebener Spannungszustand in der 1, z - Ebene eines UD-Schichtkörpers

Vom Tensorpolynom Gl. (2.48) verbleibt für einen ebenen Spannungszustand in der 1, z - Ebene noch :

$$F_2 \sigma_1 + F_3 \sigma_z + F_{22} \sigma_1^2 + F_{33} \sigma_z^2 + 2 F_{23} \sigma_1 \sigma_z + F_{44} \tau_{1z} = 1 \quad (2.55).$$

Wie bereits gezeigt, Gl. (2.51), unterscheiden sich die Festigkeitseigenschaften in der 1 (2) und z (3) Richtung nicht. Logischerweise muß für die "isotrope" 1, z - Ebene ein Versagenskriterium für isotrope Werkstoffe gültig sein.

In Fällen, in denen die Druckfestigkeit größer als die Zugfestigkeit ist, kommen dafür als einfache Bruchkörper - im dreidimensionalen Spannungsraum der Hauptnormalspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - der Kegel (Konus) oder das Paraboloid in Frage; diese Versagenskörper passen gut bei Kunststoffen /2.41/. Bringt man diese Versagenskörper mit der 1, 2 - Ebene zum Schnitt, so ergeben sich Bruchkurven für den ebenen Spannungszustand, allerdings mit den Hauptnormalspannungen formuliert, vgl. /2.41/. Das konische Kriterium lautet :

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \left[\frac{m-1}{m+1} (\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{2m \sigma_{zB}}{m+1} \right]^2 = 0 \quad (2.56),$$

das parabolische Kriterium :

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_{zB} (m-1) (\sigma_1 + \sigma_2) - m \sigma_{zB}^2 = 0 \quad (2.57).$$

Das Verhältnis $m = \sigma_{dB} / \sigma_{zB}$ gibt das Verhältnis von Druck- zu Zugfestigkeit an. Die Bruchkurven, Gln. (2.56, 2.57) stellen für Verhältnisse von m folgendes dar :

- | | | | |
|-------------------------|---------|---|----------------|
| beim Kegel (Konus) mit: | $m = 1$ | : | HMH-Kriterium, |
| | $m < 3$ | : | Ellipsen, |
| | $m = 3$ | : | Parabeln, |
| | $m > 3$ | : | Hyperbeln, |
| beim Paraboloid : | $m = 1$ | : | HMH-Kriterium, |
| | $m > 1$ | : | Ellipsen. |

Im Falle der Betrachtung eines UD-Körpers in der "isotropen" 1, z - Ebene ist es wegen der Querdruck-/Querzug-Festigkeitsverhältnisse m (für GFK $m \approx 3$; für CFK $m \approx 4..6$) sinnvoll, das parabolische Bruchkriterium zur Beschreibung des Versagens zu benutzen, denn beim konischen Kriterium würde bei $m \geq 3$ ein im zwei-achsigen Druckversuch ($\sigma_1 = \sigma_2$) belasteter Körper nicht versagen (Parabel, offen im Druckbereich).

Als nächstes wird das parabolische Kriterium (2.57) in eine Form gebracht, in der Querzug- und Querdruckfestigkeiten vorkommen. Gl. (2.57) wird mit $m = \sigma_{1dB} / \sigma_{1zB}$ zu:

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_{1dB} \sigma_{1zB}} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_{1dB} \sigma_{1zB}} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_{1dB} \sigma_{1zB}} + \frac{\sigma_{1dB} - \sigma_{1zB}}{\sigma_{1dB} \sigma_{1zB}} (\sigma_1 + \sigma_2) = 1 \quad (2.58).$$

Setzt man nun noch die Transformationsbeziehungen zwischen Hauptnormalspannungen σ_1, σ_2 und den Spannungskomponenten des ebenen Spannungszustandes $\sigma_1, \sigma_z, \tau_{1z}$ in diese Gleichung ein, so erhält man nach einigen Umformungen:

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_{1dB} \sigma_{1zB}} + \frac{\sigma_z^2}{\sigma_{1dB} \sigma_{1zB}} + \frac{\sigma_{1dB} - \sigma_{1zB}}{\sigma_{1dB} \sigma_{1zB}} (\sigma_1 + \sigma_z) - \frac{\sigma_1 \sigma_z}{\sigma_{1dB} \sigma_{1zB}} + \frac{3 \tau_{1z}^2}{\sigma_{1dB} \sigma_{1zB}} = 1 \quad (2.59).$$

Diese Funktion beschreibt einen Versagenskörper im Spannungsraum $\sigma_1, \sigma_z, \tau_{1z}$; die Gl. (2.58) beschreibt eine Versagensfläche in der Hauptnormalspannungsebene σ_1, σ_2 . Beide Formulierungen sind gleichwertig; der Anwender wird aber eher Gl. (2.59) bevorzugen, da er hier eine Hauptnormalspannungstransformation "spart".

Führt man abschließend einen Koeffizientenvergleich der Gln. (2.55) und (2.59) durch, so ergeben sich neben den bereits bekannten Festigkeitskoeffizienten:

$$F_2 = F_3 = \frac{\sigma_{1dB} - \sigma_{1zB}}{\sigma_{1dB} \sigma_{1zB}} \quad (2.60.a)$$

$$F_{22} = F_{33} = \frac{1}{\sigma_{1dB} \sigma_{1zB}}$$

folgende bisher noch nicht bestimmten Koeffizienten:

$$2 F_{23} = - \frac{1}{\sigma_{1dB} \sigma_{1zB}} \quad (2.60.b).$$

$$F_{44} = \frac{3}{\sigma_{1dB} \sigma_{1zB}}$$

Als wichtige Ergebnisse kann man festhalten:

- Die quer zur Faser wirkenden Normalspannungen σ_1 und σ_z beeinflussen einander ($2F_{23}$);

- Die Schubfestigkeit τ_{llB} hängt nur von der Querkzug- und Querdrukfestigkeit ab und errechnet sich zu:

$$\tau_{llB} = \sqrt{\frac{\sigma_{ldB} \sigma_{lzb}}{3}} \quad (2.61);$$

- Die bereits gefundenen Beziehungen Gl. (2.50, 2.51) werden bestätigt.

Damit ist es also jetzt möglich, räumliche Spannungszustände an einem dickwandigen UD-Schichtkörper sicher zu beurteilen. Dabei kann man die Bruchart - Faserbruch oder Zwischenfaserbruch - mit den Gl. (2.42) bzw. (2.48) bestimmen. Zur Beschreibung des Zwischenfaserbruchkriteriums genügen wenige Werkstoffversuche; Belastungen quer zur Faserrichtung (σ_{lz} , σ_{ld}) und unter Schub (τ_{ll}) sowie die Matrix-Bruchdehnung (ϵ_{BM}) reichen zur Beschreibung der Versagensfläche aus. Zusätzlich benötigt man noch Angaben über die Festigkeiten in Richtung der Fasern (σ_{llz} , σ_{lld}).

Für den ebenen Spannungszustand, bestehend aus σ_{ll} , σ_{l} , τ_{ll} , ist Gl. (2.48) identisch mit der ursprünglichen Form des Ellipsoids nach Gl. (2.43).

Selbstverständlich können auch "interlaminare" Schubspannungen beurteilt werden, dafür wird Gl. (2.48) zu:

$$F_{44} \tau_{lz}^2 + F_{55} \tau_{llz}^2 = 1 \quad (2.62),$$

$$\text{mit } F_{44} = \frac{3}{\sigma_{ldB} \sigma_{lzb}} \quad \text{und} \quad F_{55} = \left(\frac{1}{\tau_{llB}} \right)^2.$$

Als Sonderfall ist in Gl. (2.48) auch die von v. MISES aufgestellte Fließbedingung (Versagensbedingung), die für isotrope Werkstoffe benutzt wird, enthalten. Mit den Festigkeitskoeffizienten

$$F_1 = F_2 = F_3 = 0 \quad (2.63)$$

$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = \frac{1}{\sigma_B^2}$$

$$2 F_{12} = 2 F_{13} = 2 F_{23} = - \frac{1}{\sigma_B^2}$$

$$F_{44} = F_{55} = F_{66} = \frac{3}{\sigma_B^2}$$

wird Gl. (2.48) mit den Spannungen σ_x , σ_y , σ_z , τ_{yz} , τ_{xz} , τ_{xy} zu:

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_B^2} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_B^2} + \frac{\sigma_z^2}{\sigma_B^2} - \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_B^2} - \frac{\sigma_x \sigma_z}{\sigma_B^2} - \frac{\sigma_y \sigma_z}{\sigma_B^2} + \frac{3}{\sigma_B^2} (\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2) = 1 \quad (2.64).$$

Zieht man aus dieser Gleichung σ_B^2 heraus auf die rechte Seite, so entsteht die bekannte Formulierung, wie sie sich z. B. in /2.42/ findet.

Die oben entwickelte allgemeine Formulierung des Versagenskriteriums hat den großen Vorteil, daß man die Bruchanalyse eines Mehrschichtenverbundes aus Schichten unterschiedlichen Materials (Hybridlaminate) immer mit der gleichen Formel durchführen kann; dabei sind dann die entsprechenden Festigkeiten der (anisotropen, orthotropen oder auch isotropen) Schicht einzusetzen.

2.5.3 Werkstoffanstrengung und Reservefaktor

Als Maß für die Anstrengung eines Werkstoffes wird oft das Verhältnis der auftretenden Spannung zur ertragbaren "Bruch"-Spannung gebildet.

$$A = \frac{\sigma}{\sigma_B} \quad (2.65)$$

Bei einfachen Kriterien, wie z. B. dem Kriterium der maximalen Spannung führt dies zu recht einfachen Ausdrücken für die Werkstoffanstrengung. Für Faserbruch (FB) ergibt sich beispielsweise mit Gl. (2.42) die Anstrengung zu:

$$A_{FB} = \frac{\sigma_{II}}{\sigma_{II B}} \quad (2.66);$$

Spannungen und Festigkeiten müssen hier vorzeichenbehaftet eingesetzt werden.

Benutzt man ein Bruch- oder Versagenskriterium, welches mehrere Spannungs-komponenten miteinander verbindet, beispielsweise das modifizierte Tensorpolynom für Zwischenfaserbruch des vorigen Abschnitts, geht man zweckmäßigerweise wie folgt vor. Es gelte nach Gl. (2.45)

$$f(\sigma) = F_I \sigma_I + F_{II} \sigma_I \sigma_I = 1$$

Diese Funktion ist beispielsweise dann erfüllt, wenn man eine Kombination der zum Versagen führenden Spannungen σ_{IB} , $\sigma_{II B}$ dort einsetzt.

Ersetzt man dann die "Bruchspannungen" durch:

$$\sigma_{IB} = \frac{1}{A_{ZFB}} \sigma_i ; \quad \sigma_{IB} = \frac{1}{A_{ZFB}} \sigma_j \quad (2.67)$$

erhält man eine quadratische Gleichung in A_{ZFB} .

$$[F_i \sigma_i] \frac{1}{A_{ZFB}} + [F_{ij} \sigma_i \sigma_j] \frac{1}{A_{ZFB}^2} = 1$$

Lösen dieser quadratischen Gleichung liefert nur eine sinnvolle Lösung:

$$A_{ZFB} = \frac{[F_i \sigma_i]}{2} + \sqrt{\left(\frac{[F_i \sigma_i]}{2}\right)^2 + [F_{ij} \sigma_i \sigma_j]} \quad (2.68)$$

Mit den Festigkeitskoeffizienten aus den Gln. (2.52, 2.53, 2.60) für eine transversal isotropen Schicht folgt damit für die Werkstoffanstrengung gegen Zwischenfaserbruch:

$$A_{ZFB} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{1dB} - \sigma_{1zB}}{\sigma_{1dB} \sigma_{1zB}} (\sigma_1 + \sigma_2) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{\sigma_{1dB} - \sigma_{1zB}}{\sigma_{1dB} \sigma_{1zB}} (\sigma_1 + \sigma_2)\right)^2 + \frac{\left(\frac{\sigma_{II}}{\sigma_{II Mb}}\right)^2 + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 + 3 \tau_{1z}^2}{\sigma_{1dB} \sigma_{1zB}} + \frac{\tau_{IIz}^2 + \tau_{III}^2}{\tau_{III B}^2}} \quad (2.69)$$

Wenn die Werkstoffanstrengung $A_{ZFB} \geq 1$ ist, bedeutet dies, daß Zwischenfaserbruch eingetreten ist, $A_{ZFB} < 1$ bedeutet, daß die Schicht noch keinen Bruch erleidet.

Mit Hilfe dieser Beziehung werden die Einzelschichtspannungen eines MSV beurteilt. Dazu ist eine vorhergehende schichtenweise Spannungsanalyse erforderlich, beispielsweise auch für AWW/KV, vgl. Abschn. 2.3.3; daran schließt sich eine schichtenweise Bruchanalyse an.

Die Werkstoffanstrengung A_{ZFB} ist zur schnellen und sicheren Beurteilung der Güte eines Faserverbund-Laminates und der Ribbildungsgefahr - besonders in Hinblick auf eine Optimierung- äußerst wichtig.

Häufig wird anstatt der Werkstoffanstrengung ein Reservefaktor (margin of safety) angegeben, dies ist der Kehrwert der Werkstoffanstrengung.

$$R = A^{-1} \quad (2.70)$$

Vorsicht ist allerdings dann geboten, wenn man den Reservefaktor als Maß für eine noch mögliche Steigerung der mechanischen Belastung verwenden will. Dies ist nur solange zulässig, solange keine Eigenspannungen aus Temperatur oder Quellung im Bauteil vorhanden sind. Wenn dies doch der Fall ist, wird eine Vorgehensweise ähnlich der für ebene Belastungen in /1.16/ beschriebenen empfohlen; dies ist in modernen Berechnungsprogrammen zur klassischen Laminattheorie selbstverständlich berücksichtigt /2.43/.

2.6 Grundelastizitätsgrößen und Materialkennwerte

Nachdem in den vorausgegangenen Abschnitten die elastizitätstheoretischen Grundlagen und die mechanischen Eigenschaften anisotroper Körper erarbeitet wurden, soll jetzt eine Übersicht gegeben werden, wie man für die Dimensionierung einer Verbundstruktur zu den benötigten Elastizitätskenngrößen kommt. Als Grundelement eines Verbundes soll dabei die unidirektional-faserverstärkte Schicht betrachtet werden.

2.6.1 Mikromechanische Beziehungen

Faserverbunde sind Werkstoffe, die aus Fasern und umgebendem Matrixmaterial bestehen; mikroskopisch betrachtet sind diese Werkstoffe inhomogen. Die Elastizitätskonstanten dieser Werkstoffe kann man einerseits versuchstechnisch ermitteln, siehe z. B. /2.32, 2.44/, andererseits bestand schon sehr früh der Wunsch, die Elastizitätseigenschaften von Faser-Kunststoff-Verbunden aus den Grunddaten des Faser- und Matrixmaterials zu bestimmen. Dies hat den weiteren Vorteil, daß man für unterschiedliche Faservolumenanteile schnell zu brauchbaren Elastizitätsgrößen für die Dimensionierung kommt.

Zu einer der ersten Arbeiten auf diesem Gebiet zählt die Arbeit von HASHIN, ROSEN /2.45/; dort werden kreisförmige Fasern in hexagonaler Anordnung untersucht.

PUCK /1.21/ stellt mikromechanische Betrachtungen mittels eines Scheibchenmodells für unterschiedliche Faseranordnungen an und kommt so zu Gleichungen, die er mit Korrekturfaktoren an Meßergebnisse anpaßt.

Die nachfolgend aufgeführten Formeln gelten für Isotrope Fasern in einem isotropen Bettungsmaterial; für anisotrope Fasern wird in diesem Zusammenhang auf /1.25/ verwiesen. Alle mikromechanischen Beziehungen für die Grundelastizitätsgrößen von UD-Schichten stimmen gut mit Meßergebnissen für Glasfaser-Kunststoffe /2.46, 2.47/ überein.

Für den E-Modul in Faserrichtung gilt die Mischungsregel

$$E_{II} = \varphi E_F + (1 - \varphi) E_M \quad (2.71),$$

für den E-Modul senkrecht zur Faserrichtung gilt nach /2.11/:

$$E_I = E_{MO} \frac{1 + 0.85 \varphi^2}{(1 - \varphi)^{1.25} + \varphi \frac{E_{MO}}{E_F}} \quad ; \quad E_{MO} = \frac{E_M}{1 - \nu_M^2} \quad (2.72),$$

Der Schubmodul parallel und senkrecht zur Faser beträgt nach /2.48/:

$$G_{III} = G_M \frac{1 + 0.4 \varphi^{0.5}}{(1 - \varphi)^{1.45} + \varphi \frac{G_M}{G_F}} \quad (2.73),$$

mit $G_M = \frac{E_M}{2(1 + \nu_M)} \quad ; \quad G_F = \frac{E_F}{2(1 + \nu_F)}$

Für die Querkontraktion senkrecht zur Faserrichtung, bei einer Belastung parallel zur Faserrichtung gilt:

$$\nu_{III} = \varphi \nu_F + (1 - \varphi) \nu_M \quad (2.74),$$

Die Querkontraktion in Faserrichtung, bei einer Belastung senkrecht dazu, ergibt sich (nach Maxwell-Betti) zu:

$$\nu_{II} = \nu_{III} \frac{E_I}{E_{II}} \quad (2.75),$$

FOYE /2.49/ gibt für die Querkontraktionszahl in Dickenrichtung bei Belastung senkrecht zur Faser an:

$$\nu_{II} = \varphi \nu_F + (1 - \varphi) \nu_M \left[\frac{1 + \nu_M - \nu_{III} \frac{E_M}{E_{II}}}{1 - \nu_M^2 + \nu_M \nu_{III} \frac{E_M}{E_{II}}} \right] \quad (2.76);$$

der Schubmodul in Dickenrichtung ist: $G_{II} = \frac{E_I}{2(1 + \nu_{II})} \quad (2.77),$

Die Wärmeausdehnungskoeffizienten parallel und senkrecht zur Faserrichtung errechnen sich nach SCHNEIDER /2.8/ zu:

$$\alpha_{II} = \alpha_F + \frac{\alpha_M - \alpha_F}{\frac{\varphi}{1 - \varphi} \frac{E_F}{E_M} + 1} \quad (2.78).$$

$$\alpha_I = \alpha_M - (\alpha_M - \alpha_F) \left[\frac{2(v_M^3 + v_M^2 - v_M - 1) 1,1 \varphi}{1,1 \varphi (2 v_M^2 + v_M - 1) - (1 + v_M)} - \frac{v_M \frac{E_F}{E_M}}{\frac{E_F}{E_M} + \frac{(1 - 1,1 \varphi)}{1,1 \varphi}} \right]$$

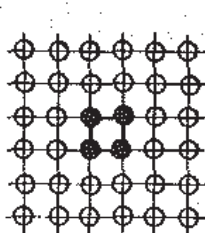
Die Feuchteausdehnungskoeffizienten der UD-Schicht lassen sich nach /1.16/ folgendermaßen berechnen:

$$\beta_{II} = \frac{\beta_M E_M}{\varphi E_F + (1 - \varphi) E_M} \frac{\rho_{FKV}}{\rho_M} \quad (2.79).$$

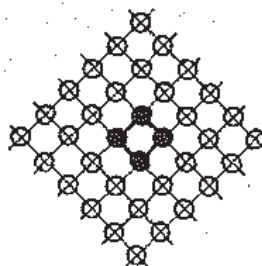
$$\beta_I = (1 + v_M) \beta_M \frac{\rho_{FKV}}{\rho_M} - v_{III} \beta_{II}$$

2.6.2 Numerische Untersuchungen zur Mikromechanik von Verbundwerkstoffen

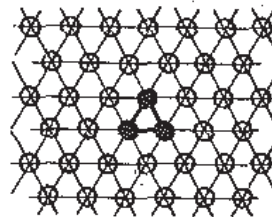
Die im vorigen Abschnitt angegebenen mikromechanischen Beziehungen gehen von ganz bestimmten Annahmen über die Verteilung der Fasern in der Matrix aus. Den in dieser Arbeit durchgeführten numerischen Untersuchungen mittels finiter-Elemente werden dabei Faseranordnungen nach PUCK /1.21/ zugrunde gelegt.



a) □



b) ◇



c) △

Bild 2.5: Spezielle Faseranordnungen bezüglich der Richtung der Querbeanspruchung nach /1.21/

Bild 2.5 a) und b) zeigt die quadratische Anordnung von Fasern, wobei die Belastungsrichtungen unter 0° und unter 45° zu zwei Modellen führt; in Bild 2.5 c) sind die Fasern hexagonal angeordnet, hier genügt ein Modell, wie in /2.50/ gezeigt wird.

HABERL /2.51/ bestimmt den E-Modul E_1 und die Querkontraktionszahl ν_{11} für die quadratische Anordnung n. Bild 2.5 a); dazu setzt er Differenzenverfahren und die FEM ein. Zu den FEM-Berechnungen ist zu sagen, daß die Annahme des ebenen Verzerrungszustandes für das ebene Berechnungsmodell nicht in allen Fällen zu befriedigenden Ergebnissen führt. Insbesondere zeigt sich das beim Verlauf der Querkontraktionszahl ν_{11} über dem Faservolumenanteil φ . Eigene Untersuchungen haben gezeigt, daß man mit der Annahme des ebenen Verzerrungszustandes (EVZ) oder der Annahme eines ebenen Spannungszustandes (ESZ) obere oder untere Schranken für die jeweils betrachteten Elastizitätsgrößen erhält. Am sinnvollsten ist die Berechnung mit Volumenmodellen; man kann einige Teilprobleme aber auch mit dem generalisierten ebenen Verzerrungszustand (GEVZ) behandeln, dies ist in /2.50/ näher beschrieben.

In dieser Arbeit werden Berechnungen an "Kleinmodellen" der quadratischen und hexagonalen Faseranordnungen vorgestellt; Bild 2.6 zeigt die repräsentativen Grundelemente, die in vielfacher Wiederholung den Verbundwerkstoff aufbauen können.

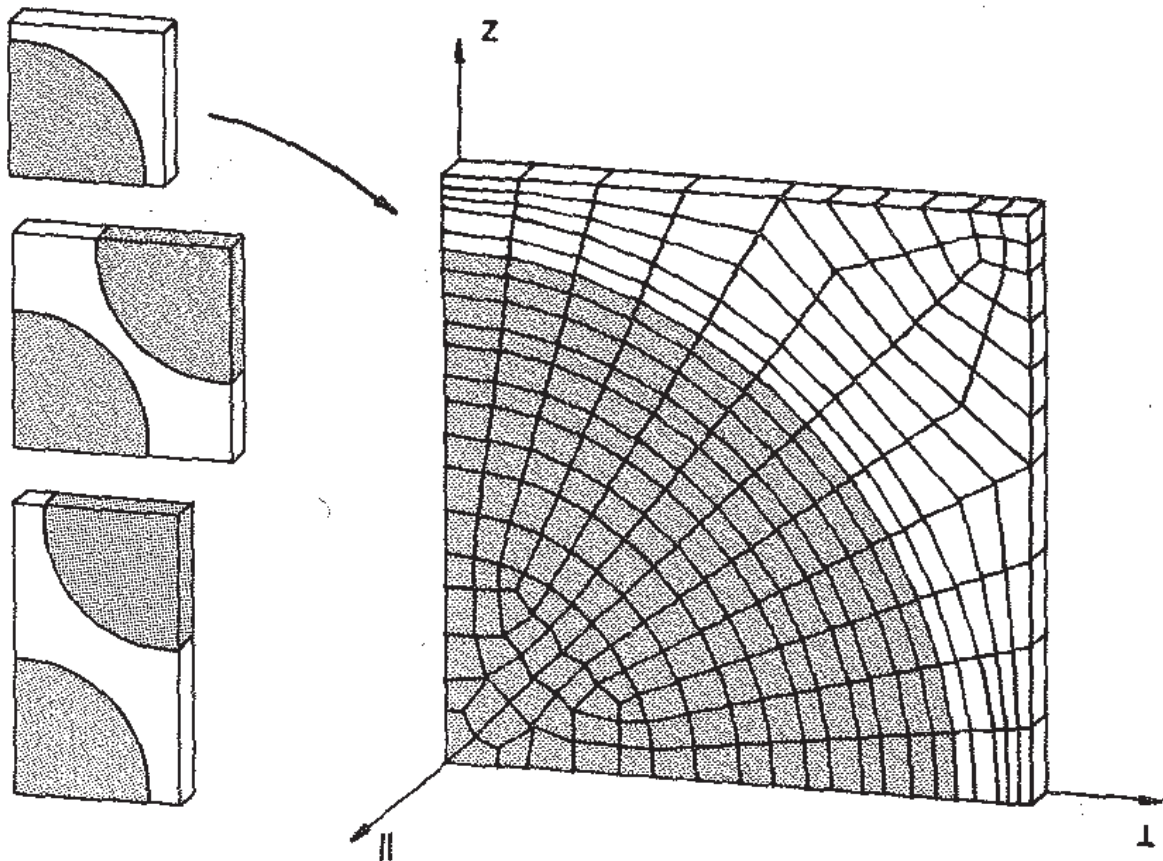


Bild 2.6 : Repräsentative Kleinmodelle für die verschiedenen Faseranordnungen und FEM-Berechnungsmodell am Beispiel der quadratischen Anordnung.

Beispielhaft ist hier das FEM-Modell zur quadratischen Packung abgebildet; es besteht aus einem Viertel einer isotropen Elementarglasfaser und aus umgebendem isotropen Matrixmaterial. Die Randbedingungen werden aus Symmetrie- und Paßbedingungen wie folgt gewählt:

- In den durch die Koordinatenachsen aufgespannten Ebenen wird die Verschiebungsmöglichkeit in Richtung der jeweiligen Flächennormalen unterdrückt.
- Punkte, die auf den übrigen Ebenen liegen, dürfen nur gleiche Verschiebungen in Richtung der jeweiligen Flächennormalen erfahren.

Dies erreicht man im FEM-Modell durch spezielle "abhängige" Freiheitsgrade (MPC - multi point constraint). Die Berechnungen wurden stets für alle Faseranordnungen durchgeführt. Dabei wird der Faservolumenanteil von Null bis siebzig Prozent in Stufen variiert und in nachfolgenden Diagrammen mit den jeweiligen mikromechanischen Beziehungen verglichen.

Als erste Belastung wird eine Verschiebung in Faserrichtung vorgegeben. Aus der benötigten Kraft errechnet man über das Hooke'sche Gesetz den E-Modul E_{II} , eine gleichzeitig auftretende Querkontraktion (Richtung \perp und z) führt zur Querkontraktionszahl ν_{II} . Beide Größen sind in *Bild 2.7* dargestellt, die Übereinstimmung mit der Mikromechanik ist als sehr gut zu bezeichnen.

Bei einer Belastung quer zur Faserrichtung (\perp oder z) wird zunächst der E-Modul E_{\perp} gewonnen, *Bild 2.8* zeigt für E_{\perp} eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse der quadratischen Anordnung mit Gl. (2.72), die hexagonale und die unter 45° belastete quadratische Anordnung liefern im Vergleich zur Mikromechanik etwas abweichende Werte. Gleichzeitig treten auch senkrecht zur "Kraftrichtung" Querkontraktionen auf. In Dickenrichtung wird dabei $\nu_{\perp\perp}$ wirksam; dieser Wert wurde bei einer flächigen Betrachtungsweise von Faserverbunden nicht benötigt, daher findet man wenig verlässliche Werkstoffangaben darüber. Im weiteren Teil des *Bildes 2.8* ist der Verlauf von $\nu_{\perp\perp}$ dargestellt. Hier liegt die hexagonale Faseranordnung am dichtesten bei der Kurve nach Gl. (2.76). Als weiteres Ergebnis erhält man die Querkontraktionszahl ν_{II} , siehe *Bild 2.9*, die Beziehung von Maxwell-Betti Gl. (2.75) findet sich in den Ergebnissen wieder. Aus den ermittelten Grundelastizitätsgrößen E_{\perp} , $\nu_{\perp\perp}$ läßt sich außerdem der Schubmodul $G_{\perp\perp}$ "in Dickenrichtung" errechnen, siehe *Bild 2.9*.

Als letzter zu bestimmender Wert verbleibt der Schubmodul G_{II} , auch hier müssen aus Symmetriegründen spezielle Randbedingungen gewählt werden, siehe *Bild 2.6*:

- Alle Punkte des Körpers verschieben sich nur in II -Richtung;
- Die Punkte auf der durch die Koordinatenachsen II, z aufgespannten Ebene sind unverschieblich, alle Punkte der parallel dazu liegenden Ebene verschieben sich um den gleichen Betrag in II -Richtung.

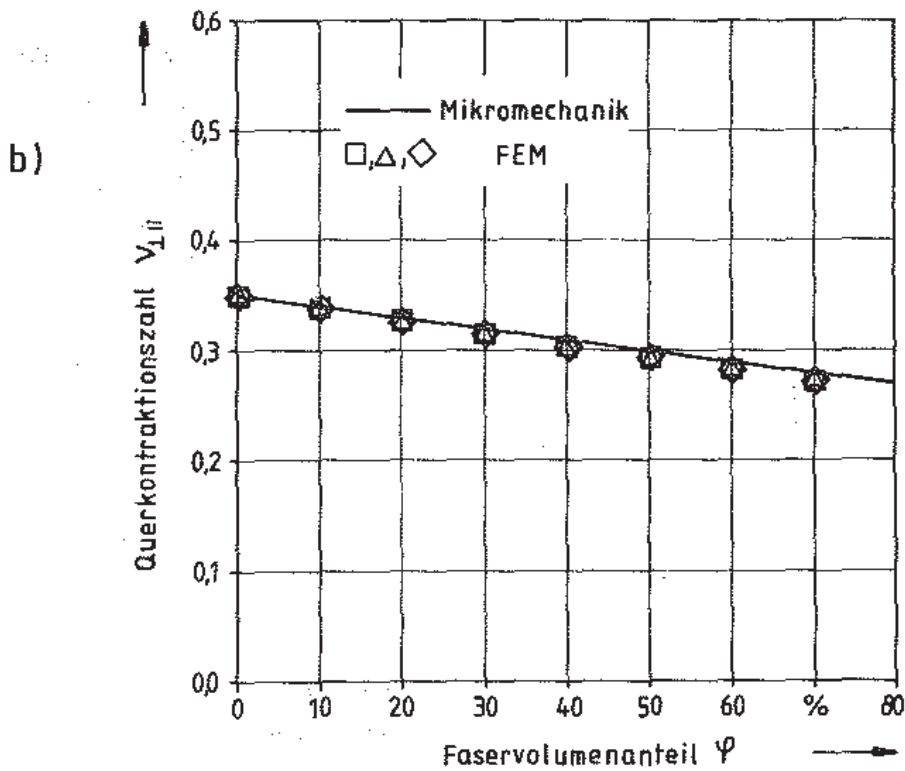
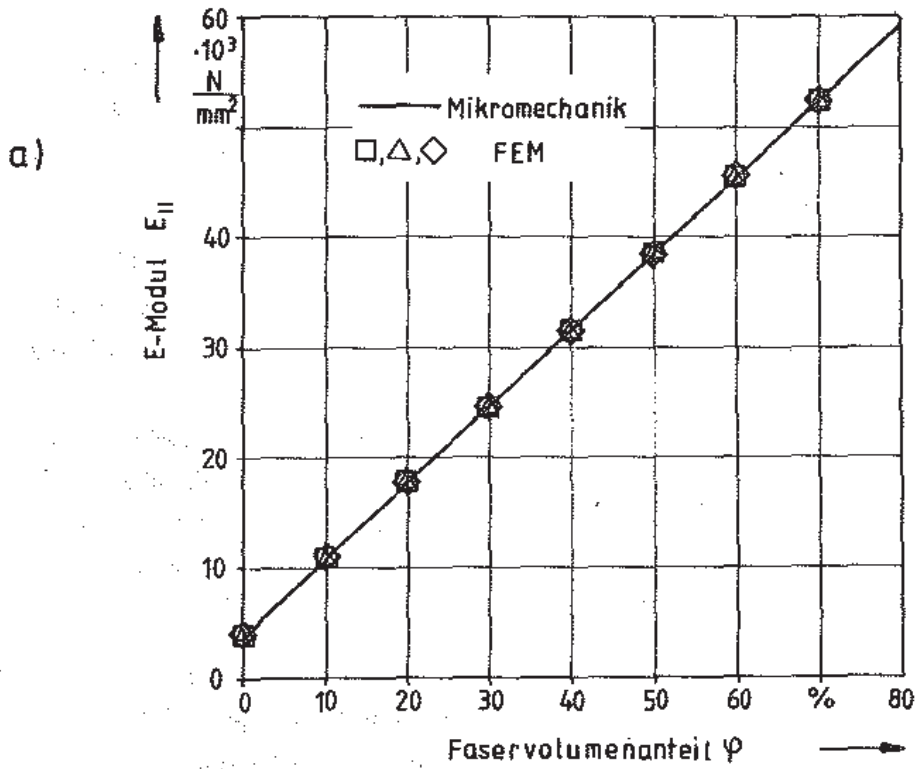
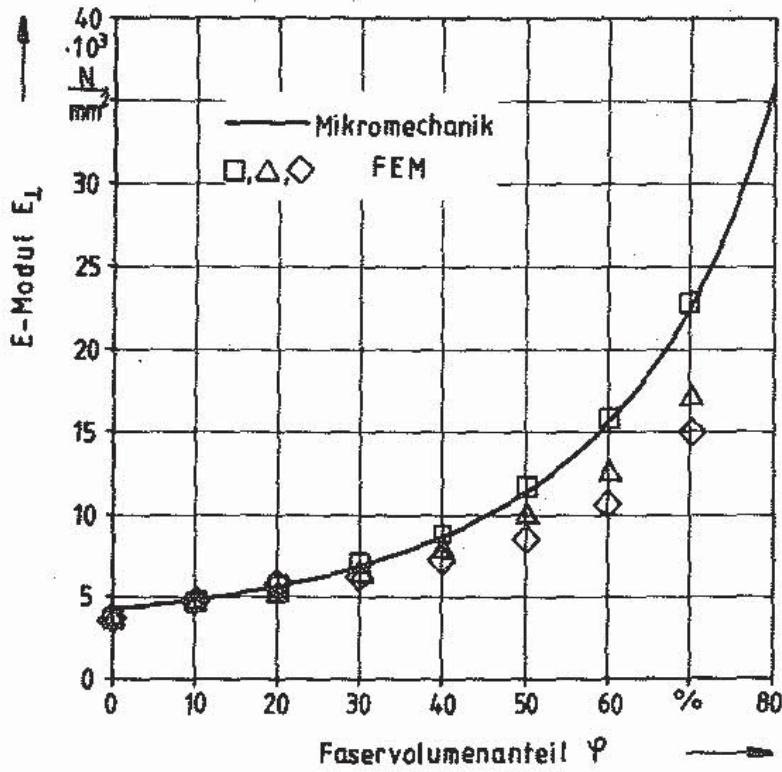


Bild 2.7 : Theoretischer Verlauf und FEM - Ergebnisse
a) für den E-Modul E_{II} ; b) für die Querkontraktionszahl ν_{II}
in Abhängigkeit vom Faservolumenanteil

a)



b)

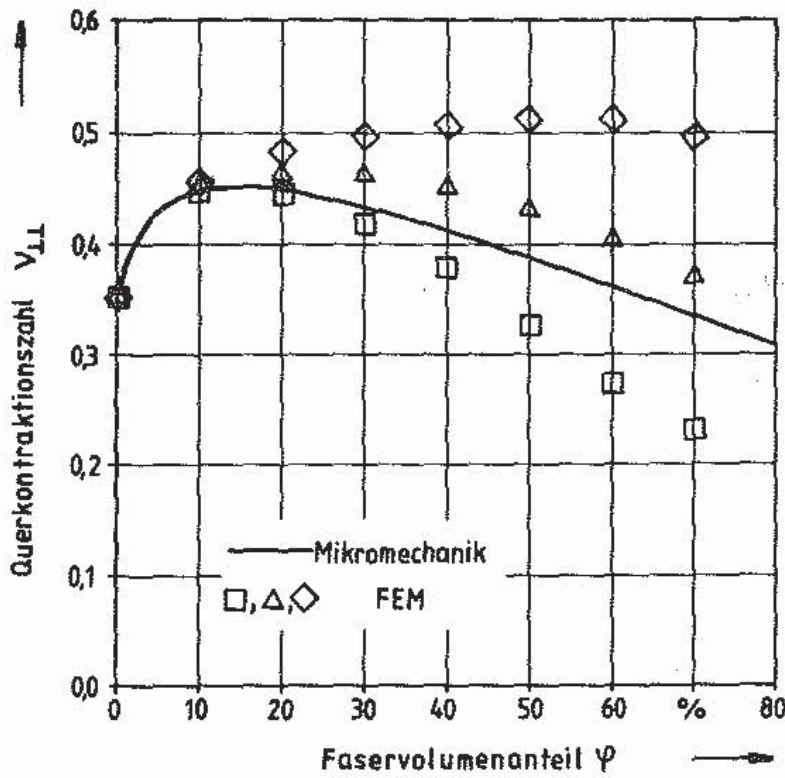


Bild 2.8 : Theoretischer Verlauf und FEM - Ergebnisse
a) für den E-Modul E_L ; b) für die Querkontraktionszahl ν_{LL}
in Abhängigkeit vom Faservolumenanteil

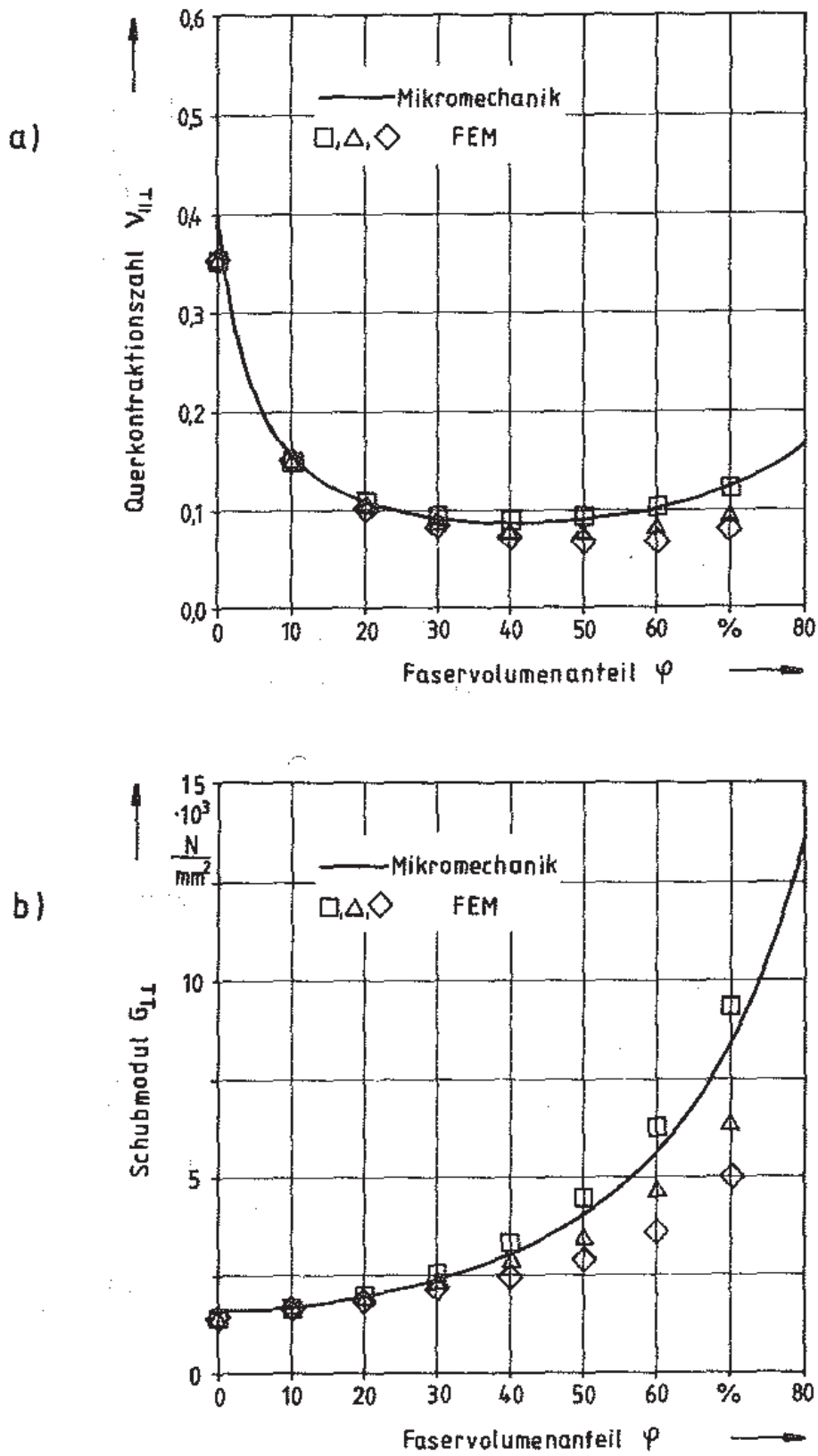


Bild 2.9 : Theoretischer Verlauf und FEM - Ergebnisse
a) für die Querkontraktionszahl ν_{11} ; b) für den Schubmodul G_{11}
in Abhängigkeit vom Faservolumenanteil

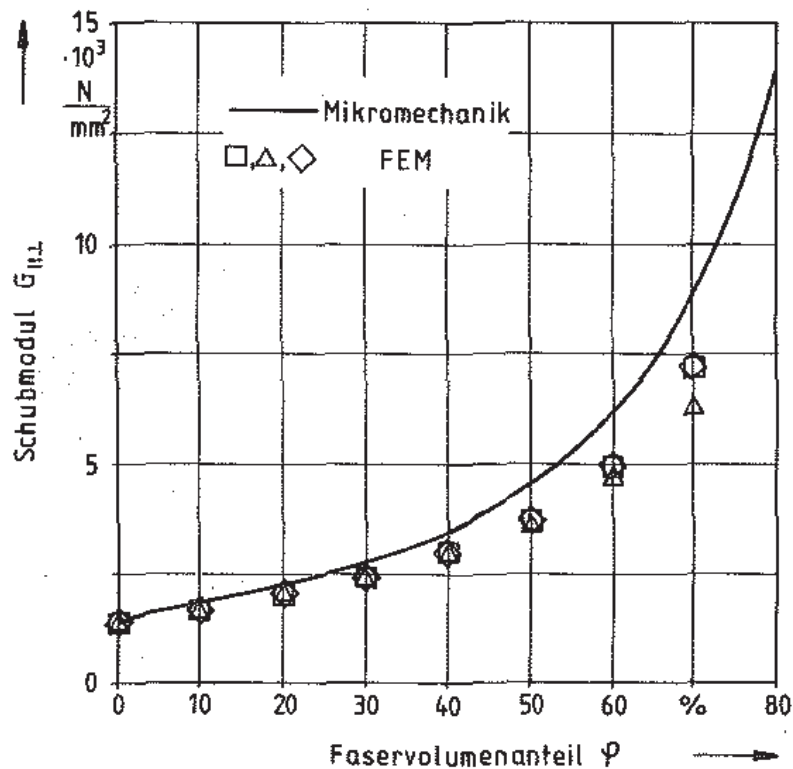


Bild 2.10 : Theoretischer Verlauf und FEM - Ergebnisse für den Schubmodul $G_{II,II}$ in Abhängigkeit vom Faservolumenanteil

Bild 2.10 zeigt den Verlauf des Schubmoduls über den Faservolumenanteil, die Faseranordnungen liefern dicht beieinander liegende Werte, die Übereinstimmung mit Gl. (2.73) ist als gut zu bezeichnen.

Bei querbelasteten UD-Schichten gibt es keine in Krafrichtung durchlaufenden Fasern. Faser- und Matrixbereiche sind hier "hintereinandergeschaltet". PUCK zeigt an einem Scheibchenmodell /1.21,2.52/, daß in der Matrix eine Dehnungsvergrößerung eintritt; diese äußert sich darin, daß die Bruchdehnung einer UD-Schicht bei Querbelastung gegenüber der Matrix- Bruchdehnung eines Reinharz- Probekörpers drastisch vermindert wird ($\epsilon_{BM} \approx 4\%$; $\epsilon_{IB} \approx 0.5\%$). Die örtliche Dehnung der Matrix im Verbund kann dabei ein mehrfaches der äußeren Dehnung betragen. In Bild 2.11 ist der Dehnungsvergrößerungsfaktor $f_\epsilon = \epsilon_M / \epsilon_I$ für die quadratische Faseranordnung bei isotropen Glasfasern und einem Faservolumenanteil von 60% aufgetragen. Zum Vergleich sind die Ergebnisse von FEM- Berechnungen /2.53/ mit physikalisch linearem und nichtlinearem Matrix- Werkstoffverhalten eingetragen.

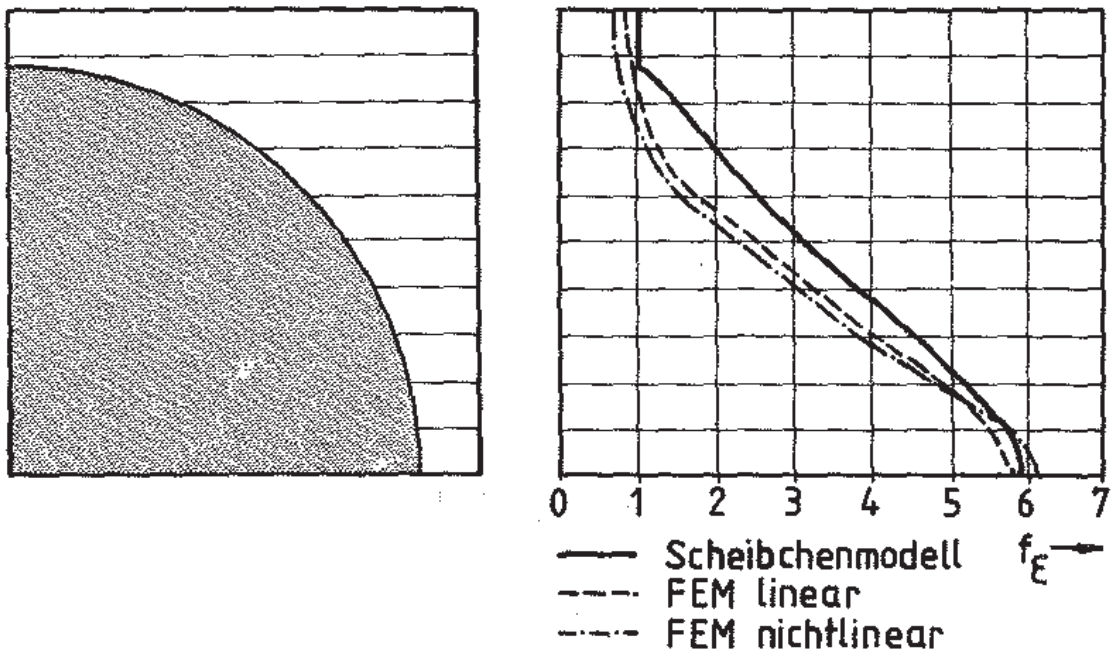


Bild 2.11: Dehnungsvergrößerungsfaktor; Vergleich mit FEM - Ergebnissen

Im Verlauf der Dehnungen über der Dicke ergeben sich zwar geringe Abweichungen zwischen den verschiedenen Berechnungen, die maximale Dehnungsvergrößerung kann mit dem Scheibchenmodell jedoch sehr genau vorhergesagt werden. Die lineare FEM- Analyse liefert eine geringfügig kleinere Dehnungsvergrößerung; unter Berücksichtigung des nichtlinearen Matrixwerkstoffes erhält man insgesamt eine etwas geringere Dehnungsvergrößerung, lediglich der Maximalwert steigt etwas an. Dies liegt daran, daß sich im Bereich der hohen Dehnungswerte die physikalischen Nichtlinearitäten am stärksten auswirken.

Neben der Dehnungsvergrößerung tritt im Matrixmaterial auch eine Spannungskonzentration ein, siehe Bild 2.12.

Im oberen Teil des mikromechanischen Modells ist die Spannung kleiner als die äußere Mittelspannung σ_1 , im schmalen Matrixbereich - also an der Unterseite des Kleinmodells - ist die Spannung größer. Der Spannungskonzentrationsfaktor $f_\sigma = \sigma_M / \sigma_1$ ist maximal 1,8. Dadurch, daß eine Spannungskonzentration innerhalb des Faserverbundes eintritt, ist auch zu verstehen, warum die Bruchspannung bei Querkzugbeanspruchung geringer ist als die Bruchspannung eines Reinharz-Probekörpers.

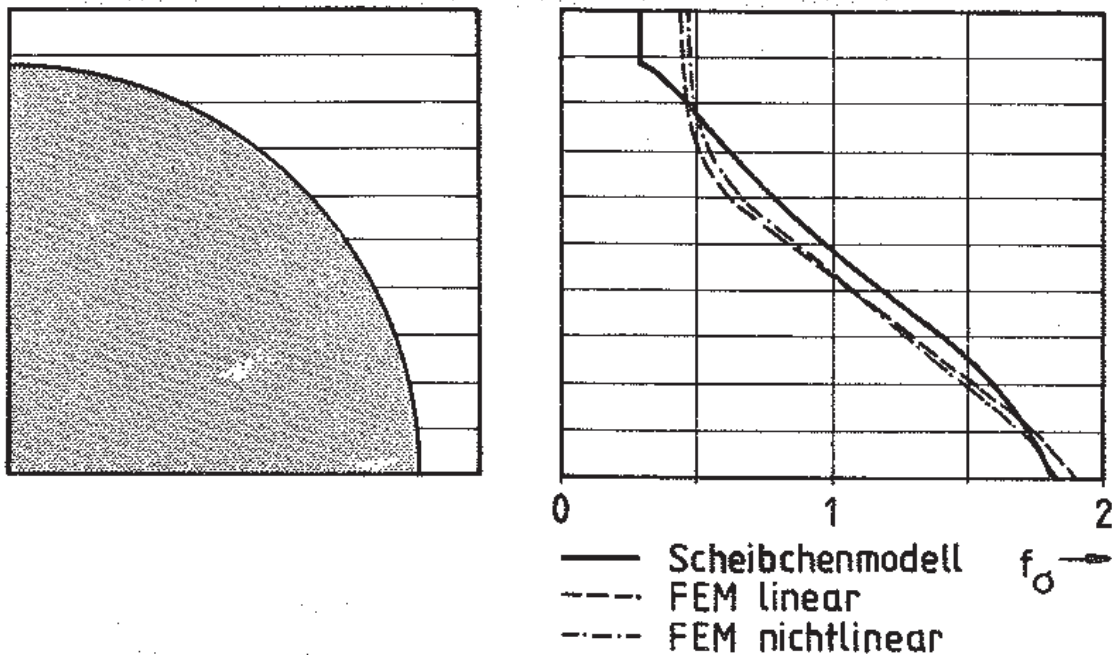


Bild 2.12: Spannungskonzentration; Vergleich mit FEM - Ergebnissen

Zusammenfassend kann man festhalten:

- Die mikromechanischen Beziehungen, die in Abschn. 2.6.1 vorgestellt wurden, eignen sich zur Ermittlung der Grundelastizitätsgrößen von UD-Schichten.
- Die in einer dreidimensionalen Analyse von Faserverbunden benötigte Querkontraktionszahl ν_{11} läßt sich nach Gl. (2.76) bestimmen.
- Umfangreiche FEM-Untersuchungen an mikromechanischen Kleinmodellen zeigen, daß durch die quadratische Faseranordnung die elastischen Eigenschaften von UD-Schichten gut beschrieben werden.
- Maximalwerte für die Dehnungsvergrößerung und die Spannungskonzentration sind mit hoher Genauigkeit sehr einfach mit dem Scheibchenmodell berechenbar.

2.6.3 Materialkennwerte

Den in dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen werden die hier aufgeführten Materialdaten (Anhaltswerte) von Faser-Verbund-Werkstoffen zugrunde gelegt. Weiterhin sind die Kenngrößen der wichtigsten isotropen Werkstoffe aufgeführt.

Für Berechnungen mit stark abweichenden Faservolumenanteilen oder speziellen Faser/Matrix-Systemen müssen die entsprechenden Kennwerte ermittelt werden, beispielsweise mit Hilfe der mikromechanischen Beziehungen.

Verbundwerkstoffe		GFK	CFK	CFK	AFK
Fasertyp		E-Glas	T300	P55S	Kevlar
<u>Grundelastizitätsgrößen</u>					
Dichte	[g/cm ³]	2.0	1.6	1.6	1.35
φ		0.6	0.6	0.6	0.6
E_{II}	[N/mm ²]	45 000	134 450	220 000	76 000
E_I	[N/mm ²]	14 500	8 640	8 000	5 500
G_{III}	[N/mm ²]	5 600	5 800	6 000	2 300
ν_{III}		0.3	0.3	0.3	0.34
ν_{II}		0.42	0.4	0.4	0.4
α_{II}	[1·10 ⁻⁶ /K]	7.0	0.15	-1.2	-4.0
α_I	[1·10 ⁻⁶ /K]	29.5	25.9	40.0	79.0
β_{II}		0.02	0.02	0	0
β_I		0.4	0.37	0.5	0.6

<u>Bruchwerte</u>					
σ_{IIzB}	[N/mm ²]	1000.0	1500.0	1200.0	1400.0
$\sigma_{II dB}$	[N/mm ²]	1000.0	1500.0	1200.0	200.0
$\sigma_{II MB}$	[N/mm ²]	1800.0	5378.0	8800.0	3040.0
σ_{IzB}	[N/mm ²]	52.8 ^x	38.6 [*]	28.0 [*]	12.0 [*]
$\sigma_{I dB}$	[N/mm ²]	142.5 ^x	180.0 [*]	103.0 [*]	53.0 [*]
$\tau_{III B}$	[N/mm ²]	77.5 ^x	89.6 [*]	62.0 [*]	34.0 [*]

$\sigma_{II MB} \approx E_{II} \cdot \epsilon_{BM}$ ^x nach /2.45/; ^{*} nach /2.54/

Isotrope Werkstoffe	Glasfaser	Reinharz	Aluminium	Stahl	
Dichte	[g/cm ³]	2.5	1.2	2.7	7.85
E	[N/mm ²]	73 000	37 00	70 000	210 000
ν		0.25	0.35	0.3	0.33
G	[N/mm ²]	29 200	1 370	26 923	78 947
α	[1·10 ⁻⁶ /K]	5.0	67.0	23.5	12.0
β		-	0.2164	-	-

3. FASERVERBUNDANALYSE MITTELS FEM

Die Finite-Elemente-Methode (FEM) ist ein numerisches Verfahren zur Strukturanalyse. Sie hat sich in vielen Bereichen der Technik fest etabliert und leistet vor allem in dem weiten Feld der Strukturberechnung wertvolle Dienste.

Meist sind beim Anwender der FEM schon ganz bestimmte Programmsysteme vorhanden; im Umgang mit den einzelnen Programmen liegen umfangreiche Erfahrungen vor. Neben dem eigentlichen FEM-Programm sind zum Aufbereiten der Daten (Geometrie, Randbedingungen, Verschiebungen, Spannungen) auch Pre- und Postprocessingprogramme vorhanden, die dem FEM-Anwender helfen, die große Menge der Ein- und Ausgabedaten zu bewältigen.

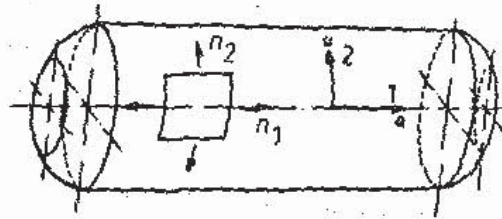
Abgesehen von der Luft- und Raumfahrtindustrie, die eine gewisse Sonderstellung einnimmt, wurden bisher hauptsächlich Bauteile aus isotropen Werkstoffen mit der FEM berechnet. Mit den neuen Leichtbauwerkstoffen, hier sind vor allem faserverstärkte Werkstoffe zu nennen, liegen i. a. noch wenig Erfahrungen mit FEM-Rechnungen vor. Bauteile aus verstärkten Materialien, die keine ausgesprochene Anisotropie aufweisen, kann man in der Regel "quasiisotrop" berechnen. Bei den geschichteten Hochleistungsverbundwerkstoffen mit gezielt gerichteten Fasern ist dies jedoch wegen der stark anisotropen Elastizitäts- und Festigkeitseigenschaften nicht möglich.

Dem Faserverbundkonstrukteur steht für derartige Berechnungen die klassische Laminattheorie (CLT) zur Verfügung. Damit man aber auch geometrisch komplizierte Bauteile aus Mehrschichtenverbunden (MSV) analysieren kann, muß man die schichtenweise Spannungs-, Verformungs- und Bruchanalyse mit Hilfe der FEM durchführen können.

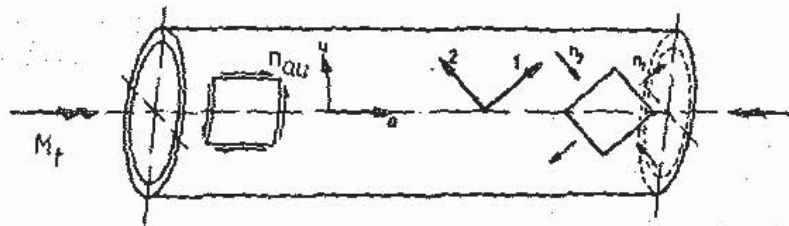
3.1 Klassische Laminattheorie und FEM

Wenn man den Berechnungsablauf der klassischen Laminattheorie (CLT) wählt, müssen die äußeren Belastungen (Schnittkräfte und -momente) auf ein zu betrachtendes Laminatstück bekannt sein. Der Mehrschichtenverbund (MSV) wird durch Schnittkräfte n_x , n_y , n_{xy} und Schnittmomente m_{xx} , m_{yy} , m_{xy} beansprucht. Diese Schnittgrößen müssen zuvor ermittelt werden (z.B. mit der elementaren Festigkeitslehre). Bei einfachen Bauteilen, siehe *Bild 3.1*, wie dem zylindrischen Teil eines Druckbehälters oder eines Druckrohres kann man die Schnittkräfte mit der "Kesselformel" aus den Gleichgewichtsbedingungen ermitteln; für ein dünnwandiges Torsionsrohr errechnet sich der Schubfluß nach der 1. Bredt'schen Formel aus dem Drehmoment. Selbst interlaminare Spannungen in röhren- oder kastenförmigen Biegeträgern lassen sich analytisch ermitteln /3.1/.

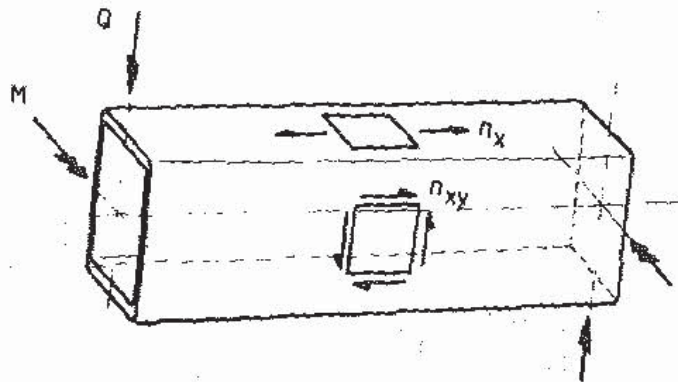
Mit Kenntnis der Schnittkräfte führt man dann eine schichtenweise Spannungs-,
Verformungs-, und Bruchanalyse durch.



a) $\sigma \cdot t = n_1 = \frac{p \cdot r}{2} ; n_2 = 2 \cdot n_1$



b) $\tau \cdot t = n_{\tau} = \frac{M_t}{2 \cdot A_u}$



c) $\frac{n_x}{t} = \sigma_x = \frac{M}{[E \cdot I]} \cdot z \cdot \hat{E}_x ; \tau_{xy} \cdot t = n_{xy} = Q \cdot \frac{[E \cdot S]}{[E \cdot I]}$

Bild 3.1 : a) Kräfte am dünnwandigen Behälter unter innerem Überdruck
b) Kräfte am dünnwandigen Torsionsrohr
c) Kräfte am dünnwandigen Biegeträger

Die Zahl der zur Zeit verfügbaren FEM-Software ist immens hoch, wie beispielsweise in /3.2/ gezeigt wird. Neben speziellen FEM-Programmen sind vor allem Universal (general purpose) FEM-Programme in den Berechnungsabteilungen vorhanden, die für alle möglichen Aufgaben eingesetzt werden. Daher muß es das Ziel sein, verschiedene Standard-FEM-Programme auf ihre Brauchbarkeit hinsichtlich der Strukturanalyse von Mehrschichtenverbunden zu untersuchen. Aus der Palette der FEM-Software wurden davon die Programme ABAQUS, ANSYS und PERMAS (ASKA) ausgewählt, auf der Rechenanlage des Fachgebietes Faserverbundtechnik implementiert und zur Analyse von Faserverbund-Leichtbauteilen eingesetzt.

Bei den untersuchten FEM-Programmen ist es - von einigen Ausnahmen abgesehen - möglich, anisotropes Werkstoffverhalten zu berücksichtigen. Je nach Elementtyp werden dabei unterschiedliche Formen der Steifigkeits-/Nachgiebigkeitsmatrizen benötigt.

In FEM-Programmen unterscheidet man zwei Gruppen von Elementen, zum einen KONTINUUMS-Elemente, zum anderen STRUKTUR-Elemente.

KONTINUUMS-Elemente sind solche, bei denen Verschiebungen der Knotenpunkte in Richtung der Koordinatenachsen 1, 2, 3 möglich sind. Drehungen um diese Achsen sind möglich, jedoch mit keiner Kraftwirkung verbunden (s. Bild 3.2).

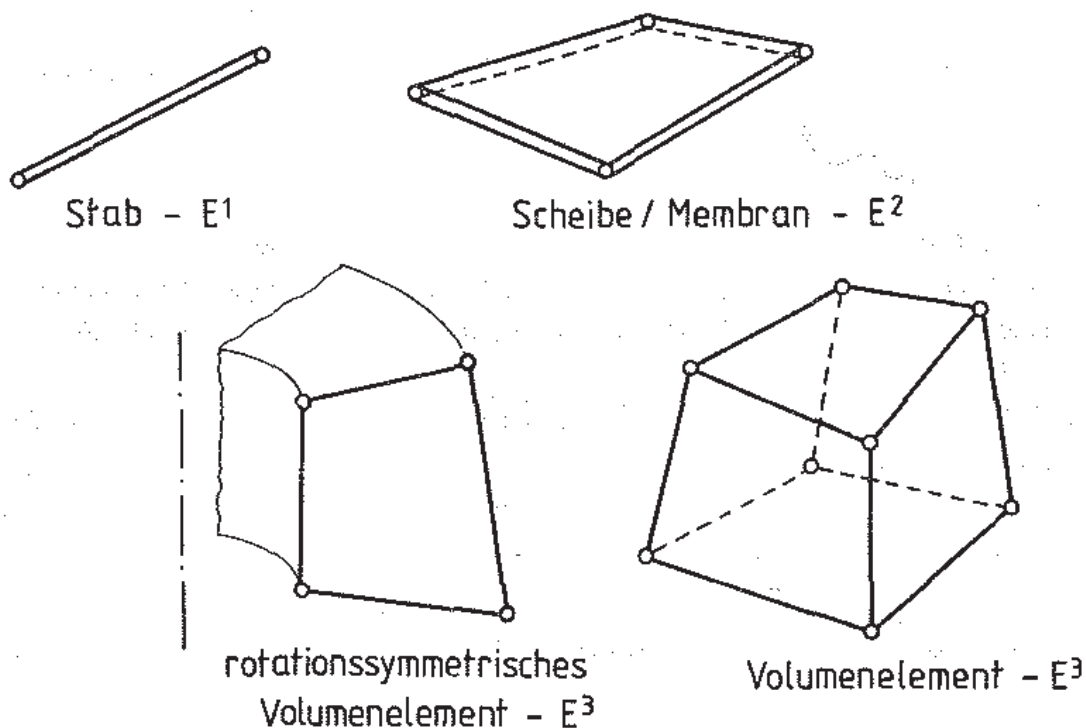
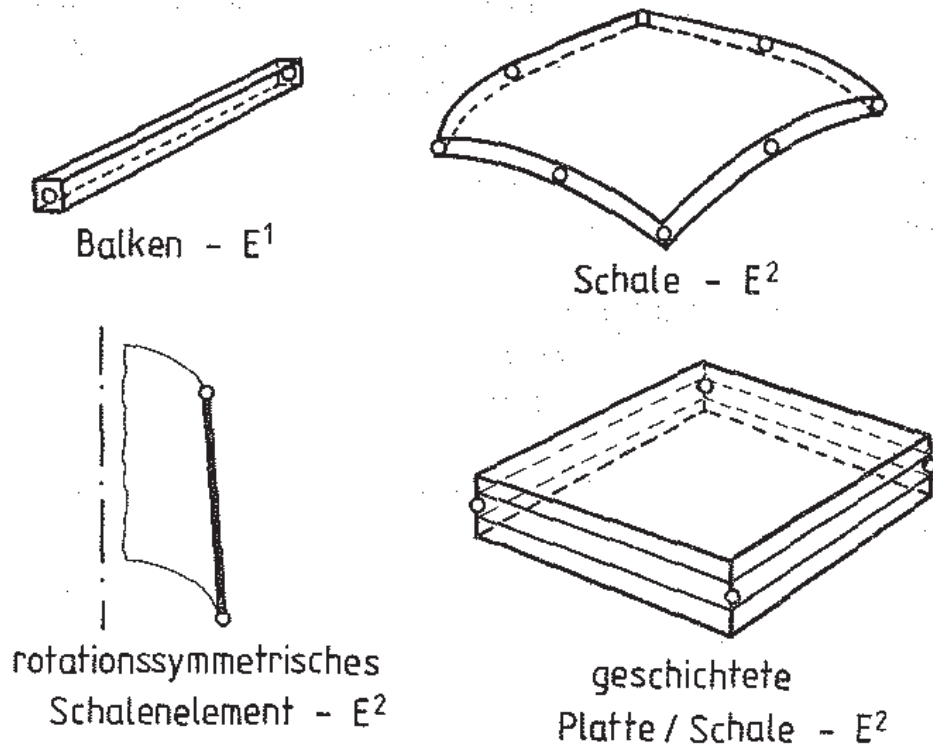


Bild 3.2: Typische Kontinuums-Elemente und benötigte Form der Elastizitätsgrößen
z.B. $E^2 \hat{=}$ zweidimensionales Stoffgesetz

Als **STRUKTUR-Elemente** werden Elemente bezeichnet, bei denen sowohl Verschiebungen in Richtung der Koordinatenachsen 1, 2, 3, als auch Verdrehungen um diese Achsen möglich sind (s. *Bild 3.3*).



*Bild 3.3: Typische Strukturelemente und benötigte Form der Elastizitätsgrößen
z.B. $E^2 \hat{=}$ zweidimensionales Stoffgesetz*

Zunächst seien allgemeine Kontinuums- oder Strukturelemente betrachtet. Nach der FEM-Netzzerzeugung muß der Benutzer den einzelnen Elementen die Elastizitätsgrößen zuweisen. Dazu ist es nötig, z.B. für dünnwandige Mehrschichtenverbunde die CLT bis zur Ermittlung der Steifigkeiten des MSV durchzuführen, siehe *Bild 3.4*.

Die FEM übernimmt dann die "Schnittkraftermittlung", bzw. die Berechnung der Verformungen des MSV.

Daran schließt sich die übliche schichtenweise Spannungs- und Bruchanalyse des Laminates an.

Wesentlich eleganter läßt sich mit speziellen "geschichteten" Elementen (*Bild 3.3*) arbeiten. Hier genügen die Informationen über Schichtaufbau und Grundelastizitätsgrößen der Einzelschichten des MSV, siehe *Bild 3.4*.

Die FEM-Programme liefern dann die Verformungen der Struktur und führen auch noch die Schichtspannungsanalyse durch.

Zur Beurteilung der Bruchgefahr bieten FEM-Programme standardmäßig nur Vergleichsspannungen (v. Mises, Tresca, ...) an, die jedoch nur für isotrope Werkstoffe eine sinnvolle Aussage über die Bruchgefahr ergeben, vgl. Abschn. 2.5.

Bei Bauteilen aus anisotropen Faser-Kunststoff-Verbunden ist die Angabe einer solchen Vergleichsspannung nicht sinnvoll, weil das richtungsabhängige Festigkeitsverhalten dieser Werkstoffe nicht berücksichtigt wird.

Also ist der FEM- Benutzer gezwungen, die berechneten Schichtspannungen eines Laminates oder MSV mit einem Versagenskriterium nachträglich auszuwerten, um die Bruchgefahr abzuschätzen.

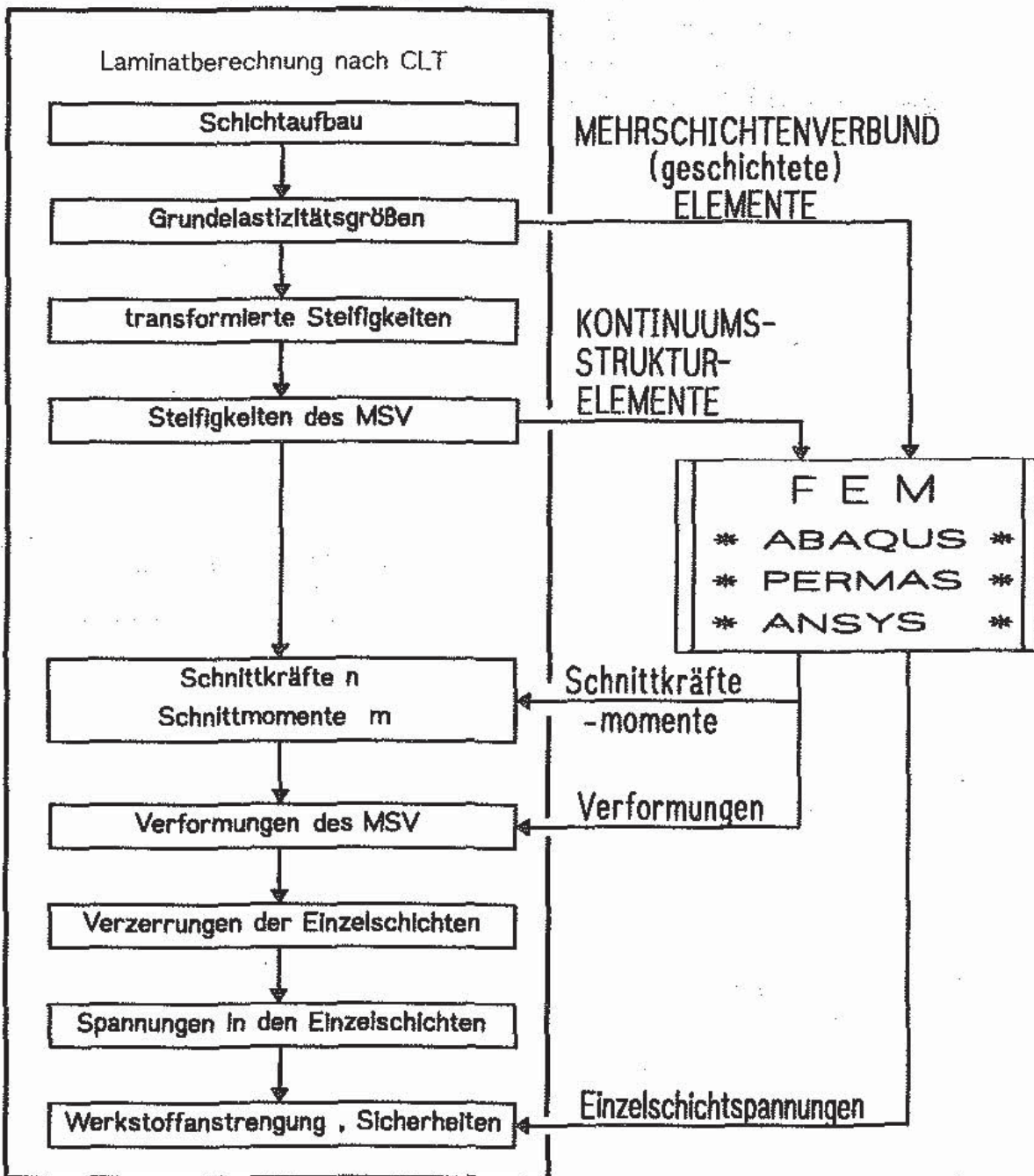


Bild 3.4: Verknüpfung der Laminatberechnung nach CLT mit der FEM-Analyse

3.2 Integration der Schichtenverbundanalyse in den FEM-Berechnungsablauf

Im vorligen Abschnitt wurde dargelegt, wie man die Finite-Elemente-Methode zur schichtenweise Spannungs-, Verformungs- und Bruchanalyse von Faserverbundbauteilen einsetzen kann.

Nun fallen in der Regel bei FEM-Berechnungen große Datenmengen an. Damit diese leichter zu bewältigen sind, werden interaktive grafische Systeme mit Pre- und Postprocessingprogrammen eingesetzt. In Bild 3.5 ist in der linken Hälfte der Standard-Ablauf bei einer FEM-Analyse dargestellt.

Das Ziel ist es, den Standard-Berechnungsablauf durch zwischengeschaltete faserverbundspezifische Berechnungsabschnitte so zu ergänzen, daß Bauteile aus Faserkunststoff-Verbunden mit der FEM berechnet werden können.

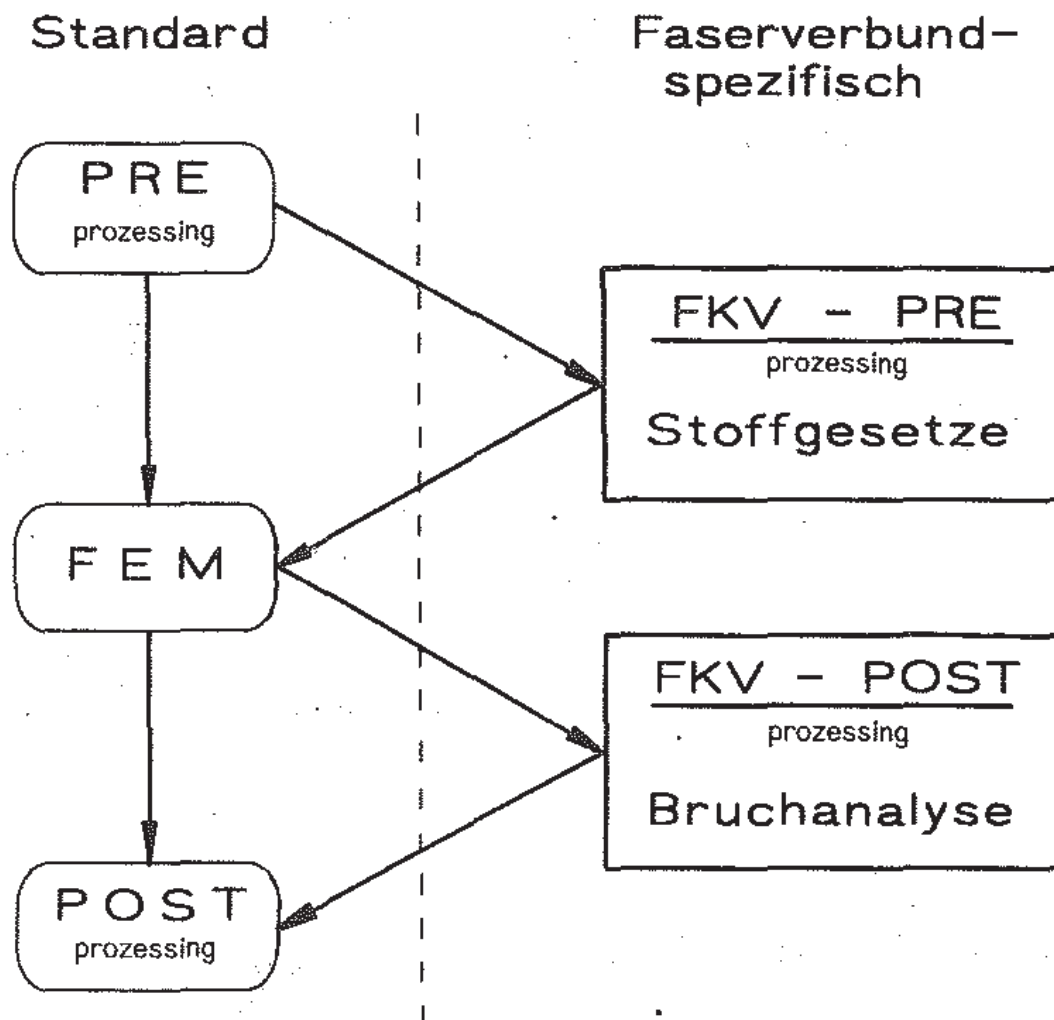


Bild 3.5: Integration der Schichtenverbundanalyse in den FEM-Berechnungsablauf

Bei der Erstellung der faserverbundspezifischen Programme benötigt man jetzt die Grundlagen, die in Abschn. 2 gelegt wurden.

Dabei muß man besonders darauf achten, daß sich je nach benutztem FEM-Programm die Daten für den Materialdaten-Input geringfügig unterscheiden.

So benötigt das FEM-Programm ABAQUS die Steifigkeitsmatrix c_{ij} der Einzelschichten oder des speziellen Mehrschichtenverbundes (AWV/KV:Abschn. 2.3) in dreidimensionaler Formulierung.

Das FEM-Programm ANSYS verlangt die Eingabe von "Ingenieurkonstanten", die sich aus den elastischen Nachgiebigkeiten s_{ij} errechnen lassen.

Für PERMAS werden beispielsweise für die geschichteten Elementen die sog. "reduzierten" Steifigkeiten q_{ij} benötigt, siehe Abschnitt 2.4.

Weiterhin ist darauf zu achten, ob "mitlaufende" lokale Elementkoordinatensysteme möglich sind. Bei PERMAS und ANSYS gibt es diese Möglichkeit, bei ABAQUS muß man solche speziellen Koordinatensysteme aus der jeweiligen Lage der Elemente berechnen und separat durch die Angabe zweier Ortsvektoren definieren.

Der vollständige Berechnungsablauf der FEM mit integrierter Laminatberechnung (siehe *Bild 3.5*) beginnt beim Standard-Preprozessing.

Daran schließt sich das **FKV-Preprozessing** mit der Definition der Materialeigenschaften an.

Anschließend erfolgt die **FEM-Rechnung**.

Die Ergebnisse (Spannungen) werden durch ein nachgeschaltetes **FKV-Postprozessing** zur Werkstoffanstrengung gegen Zwischenfaserbruch A_{ZFB} aufbereitet und in ein Post-File geschrieben.

Mit dem Standard-Postprozessing kann man die Auswertung der FEM-Ergebnisse vornehmen. Dabei ist es jetzt möglich, die Werkstoffanstrengung A_{ZFB} der Einzelschichten des Mehrschichtenverbundes (im Post-File) grafisch darzustellen und somit die Ribbildungsgefahr zu beurteilen. Die Anstrengung gegen Faserbruch beurteilt man anhand einer Darstellung der faserparallelen Spannung σ_{11} . Diese wird direkt mit dem zulässigen Wert verglichen.

Dieses ist ein sinnvoller Weg, mit geringem Aufwand bereits vorhandene Standard-Berechnungswerkzeuge und Hilfsmittel zur Mehrschichtenverbundanalyse einzusetzen. Man benötigt lediglich zwei spezielle Programme z. B. /3.3/ (FKV-Pre- und Postprozessing) in denen man die Elastizitätsgrößen des Verbundes definiert und die Werkstoffanstrengung berechnet.

Dies hat den entscheidenden Vorteil, daß der Benutzer selbst das verwendete Versagenskriterium bestimmen kann, da er direkten Zugriff zu den betreffenden Programmteilen hat.

4. ANALYSE AUSGEFÜHRTER FASERVERBUNDBAUTEILE

Nachdem die Grundlagen zur Berechnung von Faserverbunden bereitgestellt und erweitert sind, erfolgt anschließend die Einbindung der Berechnung finiter Schichten in die Strukturanalyse mittels FEM. Dabei wird besonderer Wert auf die Verwendung von Standard FEM-Berechnungsprogrammen gelegt, da dies eine kostengünstige und sinnvolle Alternative zu "Spezial"-Programmen darstellt.

So wird auch derjenige Konstrukteur, der "nur" über Standard-FEM-Software verfügt, in die Lage versetzt, Bauteile aus Faserverbunden ohne allzu großen Zusatzaufwand mit den ihm vertrauten Programmen zu berechnen.

Im weiteren soll anhand ausgewählter Faserverbund-Leichtbauteile gezeigt werden, wie man die erweiterten Standard-Berechnungssoftware zur rechnerischen Analyse solcher Bauteile einsetzt. Die vorgestellten Faserverbund-Bauteile entstammen allesamt Forschungs- und Entwicklungsprojekten, die im Fachgebiet Faserverbundtechnik in den letzten Jahren durchgeführt wurden.

4.1 Rotorblätter für Windkraftanlagen

Eine der ältesten genutzten Energiequellen ist der Wind. Windräder, Windmühlen und in neuerer Zeit Windturbinen nutzen die Windkraft zur Erzeugung von Energie. Besonders bedeutsam für die Windenergienutzung ist die Arbeit von BETZ /4.1/, der eine übersichtliche Beschreibung und mathematische Erfassung der Vorgänge an Windturbinen erarbeitet. Gegenüber den bis dato verwendeten klassischen Materialien, Holz und Metall, erfuhr der Windturbinenbau einen deutlichen Schub durch die Mitte der fünfziger Jahre aufkommenden Faserverbund-Leichtbauwerkstoffe. Die wesentlichen Vorteile der Faserverbunde, ihre hohen gewichtsspezifischen Festigkeiten und u. U. auch Steifigkeiten, sowie die mit den neuen Werkstoffen gewonnenen Freiheiten in der aerodynamisch optimalen Gestaltung von Rotorblättern, ließen die modernen Windturbinen hoher Leistung erst möglich werden /4.2, 4.3/. HÜTTER gilt dabei als einer der Pioniere der Windkraftnutzung durch moderne Windturbinen; seine Arbeiten trugen wesentlich zum heutigen Stand der Windenergienutzung bei, dieser ist in /4.4/ umfassend dokumentiert.

Die nachfolgend behandelten Rotorblätter sind im Rahmen des Forschungsprojektes KLEWIAN (**k**leine **W**indkraft-**A**nlage der GhK) entwickelt /1.9/, in Prototypen gefertigt und an der Windkraftanlage in Betrieb genommen worden.

4.1.1 Bauweise

Für Faserverbund-Rotoren gibt es eine Vielzahl von möglichen Ausführungen, siehe /4.5, 4.6/. Ähnlich wie im Segelflzeugbau /4.7/ besteht das Rotorblatt aus einem Holm zur Aufnahme der Biegebeanspruchung und der Fliehkräfte; eine aerodynamisch gestaltete Torsionsschale umschließt den Holm. Besonderes Augenmerk muß dabei auf den Anschluß (die Kräfteinleitung) des Rotorblattes an den Rotorkopf gelegt werden.

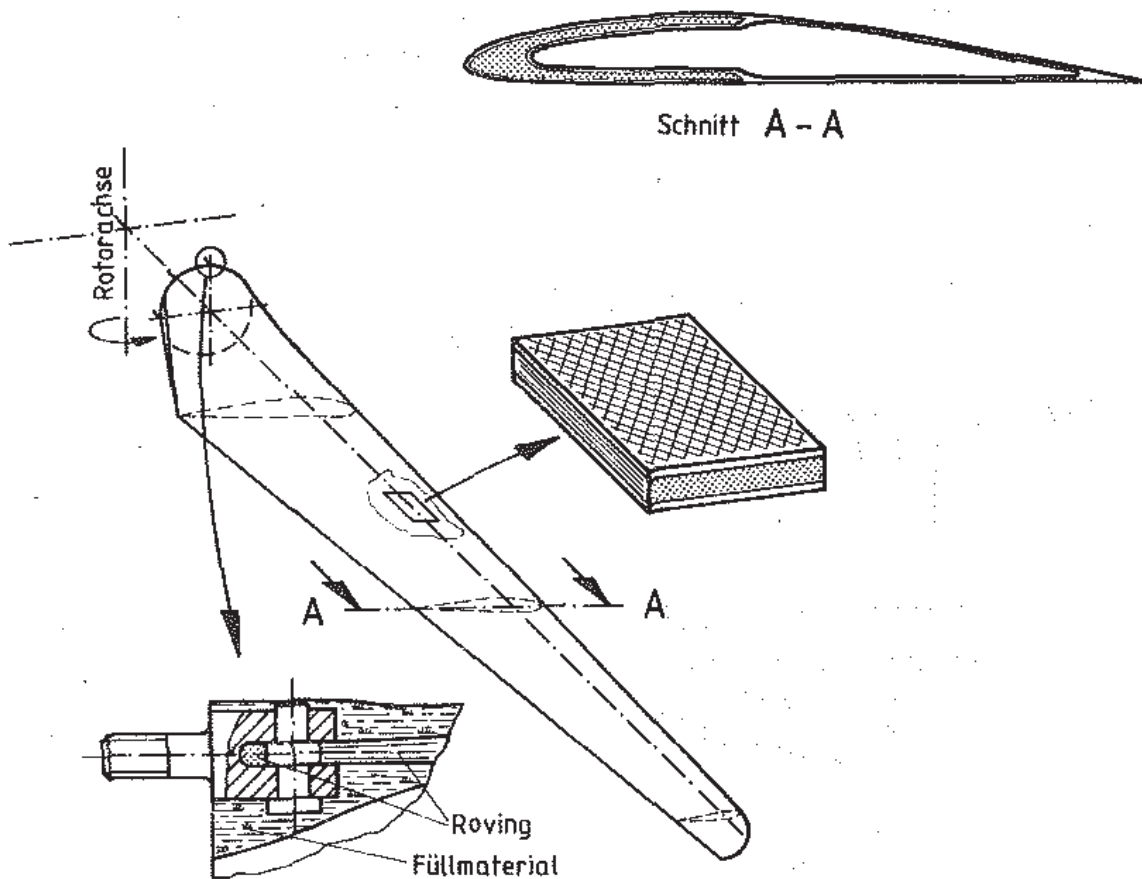


Bild 4.1: Bauweise des GFK-Rotorblattes

In Bild 4.1 ist die gewählte Bauweise des Rotorblattes dargestellt. Der Holm zur Aufnahme der Biegebelastung ist in die Blattschalen integriert; auf diese Weise erhält man ein einzellig geschlossenes Profil mit integriertem C-förmigen Holm. Die Torsionsschale besteht aus Gewebelaminat, dessen Fasern unter $\pm 45^\circ$ zur Rotorblattlängsachse angeordnet werden; der C-Holm ist aus unidirektional in Längsrichtung des Blattes verlaufenden Rovings aufgebaut. Zum Anschluß der GFK-Rotorblätter an den vorhandenen Rotorkopf wird ein sog. Schlaufenanschluß ähnlich /4.8/ gewählt. Die Rovings werden in Schlaufen um einen Metallgabelkopf gelegt, die Längskräfte werden über Formschluß eingeleitet, dies verspricht gute Kraftübertragungseigenschaften auch bei Langzeitbeanspruchung.

4.1.2 Gestaltung und Dimensionierung

Die Windkraftanlage KLEWIAN ist mit einem Dreiblattrotor ausgerüstet, der einen Rotordurchmesser von 5 m hat. Die Anlage ist als Leeläufer mit einer hohen Schnellaufzahl ausgeführt, vgl. /4.9/.

Die aerodynamische Auslegung wird mit dem Eppler-Profil E193 vorgenommen. Das Rotorblatt ist trapezförmig, mit einer Flügeltiefe von 76 mm an der Blattspitze (*Bild 4.2*). Die größte Flügeltiefe wird mit 202 mm bei einem Radius von 800 mm erreicht. Danach wird das Profil kontinuierlich in einen Kreisquerschnitt überführt, der den Anschluß zur Nabe des Rotors herstellt.

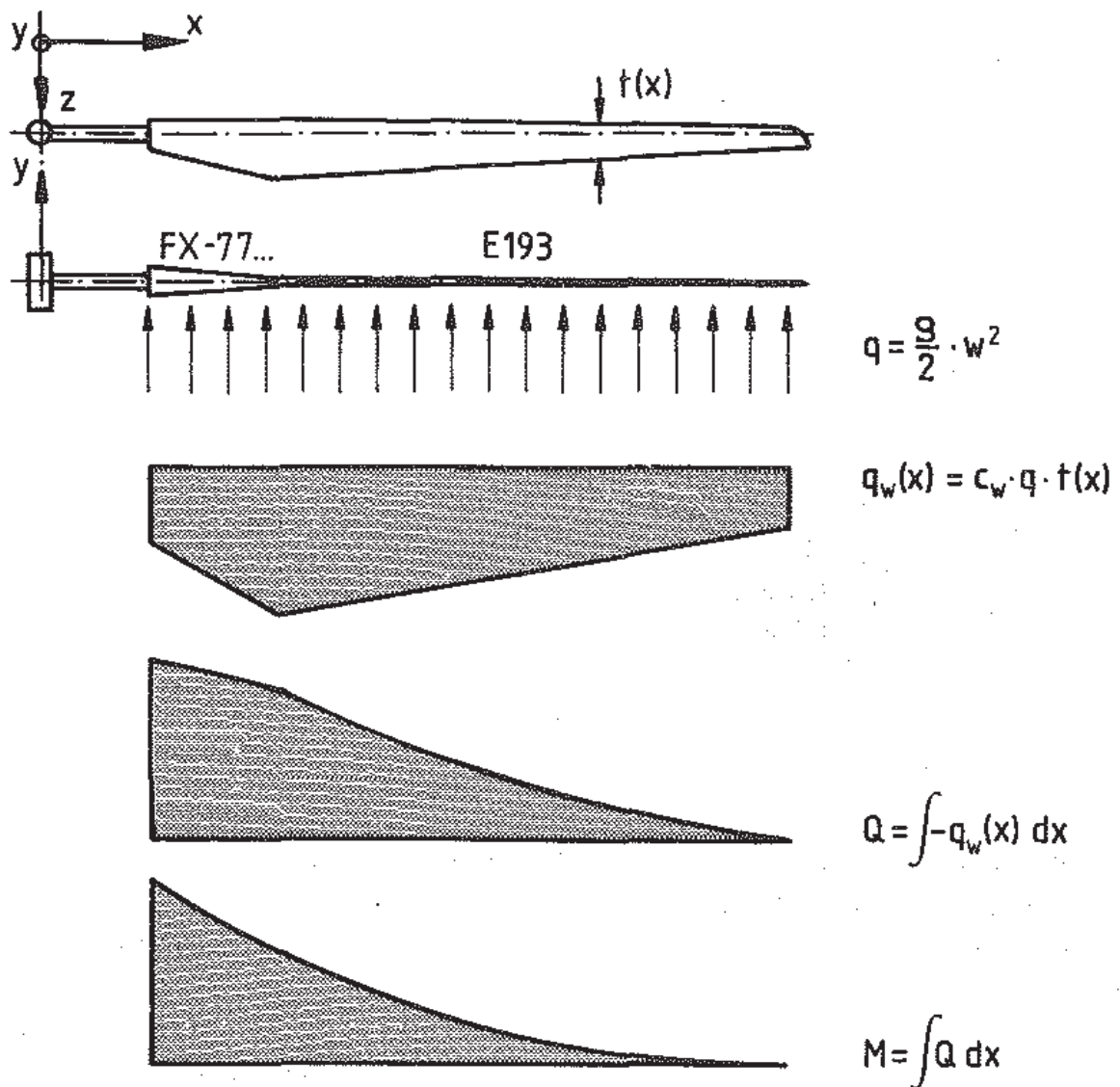


Bild 4.2: Geometrie des Rotorblattes und Belastung durch die Jahrbundböe

Die Dimensionierung erfolgt nach dem Lastfall "Jahrhundertböe". Dieser Lastfall beschreibt das Verhalten der Rotorblätter bei Auftreffen einer Böe mit Extremwindgeschwindigkeit ($w = 60 \text{ m/s}$), während die Anlage stillsteht. Die Rotorblätter sind dabei so eingestellt, daß sie von der Böe auf die maximale Projektionsfläche getroffen werden.

Die Böe erzeugt einen Staudruck, der das Rotorblatt als Flächenlast beansprucht. Man erhält die Querkraft- und Biegemomentenverläufe längs des Rotorblattes mit Hilfe der elementaren Mechanik, siehe *Bild 4.2*.

Mit den Schnittgrößen und der Geometrie ermittelt man den Normalkraftfluß und den Schubfluß im jeweiligen Profilquerschnitt. Die Beanspruchung der einzelnen Sektionen des Rotorblattes wird dann mit Hilfe der klassischen Laminattheorie (CLT) vorgenommen. Mit der CLT erfolgt dann - meist auf iterativem Wege - die endgültige Dimensionierung des Rotorblattes, es ergeben sich die örtlich erforderlichen Wanddicken und der Laminataufbau. Die äußere Form des Flügels kann dabei nur in geringen Grenzen verändert werden, anderenfalls wird eine neuerliche aerodynamische Auslegung erforderlich.

4.1.3 FEM-Anwendung

Wegen der "schlanken" Geometrie des Rotorblattes bieten sich für die FEM-Analyse Balkenelemente an.

Zur Beschreibung der Balken werden Elastizitäts- und Querschnittswerte benötigt. Wegen der über den Umfang des Profilquerschnittes veränderlichen elastischen Eigenschaften der Wandung müssen jetzt die elastizitätsbehafteten Flächenmomente (EA, ES, EI, GI_p) /4.10/ berücksichtigt werden. Hierzu wurde ein Preprozessor entwickelt /4.11/, der für mehrzellig geschlossene heterogene Profilquerschnitte die Querschnittswerte ermittelt. Der Profilquerschnitt wird durch einen Polygonzug mit abschnittsweise unterschiedlichen Verbund-Elastizitäts- und Schubmoduli (\hat{E}, \hat{G}) ersetzt. Zur FEM-Balkenrechnung werden Elastizitäts- und Querschnittsgrößen getrennt eingegeben; es ist zu beachten, daß bei Vorgabe eines Wertes (E) die anderen (A, S, I) über die zuvor ermittelten Produkte festliegen.

Die Belastung erfolgt durch die Streckenlast, der die Jahrhundertböe zugrunde liegt, vgl. vorigen Abschnitt.

Als Ergebnisse der FEM-Rechnung erhält man die Verschiebungen der Struktur und die Schnittkräfte/-momente. Ein Vergleich der Durchbiegungen nach FEM-Berechnungen (linear, geometrisch nichtlinear) und Versuchswerten ergibt eine sehr gute Übereinstimmung, siehe *Bild 4.3*.

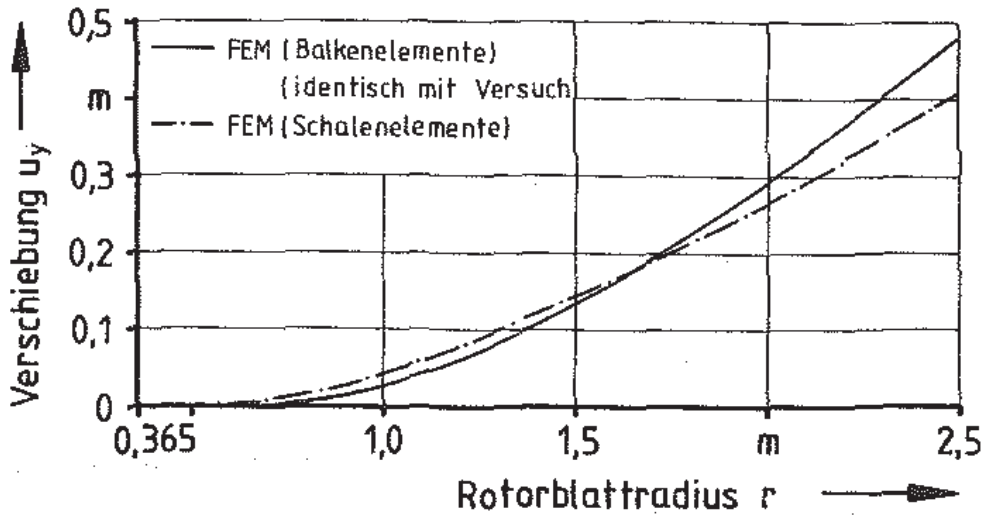


Bild 4.3 : Durchbiegung des Rotorblattes; Lastfall : Jahrhundertböe ($w = 60 \text{ m/s}$)

Die Spannungsanalyse erfolgt mit Hilfe eines Postprozessors /4.11/, der die Kraftflüsse in den Profilquerschnitten ermittelt; die klassische Laminattheorie liefert dann die Spannungen und die Werkstoffanstrengung in den einzelnen Schichten, siehe Bild 4.4.

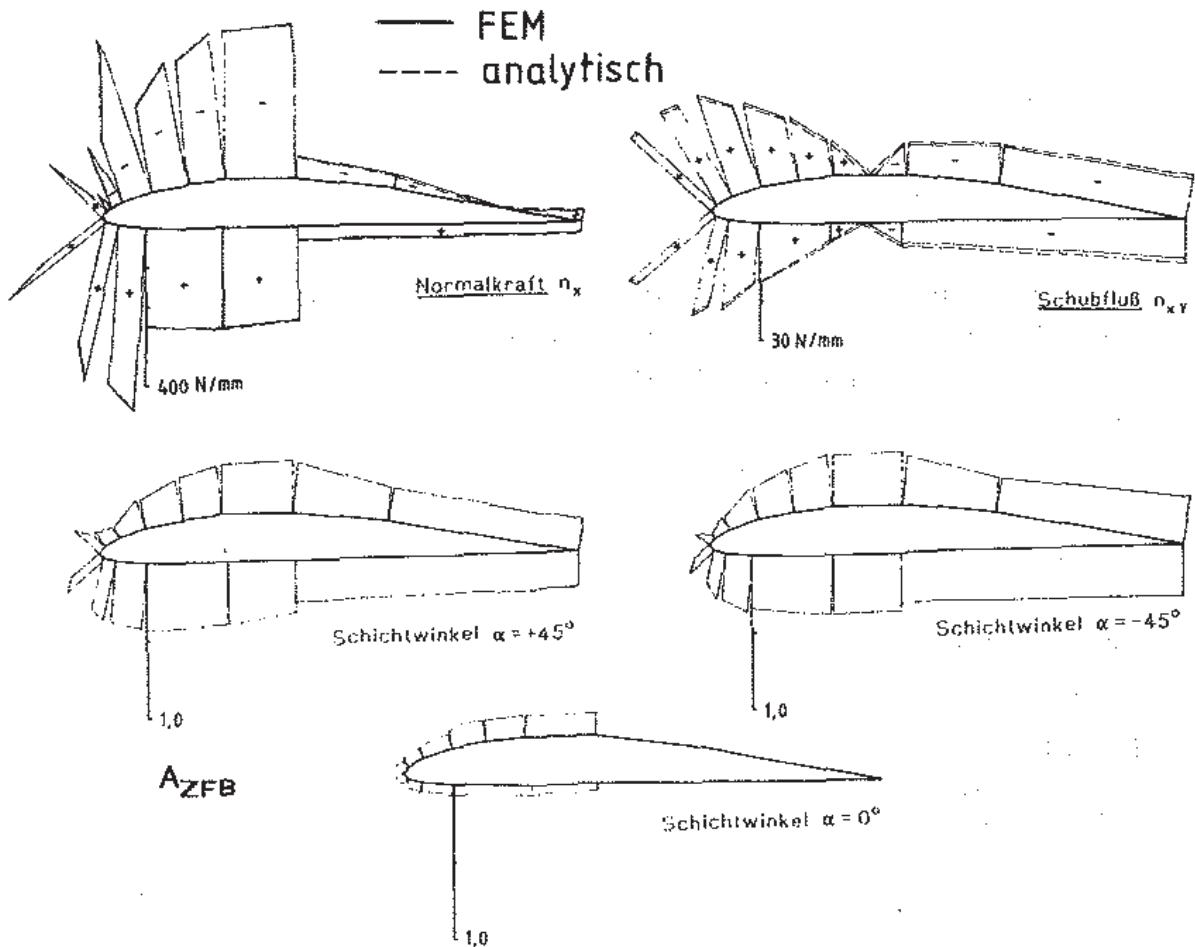


Bild 4.4 : Normalkraftfluß n_x und Schubfluß n_{xy} sowie Werkstoffanstrengung in der Torsionsschale ($\pm 45^\circ$) und dem Holm (0°) bei $x = 900 \text{ mm}$.
Lastfall : Jahrhundertböe

Neben der "statischen" Rechnung bietet sich die FEM-Analyse mittels Balkenelementen /4.12/ zu dynamischen Berechnungen an. Eigenfrequenzen und Eigenformen lassen sich damit elegant und rechenzeitsparend ermitteln.

1. Biegeeigenfrequenz: FEM: 5,78 Hz; Versuch: 5,25 Hz; analytisch: 4,6 Hz. Der Vergleich mit Versuchsergebnissen für die 1. Eigenfrequenz (Schlagbiegung) zeigt eine gute Übereinstimmung, während eine Abschätzung mittels eines einfachen Feder-Masse-Systems (analytisch) zu etwas größeren Abweichungen zwischen Rechnung und Versuch führt.

Rotorblätter werden vorwiegend nach der Jahrhundertböe ausgelegt. Da diese schlagartig auftritt, ist es unbedingt notwendig, die dynamische Antwort und die daraus resultierenden Schnittgrößen in den Profilen des Rotorblattes bei einer solchen Belastung zu betrachten.

Zur Beschreibung eines dynamischen Systems dient folgende Bewegungsgleichung /1.31/ :

$$F(t) = M \ddot{u}(t) + D \dot{u}(t) + K u(t) \quad (4.1).$$

Dieses lineare System von Differentialgleichungen 2. Ordnung beinhaltet Massenkräfte, Dämpfungskräfte und elastische Kräfte. Die Belastung im inhomogenen Teil der DGL'n wird hier als "Sprungfunktion" aufgebracht. Durch die Beschleunigung des Rotorblattes und die dabei entstehenden Massenkräfte schwingt das Blatt über die statische Durchbiegung hinaus; ein periodisches Schwingen um diesen Wert stellt sich ein, siehe *Bild 4.5*. Die Zeit für eine Schwingung beträgt 0,173 s, die erste Eigenfrequenz ergibt sich damit zu 5,78 Hz.

In *Bild 4.5* wird die dynamische Überhöhung aus der FEM-Rechnung in Abhängigkeit der Zeit dargestellt. Bei der maximalen Durchbiegung der Rotorblattspitze beträgt sie 1,904. Ebenfalls eingezeichnet ist die analytisch ermittelte Überhöhung mittels eines einfachen Feder-Masse-Dämpfer Systems. Diese erhält man mit der Sprungübergangsfunktion nach /4.13/ zu:

$$\frac{U_{\text{dyn.}}}{U_{\text{stat.}}} = 1 - \frac{e^{-D \omega t}}{\sqrt{1 - D^2}} \cos(\sqrt{1 - D^2} \omega t + \varphi)$$

mit $\arctan \varphi = \frac{-D}{\sqrt{1 - D^2}}$ (4.2).

Dabei ist D der Lehrsche Dämpfungsgrad. Er ist bei GFK-Laminaten abhängig von den Faserorientierungen und dem Glasanteil und liegt zwischen 0,005 und 0,015, siehe /4.14/. Angenommen wird $D=0,01$, die Eigenfrequenz ω ist der FEM-Analyse entnommen.

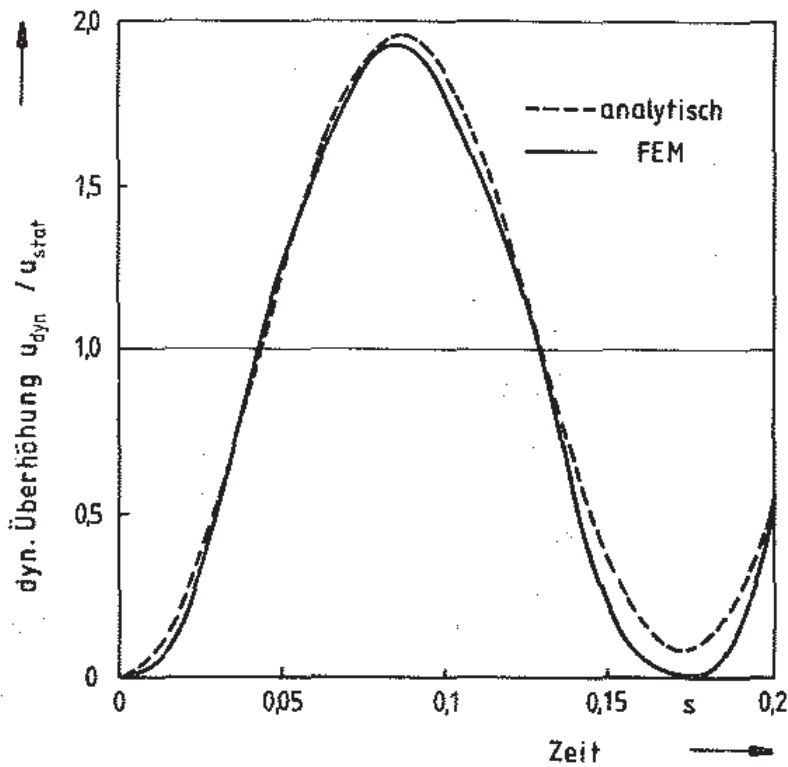


Bild 4.5: Bezogene Verschiebung an der Rotorblattspitze (dynamische Überhöhung) während einer Schwingung.
Lastfall: Jahrhundertböe, Anregung durch Sprungfunktion

Aufgrund der größeren Durchbiegungen ergeben sich höhere Kräfte und Momente als bei der statischen Berechnung. In Bild 4.6 ist der Querkraft- und Biegemomentenverlauf in den einzelnen Balkenelementen der FEM-Struktur während einer Schwingung aufgetragen.

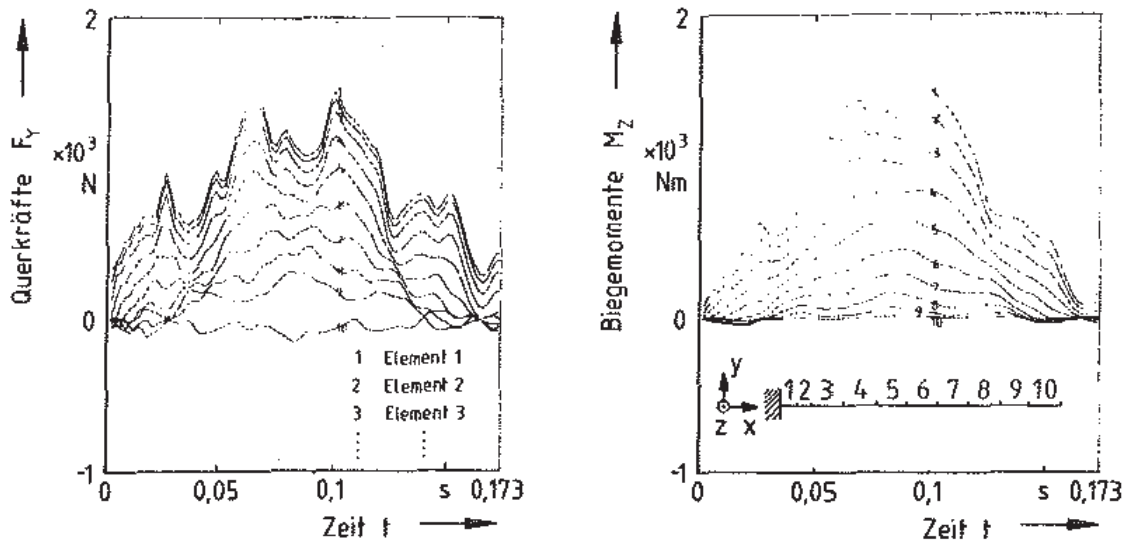


Bild 4.6: Zeitlicher Verlauf der Querkräfte und Biegemomente in den einzelnen Elementen während der Schwingung
Lastfall: Jahrhundertböe, Anregung durch Sprungfunktion

Die anschließende Auswertung zeigt, daß die maximale Beanspruchung des Rotorblattes nicht bei der maximalen Durchbiegung der Blattspitze, sondern etwas später, beim größten auftretenden Biegemoment ($t=0,1$ s), vorlag. Wie die anschließende Spannungs- und Bruchanalyse ergab, ist das Rotorblatt wie in der statischen Berechnung ebenfalls bei $x=900$ mm (Element 4 in *Bild 4.6*) am stärksten beansprucht.

Die Werkstoffanstrengung steigt in allen Schichten an, die Werte liegen etwa um das 1,8 fache höher als im statischen Fall, bleiben jedoch noch deutlich unterhalb der Kurzzeit-Bruchwerte.

Diese Berechnungen zeigen, wie man Balkenelemente vorteilhaft zur Strukturanalyse von schlanken Faserverbundbauteilen einsetzen kann. Sie haben gegenüber geschichteten Schalenelementen bei genügend feiner Diskretisierung einen deutlichen Rechenvorteil, der den etwas erhöhten Aufwand im Pre- und Postprocessing rechtfertigt.

4.2 Blattfedern aus Glasfaser-Kunststoff

Ein weiteres im Rahmen dieser Arbeit untersuchtes FKV-Bauteil ist ein im Fachgebiet Faserverbundtechnik entwickeltes Blattfedersystem für eine Lkw-Hinterachse /4.15/. Dabei handelt es sich um ein Zweiblattfedersystem (Hauptfeder mit untenliegender Stützfeder) aus GFK mit unidirektionaler Faseranordnung. GFK ist aufgrund seiner hohen Schwingfestigkeiten und seines niedrigen Elastizitätsmoduls ein sehr guter Federwerkstoff.

Bild 4.7 zeigt das Hinterfedersystem und seine Hauptabmessungen.

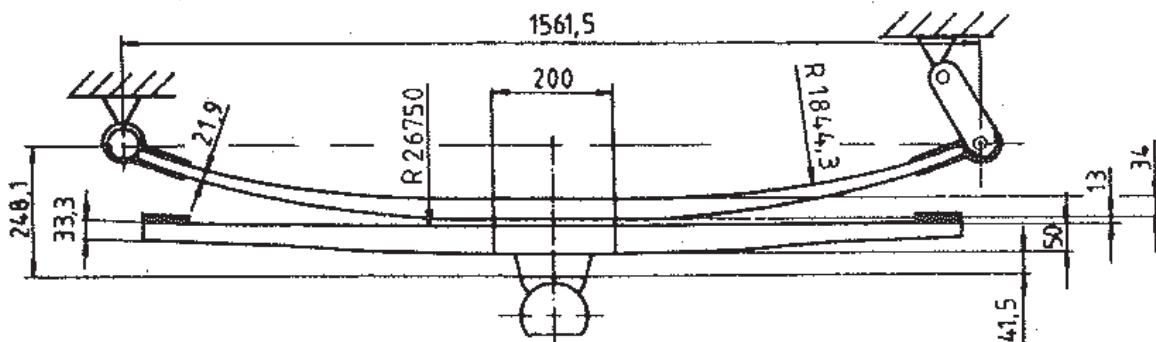


Bild 4.7: Geometrie des Blattfedersystems für eine LKW-Hinterachse, n. /4.15/

Im Rahmen diese Arbeit wird nur auf die FEM-Anwendung eingegangen, näheres zu Blattfedern führt GÖTTE /1.10/ aus.

4.2.1 Schnittkraftermittlung

Blattfedern werden üblicherweise mit der elementaren Biegebalkentheorie dimensioniert /4.16/. Anders als bei gewöhnlichen Biegeträgern muß eine Blattfeder dabei aber gleichzeitig eine Festigkeits- und eine Steifigkeitsanforderung erfüllen. Bei einem Mehrblattfedersystem kommt erschwerend hinzu, daß meist nicht alle Federblätter von vornherein in Eingriff sind.

Blattfedersysteme wie das in *Bild 4.7* gezeigte unterliegen im wesentlichen vertikalen Kräften und gegebenenfalls gleichzeitig wirkenden Lasten aus dem Anfahr- oder Bremsvorgang /4.17/, dabei treten große Verschiebungen auf. Bei dem gezeigten Zweiblattfedersystem kommt die untenliegende Stützfeder erst nach einem bestimmten Weg in Eingriff, dies äußert sich in einem nichtlinearen Kraft-Verschiebungsverhalten des Federsystems (progressive Federkennlinie).

Das Federsystem wird zur FEM-Analyse mit Balkenelementen idealisiert /4.12/, die Form der Federn - es handelt sich hier um Parabelfedern - wird durch über der Länge der Balken veränderliche Querschnittswerte berücksichtigt. Die Hauptfeder ist an den Enden unverschieblich aber drehbar gelagert. Für die Stahlflasche am rechten Auflager wird ein Stabelement benutzt, die Puffer zwischen den Federblättern und der Anschlag am Fahrzeugrahmen werden durch GAP-Kontaktelemente berücksichtigt. Die Beanspruchung der Federn erfolgt durch eine vertikale Anschlagkraft F_{VA} und eine Längskraft F_L . Die Kräfte greifen am Radaufstandspunkt an.

Bei der FEM-Rechnung wird zuerst die vertikale Kraft F_{VA} angebracht, wodurch das Federsystem bis zum Anschlag durchgebogen wird, s. *Bild 4.8*. Im zweiten Schritt kommt die Längskraft F_L hinzu. Die Längskraft muß immer senkrecht auf dem Hebel in *Bild 4.8* stehen - dessen unteres Ende den Radaufstandspunkt darstellt - damit sich ein konstantes Bremsmoment ergibt.

Die FEM-Berechnungen werden geometrisch nichtlinear mit jeweils 100 Inkrementen durchgeführt (ABAQUS). *Bild 4.8* zeigt die Verschiebungen des Federsystems nach den einzelnen Lastschritten, und in *Bild 4.9* ist das daraus resultierende Kraft-Verschiebungsdiagramm (Federdiagramm) dargestellt.

Ein Vergleich der FEM-Ergebnisse mit dem Bauteilversuch und der geforderten Kennlinie zeigt eine sehr gute Übereinstimmung.

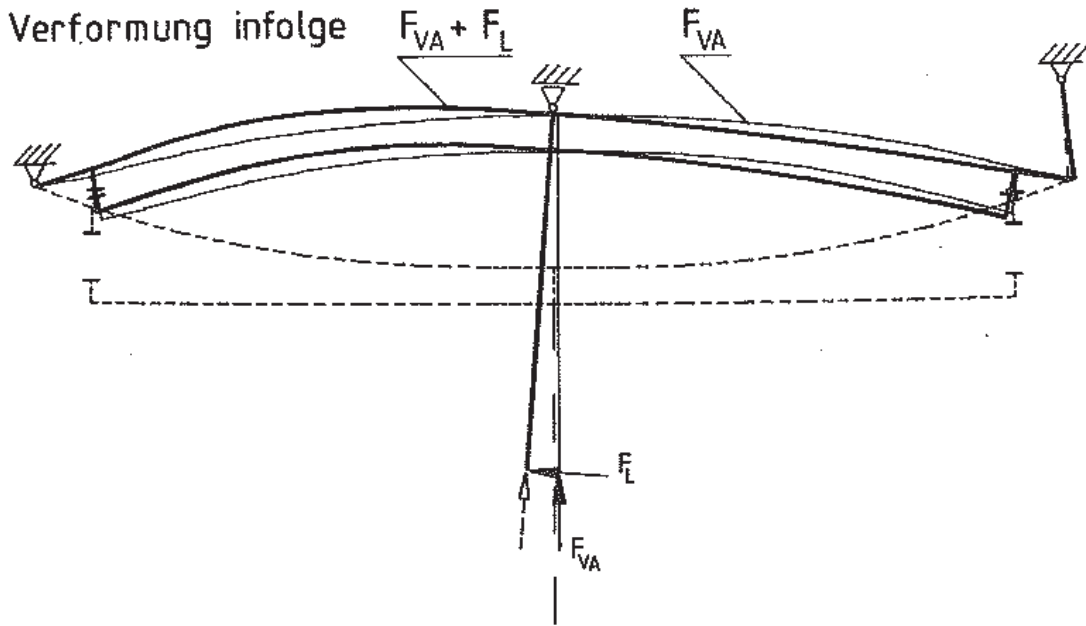


Bild 4.8: verformtes Federsystem unter Vertikal- und Längskraft ($F_{VA} + F_L$).

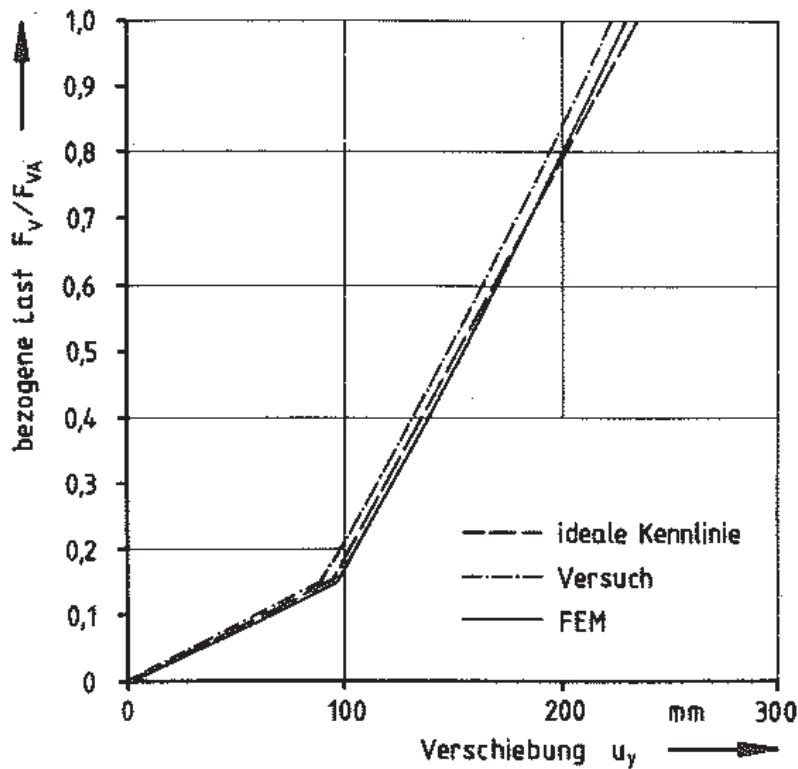


Bild 4.9: Federdiagramm des Hinterfedersystems

Als weiteres Ergebnis der FEM-Berechnung erhält man die Schnittkräfte in den Balkenelementen. Bild 4.10 zeigt die Verläufe von Normalkräften, Querkräften und Biegemomenten aufgrund vertikaler Belastung und Längskraft in den einzelnen Federblättern. Im Gegensatz zur analytischen Lösung /1.10/ treten Normalkräfte in den Federn auf. Sie entstehen aufgrund der schräg stehenden Lasche und der geometrischen Nichtlinearität.

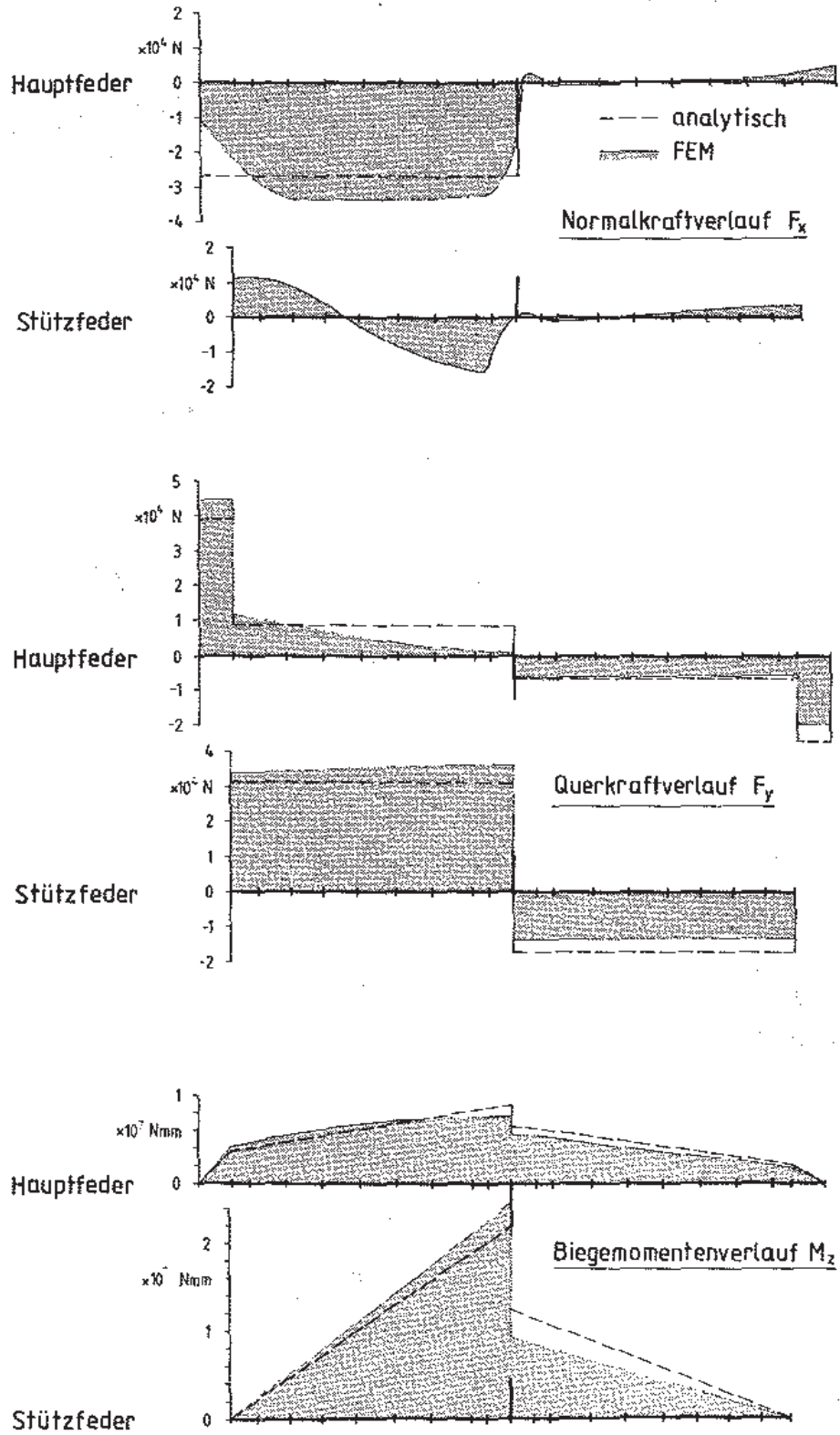


Bild 4.10: "Schnittkräfte" in der Haupt- und Stützfeder
Belastung: Anschlagskraft und Längskraft aus dem Anfahrvorgang

4.2.2 Krafteinleitungselemente

Mit den zuvor ermittelten "Schnittkräften" sind verfeinerte Analysen der Krafteinleitungsbereiche möglich. Dabei genügt es durchaus, ebene Scheiben-Modelle zu verwenden, diese diskretisieren einen vertikalen Schnitt im Bereich der Krafteinleitungen; Federaugen sorgen für eine Anbindung an den Fahrzeugrahmen, bridenverspannte Mittenbefestigungen stellen die Verbindung zur Fahrzeugachse her.

Bild 4.11 zeigt beispielhaft das FEM-Modell eines Federauges, und in *Bild 4.12* ist die Mitteneinspannung und deren FEM-Idealisierung dargestellt. Die Kräfte entnimmt man der zuvor durchgeführten Balkenrechnung.

Die Scheibenelemente werden im FEM-Modell so angeordnet, daß ihre lokalen Elementkoordinatensysteme dem Faserverlauf des Federkörpers aus unidirektionalem Glasfaser-Kunststoff folgen. Diese Maßnahme erleichtert die Materialdateneingabe sowie die spätere Spannungsauswertung, da keinerlei Transformationen von Steifigkeiten oder Spannungen nötig werden.

Nun ist man in der Lage, mit einfachen FEM-Modellen eine ganze Palette denkbarer Krafteinleitungselemente rechnerisch miteinander zu vergleichen und zu bewerten. Ungeeignete Lösungen können so schon vor der Prototypenfertigung ausgeschieden werden.

Dabei kann auch das Reibungs- und Kontaktproblem /4.18/ zwischen Federkörper, eventuell eingelegten Zwischenlagen und den Einspannelementen in der FE-Analyse berücksichtigt werden. Eine einfache Möglichkeit besteht in der Verwendung von Stab- oder Federelementen /4.19/, die als gelenkige Verbindungselemente Normal- und Schubkräfte zwischen den Kontaktpartnern Feder - Einspannelement übertragen. Eine andere Möglichkeit bietet sich mit "schubweichen" Zwischenschichten; hierbei werden Scheibenelemente eingesetzt, deren elastische Eigenschaften gezielt modifiziert werden /4.20/. E und ν bleiben in der richtigen Größe erhalten, der Schubmodul wird jedoch ganz bewußt abgemindert. Dadurch erzeugt man eine größere "Schubweichheit" mit der man näherungsweise Gleit-effekte in der Berechnung berücksichtigen kann.

In jedem Falle ist es erforderlich, iterativ vorzugehen und die Kontaktbedingungen nach jedem Berechnungsschritt zu überprüfen und die betreffenden Moduln neu anzupassen.

Wesentlich eleganter kann die Kontaktanalyse unter Berücksichtigung der Reibung mittels sog. INTERFACE-Elemente (ABAQUS) behandelt werden, dies ist für die Mitteneinspannung der GFK-Blattfeder in /4.21/ beschrieben. Das FEM-Programm löst das Problem unter Angabe eines Reibkoeffizienten auf iterativem Wege.

Bild 4.11 (Federauge) und *Bild 4.12* (Mitteneinspannung) zeigen typische Spannungsauswertungen in Form von Isolinienbildern für den Faserverbund-Federkörper.

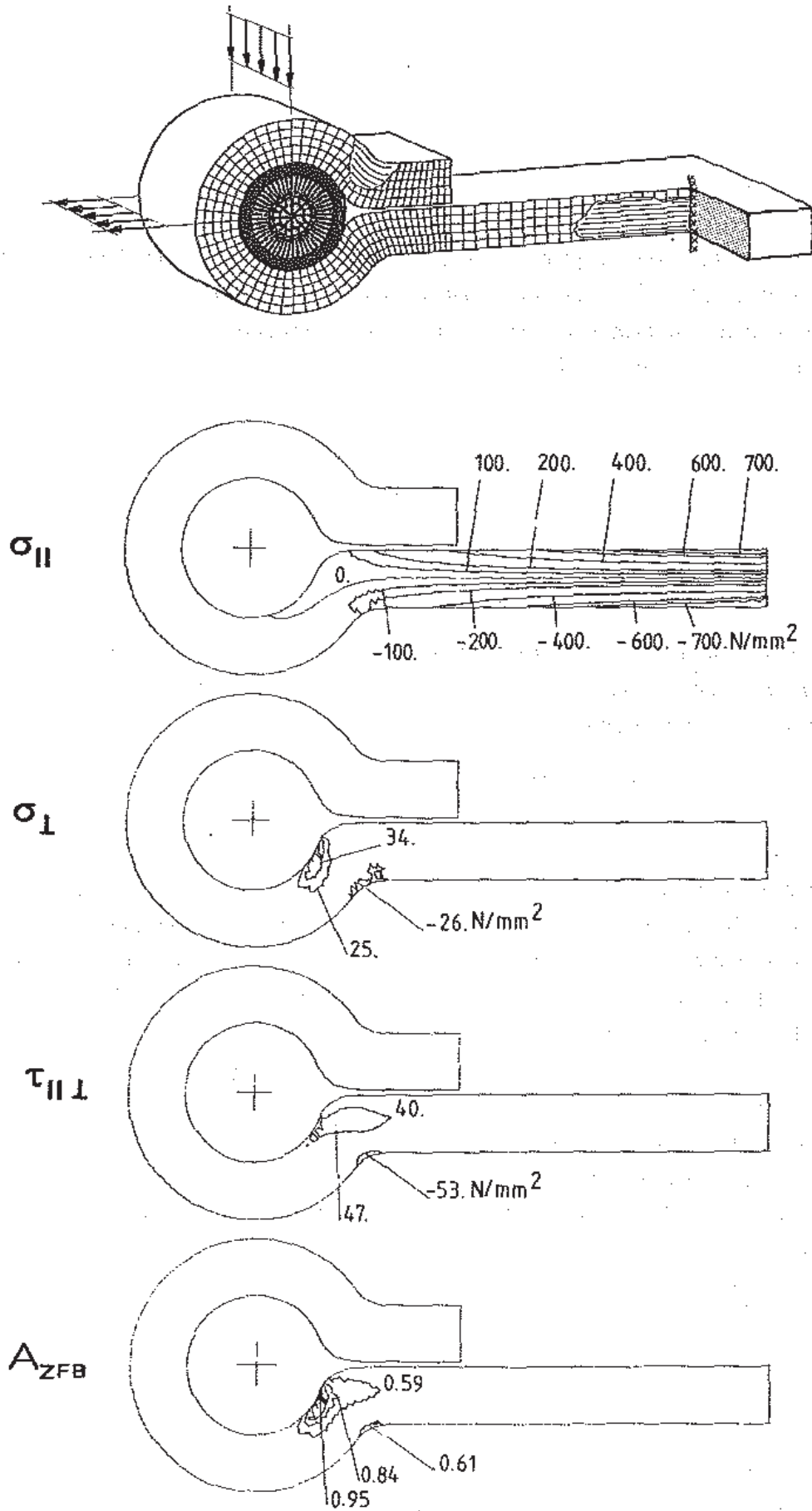


Bild 4.11: Federauge; FEM-Modell mit Randbedingungen sowie Spannungsauswertung (σ_{II} , σ_I , $\tau_{III\perp}$, A_{ZFB})

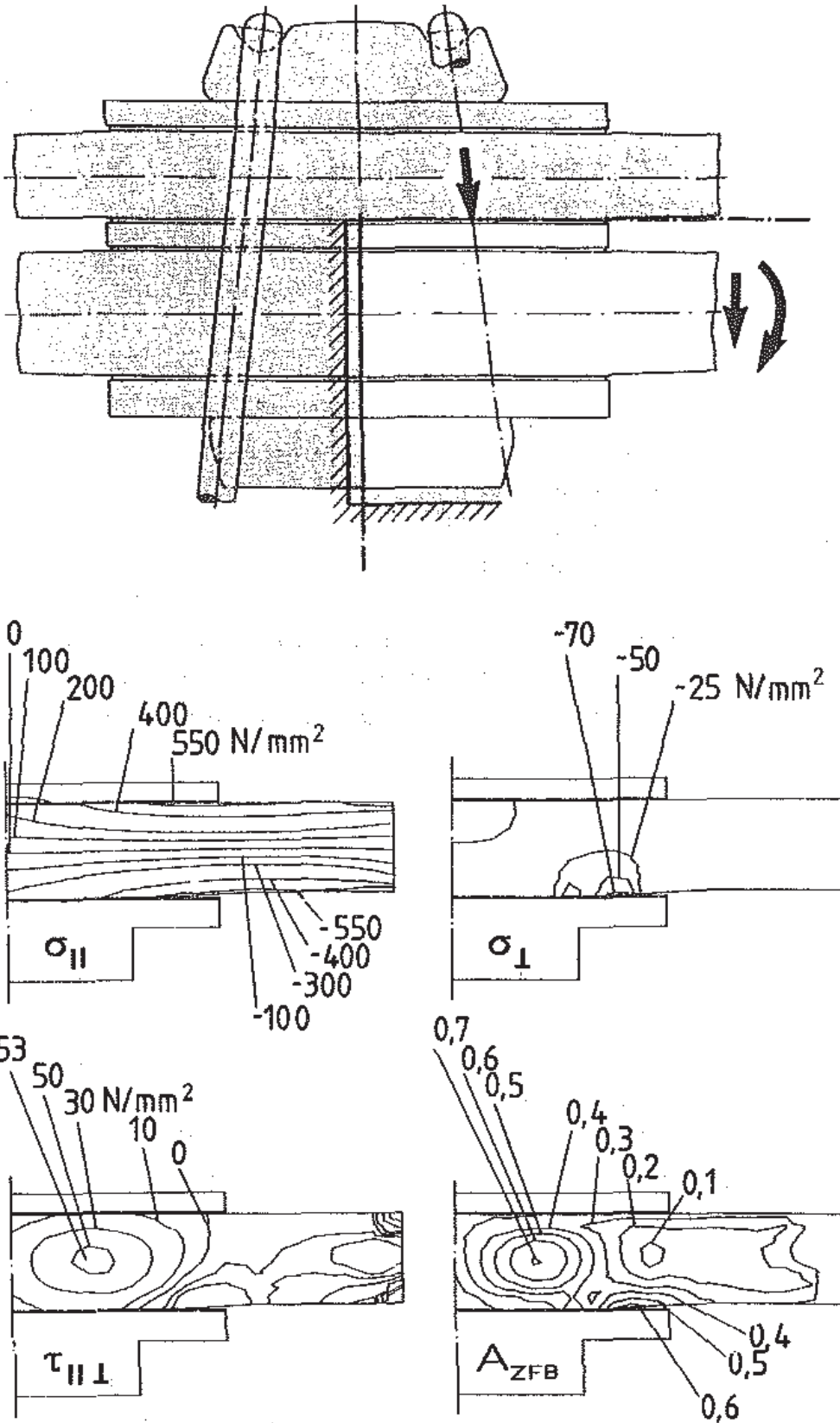


Bild 4.12: Mitteneinspannung; FEM-Modell mit Randbedingungen sowie Spannungsauswertung (σ_{II} , σ_I , $\tau_{II,I}$, A_{ZFB})

In den Bildern findet sich die Biegenormalspannung in der Faserverspannung σ_{\parallel} wieder, da alle Fasern in Längsrichtung des Bauteiles verlaufen. Querkräfte bzw. eine Änderung der Querkräfte ruft einerseits örtlich hohe Flächenpressungen als Querdruckbeanspruchung σ_{\perp} hervor; andererseits bewirken sie gefährliche Längs-Querschubspannungen τ_{\parallel} , die beachtliche Werte annehmen können. Durch die Bauteilgeometrie bedingt können aber auch Querspannungen entstehen, wie dies beim Federauge (*Bild 4.11*) der Fall ist.

Die Gefährdung durch diese Spannungen zeigt sich dann in der Werkstoff-Anstrengung gegen Zwischenfaserbruch, die im FKV-Postprozessing ermittelt wird; Maxima liegen in den Bereichen, wo auch die Schubspannungen und Querspannungen maximal sind.

Als Schlußfolgerung kann man festhalten, daß nicht allein die Faserverspannung, sondern auch die senkrecht zur Faser wirkenden Spannungen und die Schubspannung eine wichtige Rolle bei der Dimensionierung von Faserverbund-Blattfedern spielt.

Das Versagenskriterium gegen Zwischenfaserbruch erweist sich als geeignet bei der zuverlässigen Beurteilung der auftretenden Spannungszustände; in den ausgeführten Bauteilen traten Schäden, wie vorausberechnet, an den kritischen Stellen auf, vgl. /1.10/.

4.3 Antriebsgelenkwellen für Pkw

Im Automobilbau werden in den letzten Jahren Anstrengungen unternommen, hochbelastbare Pkw-Bauteile aus Stahl durch solche aus Faser-Kunststoff-Verbunden zu ersetzen. Antriebsgelenkwellen (AGW) aus GFK /1.11/ sind ein Beispiel dafür. Ihr Hauptvorteil ist die bei vergleichbarer Festigkeit sehr viel niedrigere Masse gegenüber den bisher in Kraftfahrzeugen verwendeten AGW aus Stahl. Bei quer eingebauten Motoren frontgetriebener Pkw ist das Getriebe nicht mehr symmetrisch zwischen den Vorderrädern angeordnet. Damit ergeben sich zwei unterschiedlich lange AGW zwischen den Getriebeausgängen und den Vorderrädern. Auf die damit zusammenhängenden Besonderheiten bei der Dimensionierung von FKV-Antriebswellen wird in einem späteren Abschnitt eingegangen.

Die Fertigung von Faserverbund-AGW erfolgt im Wickelverfahren (Filament-Winding); bei den hier vorgestellten Varianten sind die metallischen Gleichlaufgelenke, die bei Gelenkwellen benötigt werden, in das Faserverbundbauteil integriert. Auf einer rotierenden Form, dem Wickelkern, werden die mit Kunstharz imprägnierten Faserstränge auf wickeltechnisch günstigen Pfaden abgelegt. Damit die Fasern auf dem Wickelkörper nicht abrutschen, legt man sie auf sogenannten geodätischen Linien ab; davon abweichend sind unter Berücksichtigung von Haft- und Reibungseffekten auch nichtgeodätische Faserablagen möglich /1.11/.

Für die betrachteten Wellen bedeutet dies, daß über der Länge des Bauteils veränderliche Radien zu Faserrichtungswinkeln und Schichtdicken führen, die längs des Bauteils ebenfalls veränderlich sind, sie müssen vom FKV-Preprozessing im FEM-Berechnungsablauf richtig berücksichtigt werden.

Dies bedeutet beispielsweise, daß für jedes finite Element eine eigene Elementsteifigkeitsmatrix mit jeweils anderen Faserrichtungswinkeln und Schichtdicken generiert werden muß.

Im folgenden werden zwei Varianten einer GFK-AGW mittels FEM untersucht, zum einen eine Welle mit polygonförmiger Kräfteinleitung, zum anderen eine rotationssymmetrische Ausführung.

Die Antriebswellen werden in erster Linie auf Torsion beansprucht, die Kräfteinleitungselemente müssen dazu unter radiale Vorspannung gebracht werden, damit eine sichere Übertragung des Drehmomentes gewährleistet wird. Näheres zu den hier angesprochenen AGW führt SCHREIBER in /1.11/ aus.

4.3.1 Tripode-Kräfteinleitung

Die Antriebsgelenkwelle läßt sich in drei charakteristische Bereiche unterteilen, in ein zylindrisches Mittelstück mit einem anschließenden Übergangsbereich, der die Verbindung zum Kräfteinleitungsbereich herstellt; dieser nimmt das Gleichlaufgelenk auf, s. Bild 4.13.

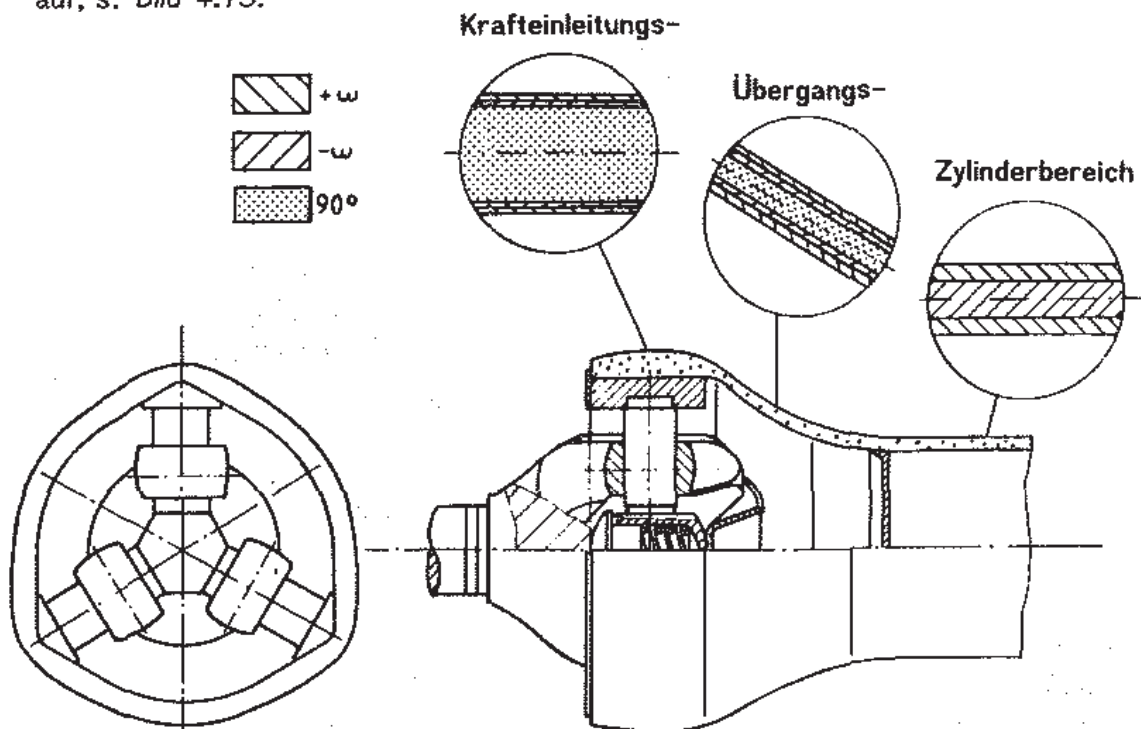


Bild 4.13: Antriebsgelenkwelle, Einteilung in 3 Bereiche, Schichtanordnung und Schnitt durch die Tripode-Kräfteinleitung

Der zylindrische Bereich ist aus einem zehnschichtigen AWW ($\omega = 60^\circ$) aufgebaut. Im Krafteinleitungsbereich existieren zusätzliche Verstärkungsschichten, die als Umfangswicklung ($\alpha = 90^\circ$) berücksichtigt werden; die Umfangswicklungen laufen bis in den Übergangsbereich, sie besitzen dort ihre Wendungen. Der Faserrichtungswinkel und die Schichtdicke der durchgehenden AWW-Schichten nehmen vom Zylinderteil ($\omega = 60^\circ$) bis zum Krafteinleitungsbereich ($\omega = 24^\circ$) kontinuierlich ab.

Die Krafteinleitung erfolgt durch ein Tripodegelenk, auf deren drei Ausleger je eine Krafteinleitungsstütze aufgesetzt ist.

Die FEM-Berechnung /4.22/ wird mit geschichteten Platten-/Schalenelementen unter Annahme geodätischer Faserablage durchgeführt. Nutzt man bei der FEM-Idealisierung die zyklische Symmetrie der AGW aus, genügt ein 120° -Ausschnitt als Modell, *Bild 4.14*. Die Verformungen der seitlichen Ränder werden mittels spezieller Randbedingungen (MPC) miteinander gekoppelt, so daß die auftretenden Verformungen denen eines Vollmodells entsprechen. Die Torsionsbelastung wird durch tangential gerichtete Kräfte am "Giebel" des FEM-Modells aufgebracht.

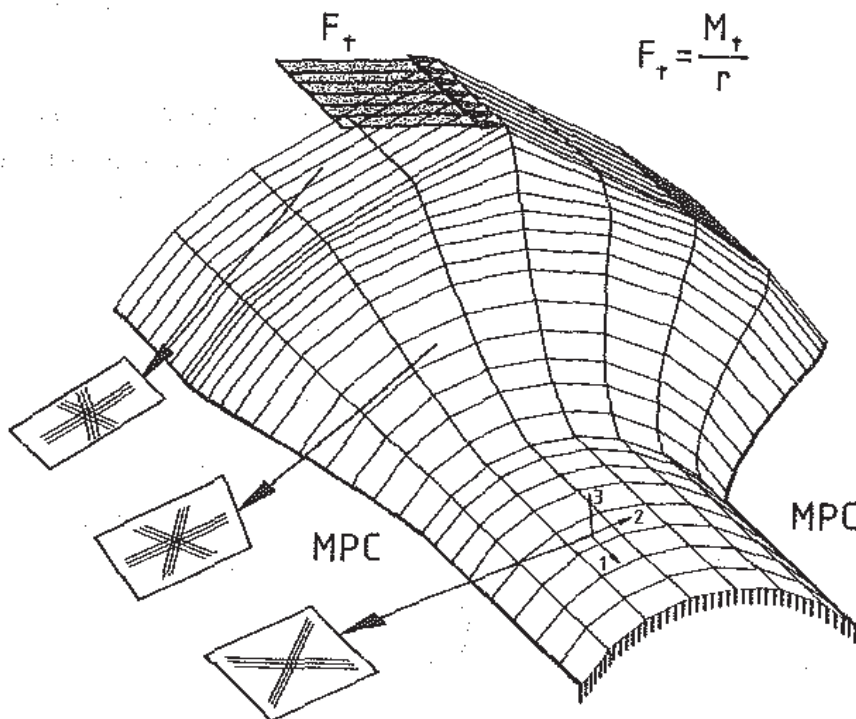


Bild 4.14: Unter Ausnutzung zyklischer Symmetrie gewähltes FEM-Modell (120°) mit geometrischen- und Kräfte-Randbedingungen

Die Elemente sind so angeordnet, daß die erste Achse des Element-Koordinatensystems, die auch gleichzeitig eine Orthotropieachse des Verbundwerkstoffes ist, in Meridian- (Bautelllängs-) Richtung weist. Die zweite Achse weist in Umfangsrichtung, die dritte Achse in Richtung der Schalennormalen. Die Faserrichtungswinkel sind hier bezüglich der Meridian-Richtung angegeben.

Neben den Verformungen müssen die berechneten Schichtspannungen und die daraus resultierende Werkstoffanstrengung gegen Zwischenfaserbruch beurteilt werden. Anders als bei isotropen Werkstoffen muß man jetzt die Spannungen in allen Einzelschichten des Faserverbund-Bauteiles auswerten und beurteilen.

In Bild 4.15 sind beispielhaft die Verformungen der Struktur sowie die Verteilung der im FKV-Postprozessing berechneten Werkstoffanstrengung A_{ZFB} in der höchstbelasteten Schicht (Außenseite der AGW) in Form einer Isoliniengrafik dargestellt.

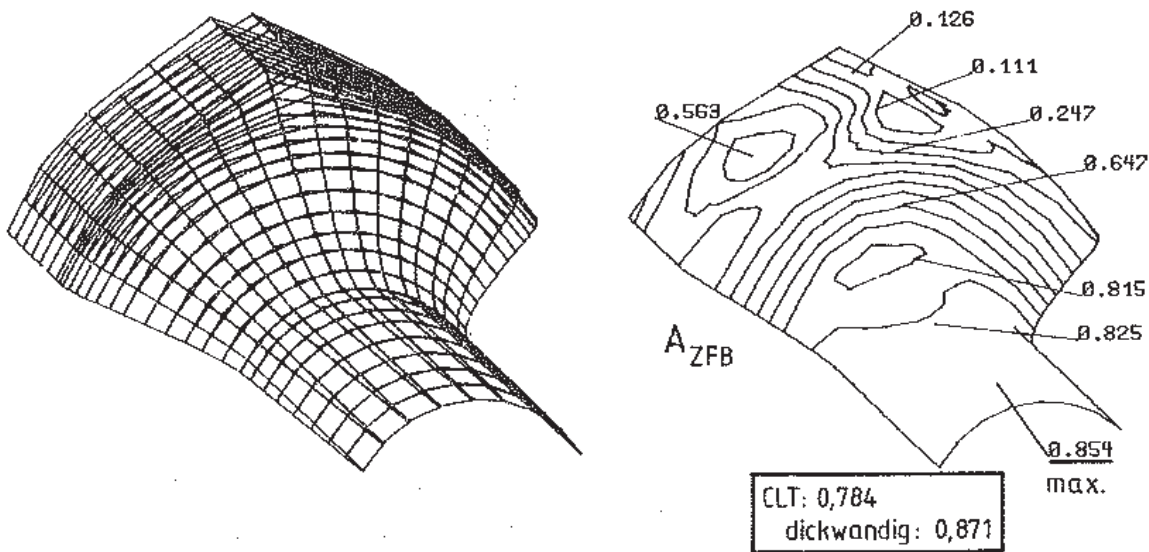


Bild 4.15: Verformungsplot; Werkstoffanstrengung an der Außenseite der AGW

Die Stelle höchster Beanspruchung ist im zylindrischen Teil der AGW zu finden, der Vergleich mit der CLT und einer dickwandigen Analyse /1.28/ zeigt dort eine gute Übereinstimmung.

Detaillierte Untersuchungen /4.22/ ergaben, daß bei einer Kombination von Vorspannung zwischen dem Tripodegelenk und dem Krafteinleitungsbereich der AGW und einem gleichzeitig wirkenden Torsionsmoment die höchstbelastete Stelle der AGW im Krafteinleitungsbereich liegt.

4.3.2 Delaminationen

Die AGW wird in ihrem Krafteinleitungsbereich zur Aufnahme des Tripode-Gelenkes in radialer Richtung aufgeweitet. Dabei treten Delaminationen (Trennung einzelner Schichten voneinander) auf, wenn ein bestimmter Weg beim Vorspannvorgang überschritten wird. Diese Delaminationen werden durch interlaminare Spannungen (ILS) ausgelöst. Die Analyse von ILS kann mittels "dickwandiger" geschichteter Platten-/Schalenelemente erfolgen /4.23/. Dazu wird unter Ausnutzung der zyklischen Symmetrie ein Ausschnitt aus dem Krafteinleitungsbereich mit finiten Elementen diskretisiert.

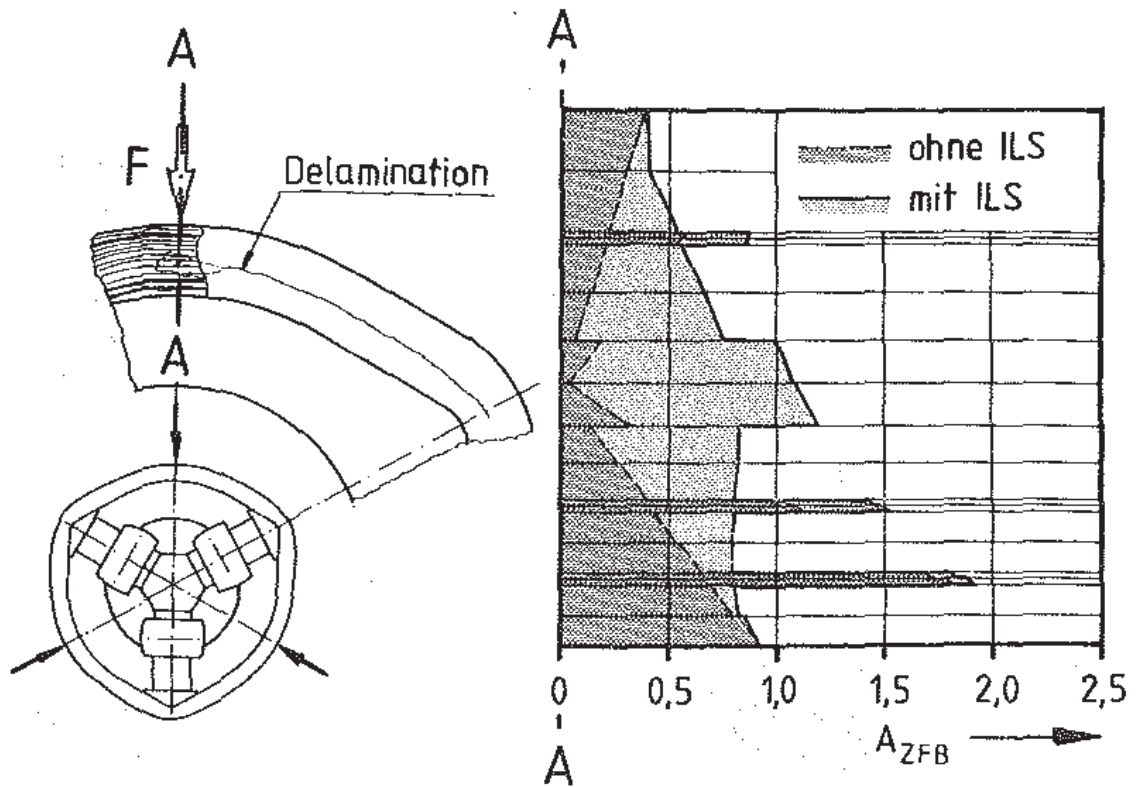


Bild 4.16: Delamination beim Vorspannen der Tripode-AGW /1.11/
 Werkstoffanstrengung A_{ZFB} über der Bauteilwandung
 ohne und mit Berücksichtigung der interlaminaren Spannungen (ILS)

Zur FE-Berechnung wird an der Stelle A-A die versuchstechnisch bestimmte Verschiebung in radialer Richtung vorgegeben, bei der die Delamination eintrat. An der Stelle, wo die Krafteinleitungsstützen eingesetzt werden sollen, beträgt nach FEM die radial nach außen gerichtete Verschiebung 0,495 mm, im Versuch wurden 0,5 mm gemessen.

Die Analyse der Schichtspannungen und vor allem der Werkstoffanstrengung liefert ein außerordentlich interessantes Ergebnis; Bild 4.16 zeigt den Verlauf von A_{ZFB} über der Wandung des Faserverbundes in der Nähe des Schnittes A-A.

Die Anstrengungsmaxima in den "dünnen" Schichten äußern sich im Bauteil in erster Linie durch Querrisse, hervorgerufen durch intralaminare Spannungen, wie eine Analyse der Schichtspannungen und der Werkstoffanstrengung ergab. Hier besteht die Gefahr der frühzeitig einsetzenden Ribbildung, die dann auch Delaminationen durch interlaminare Spannungen begünstigt.

Berücksichtigt man die interlaminaren Spannungen (ILS) im zuvor diskutierten Versagenskriterium (Abschn. 2.5), so sieht man, daß der Verbund in der "Neutral-ebene" stark gefährdet ist ($A_{ZFB} > 1$); die Delaminationsgefahr ist hier sehr hoch. Dies liegt daran, daß dort die Schubspannungen aus der beim Vorspannen benötigten Querkraft maximal sind; ein Auswerten ohne Berücksichtigung der ILS ergibt dort minimale Werkstoffanstrengung. An den lastfreien Rändern, an denen

die Querkraft-Schubspannungen verschwinden, sind die Anstrengungen mit und ohne ILS gleich groß.

Damit hat sich auch deutlich gezeigt, daß das in dieser Arbeit vorgeschlagene Versagenskriterium dem Anwender eine wirklichkeitsgetreue Analyse selbst derartig komplexer Spannungszustände erlaubt.

Die Form des Versagens - Zwischenfaserbruch innerhalb der Schichten durch intralaminare Spannungen ($\sigma_{||}$, σ_{\perp} , $\tau_{||\perp}$) oder Delamination einzelner Schichten durch interlaminare Spannungen (σ_z , τ_{1z} , $\tau_{||z}$) - kann durch Auswerten der Schichtspannungen mittels Gl. (2.69) mit und ohne interlaminare Spannungsanteile bestimmt werden.

4.3.3 Rotationssymmetrische AGW

Neben der bereits vorgestellten Tripode-Krafteinleitung werden AGW mit rotationssymmetrischen Krafteinleitungsbereichen ausgeführt /1.11/. Wie eingangs erwähnt, sind für Pkw mit Vorderradantrieb zwei unterschiedlich lange Wellen erforderlich. Hier soll nun die längere der beiden AGW untersucht werden, bei dieser Ausführung sind die Faserstränge nichtgeodätisch abgelegt.

Mit Hilfe eines numerischen Verfahrens /4.24/ ist es möglich, für beliebige rotationssymmetrische Körper Linien konstanter Rutschsicherheit zu finden. Die gewonnenen Informationen werden zur Steuerung der NC-Filament-Windungsanlage aufbereitet (CIM). Die Faserrichtungswinkel und Schichtdicken, die sich aus dieser rechnergestützten Auslegung ergeben, werden direkt zur FEM-Netzgenerierung und im FKV-Preprozessing verwendet (CIM/FEM-Kopplung) /4.25/.

Aus den CIM-Daten gewinnt man die Konturlinien für einen Längsschnitt der Antriebsgelenkwelle; ein Netzgenerator übernimmt dann die automatische FEM-Netzerzeugung. Die so entstandene Struktur wird mit axialsymmetrischen Volumenelementen idealisiert; dabei können Bereiche unterschiedlichen Materials ($\pm \omega$ -Bedeckungen und "Umfangswicklungen") vorteilhaft mit der SUBSTRUKTUR-TECHNIK voneinander abgegrenzt werden, siehe *Bild 4.17*.

Herkömmliche axialsymmetrische Elemente eignen sich zur Analyse rotations-symmetrischer Belastungen. Antisymmetrische Beanspruchungen, wie Torsion, Biegung und Querkräfte werden mittels sogenannter halbanalytischer Verfahren /1.29/ rechnerisch behandelt. Die über den Umfang verteilten, möglicherweise veränderlichen Lasten werden dabei durch eine FOURIER-Reihenentwicklung berücksichtigt.

Bei der Wahl des Materials ist man aber bei axialsymmetrischen Elementen auf spezielle orthotrope Mehrschichtenverbunde (0° , 90° , AWW, KV) beschränkt.

Im vorliegenden Fall sind die durchgehenden Faserlagen als AWV nachgebildet, die Umfangslagen als 90° -Schichten. Für den AWV mit stetig veränderlichen Faserrichtungswinkeln werden dabei elementweise neue Steifigkeiten erzeugt.

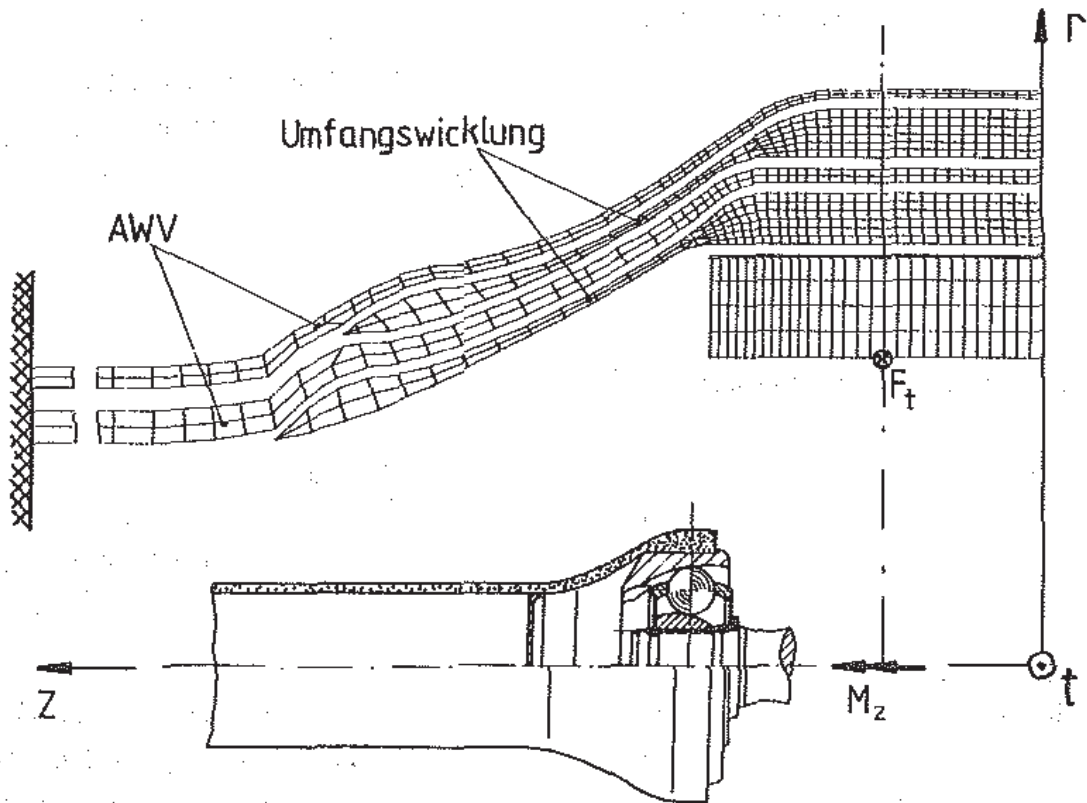


Bild 4.17: Rotationssymmetrische Ausführung der AGW n. /1.11/, FEM-Modell mit axialsymmetrischen Volumenelementen, geometrische- und Kräfte-Randbedingungen, Substrukturen (Explosionsdarstellung)

Das Gleichlaufgelenk wird mit einem Übermaß in den Krafteinleitungsbereich der GFK-Welle eingepreßt. Die radiale Pressung in der Kontaktfläche AGW-Gelenk und eine Abschätzung nach DIN 7190 /4.26/ zeigt Bild 4.18. Ebenfalls dargestellt sind die Schubspannungen, die sich bei der Torsionsbelastung der Welle in der Kontaktfläche ergeben.

Die Radialspannungsverteilung ist über einen weiten Bereich nahezu konstant mit einer Überhöhung an der Seite der Krafteinleitung, die in den Übergangsbereich einmündet.

Die Torsionsbelastung wird durch in Dickenrichtung wirkende Schubspannungen τ_{rt} in das Faserverbundbauteil eingeleitet; Maxima treten ebenfalls an der Nahtstelle zwischen Krafteinleitung und Übergangsbereich auf. Berücksichtigt man das nichtlineare Werkstoffverhalten des FKV in diesem Bereich, so ergibt sich eine Verminderung der Schubspannungsspitzen.

Daneben treten noch sehr geringe "Torsionsschubspannungen" τ_{tz} auf, die einerseits aus der Nachgiebigkeit der Krafteinleitung herrühren, andererseits daher, daß die Auswertung eine halbe Elementbreite von der Kontaktfläche entfernt vorgenommen wurde. Bei einer starren Einspannung sind die Schubspannungen τ_{tz} am Rande exakt Null, wie SCHREIBER in /1.11/ ausführt.

Als weiteres wichtiges Ergebnis kann man festhalten, daß die reibschlüssige Gelenk/AGW-Verbindung genügend Sicherheit gegen Durchrutschen bietet /4.25/.

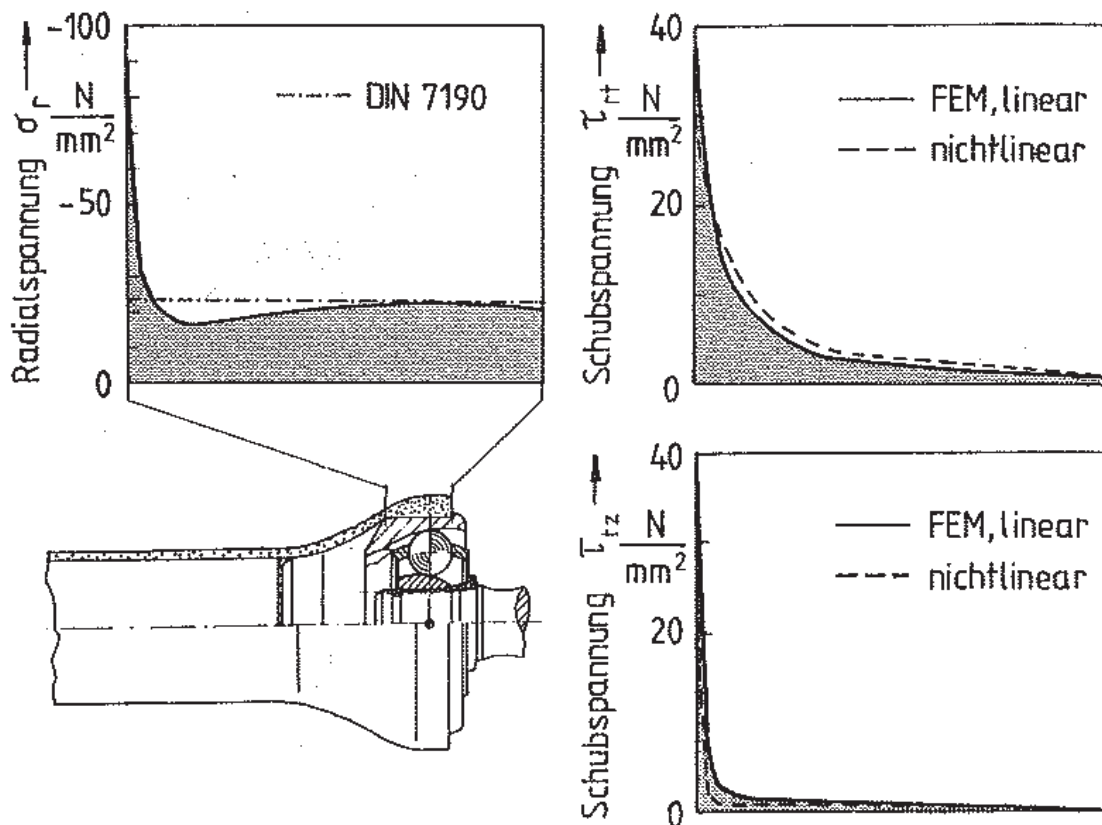


Bild 4.18: Pressungs- und Spannungsverteilung in der Kontaktfläche Gelenk-AGW, beim Querpreßverband und bei Torsionsbelastung

Die Spannungen, die man der FEM-Analyse entnimmt, sind globale Spannungen, bezogen auf Zylinderkoordinaten.

Sie müssen erst durch eine Transformation auf das jeweilige Elementkoordinatensystem und dann mit einer 3D-Schichtspannungsanalyse an dem ausgeglichenen Winkel-Verbund, vgl. Abschn. 2.3.3, aufbereitet werden.

Dies erfolgt im nachgeschalteten FKV-Postprocessing, wobei nun dreidimensionale Spannungszustände mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Zwischenfaserbruchkriterium beurteilt werden.

Die Bruchanalyse für die Torsionsbelastung ergibt, daß die AGW im zylindrischen Bereich am höchsten beansprucht wird.

Wesentlich höhere Werkstoffanstrengungen treten beim Einpressen des Gelenkes auf. Die Vorspannung des Kräfteinleitungsbereiches führt zu Anstrengungen, die im Übergangsbereich maximal sind; dies ist in *Bild 4.19* dargestellt.

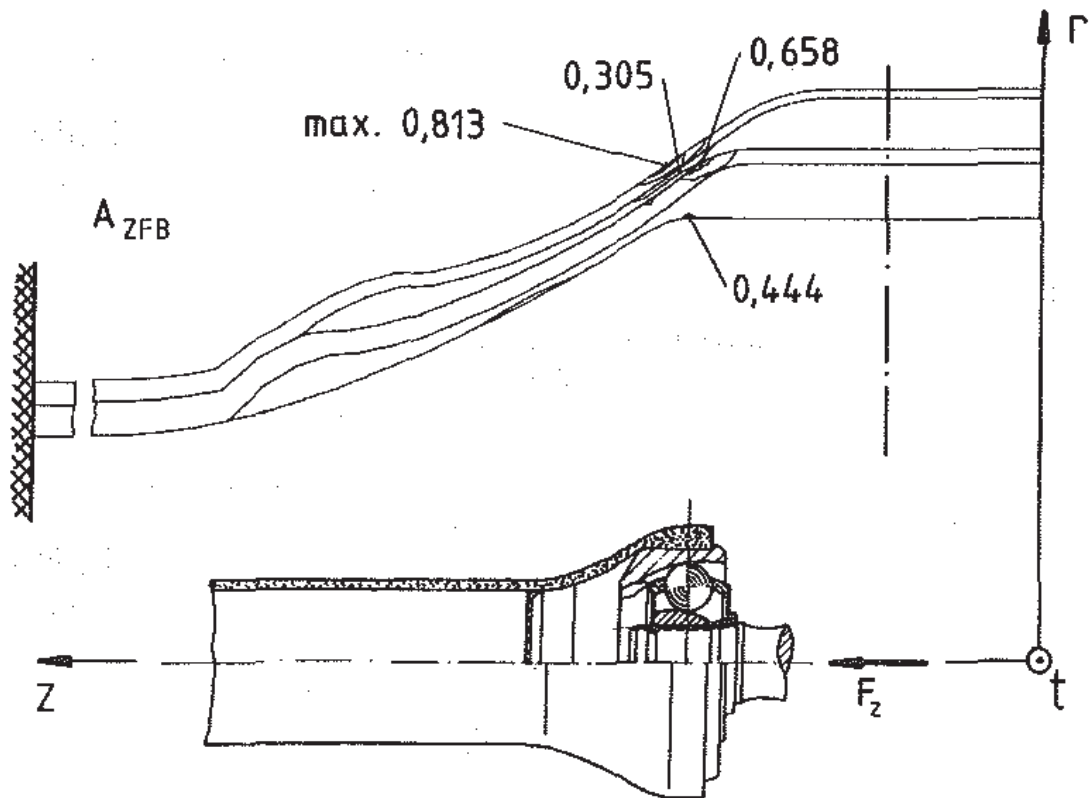


Bild 4.19: Werkstoffanstrengung A_{ZFB} nach dem Einpressen des Gleichlaufgelenkes

Vergleichende Berechnungen mit geschichteten Platten-/Schalenelementen ergaben eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der axialsymmetrischen FEM-Analyse. Diese Aussage gilt jedoch nur für die "ungestörten" Bereiche des Bauteiles; in den Bereichen der Kräfteinleitungselemente ist eine Analyse mit (axialsymmetrischen) Volumenelementen erforderlich, da hier auch Spannungen in "Dickenrichtung" des Laminates erfaßt werden müssen.

4.4 Faserverbund-Drehstabfedern

Bei der Konzeption von Personenkraftwagen ist ein wichtiges Ziel, bei möglichst kleinen Pkw-Außenabmessungen ein hohes Raumangebot für die Insassen zu schaffen. Die Durchladebreite des Kofferraumes beispielsweise kann durch den Einbau von Höchstleistungsdrehstabfedern aus Glasfaser-Kunststoff enorm vergrößert werden. Die sehr kurzen, raumsparend unter dem Pkw angebrachten Drehstabfedern aus GFK ersetzen dabei die großvolumigen Schraubenfedern, die in den Fahrzeuginnenraum hineinragen.

Intensive Forschungs- und Entwicklungsarbeiten waren notwendig, solche hochfesten, äußerst kurzen FKV-Drehstäbe zu entwickeln; die hierzu geleisteten Arbeiten sind von RAU in /1.12/ ausführlich dokumentiert. Der zylindrische Mittelteil der GFK-Drehstäbe wird dabei mit dem von JAKOBI /1.28/ erarbeiteten "analytischen" Berechnungsverfahren dimensioniert.

In der vorliegenden Arbeit werden der Kräfteinleitungsbereich von FKV-Drehstabfedern und die Kräfteinleitungselemente rechnerisch mittels der FEM untersucht.

4.4.1 Kräfteinleitung in GFK-Drehstäbe

Zur Drehmomenteinleitung in Drehstabfedern wird eine reibschlüssige Verbindung des zylindrischen GFK-Bauteils mit innen- und außenliegenden Metallhülsen mit gutem Erfolg eingesetzt. Es handelt sich dabei um einen Querpreßverband; die Metallteile weisen eine Rändelung der Kontaktflächen in Rohrlängsrichtung auf. Durch eine innen liegende Kegelspannhülse wird das GFK-Drehstabrohr radial gegen eine äußere Hülse gepreßt. Die radiale Vorspannung sorgt für eine sichere Übertragung des eingeleiteten Drehmomentes über Reibschluß. Dabei treten in einem wenige Millimeter breitem Bereich der Kräfteinleitung (KE) Gleitbewegungen auf.

Im weiteren wird diese Ausführung der KE-Elemente mittels einer FEM-Kontaktanalyse (PERMAS) genauer untersucht.

Ein Längsschnitt des Faserverbundbauteiles (hier eine $\pm 45^\circ$ AWW-Feder /1.12/) wird mit axialsymmetrischen Volumenelementen diskretisiert; diese besitzen eine spezielle Formulierung als "Fourier-Elemente", die Einleitung des Drehmomentes erfolgt über tangential gerichtete Kräfte, die in einer FOURIER-Reihe mit der "Nullten Harmonischen" entwickelt werden. *Bild 4.20* zeigt die untersuchte Kräfteinleitung sowie das gewählte FEM-Netz.

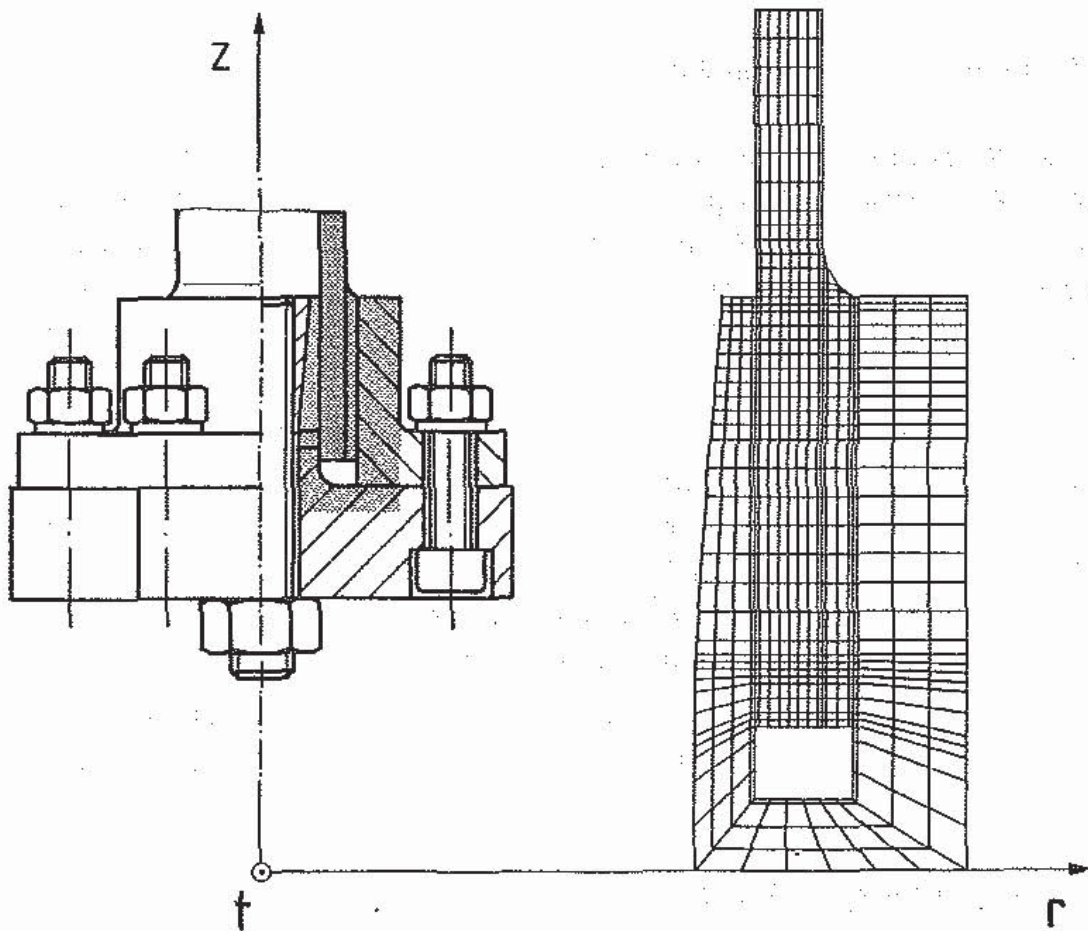


Bild 4.20: Krafteinleitung in GFK-Drehstabfedern nach /1.12/
FEM-Netz mit axialsymmetrischen Volumenelementen

4.4.2 FEM-Kontaktanalyse

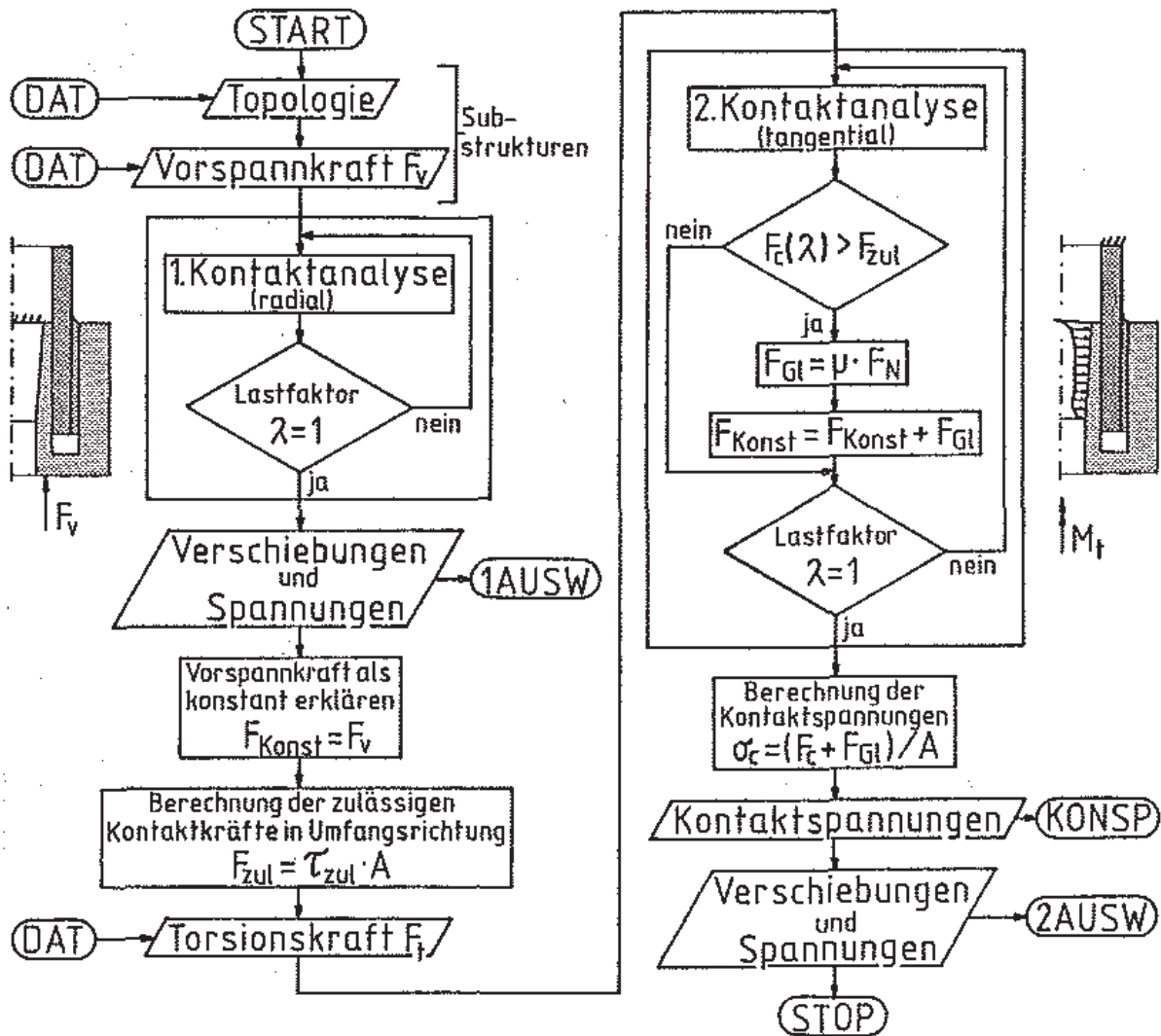
Die FE-Berechnung soll dazu dienen, die Krafteinleitungs (KE) -Bereiche der GFK-Drehstabfeder genauer zu untersuchen. Dabei müssen das Kontaktproblem (Querpreßverband) und Reibungseffekte berücksichtigt werden.

Die Rechnung wird in zwei aufeinander folgenden Schritten durchgeführt. Zuerst erfolgt eine Kontaktanalyse in radialer Richtung, die innenliegende Kegelspannhülse wird dabei durch eine Kraft in axialer Richtung gegen den Spannkegel verschoben, so daß sich eine radiale Aufweitung ergibt. Dies kann zufriedenstellend gelöst werden /4.27/; die radiale Pressungsverteilung läßt sich auf diese Weise ermitteln.

Danach erfolgt die zweite Kontaktanalyse und zwar in Umfangsrichtung, hier wird das Drehmoment aufgebracht. Dabei treten jetzt Reibungseffekte auf, das Drehmoment wird über Reibschluß in das GFK-Rohr eingeleitet.

Damit neben Haft- auch Gleitreibungseffekte berücksichtigt werden können, wird ein Algorithmus entwickelt, der die Möglichkeiten eines Standard-FEM-Programmes in dieser Hinsicht erweitert /4.28/.

Den Ablaufplan für das gewählte Verfahren zeigt Bild 4.21.



$$K \cdot u(\lambda) = \lambda \cdot F + F_{Konst} + F_C(\lambda)$$

λ : Lastfaktor; F : Lastvektor; F_{Konst} : konstante Lasten; F_C : Kontaktkräfte

Bild 4.21: Ablaufplan der FEM-Kontaktanalyse nach /4.28/

Im einzelnen beginnt der Berechnungsablauf damit, daß für den Querpreßverband der Verspannzustand ermittelt wird; dieser wird am Ende der 1. Kontaktanalyse als konstant erklärt. Diesem überlagern sich jetzt die Spannungsanteile, die von dem Drehmoment bewirkt werden, die Belastung wird dabei in Stufen gesteigert.

Auf den Kontaktflächen der Innen- und Außenseite des GFK-Rohres entstehen jetzt Umfangskräfte, die jedoch die übertragbaren Haftreibungskräfte nicht überschreiten können. Für die Haftreibungskräfte wird wegen der Rändelung der Metallteile angenommen, daß sie sich aus der Schubfestigkeit des Kunstharzfilms auf der GFK-Oberfläche multipliziert mit der zugehörigen Fläche ergeben.

Wenn die übertragbare Kraft überschritten wird, wird der Kontakt an diesen Knotenpunkten gelöst. Ohne Berücksichtigung der Gleitreibung "rutscht" die KE durch. In der Realität spielen Gleitreibungskräfte eine wichtige Rolle, sie übernehmen einen erheblichen Teil des Drehmomentes.

Deshalb werden in der FEM-Analyse jeweils an den durchrutschenden Knotenpunkten Gleitreibungskräfte angesetzt, die sich aus dem Reibungsgesetz $F_t = \mu F_n$ mit der örtlich wirkenden Normalkraft F_n (aus der Pressungsverteilung) und dem Reibbeiwert μ ergeben. Dann tritt ein örtlich begrenztes "Durchrutschen" ein, das aufgebrachte Drehmoment wird jetzt sicher übertragen. Bild 4.22 zeigt die radiale Pressung und die Verteilung der Umfangskräfte für unterschiedliche Reibbeiwerte.

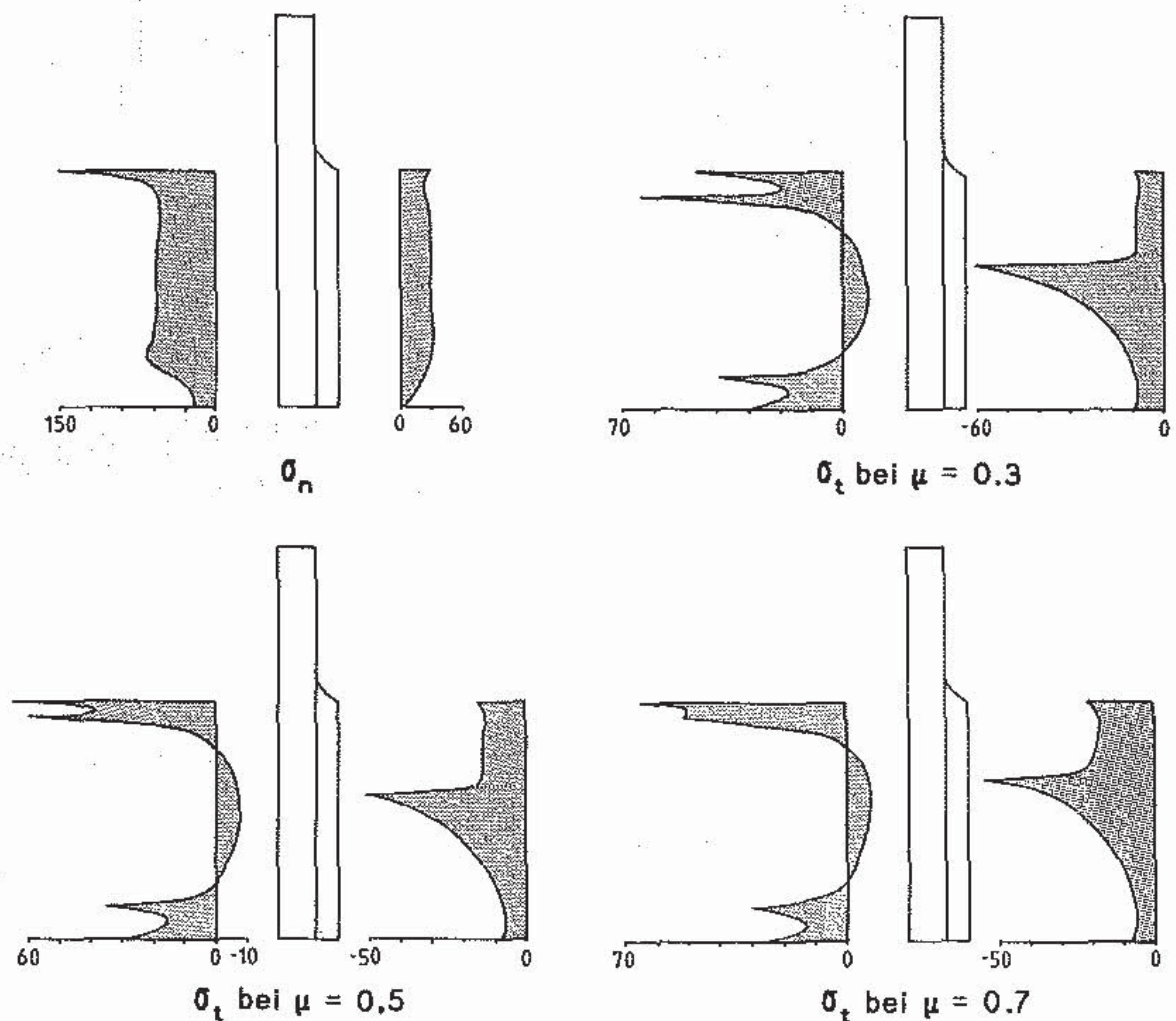


Bild 4.22: Verteilung der Pressung σ_n und der bezogenen Umfangskräfte $\sigma_t = F_t / A$ für unterschiedliche Reibbeiwerte $\mu = 0,3 ; 0,5 ; 0,7$

Man erkennt deutlich, daß das Drehmoment im wesentlichen an der Außenseite des GFK-Rohres herausgenommen wird, die innenliegende geschlitzte Hülse übernimmt in der Summe nur geringere Kräfte. Deutlich zu erkennen ist auch der Bereich, in dem Gleitreibungskräfte wirken, diese sind an dem niedrigeren Niveau an der Außenseite erkennbar. Je nach gewähltem μ sind die Gleitreibungskräfte unterschiedlich hoch; an der Spitze im Diagramm erkennt man die Stelle, an der die Grenze zwischen Gleiten und Haften verläuft. Interessant ist, daß etwa 30 % der KE-länge "durchrutscht", das Drehmoment aber trotzdem noch übertragen wird.

Damit ist gezeigt, daß Gleitreibungseffekte bei derartigen Untersuchungen unbedingt berücksichtigt werden müssen. Dies wird im vorliegenden Fall durch die Entwicklung eines speziellen Steuerprogrammes für die FEM-Kontaktanalyse erreicht.

4.4.3 Spannungs- und Bruchanalyse

Im vorhergehenden Abschnitt wurde gezeigt, wie man die Kontaktanalyse für die KE-Bereiche einer GFK-Drehstabfeder durchführt. Dabei kam es hauptsächlich darauf an, Haft- und Gleitreibungseffekte wirklichkeitsnah zu berücksichtigen. Darüberhinaus interessiert den Konstrukteur die auftretende Spannungsverteilung und die Beanspruchung des Werkstoffs.

Die untersuchte AWW-Drehstabfeder wird mit axialsymmetrischen Volumenelementen berechnet. Als Ergebnis der FEM-Analyse erhält man u. a. die sechs Spannungskomponenten des räumlichen Spannungszustandes, bezogen auf das globale Koordinatensystem r, z, t , siehe Bild 4.23.

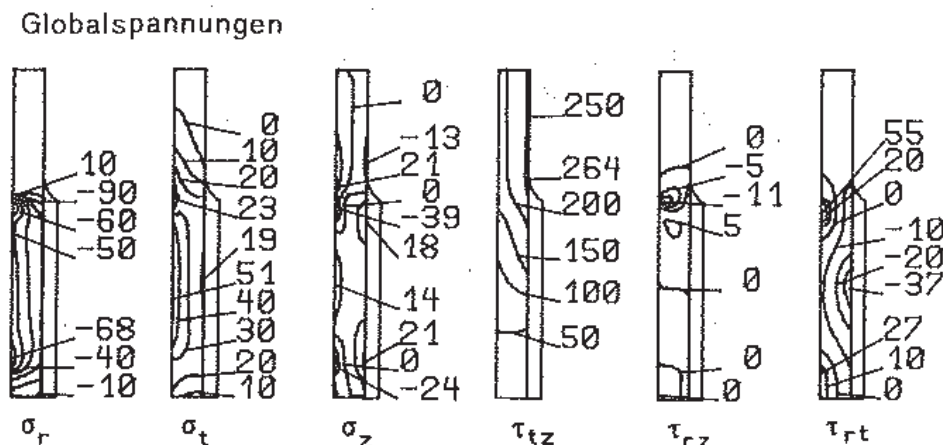
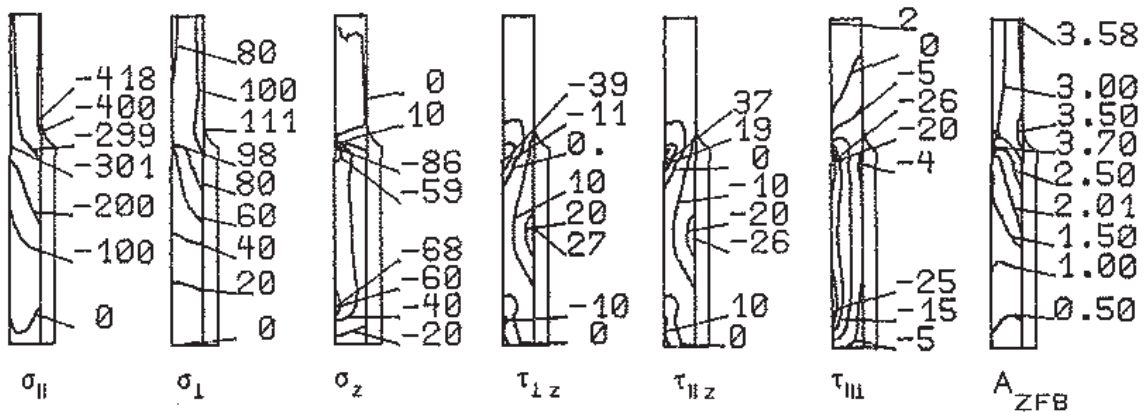


Bild 4.23: Globalspannungen in der GFK-Drehstabfeder

Die Radialspannung σ_r und die Umfangsspannung σ_t werden in erster Linie durch die Vorspannung hervorgerufen, Querkontraktionseffekte bewirken im Bereich der KE-Elemente sogar Axialspannungen σ_z . Außerdem treten Schubspannungen τ_{rz} auf, diese werden dadurch hervorgerufen, daß das GFK-Rohr im KE-Bereich radial aufgeweitet wird, im ungestörten Bereich jedoch nicht.

Aus der Drehmomentenbelastung resultieren Schubspannungen τ_{tz} und zusätzlich noch in Dickenrichtung wirkende Schubspannungen τ_{rt} , die für eine Überleitung der Torsionsschubspannung in die metallischen KE-Elemente sorgen, siehe dazu auch /1.11/. Die Globalspannungen sind zwar ausreichend für Plausibilitätsbetrachtungen, zur Beurteilung der Bruchgefahr ist es aber erforderlich, eine schichtenweise Spannungs- und Bruchanalyse vorzunehmen, siehe Abschn. 2.3 und 2.5. Das Ergebnis ist für beide AWV-Schichten in *Bild 4.24* dargestellt.

AWV - Schichtspannungen, + ω - Schicht



AWV - Schichtspannungen, - ω - Schicht

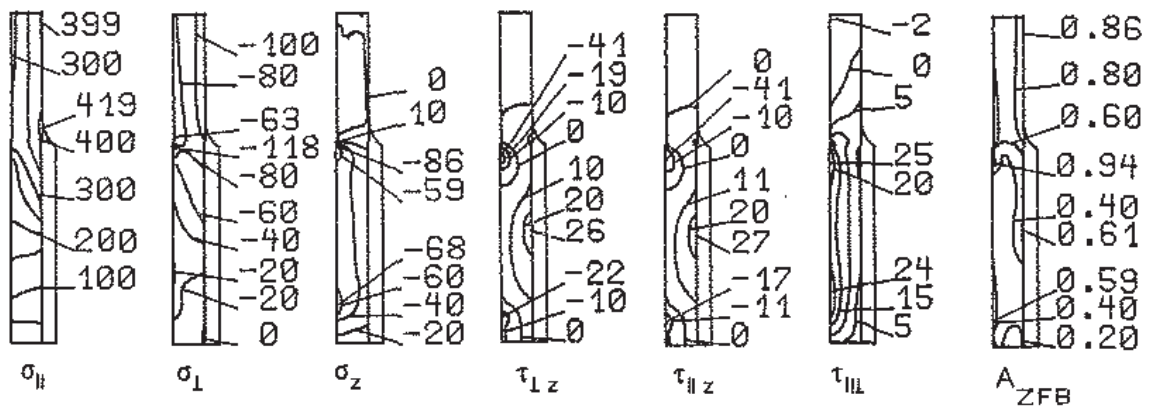


Bild 4.24: Schichtspannungen und Werkstoffanstrengung in der AWV-Drehstabfeder

Die intralaminaren Spannungen σ_{II} , σ_I , τ_{III} in den beiden Schichten des AWV sind dem Betrage nach gleich groß, haben aber unterschiedliche Vorzeichen. Die interlaminäre Normalspannung σ_z ist in beiden Schichten gleich und identisch mit der Radialspannung σ_r der Vorspannung. Die interlaminären Schubspannungen τ_{IIz} und τ_{Iz} sind in den Schichten wechselseitig gleich ($\tau_{IIz1} \hat{=} \tau_{Iz2}$). Die querzugbeanspruchte + ω - Schicht ist sehr hoch beansprucht ($A_{ZFB} \gg 1$); die querdruckbeanspruchte - ω - Schicht ist hingegen nicht auf Reißbildung gefährdet.

Hier zeigt sich deutlich, daß die gestellten Forderungen mit AWV-Drehstäben nicht zu erfüllen sind, man muß dazu ein anderes Konzept entwickeln, siehe /1.12/.

4.5 Leichte Innendruckbehälter

Leichte Innendruckbehälter aus Faser-Kunststoff-Verbunden (FKV) werden bisher hauptsächlich in der Luft- und Raumfahrt eingesetzt /1.8/. Eine bekannte Anwendung ist der "Apogäumsmotor", eine Brennstoffkammer für geostationäre Satelliten. Die Fertigung von FKV-Behältern erfolgt größtenteils im Wickelverfahren (Filament-Winding). Dabei werden hochfeste Verstärkungsfasern aus Glas-seide, Kohlenstoff oder aromatischem Polyamid in Matrizes aus härtbarem Kunststoff eingebettet. Solche hochbelastbaren FKV-Druckbehälter werden meistens mit Hilfe der Netztheorie dimensioniert. Die Auslegung erfolgt dabei auf Berstdruck nach der erreichbaren Bruchspannung der verwendeten Verstärkungsfasern.

4.5.1 Bauweise und Gestaltung

Als Ausführungsform eines FKV-Druckkörpers wählt man oft ein zylindrisches Mittelteil mit integral angewickelten Böden. Die Böden - im folgenden als Dome bezeichnet - sind Kuppelschalen, die eine zentrische Polöffnung besitzen und am "Äquator" an den Zylinder grenzen.

Zur Berechnung nimmt man vereinfachend an, daß in der Behälterwand ein reiner Membranspannungszustand herrscht /2.4, 4.29, 4.30, 4.31/. In der Membranschalentheorie werden Biegemomente nicht berücksichtigt.

Die Form der Domschale wird durch drei Bedingungen festgelegt. Zum einen gilt für das Gleichgewicht am Schalenelement

$$\frac{n_U}{R_U} + \frac{n_M}{R_M} = p \quad (4.3)$$

Die zweite Beziehung gewinnt man aus der Differentialgeometrie; für die Meridianlinie - die Erzeugende einer rotationssymmetrischen Schale - erhält man eine Differentialgleichung 2. Ordnung. Dabei ist r der senkrechte Abstand von der Rotationsachse des Behälters zu Punkten auf der Meridianlinie.

$$r'' = \frac{1 + r'^2}{r} \left[\left(\frac{n_U}{n_M} \right)_r - 2 \right] \quad (4.4)$$

Für einen vorgegebenen Verlauf von $n_U / n_M = f(r)$ kann mit Hilfe dieser DGL die Form der Schale bestimmt werden. Die dritte Beziehung liefert der Schalenwerkstoff bzw. das Fertigungsverfahren. Unter der Voraussetzung, daß die Fasern geodätisch abgelegt werden, und unter Annahme eines Tragverhaltens nach der Netztheorie - nur die Fasern übertragen Kräfte - ergibt sich eine einfache Beziehung für das Verhältnis der Umfangs- zur Meridiankraft.

$$\left(\frac{n_U}{n_M}\right)_r = \tan^2 \omega = \frac{1}{\left(\frac{r}{r_p}\right)^2 - 1} \quad (4.5).$$

Mit diesen Bedingungen (Gleichgewicht, Geometrie, Werkstoff) liegt die Form der Domschale fest. Im Vergleich zu einer Halbkugel ergeben sich abgeplattete Konturen, die als Ovaloiden oder Sphäroiden bezeichnet werden. Mit diesen Grundlagen wurde ein innendruckbelasteter Behälter aus Glasfaser-Epoxidharz-Verbund gestaltet, der als Versuchskörper zum gezielten Einbringen von Eigen-
spannungen /1.24/ diente.

Der integral gewickelte Behälter besteht aus einem zylindrischen Mittelteil und mit geodätischer Fadenablage angewickelten Domen, die an ihren Polen eine zentrische Öffnung zur Aufnahme eines Stahfittings besitzen, siehe *Bild 4.25*. Die Faserstruktur wird durch eine Schraubenwicklung ($\pm \omega$ -Bedeckung), die über den Zylinderbereich und die Dome verläuft und durch eine zusätzliche Umfangswicklung im zylindrischen Teil des Behälters gebildet. Der Faserrichtungswinkel und die Schichtdicken ändern sich dabei kontinuierlich im Bereich der Dome.

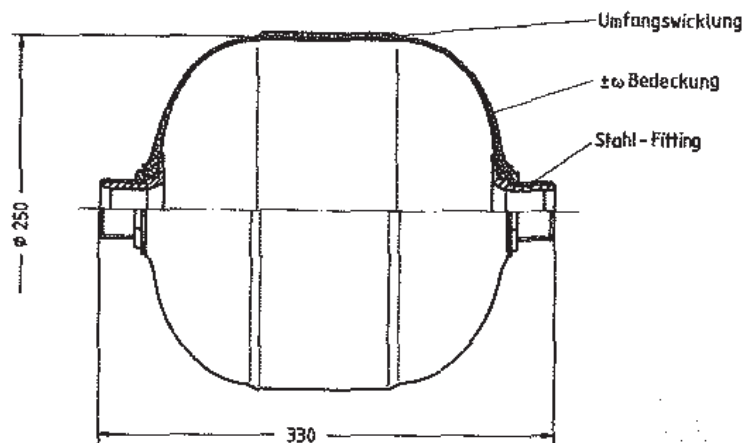


Bild 4.25: Geometrie des FKV-Behälters

Der Behälter wurde nach der Netztheorie gestaltet und dimensioniert /4.32/. Die Voraussetzungen der Netztheorie - nur die Fasern tragen die Belastung - ist aber nur dann recht gut erfüllt, wenn die Kunststoffmatrix sehr weich ist (oberhalb der Glasübergangstemperatur) oder im Stadium fortgeschrittener Rißbildung zwischen den Fasern. Bei vollkommen intakter Matrix wird der FKV rechnerisch als Kontinuum behandelt. Mit Hilfe der "klassischen Laminattheorie" (CLT) kann man bei bekannten Schnittkräften für ungestörte Bereiche, z. B. für den zylindrischen Mittelteil, eine schichtenweise Spannungs-, Verformungs- und Bruchanalyse durchführen. Die Übergänge vom Dom zum Zylinder und die Bereiche des Polfittings lassen sich wirklichkeitsgetreuer mit Hilfe der FEM analysieren /1.13/.

4.5.2 FEM-Anwendung

Eine Besonderheit des FKV-Behälters ist die Form der Domschalen. Wie bereits erwähnt, hängt sie vom Werkstoff und dem Fertigungsverfahren ab. Die Form der Schale wird durch eine DGL 2. Ordnung beschrieben. Sie kann auf ein Differentialgleichungssystem mit 2 DGL'n 1. Ordnung zurückgeführt und mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens numerisch gelöst werden. Aufbauend auf diesem Verfahren wurde ein spezieller Preprozessor entwickelt /4.33/, der die Topologie des Faserverbund-Behälters erzeugt. Je nach Elementtyp müssen außerdem die im Dombereich veränderlichen elastischen Eigenschaften berücksichtigt werden. Zur Analyse des Behälters werden "geschichtete" Platten-/Schalenelemente und axialsymmetrische Volumenelemente verwendet.

Zunächst seien die geschichteten Elemente betrachtet. Der FKV-Behälter wird durch eine Reihe von Platten-/Schalenelementen idealisiert, deren Knotenpunkte auf der Mittelfläche der berechneten Behälterkontur liegen. Aus Symmetriegründen genügt es, einen schmalen Streifen zu betrachten, siehe *Bild 4.26*.

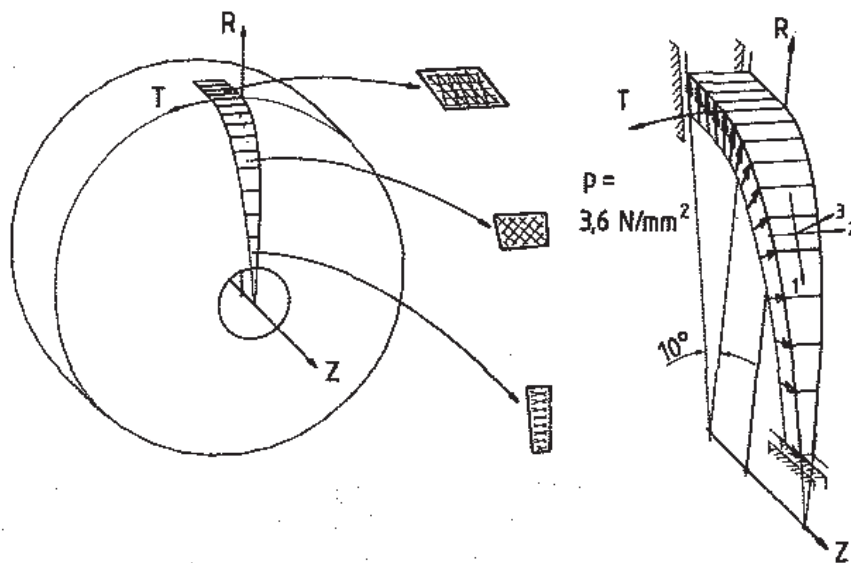


Bild 4.26: Gesamtansicht des Behälters und Idealisierung, Schichtaufbau, betrachteter Ausschnitt, geometrische- und Kräfte-Randbedingungen

Der Schichtaufbau wird durch einzelne Lagen "layer" berücksichtigt. Jede Schicht wird durch ihre UD-Steifigkeitsmatrix, ihren Faserrichtungswinkel und ihre Schichtdicke beschrieben. Dabei ist darauf zu achten, daß der Winkel bezogen auf das Elementkoordinatensystem angegeben wird. Für den Zylinderteil werden drei Schichten verwendet, hier $+11^\circ$, -11° und 90° . Für den Dombereich genügen 2 Schichten, eine $+\omega$ - und eine $-\omega$ -Schicht, allerdings sind die Winkel und die Schichtdicken längs der Meridianlinie veränderlich. Der tatsächliche Verlauf kann mit den Elementen nur stufen- (element-)weise angenähert werden.

Bild 4.27 zeigt die Verformung im Meridianschnitt des Behälters unter Innendruckbelastung. Die Verformung des zylindrischen Teils des Behälters stimmt im ungestörten Bereich in der Nähe der Symmetrielinie mit den Werten nach der CLT gut überein.

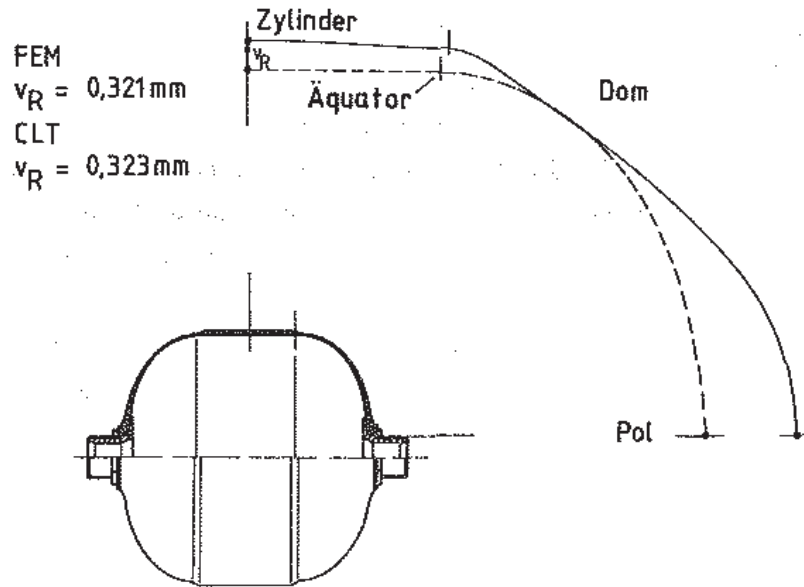


Bild 4.27: Verformung des FKV-Behälters im Meridianschnitt

Der Dom wird am Äquator radial nach außen verschoben und erfährt am Pol eine positive Verschiebung in axialer Richtung. Im mittleren Bereich ist allerdings eine negative Durchsenkung festzustellen.

Betrachtet man zunächst die Verformung des Domes am Äquator ohne den Zylinderteil, so stellt man fest, daß die FKV-Schale unter Innendruckbelastung eine "Einschnürung" erfährt. Beim Behälter ist aber der Dom mit dem Zylinderteil fest verbunden. Die Aufweitung des Zylinders und die "Einschnürung" des Domes passen nicht zueinander. Damit die Verformungen wieder harmonisieren, müssen am Äquator radial nach außen gerichtete Kräfte in die Domschale eingebracht werden, die eine entsprechende Verschiebung bewirken.

Dies führt u. a. zu der negativen Durchsenkung in der Mitte der Kuppelschale und zu Biegespannungen, die sich den Membranspannungen überlagern.

Dieser etwas überraschende Effekt einer negativen Verformung in Umfangsrichtung wurde von NEITZEL an einem GFK-Behälter gemessen /4.34/.

Die durchgeführte FEM-Rechnung bestätigt den damaligen experimentellen Befund.

Neben den "geschichteten" Elementen werden axialsymmetrische Elemente zur Strukturanalyse des FKV-Behälters eingesetzt. Die $\pm \omega$ -Bedeckung und die Umfangswicklung werden separat aufgebaut und mit der Substrukturtechnik zum FKV-Behälter zusammengesetzt, siehe Bild 4.28.

Der stetig sich verändernde Faserrichtungswinkel im Dom wird durch elementweise neue Steifigkeitsmatrizen angenähert. Die unterschiedliche Wanddicke wird bereits bei der Strukturerstellung beachtet.

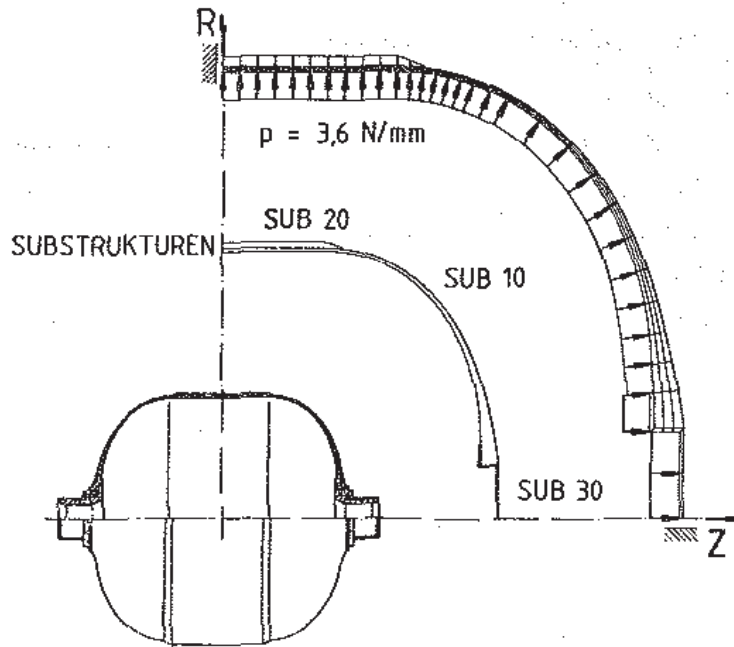


Bild 4.28: Idealisierung des FKV-Behälters mit axialsymmetrischen Elementen, Substrukturen, geometrische- und Kräfte-Randbedingungen

Die im FKV-Postprocessing durchgeführte schichtenweise Spannungs- und Bruchanalyse zeigt, daß der Behälter sehr ungleichmäßig beansprucht ist, Bild 4.29.

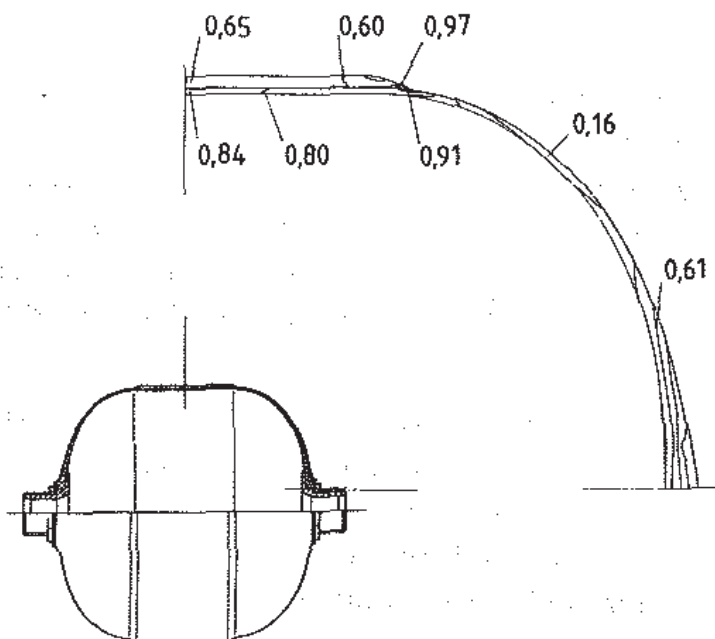


Bild 4.29: Anstrengung A_{ZFB} in der $\pm \omega$ -Bedeckung und in der Umfangswicklung

In guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Platten-/Schalenelemente zeigt sich, daß die Anstrengung im Übergangsbereich vom Zylinder zum Dom am größten ist. Sie erreicht Werte, die in der Nähe von "1" liegen, d. h. hier ist ein Versagen des Behälters durch Zwischenfaserbrüche zu erwarten. Dies kann z. B. bedeuten, daß der FKV-Behälter an diesen Stellen undicht würde.

Abschließend muß noch angemerkt werden, daß thermisch bedingte Eigenspannungen aus dem Härtingsprozeß die Werkstoffanstrengung noch erhöhen, vergleichende Berechnungen ergaben qualitativ ähnliche Verteilungen, die Werte waren jedoch insgesamt (quantitativ) etwas höher. Feuchtigkeitsbedingte Eigenspannungen können jedoch diese thermisch bedingten Eigenspannungen teilweise oder völlig kompensieren; im konkreten Falle empfiehlt sich daher eine rechnerische Überprüfung der Eigenspannungen.

4.5.3 Bewertung

Der untersuchte FKV-Behälter ist nach der Netztheorie ausgelegt und dimensioniert. Es galt zu untersuchen, wie sich ein solchermaßen ausgeführter Innendruckbehälter mechanisch verhält, wenn man ihn nicht als Fasernetzwerk, sondern als Kontinuum – also bei intaktem Faser-Kunststoff-Verbund – betrachtet.

Wie sich zeigt, treten am Übergang vom Zylinderteil zur Domschale zusätzliche Biegespannungen auf, die sich den berechneten Membranspannungen überlagern; die Biegespannungen resultieren aus dem unterschiedlichen Verformungsverhalten von Zylinder und Dom am Äquator.

Die mit der FEM berechneten Schichtspannungen werden mit einem Versagenskriterium zu einer Werkstoffanstrengung zusammengefaßt; dieses gestattet eine Beurteilung der am stärksten gefährdeten Bereiche des FKV-Bauteiles.

Die Anstrengung gegen Zwischenfaserbruch ist im betrachteten Faserverbundbauteil unterschiedlich hoch, der Werkstoff des Behälters ist nicht optimal ausgenutzt. Die auf Zwischenfaserbruch gefährdetsten Stellen sind in der Nähe des Äquators und im Fittingbereich zu finden; dort würde die Ribbildung zuerst einsetzen.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß ein FKV-Druckbehälter auch bei fortgeschrittener Ribbildung (viele Zwischenfaserbrüche) noch tragfähig ist, wenn eine gas- oder flüssigkeitsdichte Innenauskleidung (Liner) gewählt wird. Der Behälter kann dann bis zur Faserbruchgrenze belastet werden; dann wird also die Anstrengung gegen Faserbruch für die Dimensionierung maßgebend.

Wie können nun die Anstrengungen A_{ZFB} im Faserverbundbehälter günstig beeinflusst werden?

Eine Möglichkeit - wie sie auch bei diesen Rechnungen berücksichtigt wurde - ist, die Umfangswicklung vom Zylinder in den Dombereich hineinzuziehen.

Weiterhin wirkt sich günstig aus, den Zylinderteil symmetrisch zu schichten, z. B. die Umfangswicklung zwischen zwei $\pm \omega$ -Bedeckungen zu legen, siehe dazu auch /4.33/.

Ebenfalls beeinflusst eine Erhöhung der Umfangssteifigkeit im Zylinder an der Übergangsstelle (Äquator) die Werkstoffanstrengung günstig; dies erreicht man durch zusätzliche Umfangslagen im Bereich des Äquators, wie es in /2.4/ vorgeschlagen wird.

Die aufgezählten Varianten machen deutlich, daß man erst mit einem Strukturanalyseverfahren - wie der FEM - solche konstruktiven Varianten miteinander vergleichen und bewerten kann.

5. NUMERISCHE OPTIMIERUNG

Im vorausgegangenen Abschnitt wurde gezeigt, wie man eine verfeinerte Verformungs-, Spannungs- und Bruchanalyse von Faserverbundbauteilen mit Hilfe der FEM durchführt. Durch eine Verbindung von verfeinerten Analysemethoden mit sehr leistungsfähigen Rechnern (Hardware) kann man Modifikationen am Berechnungsmodell anbringen und deren Auswirkungen z. B. auf die Ausnutzung des Werkstoffes betrachten. Dem Faserverbundkonstrukteur stehen dazu eine Vielzahl von Parametern - wie Faser/Matrix-System, Faservolumenanteil, Schichtdicken, Faserwinkel - zur Verfügung, deren Einfluß auf die Bauteilgüte a priori sehr schwer abzuschätzen ist. Durch mehrmaliges iteratives Berechnen kann man Parameter-Studien durchführen und so Informationen über den Einfluß der einzelnen Einflußgrößen gewinnen.

Besonders sinnvoll ist es, diese iterativen Berechnungen zielgerichtet durchzuführen, dann spricht man von einer Optimierung. Dazu kann man in Verbindung mit leistungsfähiger Hardware numerische Optimierungsverfahren einsetzen.

Die numerische Optimierung ist eine mathematische Formulierung einer Aufgabenstellung die in vielen Bereichen der Wirtschafts-, Natur- und Technikwissenschaften anwendbar ist.

5.1 Optimierungsaufgabe

Ziel der numerischen Optimierung ist es, durch eine geeignete Wahl von Entwurfsvariablen (Eingangsgrößen eines mathematischen Modells) eine Zielfunktion (Ausgangsgröße) zu einem Extremum zu führen.

Ist nur ein Optimierungsziel vorhanden, so handelt es sich um ein skalares Optimierungsproblem (SOP); bei mehreren gleichzeitig zu verfolgenden Zielen handelt es sich um ein Vektoroptimierungsproblem (VOP) /1.40/.

skalares Optimierungsproblem (SOP)

$$\text{"Min" } \{ f(x) \}$$

Vektoroptimierungsproblem (VOP)

$$\text{"Min" } \{ f(x) \} ; \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

Beim VOP werden die Einzelziele in einem Vektor f zusammengefaßt. Zur mathematischen Behandlung läßt sich ein Vektoroptimierungsproblem wie folgt definieren /1.40/:

$$\text{"Min"} \{ f(x) : h(x) = 0, g(x) \leq 0 \}; x \in R^n \quad (5.1).$$

Hier sind die Entwurfsvariablen in einem Vektor x zusammengefaßt; der Vektor f enthält die Zielfunktionen, h die Gleichheitsrestriktionen und g die Ungleichheitsrestriktionen. Die Menge aller Lösungen wird durch Restriktionen begrenzt, so daß nur eine Teilmenge der gültigen Lösungen übrig bleibt. Dabei wird zwischen expliziten und impliziten Restriktionen unterschieden /5.1/; explizite Restriktionen begrenzen die Entwurfsvariablen, implizite sind selbst Funktionen der Entwurfsvariablen und somit von den jeweilig gewählten Variablen abhängig. Der Begriff Restriktionen wird im weiteren nur für implizite Restriktionen gebraucht.

Bei den meisten technischen Problemen tritt ein Zielkonflikt auf, der darin besteht, daß mehrere gegensätzliche Ziele gleichzeitig optimal erfüllt werden sollen, z. B. geringes Gewicht bei gleichzeitig zu erfüllender Steifigkeit oder Festigkeit. Daher ist man gezwungen, Kompromißlösungen zu suchen; hier ist in sehr starkem Maße der Konstrukteur gefordert, der seine Vorstellungen bezüglich der Optimallösung einbringen muß. Dazu sind Beispiele aus dem Bereich technischer Anwendungen in /1.40, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5/ zu finden.

Trotz der mathematischen Methoden und einer damit verbundenen Automatisierung des Entwurfsprozesses ist menschliches Eingreifen und Mitwirken beim Optimierungsprozeß von entscheidender Bedeutung.

5.2 Optimierungsstrategien

Eine Möglichkeit, für die gestellte Optimierungsaufgabe eine Kompromißlösung zu erhalten, ist die Rückführung eines VOP auf ein SOP. Dazu benötigt man eine Optimierungsstrategie, durch die Teilzielfunktionen zu einer sog. Ersatzzielfunktion (Präferenzfunktion) zusammengefaßt werden; mögliche Strategien findet man in /1.41, 5.1, 5.6, 5.7/.

Untersuchungen /5.8/ mit verschiedenen Strategien ergaben, daß sich die restriktionsorientierte Präferenzfunktion besonders gut als Optimierungsstrategie eignet. Dabei wird eine Teilzielfunktion zum Hauptziel erklärt und minimiert. Die restlichen Teilziele stellen jetzt Nebenziele dar; sie werden im Verlauf der Optimierung des Hauptzieles in ihrer Größe durch Restriktionen begrenzt. Durch die Veränderung des Restriktionsniveaus für die Nebenziele erhält man ausgehend von einem Startentwurf jeweils optimale Lösungen für das gewählte Hauptziel.

Alle optimalen Punkte liegen auf dem sog. funktional-effizienten Rand, *Bild 5.1* zeigt dies am Beispiel zweier Funktionen.

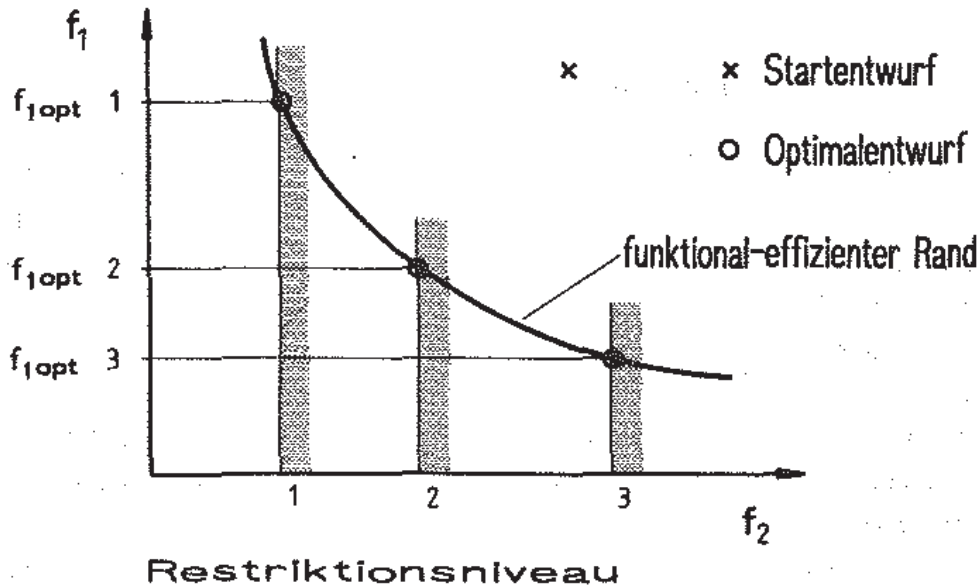


Bild 5.1: Ermittlung des funktional-effizienten Randes durch Veränderung des Restriktionsniveaus am Beispiel zweier Zielfunktionen (f_1, f_2)

Diese Darstellungsform bietet dem Konstrukteur die Möglichkeit, für eine Änderung im Restriktionsniveau - hier können zulässige Spannung, Werkstoffeigenschaften oder Konstruktionsvorgaben die Grenzen festlegen - ganz gezielt optimale Entwürfe auszuwählen, für die dann jeweils andere Entwurfsvariable gelten. Die numerische Optimierung liefert die optimalen Punkte, der Konstrukteur wählt daraus seine Optimallösung.

Sinngemäß gilt dies auch für die Optimierung mit noch mehr Zielen, leider geht dabei die Anschaulichkeit verloren.

5.3 Optimierungsalgorithmen

Voraussetzung für die numerische Optimierung ist ein mathematischer Zusammenhang zwischen den Entwurfsvariablen und der Zielfunktion. Da in der Regel komplizierte analytische Ausdrücke - dies können auch umfangreiche Berechnungsverfahren sein - nicht stetig differenzierbar sind, besteht eine Anforderung darin, daß ein Optimierungsalgorithmus nicht auf die explizite Ableitung der Berechnungsfunktion angewiesen ist. Von den Algorithmen wird aber nicht nur das Auffinden globaler Optima verlangt, sondern zusätzlich soll dieses Optimum auch noch mit möglichst wenig Funktionsauswertungen und dementsprechend kurzen Rechenzeiten gefunden werden.

In der einschlägigen Literatur /1.40, 5.9, 5.10/ finden sich eine ganze Reihe unterschiedlicher Optimierungsalgorithmen.

Im Hinblick auf eine Optimierung von Leichtbauteilen aus Faserverbundwerkstoffen wurde ein Optimierungspaket /5.11/ entwickelt und an Standardoptimierungsbeispielen erprobt und getestet.

Die Ausgangsprogramme, der Aufbau und die Möglichkeiten sowie die vom Anwender zu leistenden Anpassungen werden im folgenden erläutert. Das Programmpaket (Bild 5.2) gliedert sich in einen problemneutralen Teil, der die Optimierungsprogramme umfaßt und in einen problemspezifischen Teil, der die zu optimierende Funktion bzw. die jeweiligen Analyseverfahren beinhaltet.

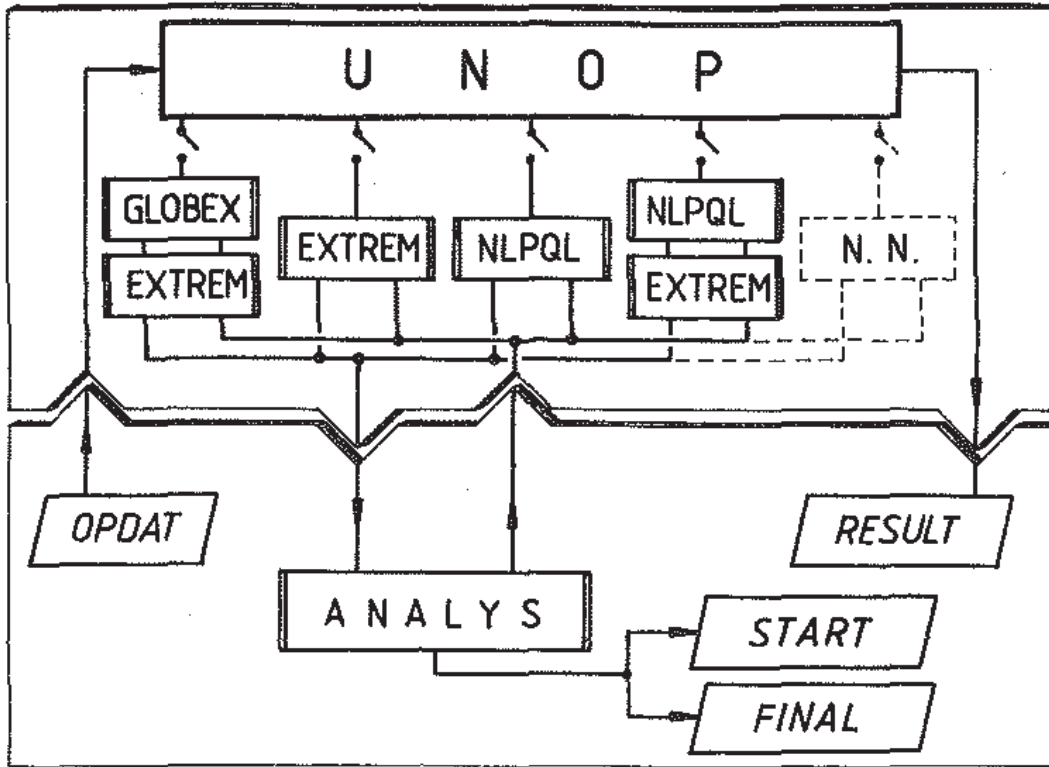


Bild 5.2: Struktur des Optimierungspaketes UNOP

Bei den mathematischen Programmen handelt es sich um die von JACOB /5.12/ entwickelten Programme GLOBEX und EXTREM sowie um das von SCHITTKOWSKI /5.13, 5.14/ entwickelte Verfahren NLPQL. Diese sind als eigenständige Module in UNOP enthalten; dabei wurde besonderer Wert darauf gelegt, die Software-Schnittstellen innerhalb des problemneutralen Optimierungsteiles zu standardisieren.

Die Offenheit dieses Paketes gestattet es, zusätzliche Optimierungsprogramme je nach Bedarf zu integrieren. Das hat den Vorteil, daß man unterschiedliche Verfahren auf die gleiche Problemstellung anwenden kann; das ermöglicht einerseits Vergleiche zwischen verschiedenen Algorithmen, andererseits gewinnt der Anwender größere Sicherheit bezüglich der Optimalentwürfe.

Neu entwickelt wurde dabei eine Kombination von NLPQL und EXTREM, die sich als außergewöhnlich effektiv und sicher erweist, da sie die Vorteile beider Verfahren (NLPQL - sehr schnell, EXTREM - sehr genau) in idealer Weise miteinander verbindet. Mit NLPQL wird dabei die Optimierung gestartet, der gefundene Optimalentwurf dient als Startpunkt für EXTREM, das den Entwurf noch verbessert.

Der problemspezifische Teil enthält die Funktion, die optimiert werden soll. Dabei handelt es sich meist um komplette Analyseverfahren (CLT, dickwandige Theorie, FEM), die als "Unterprogramme" für die Optimierung aufbereitet werden müssen.

Einheitlich gestaltete Schnittstellen sorgen für den Datenaustausch bezüglich der Entwurfsvariablen, der Zielfunktion und der Restriktionen. Neben diesen Größen und der Angabe des gewünschten Optimierungsalgorithmus enthält das vom Anwender zu erstellende File OPDAT die Parameter des Startentwurfs.

Das Optimierungspaket kommt dann durch wiederholtes Aufrufen des Unterprogrammes ANALYS von dem Startentwurf - die Ergebnisse werden im File START dokumentiert - zu einem Optimalentwurf, der im Datenfile FINAL abgelegt wird.

Während der Optimierungsrechnung werden alle Angaben über die Optimierungsparameter im File RESULT protokolliert.

6. OPTIMIERUNG VON FASERVERBUNDBAUTEILEN

Der vorige Abschnitt behandelte die Grundlagen der numerischen Optimierung und die damit verbundenen Begriffe und Definitionen. Eine in eigenen Untersuchungen bewährte Optimierungsstrategie wurde vorgestellt und ein Optimierungspaket entwickelt und erfolgreich erprobt. Dieses Optimierungspaket mit einem problemneutralen und einem problemspezifischen Teil der Optimierungsrechnung wird jetzt auf konkrete Fragestellungen aus dem Bereich der Faserverbundbauweise angewandt.

Faserverbunde und Leichtbauteile aus Faserverbunden sind äußerst geeignete "Objekte" für die numerische Optimierung, da der Konstrukteur keinen fertigen Werkstoff für seine Konstruktion vorfindet, sondern den für sein Bauteil am besten geeigneten Werkstoff erst selbst konstruieren muß. Die Wahl von Fasertyp (Glasfasern, Kohlenstofffasern, Aramidfasern), Bettungsmaterial (Polyesterharz, Epoxidharz), Fasergehalt, Laminat- und Einzelschichtdicken, Faserrichtungswinkeln, Laminataufbau, Elastizitäts- und Festigkeitsanisotropien und nicht zuletzt das Fertigungsverfahren stellen ganz außergewöhnliche Anforderungen an denjenigen, der mit diesem Werkstoff Leichtbauteile gestalten soll. Die vielen Parameter geben zwar unerhört viele Freiheiten, ihr Einfluß auf die Bauteilgüte ist aber nur sehr schwer abzuschätzen. Erst jahrelange Erfahrungen, ein breites Faserverbundwissen und teilweise auch "Intuition" lassen gute Bauteile aus Faserverbunden entstehen. In diesem mühevollen Lern- und Entwicklungsprozeß können numerische Optimierungsverfahren hilfreiche Unterstützung leisten; dies wird im folgenden an ausgewählten Beispielen gezeigt. Im einzelnen wird dabei besonders auf die Wahl der Entwurfsvariablen, die mathematische Formulierung der Zielfunktion und auf die Berücksichtigung von Restriktionen eingegangen.

6.1 Laminatoptimierung dünnwandiger Bauteile

Flächige Lamine, bei denen keine nennenswerten Spannungen in Dickenrichtung wirken, werden mit der klassischen Laminattheorie (CLT) ausgelegt. Dabei sind für einfache Bauteile die Schnittkraftverläufe bekannt, mit der Größe und der Richtung der Hauptnormalkräfte lassen sich optimale Faseranordnungen nach der Netztheorie entwerfen /4.10/. Mittels der CLT wird dann eine verfeinerte Analyse der Laminatentwürfe vorgenommen. Hier kann die numerische Optimierung dazu eingesetzt werden, für einen vorgegebenen Hauptnormalkraftzustand optimale Lamine zu ermitteln.

Diese Vorgehensweise verbirgt sich auch hinter der von BAIER, GOOS, HELWIG /1.42/ vorgeschlagenen Quasioptimierung. Die Schnittkräfte und den zugehörigen Hauptnormalspannungszustand entnehmen die Autoren einer FEM-Rechnung.

Für ein gewähltes repräsentatives Element der Gesamtstruktur wird dann ein Optimal-Laminataufbau ermittelt, eine erneute FEM-Analyse zeigt danach Verbesserungen oder Verschlechterungen des strukturellen Verhaltens der Gesamtstruktur an.

6.1.1 Elastizitätsgesteuerte Lastbeeinflussung

Bei Windkraftanlagen müssen aufwendige Regelungen und redundante Sicherheitssysteme eingebaut werden, die ein Überdrehen des Rotors bei einem Generatorausfall begrenzen. In /4.9/ wird in Form einer feasibility study eine Fliehkraftregelung erörtert, die durch die Anisotropie von Faserverbundwerkstoffen bewirkt werden kann. Diese Idee, die von PUCK und SCHÜRMANNS stammt, nutzt gezielt die Normalspannungs-Schiebungs-Kopplung anisotroper Werkstoffe aus. Fliehkräfte erzeugen Normalspannungen im Flügel; diese bewirken über das Materialgesetz Gl. (2.39) neben Dehnungen ϵ_x und ϵ_y auch eine Schubverzerrung γ_{xy} .

$$\epsilon_x = \hat{s}_{11} \hat{\sigma}_x ; \epsilon_y = \hat{s}_{12} \hat{\sigma}_x ; \gamma_{xy} = \hat{s}_{16} \hat{\sigma}_x \quad (6.1).$$

Die Schubverzerrung bewirkt an einem geschlossenen Profil eine Verdrillung; die Rotorblätter können aus der daraus entstehenden Verdrehung ihren Anstellwinkel gegenüber der anströmenden Luft verändern. Damit ist es möglich, eine durch den anisotropen Faserverbundwerkstoff eingebaute Regelung zu erreichen. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, durch welchen Faserverbundwerkstoff (Laminat) eine größtmögliche Nachgiebigkeit \hat{s}_{16} erreichbar ist.

Zur Klärung dieser Frage wird die numerische Optimierung eingesetzt. Als Entwurfsvariable werden die Faserrichtungswinkel α_k und die relativen Schichtdicken t'_k gewählt. Mit den Verbundmaterialien GFK, CFK, AFK und einem zweischichtigen Laminataufbau ist eine Vielzahl freier Parameter vorhanden.

Die Zielfunktion ist hier einfach zu definieren als $f(\mathbf{x}) = \hat{s}_{16}$; Restriktionen sind nicht vorgegeben.

Die Optimierung zeigt, daß bei GFK eine Schicht mit einem Faserrichtungswinkel von $\alpha_k \approx 27^\circ$ ($\hat{s}_{16} = 36,5 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^2/\text{N}$), für CFK-HM ebenfalls nur eine Schicht mit $\alpha_k \approx 37^\circ$ ($\hat{s}_{16} = 61,8 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^2/\text{N}$) eine maximale Kopplungsnachgiebigkeit ergibt.

Den höchsten Wert erhält man mit einem zweischichtigen Aramidfaser-Kunststoff-Verbund ($\alpha_1 = -80^\circ$, $t_1 = 0,166$; $\alpha_2 = 30^\circ$, $t_2 = 0,834$) dabei erreicht \hat{s}_{16} den Wert $127,6 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^2/\text{N}$.

Alle Hybridverbunde lieferten jeweils nur so hohe Nachgiebigkeiten wie die besten Werte der beteiligten Einzelschichten.

Die numerische Optimierung kann in dieser Frage eine wertvolle Unterstützung leisten, die Untersuchungen können auf das Wesentliche beschränkt bleiben, im vorliegenden Fall auf die Machbarkeitsstudie einer derartigen Fliehkraftregelung /4.9/.

6.1.2 Antriebswellen

Die wichtigste Anforderung an eine Antriebswelle ist die schwingungsfreie Übertragung eines Drehmomentes bis zu einer vorgegebenen Rotationshöchstgeschwindigkeit. Bei der Bemessung müssen mehrere Bedingungen gleichzeitig erfüllt werden, dies sind die Torsionsfestigkeit und -stabilität sowie die Längsbiegesteifigkeit des Rohres.

In Anlehnung an /2.54, 6.1/ wird gezeigt, wie man mit Hilfe der numerischen Optimierung zu einem Faserverbundaufbau kommt, der alle Steifigkeits- und Festigkeits-Anforderungen erfüllt. Die Zielvorstellung besteht darin, eine Welle mit minimaler Masse zu bauen, wobei mehrere Restriktionen zu beachten sind:

- Die kritische Drehzahl soll größer als $8\ 400\ \text{min}^{-1}$ sein.
- Das Beulmoment muß größer als das Torsionsmoment sein.
- Die maximale Anstrengung gegen ZFB muß kleiner als 1,0 sein.

Als Faser-Werkstoff wird CFK(P55S) gewählt, vgl. Abschn. 2.6.3 ($\rho = 1,7\ \text{g/cm}^3$).

Für die Antriebswelle ist die Länge mit 1,7 m, der Durchmesser mit 70 mm und ein Verdrehwinkel von 10° bei einem Drehmoment von 1500 Nm vorgegeben. Zur mathematischen Formulierung der Zielfunktion und der Restriktionen sind mehrere Beziehungen wichtig. Da die Länge und der Durchmesser vorgegeben sind, ist eine minimale Masse nur durch eine Verringerung der Wanddicke zu erreichen. Diese läßt sich über den vorgegebenen Verdrehwinkel ψ_{zul} bestimmen.

$$t_{\text{erf}} = \frac{M_t l}{2 \pi r^3 \psi_{zul} \hat{G}_{xy}} \quad (6.2)$$

Die kritische Winkelgeschwindigkeit ω_{krit} errechnet sich zu:

$$\omega_{\text{krit}} = \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \frac{r}{l^2} \sqrt{\frac{\hat{E}_y}{\rho}} \quad (6.3).$$

In beiden Gl. tritt jeweils nur eine veränderliche Größe auf, alle anderen sind konstant. Daher lassen sich diese beiden Forderungen auch umformulieren, so daß nur Elastizitätsgrößen als Zielvorstellung bzw. Restriktionen auftreten; diese sind vom gewählten Laminat und dessen Aufbau abhängig.

$$\begin{aligned} 1 / \hat{G}_{xy} &\sim t_{\text{erf}} \\ \hat{E}_x &= 2 \rho \frac{\omega_{\text{krit}}^2 l^4}{\pi^4 r^2} \geq 185\,000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{aligned} \quad (6.4)$$

In /6.1/ wird gezeigt, daß die minimale Wanddicke so groß gewählt werden muß, daß der Verdrehwinkel ψ_{zul} nicht überschritten wird. Dagegen ist das zulässige Beulmoment auch für minimale Wanddicken noch etwa 2,6 mal größer als das maximale Betriebsmoment. Aus diesem Grund wird die Absicherung gegen Beulen im weiteren nicht mehr berücksichtigt.

Für den Schichtaufbau wird ein zweischichtiges Laminat (AWV) mit den relativen Schichtdicken $t'_1 = t'_2 = 0,5$ gewählt. Der Faserrichtungswinkel ω des AWV stellt die Entwurfsvariable dar. Die maximal im Laminat auftretende Werkstoffanstrengung gegen Zwischenfaserbruch ($A_{\text{ZFB max}}$) soll dabei gerade unterhalb der Bruchgrenze bleiben. Damit ist das Laminat von der Festigkeit her gesehen optimal ausgenutzt.

Zusammenfassend wird die Aufgabe wie folgt definiert:

- Zielfunktion: $f(\mathbf{x}) = 1 / \hat{G}_{xy}$
- Entwurfsvariable: $-90^\circ \leq \omega \leq 90^\circ$
- Restriktionen: $g_1(\mathbf{x}) = -185\,000 + \hat{E}_x$
 $g_2(\mathbf{x}) = 1 - A_{\text{ZFB max}}$

Die Optimierung läuft in zwei Stufen ab. Zunächst wird der Wert des Winkels ω des AWV bestimmt, der eine maximale Schubsteifigkeit \hat{G}_{xy} unter Einhaltung der Restriktion für \hat{E}_x ergibt. Der Winkel ergibt sich zu $12,94^\circ$.

Mit Gl. (6.2) liegt damit auch die Wanddicke t_{erf} fest. Die anschließende Spannungs- und Bruchanalyse ergibt eine maximal auftretende Anstrengung $A_{\text{ZFB max}}$ von 0,366; dies ist ein ungefährlicher Wert.

Daran wird auch deutlich, daß in erster Linie Steifigkeitsanforderungen die Auslegung bestimmen.

Noch schwieriger und komplexer wird die Dimensionierung und Gestaltung zweier einander zugeordneter Antriebsgelenkwellen, die für den Einsatz in frontgetriebenen Pkw entwickelt werden /1.11/. Da hier das Getriebe nicht mehr symmetrisch zwischen den Vorderrädern angeordnet ist, ergeben sich zwei Antriebsgelenkwellen unterschiedlicher Länge. Für beide Wellen wird aber gefordert, daß sie das Drehmoment bei gleichem zulässigen Verdrehwinkel sicher übertragen. Dies führt zu unterschiedlichen Durchmessern und Laminataufbauten der beiden Wellen; detailliert wird diese Problematik in /1.11/ diskutiert, numerische Optimierungen werden in /5.8/ durchgeführt.

6.1.3. Gleichmäßige Werkstoffausnutzung schubbelasteter Lamine

Torsionsbelastete Rohre aus FKV sind nach Netztheorie dann optimal ausgenutzt, wenn die Fasern unter $\pm 45^\circ$ zur Rohrlängsachse ausgerichtet werden /4.10/.

Ein Laminatstück aus der Rohrwandung wird durch reinen Schub beansprucht. Bei einem intakten Faser-Kunststoff-Verbund trägt das Matrixmaterial mit; in den Schichten entstehen die Spannungen σ_{II} und σ_I ; bei anderen Winkeln als 45° treten zusätzlich noch Schubspannungen τ_{III} auf.

In torsionsbeanspruchten Rohren in denen das Drehmoment stets nur in eine Richtung wirkt, treten dabei immer zuerst in den querzugbelasteten Schichten Zwischenfaserbrüche auf. Eine Verschiebung der Zwischenfaserbruchgrenze zu höheren Lasten hin kann durch Verändern der Schichtdickenverhältnisse erreicht werden, wie in /6.2/ erstmalig vorgeschlagen wird.

Die Frage die sich nun stellt ist, welcher Laminataufbau ist der für diesen speziellen Belastungsfall bestgeeignete. Mit Hilfe der numerischen Optimierung kann diese Frage rasch geklärt werden /5.8, 6.3/.

Als Belastung wird eine konstante Schubkraft n_{xy} vorgegeben. Es wird testweise ein fünfschichtiges GFK-Laminat betrachtet, als Entwurfsvariablen stehen die Faserrichtungswinkel α_k und die relativen Schichtdicken t'_k zur Verfügung. Als Zielfunktion wird die maximal auftretende Werkstoffanstrengung gegen Zwischenfaserbruch definiert.

$$\begin{array}{ll} \text{Entwurfsvariable:} & -90^\circ \leq \alpha_k \leq 0^\circ & k = 1, 2 \\ & 0^\circ \leq \alpha_k \leq 90^\circ & k = 3, 4, 5 \\ & 0^\circ \leq t'_k \leq 1 & k = 1, 2, 3, 4 \end{array}$$

Die relative Schichtdicke der fünften Schicht errechnet sich zu:

$$t'_5 = 1 - \sum_{k=1}^4 t'_k \quad \text{und wird als Restriktion berücksichtigt:}$$
$$g_1(x) = t'_5 \geq 0$$

Mit beliebigen Startentwürfen und Optimierungsverfahren ergeben sich immer die gleichen optimalen Laminattypen. Die Fasern sind dabei in Richtung der Hauptnormalkräfte unter $\pm 45^\circ$ angeordnet. Die maximal auftretende Werkstoffanstrengung ist in allen Schichten gleich groß, alle mit der gleichen Faserrichtung zusammengefaßten Schichten ergeben eine relative Schichtdicke von 0,211 für die querzug- und 0,789 für die querdruckbeanspruchten Schichten.

Die Unsymmetrie des Laminates resultiert aus den unterschiedlichen Festigkeiten der Einzelschichten bei Querbeanspruchung (GFK: $\sigma_{1zB} / \sigma_{1dB} = 0,37$). Wie die Optimierungsrechnung zeigt, ist hiermit eine Belastbarkeitssteigerung möglich; dies ist der Ausgangspunkt bei der Entwicklung hochbelastbarer Drehstabfedern aus Glasfaser-Kunststoff /1.12/.

6.2 Laminatoptimierung dickwandiger Bauteile

Durch verfeinerte Methoden der Strukturanalyse ist es mittlerweile möglich, eine schichtenweise Spannungs-, Verformungs- und Bruchanalyse dickwandiger rohrförmiger Mehrschichtenverbund-Bauteile durchzuführen /1.28/. Erst die verfeinerte Analyse und die damit durchgeführte Ermittlung räumlicher Spannungszustände zeigt auf, daß sich dickwandige rohrförmige Bauteile aus Faser-Kunststoff-Verbunden in bezug auf ihren Laminataufbau optimieren lassen. Da dieses "analytische" Verfahren sehr geringe Rechenzeiten benötigt, bietet es sich zur Kombination mit numerischen Optimierungsverfahren an /5.8/.

6.2.1 Drehstabfedern

Drehstabfedern für die Hinterachse von Pkw sind hoch belastete Bauteile; im Betrieb unterliegen sie einer schwellenden Beanspruchung. Wie in /1.12/ gezeigt wird, kann man mit Drehstäben die aus ausgeglichenen Winkel-Verbunden feinschichtig aufgebaut sind, die gestellten Anforderungen nicht erfüllen. Die Länge würde sehr groß, so daß man diese Federn nicht mehr im Fahrzeug unterbringen kann.

Als vorteilhaft hat sich ein Schichtaufbau erwiesen, der aus einer innenliegenden Druckschicht (paralleldruckbeansprucht) und einer außenliegenden Zugschicht (parallelzugbeansprucht) besteht, siehe *Bild 6.1*; zusätzlich wird eine unsymmetrische Aufteilung gewählt, vgl. hierzu Abschn. 6.1.3.

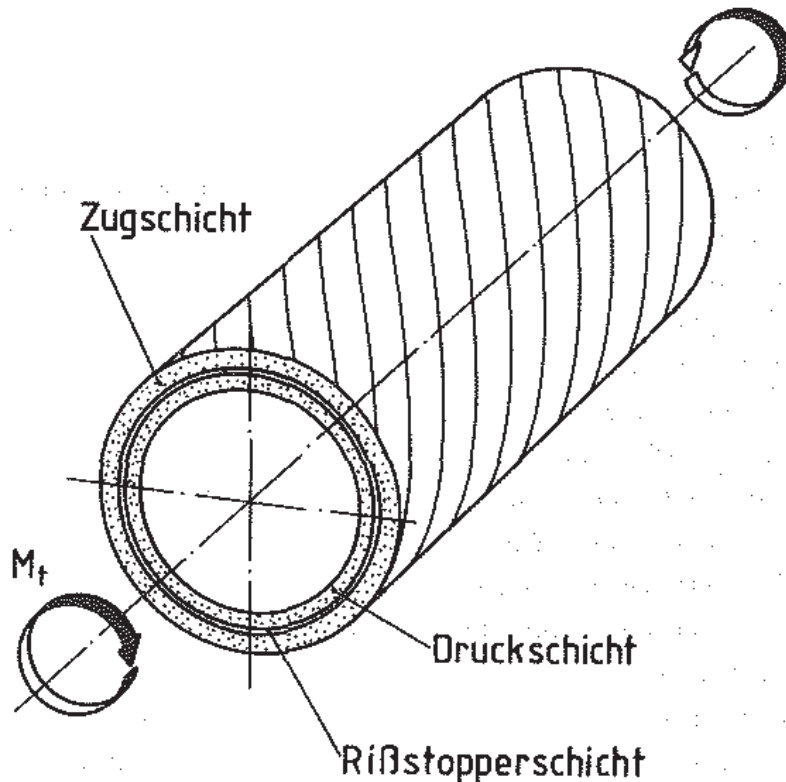


Bild 6.1: Drehstabfeder mit Anordnung der Schichten (Druckschicht, rißstoppende Zwischenschicht, Zugschicht) nach /1.12/

Bei den extremen Anforderungen lassen sich Zwischenfaserbrüche in den innenliegenden Schichten zwar nicht vermeiden, deren Auswirkungen (Ankerben der außenliegenden Schichten) können aber durch eine eingelegte rißstoppende Schicht unterbunden werden.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird die Vorgehensweise zur numerischen Optimierung näher betrachtet; weitere Details zur Drehstabfeder und deren Optimierung können der Arbeit von RAU /1.12/ entnommen werden.

Zur Auslegung von Drehstabfedern wird in der Regel ein maximales Drehmoment M_{tmax} und der Verdrehwinkel φ beim Erreichen des maximalen Momentes vorgegeben. Zusätzlich ist die Länge der Feder durch die maximal mögliche Einbaulänge l_{max} begrenzt. Drehstäbe aus Faserverbundwerkstoff werden als dickwandige rohrförmige Körper im Filament Winding-(FW-)Verfahren gefertigt. Der Innenradius des Rohres (Außenradius des Wickeldornes) wird als erstes möglichst klein festgelegt. Die Ziele, die man jetzt verfolgen muß, sind einerseits eine möglichst hohe Drillung ϑ und damit bei einzuhaltendem Verdrehwinkel φ eine geringe Länge ($\varphi = \vartheta \cdot l$) und andererseits eine Werkstoffbeanspruchung in vertretbaren Grenzen. Steifigkeits- und Festigkeitsanforderungen sind hier also gleichzeitig zu erfüllen.

Zur numerischen Drehstabfeder-Optimierung werden in /5.8, 6.3/ umfassende Untersuchungen beschrieben.

Als Entwurfsvariable werden die Faserrichtungswinkel α_k bei gegebener Schichtanzahl und einem Verhältnis von Druck-/Zugschichten gewählt. Die Schichtdicken t_k werden über die Anzahl der zur Fertigung eingesetzten Rovings (Faserbündel) variabel gemacht.

Einen ganz wesentlichen Einfluß hat das Fertigungsverfahren; eine kostengünstige Fertigung erfolgt mit einem sog. Ringfadenaug. Dabei wird eine Schicht als komplette Bedeckung des Wickeldornes in einem Hin- oder Hergang der FW-Anlage erzeugt. Je nach dem gewählten Fertigungsverfahren (Kontinuierlich oder diskontinuierlich) ist es sinnvoll, mit konstanter Maschineneinstellung zu fertigen: der Startwinkel am Innenradius ist dabei die einzige Variable - alle anderen Faserrichtungswinkel errechnen sich aus der Geometrie und den maschinentechnischen Vorgaben.

Zusätzliche Freiheiten gewinnt man, indem man die Startwinkel - zum einen für die Druckschichten α^D zum anderen für die Zugschichten α^Z - als Entwurfsvariable wählt. Im Extremfall sind alle Faserrichtungswinkel variabel; die Schichtdicken und damit auch der Außenradius des Bauteiles ergeben sich als Funktion der Faserrichtungswinkel und der Rovinganzahl.

Diese Ausführungen allein machen schon deutlich, daß numerische Optimierungen hier äußerst sinnvoll sind, Bild 6.2 zeigt exemplarisch die Ergebnisse einer ganzen Reihe von Optimierungsrechnungen, vgl. /6.3/.

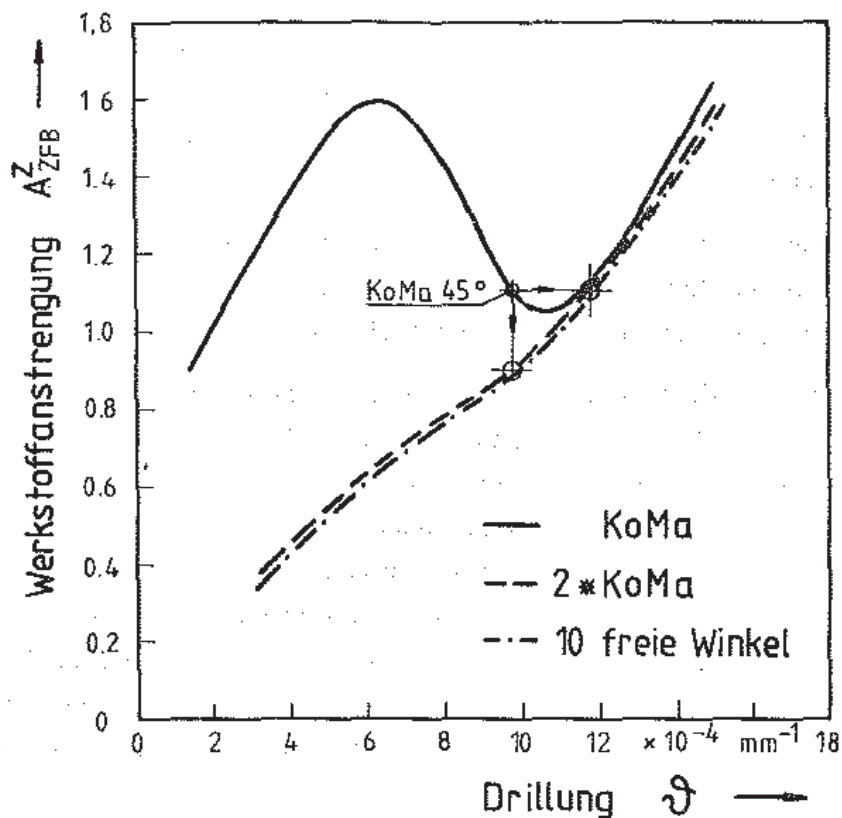


Bild 6.2: Optimierung für unterschiedliche Fertigungsverfahren von GFK-Drehstäben (KoMa = konstante Maschineneinstellung)

Als Zielfunktion wählt man beispielsweise die maximal auftretende Werkstoffanstrengung in den Zugschichten ($A_{ZFB} Z_{max}$), die minimiert werden soll. Dies erfolgt unter Einhaltung der vorgegebenen Restriktionen, hier werden die minimale Drillung Φ und gleichzeitig die maximal zulässige Werkstoffanstrengung in den Druckschichten begrenzt.

Diese Strategie läßt sich aber auch beliebig ändern, z. B. kann es sinnvoll sein, die Länge (Drillung) zu minimieren (maximieren). Dann muß die Drillung als Hauptziel erklärt werden, die Werkstoffanstrengungen in Zug- und Druckschicht sind dann die Restriktionen.

Die Untersuchung mehrerer unterschiedlicher Fertigungsparameter zeigt, daß eine Fertigung mit einer konstanten Maschineneinstellung für die Druckschicht und einer zweiten Einstellung für die Zugschicht zu bevorzugen ist (2 x KoMa). Eine konstante Maschineneinstellung (1 x KoMa) ergibt Drehstabfedern, die eine weit höhere Werkstoffanstrengung als die optimierten 2 x KoMa-Federn bei gleicher Drillung (Länge) aufweisen. Eine Fertigung mit freiem Winkel für alle Bedeckungen bringt gegenüber der 2 x KoMa-Fertigung nur noch geringfügige Verbesserungen, erfordert jedoch einen erhöhten Fertigungsaufwand.

Eine bisher gefertigte Drehfeder mit einem Faserrichtungswinkel von 45° an der Innenseite kann durch die Fertigung mit jeweils konstanter Maschineneinstellung für die Druckschicht und für die Zugschicht (2 x KoMa) erheblich verbessert werden. Die optimierte Feder (vgl. *Bild 6.2*) hat bei gleicher maximaler Anstrengung beispielsweise eine um etwa 18 % höhere Drillung (18% kleinere Länge), oder weist bei gleicher Länge eine um etwa 20 % geringere maximale Anstrengung auf.

Bild 6.2 enthält als Sonderfall der Optimierung mit nur einer Variablen (1 x KoMa) auch die Ergebnisse, die man aus einer Parameterstudie mit einem freien Winkel hätte gewinnen können.

6.2.2 Verbesserte Ausnutzung von Faserverbund-Biegeträgern

Bei Biegeträgern aus isotropen Werkstoffen ergibt sich eine stark unterschiedliche Werkstoffbeanspruchung; die durch ein äußeres Biegemoment oder eine Querkraft hervorgerufene BiegeNormalspannung nimmt vom Wert Null in der Neutralebene bis zu ihrem Maximalwert am Außenrand des Biegeträgers linear zu.

Bei isotropen Werkstoffen tritt eine Vergleichmäßigung des Biegespannungsverlaufes ein, wenn sich an den höchstbeanspruchten Stellen des Querschnittes das Material plastisch verformt.

Faserverbundwerkstoffe bieten hier ganz andere Möglichkeiten.

Zum einen erlaubt das gezielte Einbringen von Eigenspannungen /1.24/ Belastbarkeitssteigerungen wie dies in /6.4/ am Beispiel verspannter rechteckiger UD-Biegeträger gezeigt wird. Zum anderen bietet eine gezielte Variation der Faserrichtungswinkel die Möglichkeit, die Steifigkeiten und Nachgiebigkeiten von Faserverbunden gezielt zu steuern und damit die Spannungsverteilung zu beeinflussen.

Dieses Verfahren wird in /6.5/ am Beispiel dickwandiger Torsionsrohre diskutiert, bei denen eine Veränderung der Wickelwinkel über der Wanddicke zu einer besseren Ausnutzung des Werkstoffes im Faserverbund-Bauteil führt.

Diese Vorgehensweise ist auch für dickwandige, rohrförmige Faserverbundbiegeträger anwendbar, wie in /4.27/ gezeigt wird. Der hohe Aufwand beim Auffinden der geeigneten Faserorientierungswinkel der einzelnen Schichten kann mittels eines numerischen Optimierungsverfahrens erheblich verringert werden /5.8/.

Im folgenden soll das Verfahren für den Fall der querkraftfreien Biegung eines dickwandigen Faserverbund-Biegeträgers vorgestellt werden. Dabei soll ein Faserverbundrohr mit einem über der Wanddicke konstanten Faserrichtungswinkel von $\omega = 20^\circ$ und vorgegebenen Abmessungen in seiner Werkstoffausnutzung (Spannung $\sigma_{||}$) verbessert werden. Als Randbedingung ist dabei gefordert, die Durchbiegung w als Maß für die Gesamtsteifigkeit bei gleichen geometrischen Abmessungen beizubehalten, die maximal auftretende Anstrengung gegen Zwischenfaserbruch soll dabei nicht größer als im Startentwurf sein.

Damit eine Vergleichmäßigung der faserparallelen Spannungen $\sigma_{||}$ erzielt wird, muß innen am Rohr eine höhere Steifigkeit auftreten - dies erreicht man, indem man am Innenradius die Fasern in axialer Richtung ($\omega = 0^\circ$) anordnet. Nach außen hin nimmt der Faserrichtungswinkel zu und damit die Steifigkeit in Axialrichtung ab. So gelingt es, die Normalspannung, die jede Schicht auf sich zieht, zu verringern.

Aufgabe der Optimierung ist es jetzt, die Winkel so zu steuern, daß der Spannungsverlauf vergleichmäßigt wird. Die Optimierungsaufgabe enthält als Entwurfsvariable die Faserrichtungswinkel ω , die Zielfunktion ist $f(\mathbf{x}) = \sigma_{||\max} / \sigma_{||\min}$; das Verhältnis der maximalen zur minimalen faserparallelen Spannung über der Wanddicke auf der Zug- oder der Druckseite des Biegeträgers soll möglichst klein sein. Als Restriktionen sollen dabei die Durchbiegung und die Geometrie (Innenradius, Außenradius, Länge) gleich der des Startentwurfs sein. Zusätzlich soll an keiner Stelle des Biegeträgers die Anstrengung gegen Zwischenfaserbruch größer als beim Vergleichsbiegeträger sein.

Bild 6.3 zeigt die Optimierungsaufgabe und die Ergebnisse der Spannungsanalyse des Startentwurfs und des Optimalentwurfs. Es wird sehr deutlich, daß die Optimierung zum gewünschten Ziel geführt hat, der Verlauf der faserparallelen Spannungen wird unter Einhaltung aller Restriktionen nur durch die gezielte Veränderung der Faserrichtungswinkel über der Wanddicke vergleichmäßigt, ohne daß dabei die Werkstoffanstrengung bezüglich Zwischenfaserbruch zunimmt.

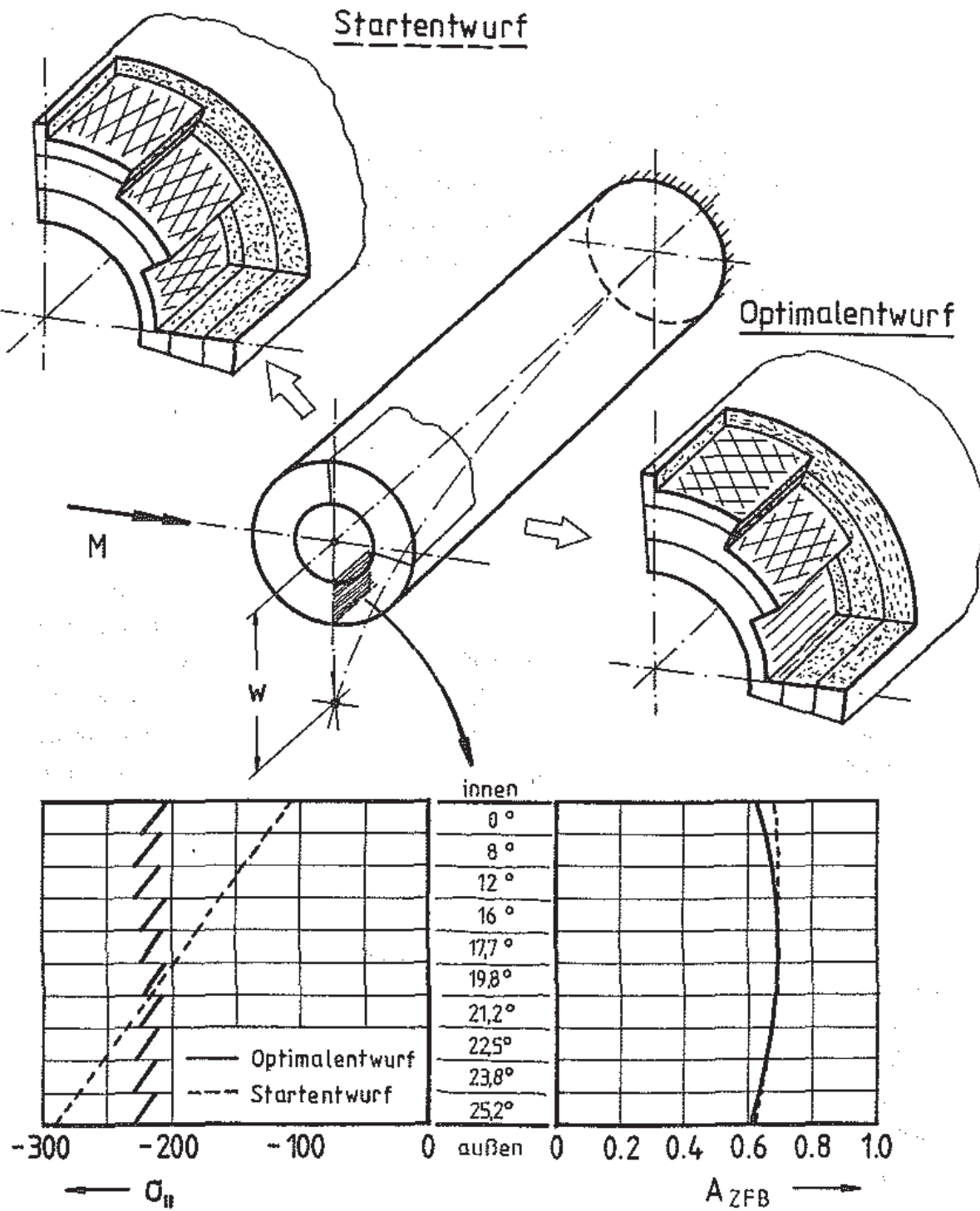


Bild 6.3: Dickwandiger rohrförmiger Faserverbundbiegeträger (CFK-HM)
Faseranordnung, Spannungsanalyse des Start- und des Optimalentwurfes

Abschließend muß angemerkt werden, daß im vorliegenden Falle eine Vergleichmäßigung des Spannungsverlaufes davon abhängt, welche Steifigkeiten mit den unterschiedlichen Faser/Matrix-Kombinationen erreichbar sind, außerdem spielt das Radienverhältnis des Rohres eine Rolle, die Forderung nach gleicher Durchbiegung kommt für alle Ausführungen erschwerend hinzu.

6.3 Formoptimierung

In Abschnitt 4.5 wurde gezeigt, wie man leichte Innendruckbehälter aus Faserverbundwerkstoff mit Hilfe der Methode der finiten Elemente analysieren kann. Die Werkstoffanstrengung im Behälter ist recht ungleichmäßig, der Werkstoff ist also nicht an allen Stellen optimal ausgenutzt, vgl. Bild 4.29. Dies ist der Ausgangspunkt zur Form- oder Gestaltoptimierung von Faserverbundbehältern. Als Analyseverfahren steht dazu die FEM zur Verfügung, die mit einem Optimierungsalgorithmus kombiniert wird.

6.3.1 Domschale

Faserverbund-Behälter können ohne zylindrisches Mittelstück allein aus zwei an ihrem Äquator zusammengefügt Domschalen bestehen. FUCHS /1.41/ untersucht Kugelschalen, die überall einen konstanten Laminataufbau und auch konstante Wanddicken haben, solche Behälterdome werden z. B. im Handlaminierverfahren gefertigt und weisen keine durchgehenden Fasern auf. Höchstbelastbare Innendruckbehälter erhält man, wenn die Verstärkungsfasern – den Behälter umlaufend – auf wickeltechnisch günstigen Pfaden plaziert werden. Eine fertigungsgerechte Anordnung der Fasern ergibt sich, wenn man eine geodätische Fadenablage vorschreibt. Wie in Abschnitt 4.5 gezeigt, wird die Form der Schale dann durch das Schnittkraftverhältnis n_U/n_M bestimmt, hier nimmt der Werkstoff mit seinem Tragverhalten maßgeblichen Einfluß auf die Form der Schale.

FÖRSTER, KRAFT /4.30/ und UEMURA, FUKUNAGA /4.31/ stellen verschiedene Schalenformen vor, die für ein Tragverhalten nach Netztheorie, nach Kontinuums- theorie oder unter Berücksichtigung eines Bruchkriteriums ausgelegt sind. Die Autoren benutzen dazu die Membrantheorie, Biegeanteile und -einflüsse werden vernachlässigt. Außerdem ist es auf diesem analytischen Wege z. B. nicht möglich, Bereiche der Polöffnung wirklichkeitsgetreu zu berücksichtigen. Hier kann die FEM- Analyse in Verbindung mit einem numerischen Optimierungsverfahren sinnvoll eingesetzt werden, wie nachfolgend gezeigt wird. Dabei wird stets von der Bedingung der geodätischen Faserablage ausgegangen.

6.3.1.1 Vergleich verschiedener Schalenformen

Bild 6.4 zeigt die Ergebnisse der FEM-Analyse zweier Formen von Behälterdomen (DGL n. Netztheorie, Kontinuumstheorie). Neben den Verformungen im Meridian- schnitt ist die Werkstoffanstrengung an der Innen- und an der Außenseite längs der gestreckten (abgewickelten) Meridianlinie aufgetragen. Zum Vergleich ist außerdem eine Kugelkontur dargestellt, die sich ebenfalls geodätisch bewickeln läßt.

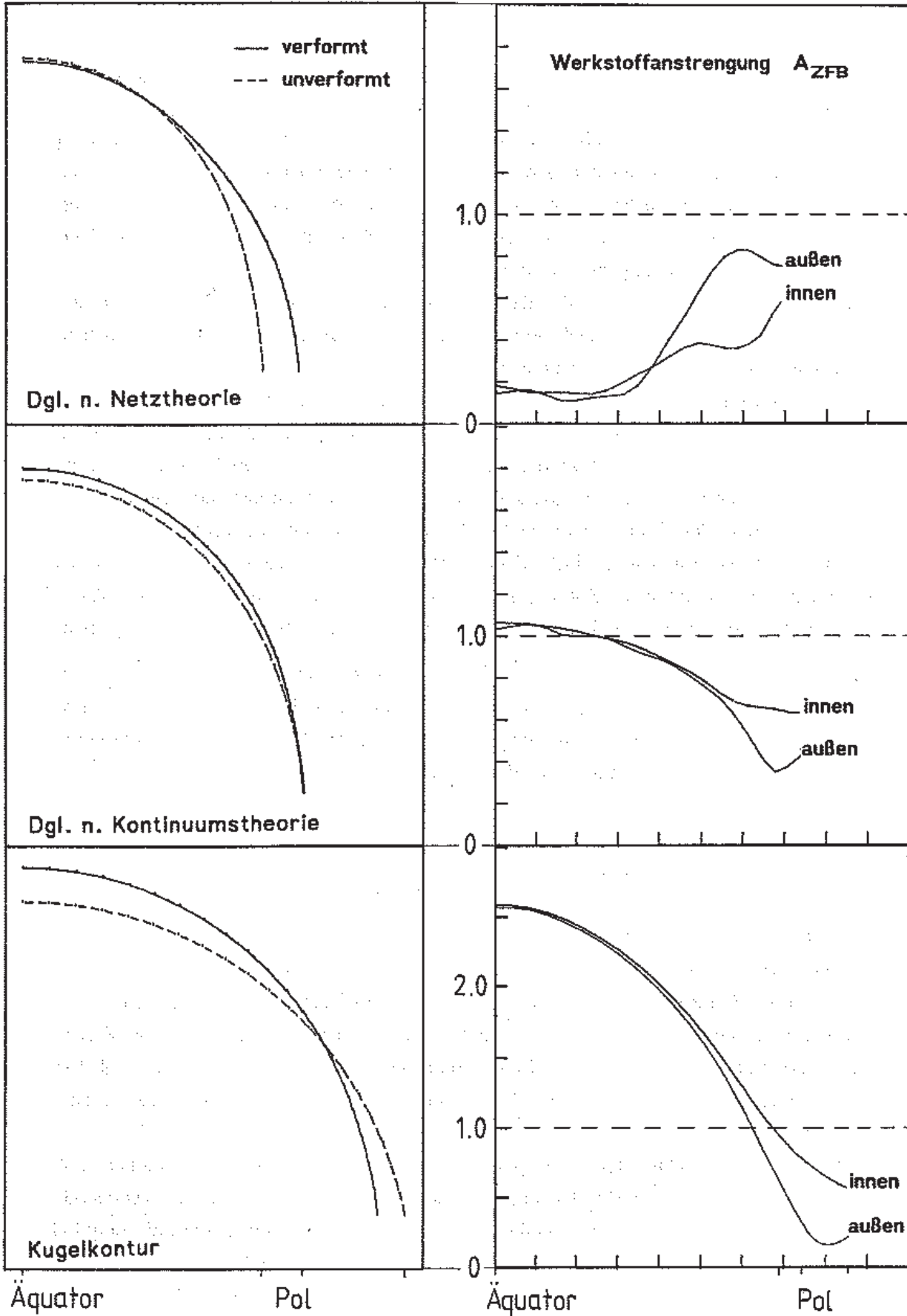


Bild 6.4: Verformungen und Werkstoffanstrengungen A_{ZFB} verschiedener Dornschalen, nach /6.6/

Als wichtiges Ergebnis fällt ins Auge, daß die Verformungen je nach gewählter Konturlinie sehr unterschiedlich sind.

Während die Domschale nach Netztheorie durch den Innendruck eine radial nach innen gerichtete Verschiebung am Äquator und eine positive Verschiebung der Polöffnung in axialer Richtung erfährt, zeigt sich bei der kontinuumstheoretischen Auslegung, daß eine radiale Verschiebung nach außen am Äquator und praktisch keine axiale Verschiebung am Pol eintritt.

Ganz außergewöhnlich verhält sich die Domschale mit der Kugelkontur. Der Äquator erfährt eine relativ große radiale Verschiebung nach außen, am Pol stellt sich eine axial nach innen gerichtete Verschiebung ein.

Die Betrachtung der Werkstoffanstrengung zeigt ganz eindeutig, daß die Kugelkontur am schlechtesten den aufgebrachten Innendruck – der bei allen Ausführungsformen gleich groß ist – aufnehmen kann. Die Ribbildung würde bereits bei etwa einem Drittel des hier für alle Behälter angenommenen Innendruckes einsetzen. Wesentlich günstiger sind bereits die beiden anderen Ausführungsformen. Die Domschale nach Netztheorie ist dabei überraschenderweise geringer beansprucht als die kontinuumstheoretische Kontur, lediglich im Bereich der Polöffnung ist die Werkstoffanstrengung höher, sie bleibt jedoch auch dort unterhalb der Ribbildungsgrenze.

Experimentelle Untersuchungen von GFK-Druckbehältern /6.7/, die aus zwei aneinander gefügten Domschalen bestehen, zeigen, daß die Form der Domschale und die dabei auftretende Biegebeanspruchung die Güte der Behälter beeinflussen. Offensichtlich ist die Behälterform dafür verantwortlich.

6.3.1.2 Numerische Optimierung

Die eigenen numerischen Untersuchungen und die Erkenntnisse aus /6.7/ sind die Motivation dafür, die Form von Domschalen aus Faserverbunden mit Hilfe der numerischen Optimierung in Verbindung mit der FEM-Analyse zu behandeln.

Die Optimierung hat zum Ziel, eine Behälterkontur zu ermitteln, in der die Werkstoffanstrengung gegen Zwischenfaserbruch über der Kontur gesehen, möglichst überall und in allen Schichten vergleichmäßig ist. Die gestellte Aufgabe ist also ein Festigkeitsproblem.

Den prinzipiellen Ablauf der Optimierung zeigt *Bild 6.5*, als Analyseverfahren muß dabei der komplette FEM-Berechnungsablauf mit integriertem faserverbundspezifischen Pre- und Postprozessing in den problemspezifischen Optimierungsteil eingebaut werden.

Diese Kopplung muß in der Regel auf Betriebssystemebene durchgeführt werden (ABAQUS), es gibt jedoch auch bereits ein Standard-FEM-Programm mit einem integrierten Optimierungsmodul (ANSYS), die Anwendung auf Faserverbundbauteile

Ist mittels der Mehrschichtenverbundelemente und einem zusätzlichen FKV-Post-processing möglich /6.6/.

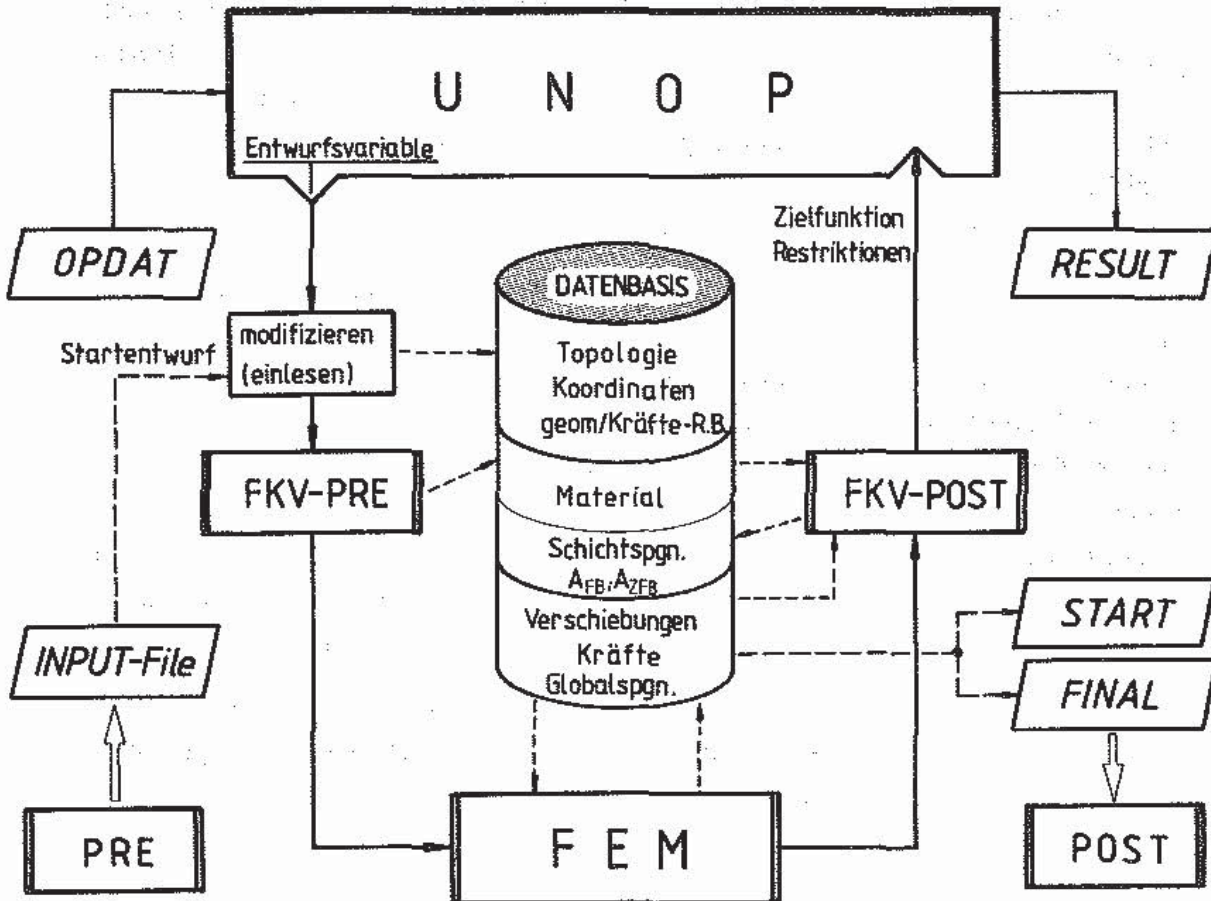


Bild 6.5: Integration der FEM-Analyse in den Optimierungsablauf

Die Verknüpfung der in Abschnitt 5. entwickelten leistungsfähigen Optimierungssoftware mit einem FEM-Programm auf Softwareebene ist in /6.8/ mit Erfolg durchgeführt worden, die FEM-Software (PERMAS) wird dabei mittels eines Steuerprogrammes (APC-Programm) angesprochen, in die der Optimierungsmodul (UNOP) mit eingebunden ist, siehe Bild 6.5. Dies ist eine sehr elegante und rechenzeitparende Alternative mit größtmöglicher Freiheit für den Anwender die natürlich nicht nur auf Faserverbundbauteile beschränkt ist.

Zurück aber zur Formoptimierung des Faserverbundbehälters (Domschale). Nachdem die Zielfunktion festgelegt ist, hier soll es die maximal auftretende Werkstoffanstrengung A_{ZFB} sein, muß man die Entwurfsvariablen festlegen; hierfür kommen prinzipiell alle Knotenpunktkoordinaten in Frage.

Dies würde aber einen ungeheuren Rechenaufwand bedeuten. Bei einem "bescheidenen" FEM-Netz mit 100 Knotenpunkten wären dies bei räumlichen Problemen maximal 300 Variable, wenn alle Knotenpunkte völlig "frei" im Raum positioniert werden können. Dies ist nicht praktikabel.

Als vorteilhaft erweist es sich, Konturlinien (Makros) mit einer mathematischen Funktion zu beschreiben; im Falle des Behälters kann die Konturlinie, (Meridianlinie oder "Erzeugende") durch kubische Splines mit beliebiger Stützstellenzahl beschrieben werden. Unter Ausnutzung der Rotationssymmetrie reduziert sich die Zahl der Entwurfsvariablen beispielsweise auf sechs bei einem Spline mit entsprechender Stützstellenanzahl, vgl. *Bild 6.6*.

Bei Faserverbundbehältern ändern sich die Faserrichtungswinkel und die Schichtdicken längs der Meridianlinie. Damit nicht bei jeder Optimierungsstufe die Faserrichtungswinkel und die Schichtdicken bei veränderter Lage der einzelnen Elemente auch noch neu berechnet werden müssen, kann man geschickt die Gesetzmäßigkeit der Geodäte ausnutzen.

Unter der Annahme geodätischer Faserablage hängen die laminatspezifischen Daten (Winkel, Dicken) nämlich nur vom jeweiligen Radius ab. Verschiebt man die Knotenpunkte bzw. Elemente also parallel zur Rotationsachse und behält den jeweiligen Radius bei, so ändern sich die elementbezogenen Laminatdaten nicht.

Noch weniger Variable - nämlich nur eine - erhält man, wenn eine gegebene Startkontur mit einem für alle Knotenpunktskoordinaten gleichen Faktor gestaucht oder gestreckt wird, vgl. *Bild 6.6*.

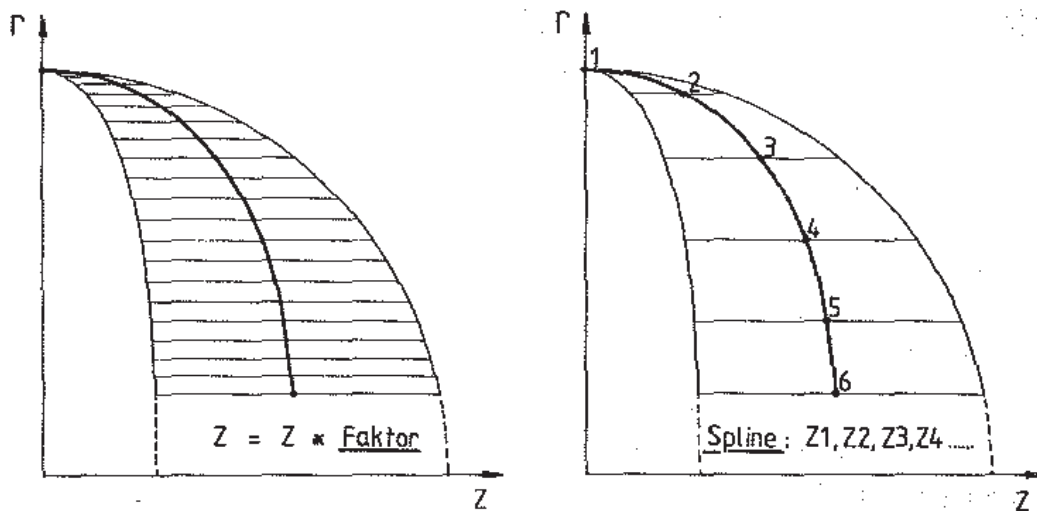


Bild 6.6: Formveränderung durch verschiedene Entwurfsvariable

Als Restriktionen werden sinnvollerweise geometrische Zusammenhänge genutzt, beispielsweise ist es unsinnig, wenn $Z_3 < Z_2$ ist. Weiterhin kann man die zulässige Werkstoffanstrengung als Restriktion vereinbaren, oder auch die Einhaltung eines bestimmten maximalen oder minimalen Behältervolumens.

Bild 6.7 zeigt eine Zusammenstellung von Optimalentwürfen aus durchgeführten Optimierungsrechnungen. Als Startentwurf wurde die Meridianlinie nach Netztheorie zugrunde gelegt, vgl. Bild 6.4.

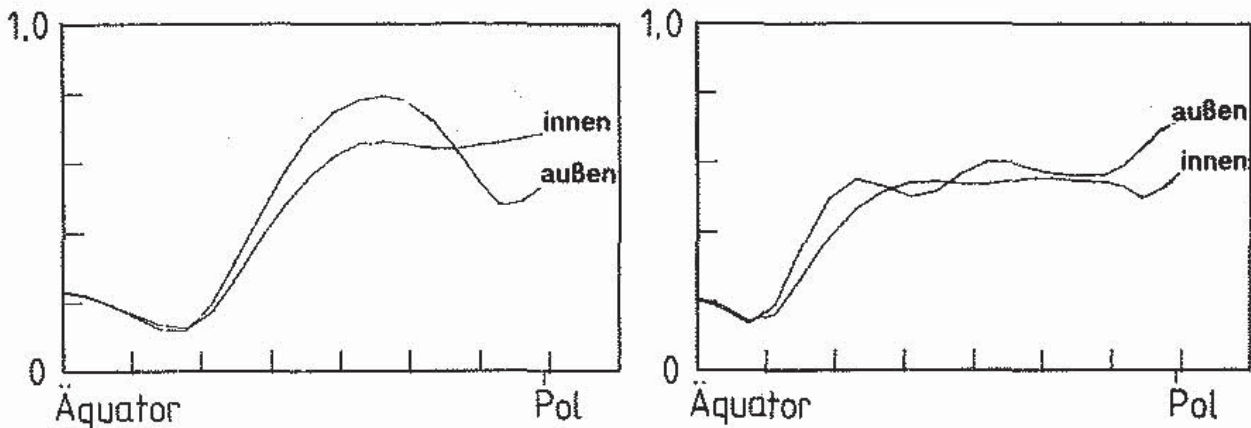


Bild 6.7: Werkstoffanstregung A_{ZFB} von optimierten Domkonturen (Faktor, Spline)

Die Ergebnisse zeigen, daß Veränderungen in der Verteilung von A_{ZFB} gegenüber dem Startentwurf eintreten, die Maxima werden vermindert, dies äußert sich in einer Vergleichsmäßigung der Anstrengungsverläufe, sowohl innerhalb der Schichten (innen und außen) als auch längs der Meridianlinie. Der Effekt ist bei einer Entwurfsvariablen (Faktor) nicht sehr deutlich /6.6/, bei mehr Variablen (Spline) wird dies schon ausgeprägter sichtbar. Die Form der optimierten Domschale liegt in der Nähe der nach Netztheorie ausgelegten Kontur.

Die Optimalentwürfe wurden nach 10 bis 15 (Faktor) bzw. 50 bis 70 (Spline) Optimierungsstufen (FEM-Analysen) gefunden.

6.3.2 Faserverbundbehälter mit zylindrischem Mittelteil

Oft werden Innendruckbehälter aus einem zylindrischen Mittelteil (Rohr) mit zwei integrierten Domschalen als Endkappen gefertigt; siehe Bild 6.8. Dabei muß man den Zylinderteil mit zusätzlichen "Umfangswicklungen" verstärken, um die hohen Umfangskräfte aufnehmen zu können. Die Dicke der Umfangslagen und die Gestaltung des Übergangsbereiches am Äquator spielen dann eine entscheidende Rolle. Der Faserverbundkonstrukteur kann die Dicke der Umfangslagen für den ungestörten Zylinderbereich nach verschiedenen Gesichtspunkten festlegen. Eine mögliche Auslegung ist die, den zylindrischen Behälterteil als Isotensoiden /4.10/ zu dimensionieren.

Der Einfluß der Form des Überganges und der Dicke der Umfangswicklungen auf die Werkstoffanstregung im gesamten Faserverbundbehälter wird nachfolgend mittels der numerischen Optimierung untersucht.

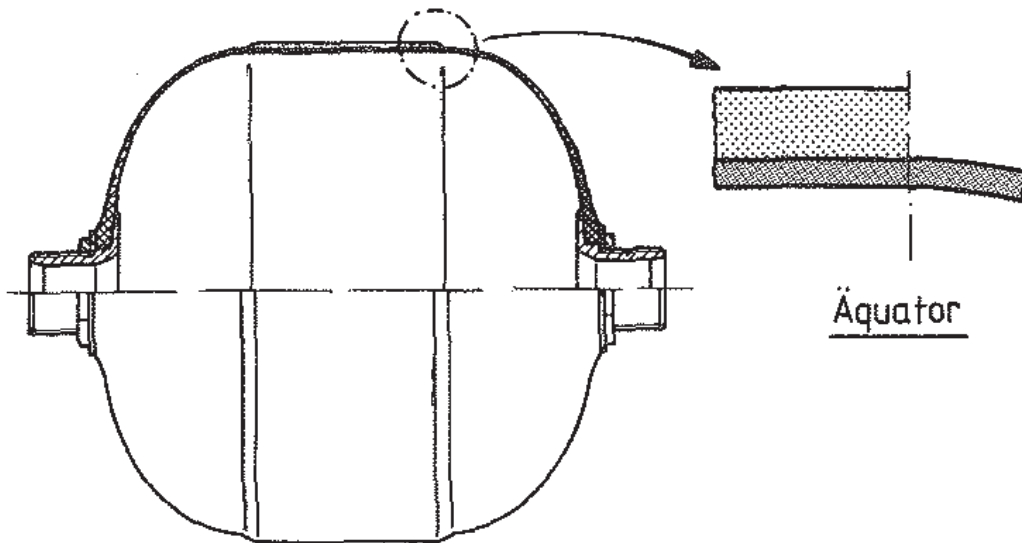


Bild 6.8: FKV-Behälter mit zylindrischem Mittelteil, Gestaltung des Überganges

Zunächst werden drei mögliche Geometrien des Übergangsbereiches konstruiert und rechnerisch mit Hilfe der FEM analysiert. Dabei ist die Wanddicke der Umfangslagen für ein Tragverhalten nach Netztheorie und für ein Tragverhalten nach Kontinuumstheorie bemessen.

Nach /4.10/ gilt für Isotensoid-Mehrschichtenverbunde, die aus AWW aufgebaut sind, folgende Beziehung der Wanddicken und der Faserrichtungswinkel:

$$\sum_{k=1}^n \frac{t_k}{t} \sin^2 \omega_k = \frac{\frac{n_y}{n_x} - m}{(1-m) \left(1 + \frac{n_y}{n_x}\right)} \quad (6.5).$$

mit
$$m = \frac{E_I}{E_{II}} \frac{1 + \nu_{II}}{1 + \nu_{II}}$$

Die Wanddicken und Schichtwinkel müssen also auf das Verhältnis der Hauptnormalkräfte abgestimmt werden.

Nach isotensoidischer Auslegung ergibt sich eine Wanddicke von 2,97 mm (Netztheorie $m = 0$) bzw. 8,35 mm (Kontinuumstheorie $m \neq 0$).

Die Dicke t_U der Umfangslagen ($\omega = 90^\circ$) wird als Entwurfsvariable in einen numerischen Optimierungsprozeß eingebaut. Damit erfolgt eine Optimierung der Wanddicke und zwar so, daß die Werkstoffanstrengung A_{ZFB} in allen Schichten des zylindrischen Teils des Faserverbundbehälters möglichst gleich ist.

Als Zielfunktion wird die Differenz zwischen den Maximalwerten der Werkstoffanstrengung in den Einzelschichten definiert, diese soll minimal werden.

Als Restriktionen werden geometrische Bedingungen gewählt, zusätzlich sollen alle auftretenden Werkstoffanstressungen kleiner als "1" sein, d. h. die Schichten sollen unterhalb der Reißbildungsgrenze bleiben.

Bild 6.9 zeigt die Ergebnisse eines Optimierungslaufes; über der Zahl der Iterationen ist die Veränderung der Entwurfsvariablen t_U und der Zielfunktion A123 abgetragen. Außerdem sind die Änderungen der maximal auftretenden Werkstoffanstressungen im Zylinderteil dokumentiert.

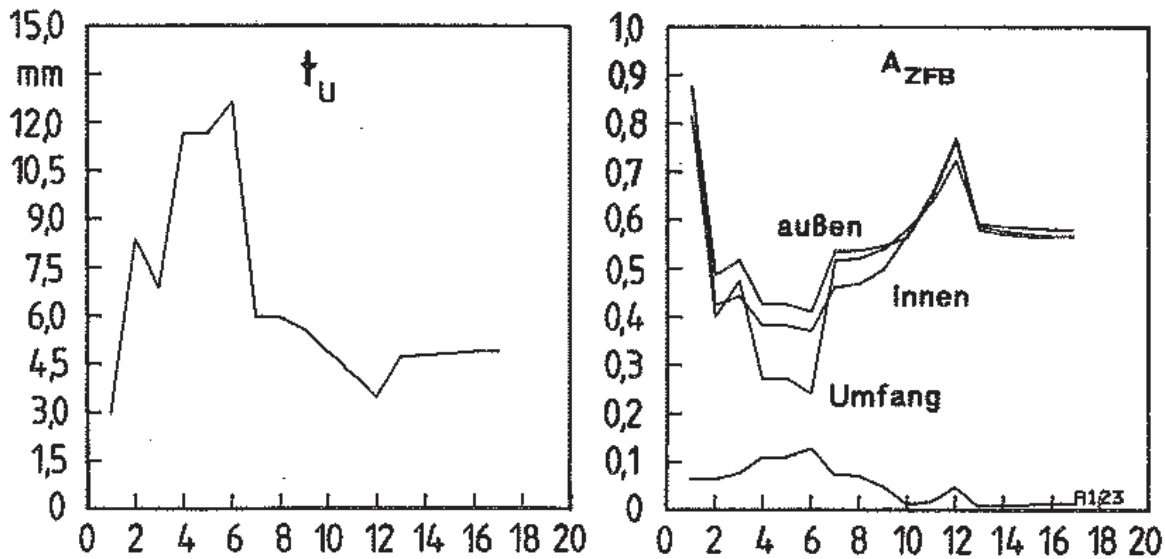


Bild 6.9: Optimierungsabläufe für die Entwurfsvariable t_u , die Zielfunktion A123 und die Werkstoffanstressungen A_{ZFB} im Zylinderteil; für die Innen- und Außenseite der $\pm\omega$ -Schichten und die Außenseite der Umfangslage.

Man erkennt deutlich die Minimierung der Zielfunktion; nach bereits 10 bis 13 Berechnungen ist offenbar das Minimum erreicht, die Werte A_{ZFB} der Einzelschichten haben sich angenähert, die Schichtdicke strebt einem Grenzwert zu. Betrachtet man den Verlauf der Werkstoffanstressungen über den Iterationen, so scheint es, daß die Entwürfe 4, 5 und 6 günstiger seien. Dem ist jedoch nicht so, da zwar die Werkstoffanstressung im Zylinderteil recht niedrig ist, die im Bild nicht dargestellte maximal auftretende A_{ZFB} im gesamten Behälter ist jedoch deutlich höher, so daß diese Lösung auch aufgrund der hohen Wanddicke von etwa 12 mm insgesamt nicht "besser" ist.

Neben der Wanddicke der Umfangslagen spielt außerdem die Gestaltung des Überganges am Äquator eine wichtige Rolle.

Bild 6.10 zeigt in einer Gesamtübersicht die Ergebnisse der Optimalentwürfe (O) für unterschiedlich gestaltete Übergänge vom Zylinder zum Dorn; zum Vergleich sind die Ergebnisse für die Werkstoffbeanspruchung nach netztheoretischer (N) und kontinuumstheoretischer (K) Dimensionierung eingetragen.

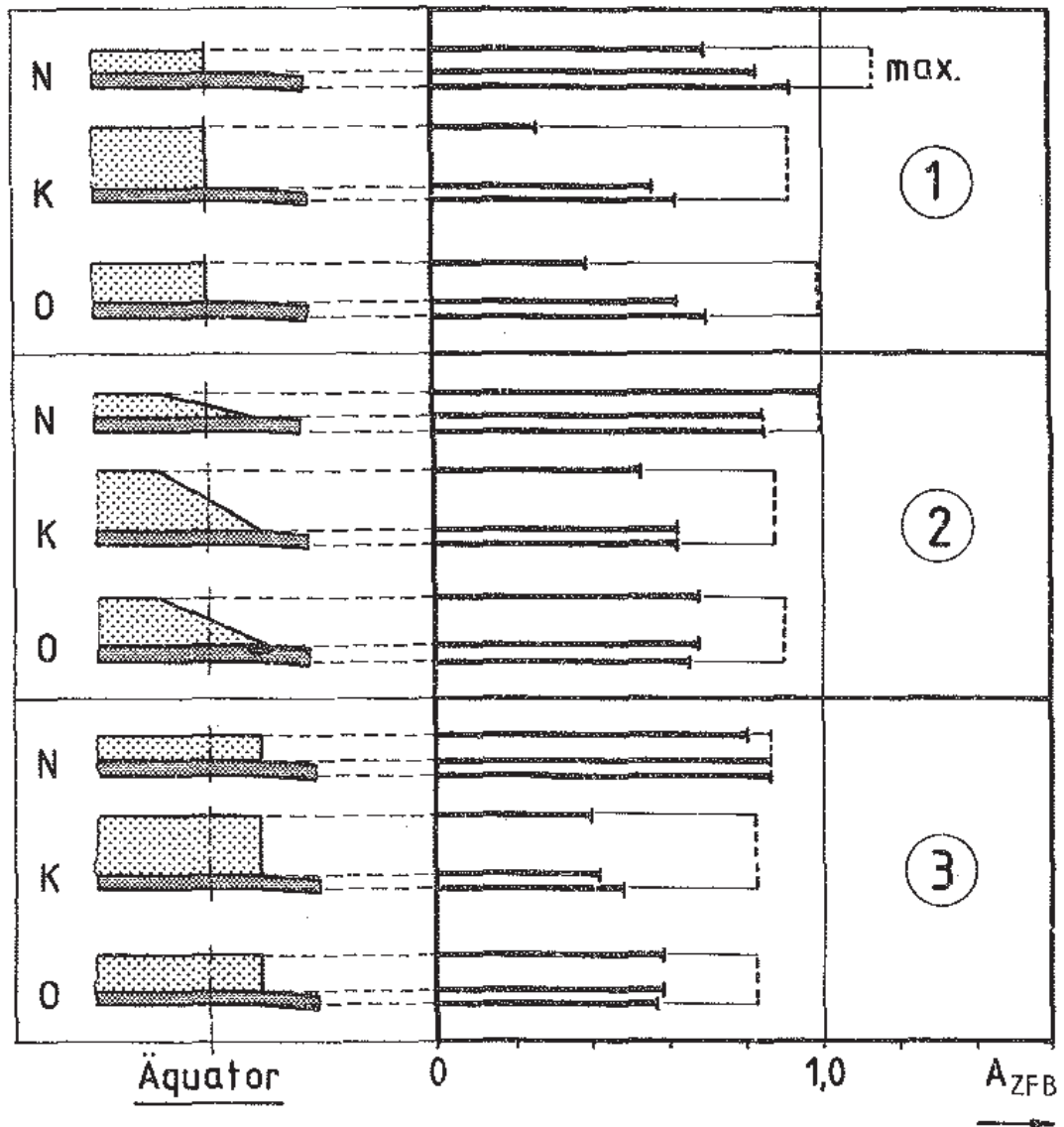


Bild 6.10: Ergebnisse der Optimierung für unterschiedliche Übergangsgeometrien, Startentwürfe und Optimalentwurf

Wanddicke nach N: Netztheorie
 K: Kontinuumstheorie
 O: Optimalentwurf

Für alle drei konstruktiven Varianten gilt, daß die Faserverbundbehälter mit der nach Netztheorie dimensionierten Wanddicke jeweils die höchsten Werkstoffanstressungen erfahren. Die größere Wanddicke nach der Kontinuumstheorie führt zu einer Verminderung der Werkstoffanstressung. Im Bild 6.10 sind die Maxima im Bereich der Umfangslagen abgetragen, als zusätzliche Marke ist das Maximum von A_{ZFB} im gesamten FV-Behälter eingezeichnet.

Bemerkenswert ist dabei, daß auch dieses Maximum sehr stark von der Gestaltung des Übergangsbereiches abhängt.

Der Einsatz der numerischen Optimierung bewirkt eine Vergleichmäßigung der Anstrengungsmaxima im Bereich der Umfangslagen; das Maximum im Behälter ist vergleichsweise geringer als das für den Startentwurf.

Die Wirkung der Restriktionen wird bei der 1. Variante deutlich; die Optimierung hat das Minimum erreicht, das unter den vorgegebenen Restriktionen - alle Schichten sollen unterhalb ihrer Rißbildungsgrenze bleiben - möglich ist.

Insgesamt zeigt sich, daß die Variante 3 die beste Werkstoffausnutzung auf niedrigstem Anstrengungsniveau bietet.

Selbstverständlich ist es auch hier weiterhin möglich, über dieses Detailproblem hinaus die Form der Behälterdomschale zu optimieren. Diese Form ergibt sich aber anders als in dem vorigen Abschnitt gezeigt, da hier der zylindrische Teil des Behälters und dessen Verformungswünsche andere Optimalkonturen erfordern.

Die Möglichkeiten, die der Faserverbund-Konstrukteur mit den numerischen Optimierungsmethoden gewinnt, sind außergewöhnlich. In den vorigen Abschnitten wird an Beispielen gezeigt, wie die Optimierungsmethoden bei sinnvoller Anwendung einen bedeutenden Beitrag zur Verbesserung von Leichtbaukonstruktionen aus Faserverbundwerkstoffen leisten können.

7. ZUSAMMENFASSUNG

Für den im Faserverbund-Leichtbau tätigen Ingenieur erwachsen mit den leistungsfähigen EDV-Systemen neue Möglichkeiten bezüglich der Analyse und Gestaltung von Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbunden. Denn anders als bei herkömmlichen Werkstoffen ist man bei Faserverbundwerkstoffen in viel stärkerem Maße auf die Berechnung angewiesen, wenn man das Potential, das in diesen Werkstoffen steckt, optimal nutzen will.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich damit, eine Verbindung zwischen der Faserverbund-Konstruktion und modernen Analyse- und Optimierungsverfahren herzustellen. An ausgeführten Faserverbund-Leichtbauteilen wird exemplarisch gezeigt, wie diese numerischen Verfahren anzuwenden sind; damit erhält der Faserverbund-Konstrukteur Richtlinien bezüglich ihres Einsatzes.

Zunächst werden die Berechnungsgrundlagen für Faser-Kunststoff-Verbunde bereitgestellt und erweitert. Über die in der Faserverbundtechnik übliche flächige Betrachtungsweise von Faserverbunden hinaus ist es erforderlich, zu einer räumlichen Betrachtung überzuwechseln; "dickwandige" Analysemethoden und die Finite-Elemente-Methode (FEM) machen dies zwingend erforderlich.

Einerseits werden die Stoffgesetze von anisotropen Faserverbundkörpern bei dreidimensionaler Betrachtungsweise erarbeitet - hierzu zählen insbesondere UD-Schichten aber auch spezielle Mehrschichtenverbunde wie ausgeglichene Winkel-Verbunde (AWV) und Kreuz-Verbunde (KV) - andererseits wird das Bruchverhalten näher betrachtet. Dabei wird ein neues Versagenskriterium für unidirektionale Schichten erarbeitet, mit dem es jetzt auch möglich ist, komplexe dreidimensionale Spannungszustände im FKV sicher zu beurteilen. Dieses Kriterium gilt für die Versagensart Zwischenfaserbruch, für Faserbruch gilt weiterhin das Kriterium nach PUCK ($A_{FB} = \sigma_{II} / \sigma_{II B}$).

Anschließend wird ausgeführt, wie man zu den Grundelastizitätsgrößen kommt, die man für die Dimensionierung des Mehrschichtenverbundes (MSV) benötigt. Anerkannte mikromechanische Beziehungen, welche die Elastizitätseigenschaften von UD-Schichten beschreiben, werden mit Ergebnissen numerischer Untersuchungen an FEM-Kleinmodellen verglichen. Dies hat zum Ziel, Anhaltswerte für die bisher selten oder nicht benötigte Elastizitätsgröße ν_{11} zu gewinnen.

Nachdem die Grundlagen bereitgestellt sind, erfolgt die Einbindung der Schichtenverbund-Analyse in den FEM-Berechnungsablauf. Dabei wird besonderer Wert darauf gelegt, Standard-FEM-Programme zu nutzen. Pre- und Postprocessing-erweiterungen werden diskutiert.

Am Beispiel ausgeführter Faserverbundbauteile wird dann gezeigt, wie man die verfeinerten FEM-Analysemethoden einsetzt. Insbesondere werden Berechnungen zu Rotorblättern für Windkraftanlagen, Blattfedern und Antriebsgelenkwellen vorgestellt.

Die Krafteinleitung einer GFK-Drehstabfeder wird mittels eines eigens entwickelten FE-Kontaktanalyseverfahrens rechnerisch untersucht; dabei werden Gleit- und Haftreibungseffekte zwischen dem Federkörper und den metallischen Einspannteilen mit berücksichtigt.

Die Berechnung eines leichten Innendruckbehälters aus FKV rundet die Anwendung der FEM auf Faserverbund-Leichtbauteile ab.

Der zweite wichtige Abschnitt dieser Arbeit behandelt Fragen der numerischen Optimierung von Faserverbunden. Dazu wird auf Grundsätzliches zur Optimierung eingegangen. Neben der mathematischen Formulierung der Optimierungsaufgabe ist die richtige Wahl einer Strategie und eines Algorithmus besonders wichtig. Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Optimierungspaket UNOP erweist sich als sehr leistungsfähiges "Optimierungswerkzeug".

Die zuvor erarbeiteten Grundlagen werden auf Fragestellungen aus dem Bereich der Faserverbundberechnung angewandt. Dabei wird zunächst die Auswahl optimaler Laminare behandelt. Bei dünnwandigen (flächigen) Strukturen wird die klassische Laminattheorie (CLT) mit dem Optimierungspaket kombiniert.

Zur elastizitätsgesteuerten Lastbeeinflussung, für Antriebswellen und zur gleichmäßigen Ausnutzung schubbelasteter Laminare werden optimale Schichtaufbauten gefunden. Dieser Abschnitt dient hauptsächlich der Verifizierung der verwendeten numerischen Optimierungsverfahren.

Darüber hinaus wird bei der Optimierung dickwandiger Laminare Neuland betreten, wobei ein von JAKOBI entwickeltes analytisches Berechnungsverfahren genutzt wird.

Die Optimierung erweist sich bei den von RAU entwickelten GFK-Drehstabfedern als außerordentlich erfolgreich. Mittels numerischer Optimierung ist eine Verbesserung der Ausnutzung von Drehstäben möglich; dies konnte in Bauteilversuchen von RAU nachgewiesen werden.

Dickwandige röhrenförmige Biegeträger lassen sich in ihrer Ausnutzung verbessern. Die Optimierung liefert Entwürfe, bei denen unter Beibehaltung der Bauteilgeometrie und der Durchbiegung die Beanspruchung der Verstärkungsfasern (faserparallele Spannung) über der Wanddicke gesehen vergleichmäßigt wird.

Ganz besonders muß dabei hervorgehoben werden, daß dabei die Werkstoffanstrengung gegen Zwischenfaserbruch stets unterhalb des geforderten Maximalwertes des Ausgangsentwurfes liegt.

Diese teilweise recht überraschenden Ergebnisse lassen bereits erkennen, welches Potential selbst in "guten" Faserverbundkonstruktionen noch steckt und zeigen, daß die numerischen Optimierungsverfahren wirklich "optimale" Laminateteile erst möglich machen.

Neben der Laminatauslegung beeinflußt auch die Form und Gestaltung eines FKV-Bauteiles die auftretenden Spannungszustände ganz erheblich. Am Beispiel einer Domschale für leichte FKV-Innendruckbehälter kann gezeigt werden, daß die Werkstoffausnutzung durch gezieltes Verändern der Kontur der Schale vergleichmäßig werden kann. Dabei wird die Zahl der Entwurfsvariablen klein gehalten, indem man mathematische Funktionen - hier kubische Splines - zur Geometriebeschreibung der Domschale nutzt.

FKV-Behälter, die aus einem zylindrischen Mittelteil mit integrierten Domschalen als Endkappen bestehen, benötigen im Zylinderteil zusätzliche "Umfangslagen" zur Aufnahme der Umfangskräfte. Die Wanddicke der Umfangslagen wird als Entwurfsvariable in numerischen Optimierungsrechnungen benutzt. Die Untersuchung verschiedener konstruktiver Varianten zeigt, daß eine Optimierung der Wanddicke zu einer Vergleichmäßigung der Werkstoffbeanspruchung führt.

Interessant ist in diesem Zusammenhang, daß die konstruktive Gestaltung des Überganges vom Dom zum Zylinder die auftretenden Maximalwerte der Werkstoffanstrengung im gesamten FKV-Behälter beeinflußt.

Als Ergebnis der Optimierung kann man festhalten, daß es "die Behälterkontur" nicht gibt, vielmehr hängt die optimale Lösung immer davon ab, welche Geometrie (Polöffnungsverhältnis) vorgegeben ist und zusätzlich noch davon, wie die Übergänge am Äquator und im Bereich der Polöffnung konstruktiv ausgeführt sind.

Im Verlaufe der Arbeit ist deutlich geworden, daß man erst mit einem verfeinerten Berechnungsverfahren (dickwandige Theorie, FEM) in der Lage ist, FKV-Bauteile wirklichkeitsgetreu zu analysieren und zu optimieren.

Der Faserverbund-Konstrukteur wird mit den neuen Möglichkeiten der

Analyse und Optimierung

in die Lage versetzt, erheblich verbesserte

Faserverbund-Leichtbauteile

zu entwickeln.

8. LITERATUR

1

- /1.1/ Wiedemann, J. Leichtbau, Bd. 1 Elemente
Springer, 1986
- /1.2/ Lenoë, E. M. Fibrous Composites in Structural Design
Olping, D. W. Proceedings of a Conference on Fibrous Composites
Burke, J. J. In Structural Design, San Diego, Nov. 14-17, 1978
Plenum Press, New York, 1980
- /1.3/ Bunsell, A. R. Advances in Composite Materials
et al. Volume 1,2, ICCM 3, Proceedings of the Third
International Conference on Composite Materials,
held in Paris, 26-29 August, 1980
Pergamon Press Ltd., 1980
- /1.4/ Kohlenstoff- und aramidfaserverstärkte Kunststoffe
Hrsg.: VDI-Gesellschaft Kunststofftechnik,
VDI-Verlag, Düsseldorf, 1977
- /1.5/ Verarbeiten und Anwenden kohlenstofffaser-
verstärkter Kunststoffe
Hrsg.: VDI-Gesellschaft Kunststofftechnik,
VDI-Verlag, Düsseldorf, 1981
- /1.6/ Kunststoffe im Fahrzeugbau -
Technik und Wirtschaftlichkeit
Hrsg.: VDI-Gesellschaft Kunststofftechnik,
VDI-Verlag, Düsseldorf, 1988
- /1.7/ Konstruieren mit Verbund- und Hybridwerkstoffen
VDI-Berichte 563,
Tagungsband der VDI-Gesellschaft Entwicklung,
Konstruktion, Vertrieb, Feilbach, 7. und 8. Mai 1985
- /1.8/ Heißler, H. Verstärkte Kunststoffe in der Luft- und
Raumfahrttechnik
Stuttgart; Berlin; Köln; Mainz : Kohlhammer, 1986
- /1.9/ Knaust, U. Entwicklung und Bau von Rotorblättern aus
Puck, A. Faserverbundwerkstoffen für die kleine Wind-
kraftanlage (KLEWIAN) der GhK
Abschlußbericht zum Forschungsprojekt,
Universität - Gh Kassel -, Dezember 1984

- /1.10/ Götte, T. Zur Dimensionierung und Gestaltung von LKW-Blattfedern aus Glasfaser-Kunststoff
Diss. Universität - Gh Kassel -, D 34, demnächst
- /1.11/ Schreiber, W. Zur Dimensionierung und Gestaltung von Antriebswellen aus Glasfaser-Kunststoff
Diss. Universität - Gh Kassel -, D 34, demnächst
- /1.12/ Rau, Th. Zur Entwicklung hochfester Drehstabfedern aus Faser-Kunststoff-Verbunden
Diss. Universität - Gh Kassel -, D 34, 1988
- /1.13/ Knaust, U. Zur Berechnung leichter Innendruckbehälter aus Faser-Kunststoff-Verbunden mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode
Finite Elements in Engineering Applications, INTES Publication 804, 1987, Stuttgart, S. 193-214
- /1.14/ Ashton, J. E. Primer on Composite Materials : Analysis
Halpin, J. C. Technomic Publishing Co.,
Petit, P. H. Stanford, Connecticut, 1969
- /1.15/ Jones, R. M. Mechanics of Composite Materials
McGraw-Hill, 1975
- /1.16/ Tsai, S. W. Introduction to Composite Materials
Hahn, H. Th. Technomic Publishing Co.,
Westport, Connecticut, 1980
- /1.17/ Agarwal, B. D. Analysis and Performance of Fiber
Broutman, L. J. Composites
John Wiley & Sons, 1980
- /1.18/ Ashton, J. E. Theory of Laminated Plates
Whitney, J. M. Technomic Publishing Co.,
Stanford, Connecticut, 1970
- /1.19/ Christensen, R. M. Mechanics of Composite Materials
John Wiley & Sons, 1980
- /1.20/ Wiedemann, J. Beitrag zum Problem orthotroper Platten
ohne allgemeine Neutralebene
Luftfahrttechnik - Raumfahrttechnik
8 (1962) H. 10, S. 283 ff.
9 (1963) H. 3, S. 73 ff.
9 (1963) H. 4, S. 118 ff.

- /1.21/ Puck, A. Zur Beanspruchung und Verformung mehrschichtiger Verbundstoff-Bauelemente aus Glasseidensträngen und Kunststoff
Diss. TU Berlin, D 83, 1966
- /1.22/ Schneider, W. Mikromechanische Betrachtung von Bruchkriterien unidirektional verstärkter Schichten aus Glasfaser/Kunststoff
Diss. TH Darmstadt, D 17, 1974
- /1.23/ Gitschner, H.-W. Diffusionsbedingte Verformungs- und Spannungszustände in glasfaserverstärkten Verbundwerkstoffen
Diss. TH Aachen, D 82, 1980
- /1.24/ Schürmann, H. Gezielt eingebrachte Eigenspannungen erhöhen die Belastbarkeit von Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbunden
Kunststoffe 74 (1984) 9, S. 520-526
- /1.25/ HSB Luftfahrttechnisches Handbuch (LTH)
Handbuch Strukturberechnung
Hrsg.: Industrie-Ausschuß Struktur Berechnungsunterlagen (IASB)
- /1.26/ FVL Luftfahrttechnisches Handbuch (LTH)
Faserverbund-Leichtbau
Hrsg.: Arbeitskreis Faserverbund-Leichtbau
- /1.27/ VDI 2014 (Entwurf) Entwicklung von Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbund (FKV)
- /1.28/ Jakobi, R. Zur Spannungs-, Verformungs- und Bruchanalyse an dickwandigen, rohrförmigen Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbunden
Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 5, Nr. 126
- /1.29/ Zienkiewicz, O. C. The Finite Element Method
3rd ed., McGraw-Hill, 1977
- /1.30/ Argyris, J. Die Methode der finiten Elemente in der elementaren Strukturmechanik, Bd. I,
Mlejnek, H.-P. Friedr. Vieweg & Sohn, 1986
- /1.31/ Link, M. Finite Elemente in der Statik und Dynamik
B. G. Teuber, Stuttgart, 1984

- /1.32/ Bathe, K.-J. Finite Element Procedures in Engineering Analysis; Prentice Hall, 1982
"Finite-Elemente-Methoden"; Dt. Übers.
von Peter Zimmermann; Springer, 1986
- /1.33/ Förster, R. Grundlagen der Optimierung von Mehrschichtenverbunden aus faserverstärkten Werkstoffen
Teil 1 : Optimierungsregeln
Kunststoffe 62 (1972) 1, S. 57-62
- /1.34/ Förster, R. Grundlagen der Optimierung von Mehrschichtenverbunden aus faserverstärkten Werkstoffen
Teil 2 : Das Verformungsverhalten von optimal ausgelegten Mehrschichtenverbunden unter ebener Beanspruchung
Kunststoffe 62 (1972) 3, S. 181-186
- /1.35/ Helwig, G. Analyse, Synthese und Gewichtsoptimierung von Mehrschichtenverbunden, ausgeführt am Beispiel von Glasfaserkunststoffen
Diss. TH Darmstadt, 1976
- /1.36/ Baier, H. Structural Optimization in Industrial Environment : Application to Composite Structures
In : H. Eschenauer and N. Olhoff (Eds.) Optimization Methods in Structural Design, Proceedings, Euromech-Colloquium 164 : BI-Wissenschaftsverlag, 1983, S. 140-145
- /1.37/ Brown, R. T. Optimization of Laminated Shells with Multiple Loading Conditions and Fabrication Constraints
Nachlas, J. A.
In : I. H. Marshall, Composite Structures, Proceedings of the 1st International Conference on Composite Structures, Paisley College of Technology, Scotland, 16 to 18 September 1981
Applied Science Publishers, 1981, S. 144-157
- /1.38/ Eschenauer, H. Optimierung ebener Flächentragwerke aus Verbundwerkstoff
Zeitschrift für Flugwissenschaften und Weltraumforschung, 8 (1984), Heft 6, S. 367-378
- /1.39/ Eschenauer, H. Optimum Design einer punktförmig belasteten Sandwichplatte mit orthotropen CFK-Deckschichten
Fuchs, W.
Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, ZAMM 65, 1985, S. T305-306

- /1.40/ Eschenauer, H. Rechnerische und experimentelle Untersuchungen zur Strukturoptimierung von Bauweisen
DFG-Forschungsbericht, Institut für Mechanik und Regelungstechnik, Universität - Gh Siegen, 1985
- /1.41/ Fuchs, W. Strukturanalyse und Optimierung anisotroper Schalen aus Faserverbundwerkstoff
Diss. Universität - Gh Siegen, D 467, 1986
- /1.42/ Baier, H. Optimierung von Tragwerken unter besonderer Berücksichtigung von Anforderungen aus Dynamik und Thermostabilität
Goos, R. In : International FEM-Congress
Helwig, G. Baden-Baden, IKOSS, 1987

2

- /2.1/ Green, A. E. Theoretical Elasticity
Zerna, W. Oxford: Clarendon Press, Second Edition, 1968
- /2.2/ Eschenauer, H. Elastizitätstheorie I
Schnell, W. Grundlagen, Scheiben und Platten
Mannheim, Wien, Zürich:
Bibliographisches Institut, 1981
- /2.3/ Lekhnitskii, S. G. Theory of Elasticity of an Anisotropic Body
Mir Publishers, Moscow 1981
- /2.4/ Cuntze, R. Grundlagen für die Berechnung von Rotations-
schalen aus Faserverbundwerkstoff
Habilitationsschrift TU München, 1978
- /2.5/ Voigt, W. Lehrbuch der Kristallphysik
B. G. Teubner, Leipzig, 1928
- /2.6/ Timoshenko, S. P. Theory of Elasticity
Goodier, J. N Third Edition, McGraw-Hill, 1982
- /2.7/ Lehmann, Th. Elemente der Mechanik; Elastostatik
Vieweg, Braunschweig, 1975
- /2.8/ Schneider, W. Wärmeausdehnungskoeffizienten und Wärme-
spannungen von Glasfaser/Kunststoff-Ver-
bunden aus unidirektionalen Schichten
Kunststoffe 61 (1971) 4, S. 273-277

- /2.9/ Schneider, W. Wärmeausdehnungskoeffizienten und Wärmespannungen von Glasfaser/Kunststoff-Verbunden
Kunststoffe 63 (1973) 12, S. 929-933
- /2.10/ Gitschner, H.-W. Diffusionsbedingte Eigenspannungen (Quellspannungen) und Deformationszustände in anisotropen glasfaserverstärkten Mehrschichten-Verbundwerkstoffen
Grüters, H. Kunststoffe 71 (1981) 3, S. 178-183
- /2.11/ Puck, A. Zur Beanspruchung und Verformung von GFK-Mehrschichtenverbund-Bauelementen
Kunststoffe 57 (1967) 4, S. 284-293
7, S. 573-582
12, S. 965-973
- /2.12/ Hörner, M. Anwendung der Finite-Elemente-Methode auf die Berechnung dickwandiger Bauteile aus Faser-Kunststoff-Verbunden
Diplomarbeit D1/3/86,
FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1986
- /2.13/ Wilson, E. L. Structural Analysis of Axisymmetric Solids
AIAA Journal, Vol. 3, No. 12, 1965
- /2.14/ Tang, T. Geometrisch nichtlineare Berechnung von rotationssymmetrischen, faserverstärkten Strukturen
Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 12, Nr. 55, 1985
- /2.15/ Uemura, M. Stress Distributions in Laminated Composite
Fukunaga, H. Cylinders under Internal Pressure
in: /1.3/
- /2.16/ Murakami, H. A Mixture Theory for Wave Propagation in
Hegemier, G. A. Anisotropic Angle-ply Laminates
in: Mechanics Today, Vol. 5
S. Nemat-Nasser (ed.) Pergamon Press, 1980
- /2.17/ Sperling, U. Dreidimensionale Spannungsverteilung um ein belastetes Loch in einer CFK-Probe
in: Entwicklung und Anwendung von CFK-Strukturen
DGLR-Bericht 84-142, 1984

- /2.18/ Belytschko, T. Finite Element Stress Analysis of an
Kulak, R. F. Intervertebral Disc
Schultz, A. B. J. Biomechanics, Vol. 7, 1974, pp. 277-285
Galante, J. O.
- /2.19/ Lin, H. S. Systems Identification for Material Properties
Liu, Y. King of the Intervertebral Joint
Ray, Gautam J. Biomechanics, Vol. 11, 1978, pp. 1-14
Nikravesh, P.
- /2.20/ Spilker, R. L. Material Constants for a Finite Element
Jakobs, D. M. Model of the Intervertebral Disk With a
Schultz, A. B. Fiber Composite Annulus
J. of Biomechanical Engineering Feb. 1986, Vol. 108
- /2.12/ Jakobi, R. Steifigkeiten und Nachgiebigkeiten von
Knaust, U. ausgeglichenen Winkel-Verbunden
Interne Ausarbeitung
FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1986
- /2.22/ Kedward, K. T. Thermally induced deformation of laminated
composite structures
Composites, January 1976, pp. 21-26
- /2.23/ Fahmy, A. A. Thermal Expansion of Laminated Fiber
Ragai-Ellozy, A. N. Composites in the Thickness Direction
J. Composite Materials, Vol. 8 (1974), p. 90
- /2.24/ Pagano, N. J. Thickness Expansion Coefficients of Composite
Laminates
J. Composite Materials, Vol. 8 (1974), p. 310
- /2.25/ Beil', A. I. Elimination of the Initial Thermal Stresses
Portnov, G. G. in wound Articles made from Composites
Sanina, I. V. by varying the winding angle over the thickness
Yakushin, V. A. Mechanics of Composite Materials
16 (1980), pp. 715-720
- /2.26/ Hasse, Th. Nachgiebigkeiten und Wärmeausdehnungskoeffi-
zienten von Kreuzverbunden
Interne Ausarbeitung
FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1988

- /2.27/ Whitney, J. M.
Pagano, N. J. Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates
J. of Applied Mechanics, Dec. 1970, Vol. 37, pp. 1031-1036
- /2.28/ Puck, A.
Schneider, W. On failure mechanisms and failure criteria of filament-wound glass-fibre/resin composites
Plastics & Polymers, Febr. 1969, pp. 33-44
- /2.29/ Puck, A. Festigkeitsberechnung an Glasfaser/Kunststoff-Laminaten bei zusammengesetzter Beanspruchung
Kunststoffe 59 (1969) 11, S.780-787
- /2.30/ Franke, L.
Herrmann, G. Fracture of UD-Glass-Fiber Reinforced Composites Under Combined Biaxial Stresses
J. Reinforced Plastics and Composites, Vol. 1 (April 1982), pp. 177-192
- /2.31/ Choo, V. K. S. Effect of Loading Path on the Failure of Fibre Reinforced Composite Tubes
J. of. Composite Materials, Vol. 19 (Nov. 1985), pp. 525-532
- /2.32/ Puck, A.
Schürmann, H. Die Zug/Druck-Torsionsprüfung an rohrförmigen Probekörpern
Kunststoffe 72 (1982) 9, S. 554-561
- /2.33/ Nahas, N. M. Survey of Failure and Post-Failure Theories of Laminated Fiber-Reinforced Composites
J. of Composites Technology & Research, Vol. 8, No. 4, 1986, pp. 138-153
- /2.34/ Hashin, Z. Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites
J. of Applied Mechanics, June 1980, Vol. 47, pp. 329-334
- /2.35/ Jieh-Ren, Y. Three dimensional Finite Element Analysis of Failure in Composite Laminates
Ph. D., Rensselaer Polytechnic Institute, 1985
- /2.36/ Gol'denblat, I. I.
Kopnov, V. A. Strength of Glass-Reinforced Plastics in the Complex Stress State
Polymer Mechanics, Vol. 1, No. 2, 1965, pp. 70-78
- /2.37/ Tsai, S. W.
Wu, E. M. A General Theory of Strength for Anisotropic Materials
J. of. Composite Materials, Vol. 5 (1971), pp. 58-80

- /2.38/ Tsai, S. W. Composites Design
Think Composites, Dayton, Paris, Tokyo, 1986
- /2.39/ Narayanaswami, R. Evaluation of the Tensor Polynomial and
Adelman, H. M. Hoffman Strength Theories for Composite
Materials
J. of Composite Materials, Vol. 11 (1977), pp. 366-377
- /2.40/ Wu, R.-Y. Evaluation of the Normal Stress Interaction
Stachurski, Z. Parameter in the Tensor Polynomial Strength
Theory for Anisotropic Materials
J. of Composite Materials, Vol. 18 (1984), pp. 456-463
- /2.41/ Schneider, W. Versagenskriterien für Kunststoffe
Bardenheier, R. Z. f. Werkstofftechnik 6 (1975) 8, S. 269-280
8 (1975) 10, S. 339-348
- /2.42/ Szabó, I. Höhere Technische Mechanik
Springer, 1977
- /2.43/ Jakobi, R. KONFT - Spannungs-, Verformungs- und Bruch-
Knaust, U. analyse an Mehrschichtenverbunden unter Be-
rücksichtigung von Eigenspannungen aus Feuchte
und Temperatur, Rev. 4.0
FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1988
- /2.44/ Knight, M. Three-Dimensional Elastic Moduli of
Graphite/Epoxy Composites
J. of Composite Materials, Vol. 16 (1982), pp. 153-159
- /2.45/ Hashin, Z. The Elastic Moduli of Fiber-Reinforced Materials
Rosen, B. W. J. of Applied Mechanics, June 1964, pp. 223-232
- /2.46/ Schröder, B. Untersuchungen zum Spannungs-Verformungs-Ver-
halten von unidirektional faserverstärkten Kunststoffen
bei Querkzugbelastung, bei Schubbelastung und bei
kombinierter Belastung aus Querkzug und Schub
Diplomarbeit D1/1/83
FG Faserverbundtechnik Uni - Gh Kassel -, 1983
- /2.47/ Jakobi, R. Untersuchungen zum Einfluß der Feuchtigkeit
auf den Eigenspannungszustand von Glasfaser-
Kunststoff-Verbunden
Abschlußbericht Zentrale Forschungsförderung der GhK
FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1986

- /2.48/ Förster, R.
Knappe, W. Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Reißbildungsgrenze an zweischichtigen Wickelrohren aus Glasfaser/Kunststoff unter Innendruck
Kunststoffe 61 (1971) 8, S. 583-588
- /2.49/ Foye, R. L. The Transverse Poisson's Ratio of Composites
J. of Composite Materials, Vol. 6 (1972), pp. 293-295
- /2.50/ Henniges, D.
Kieler, N. Einsatz eines Finite-Elemente Programmes zur Berechnung von Bauteilen aus Faserverbundwerkstoffen
Studienarbeit S/1/86
FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1986
- /2.51/ Haberl, G. Theoretische Bestimmung der Eigenschaften faserverstärkter Werkstoffe bei Belastung quer zur Faserrichtung
Diss. - TH Wien, 1972
- /2.52/ Puck, A. Zum Deformationsverhalten und Bruchmechanismus von unidirektionalem und orthogonalem Glasfaser/Kunststoff
Kunststoffe 55 (1965) 12, S. 913-922
- /2.53/ Hasse, Th. Nichtlineares Werkstoffverhalten in der FEM-Analyse von Verbundwerkstoffen
Diplomarbeit D2/4/88
FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1988
- /2.54/ Rüegg, Ch. Kardanwellen in CFK- und Hybridbauweise; in: /1.5/

3

- /3.1/ Puck, A.
Jakobi, R. Zur Konstruktion und Berechnung von röhrenförmigen Faserverbund-Biegeträgern
18. AVK-Jahrestagung, Freudenstadt 1982
- /3.2/ Mackerle, J. Finite Elemente Software for Stress Analysis of Laminated Composites
in: A. Niku-Lari (ed.), Structural Analysis Systems, Volume 2, Pergamon Press, 1986
- /3.3/ Henniges, D. Dokumentation der Erweiterung von Pre- und Postprocessing Programmen für das FEM-Programm ABAQUS; Studienarbeit S/1/87
FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1987

4

- /4.1/ Betz, A. Wind-Energie und ihre Ausnutzung durch Windmühlen
Naturwissenschaft und Technik, Heft 2
(1926), Göttingen; Vandenhoeck und Ruprecht
- /4.2/ Johansen, B. S. Wingblades of glass fibre reinforced
Lilholt, H. polyester for a 630 kW windturbine
Lystrup, Aa. design, fabrication and materials testing
in: /1.3/, Volume 2, pp. 1355-1367
- /4.3/ Knünz, D. Einsatz kleiner Windenergiekonverter in der
Hüttich, H. G. Bundesrepublik Deutschland
Kurzberichte aus der Bauforschung/März 1988,
Berichte Nr. 53, S. 201-206
- /4.4/ Molly, J. P. Windenergie in Theorie und Praxis
Verlag C. F. Müller, Karlsruhe 1978
- /4.5/ Muser, D. Bauweisen von Rotorblättern für kleine
Windkraftanlagen
BMFT, Seminar und Statusreport Windenergie,
ET 4020 A, 23./24. Oktober 1978, Jülich
- /4.6/ Hahn, M. Verbundwerkstoffrotoren von 2 bis 120 m
Brunsch, K. Durchmesser
20. Internationale Chemiefasertagung in Dornbirn
vom 23. bis 25. September 1981
- /4.7/ Puck, A. Einige Beispiele zu Konstruktion und Bau von
hochbeanspruchten Segelflugzeugbauteilen aus
Glasfaser/Kunststoff
Sonderdruck aus Schweizer Aero-Revue
Nr. 12/1962 und Nr. 1/1963
- /4.8/ Schröder, B. Gestaltung und Dimensionierung eines Rotor-
blattes für die kleine Windkraftanlage
"KLEWIAN" in Faserverbundbauweise
Studienarbeit S/1/81
FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1981
- /4.9/ Paulus, W.-R. Elastizitätsgesteuerte Lastbeeinflussung von
Rotorblättern für Windkraftanlagen
Diplomarbeit D2/1/84
FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1984

- /4.10/ Puck, A. Konstruieren und Berechnen von GFK-Teilen,
Beiheft zur Fachzeitschrift Kunststoffberater,
Umschau-Verlag, 1969, S. 44-66
- /4.11/ Ebersbach, P. Querschnittswerte und Strukturanalyse
mehrzellig geschlossener Faserverbund-Profile
FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1983
- /4.12/ Pfennig, M. Einsatzmöglichkeiten finiter Balkenelemente in
der Strukturanalyse von Faserverbundbauteilen
Diplomarbeit D2/1/88
FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1988
- /4.13/ Lehmann, Th. Elemente der Mechanik
Schwingungen, Variationsprinzipie
Vieweg, Braunschweig, 1975
- /4.14/ Ehrenstein, G. W. Dämpfungseigenschaften glasfaserverstärkter
Förster, R. Kunststoffe
AVK-Jahrestagung, Freudenstadt, 1968
- /4.15/ Puck, A. Blattfedern mit progressiver Kennlinie aus
Götte, T. Glasfaser-Kunststoff
Hochbein, H. Unveröffentlichter Abschlußbericht zum
Kampke, M. Forschungsprojekt
Knaust, U. FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1986
- /4.16/ Götte, T. Grundlagen der Dimensionierung von Nutzfahrzeug-
Jakobi, R. Blattfedern aus Faser-Kunststoff-Verbunden
Puck, A. Kunststoffe 75 (1985) 2, S. 100-104
- /4.17/ Götte, T. Zur Entwicklung von Nutzfahrzeug-Blattfedern
Jakobi, R. aus Faser-Kunststoff-Verbunden
Puck, A. Kunststoffe 75 (1985) 6. S. 355-361
- /4.18/ Knoll, G. Lastübertragungsverhalten elastischer Körper mit
Festkörper- und Fluidkontakt
Habilitationsschrift, Uni - Gh Kassel -, 1986
- /4.19/ Volk, J. Gestaltung und Dimensionierung der Kraft-
einleitungsbereiche für ein Lkw-Blattfedersystem
aus Faserverbundwerkstoffen
Diplomarbeit D2/5/84
FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1984

- /4.20/ Schuster, B. Gestaltung und Dimensionierung der Kraft-
einleitungsbereiche eines Lkw-Blattfedersystems
aus Faserverbundwerkstoffen mit Hilfe der
Finite-Elemente-Methode
Diplomarbeit D2/7/85
FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1985
- /4.21/ Spohr, C. FEM-Kontaktanalyse der Achsbefestigung einer
Lkw-Blattfeder aus GFK
Diplomarbeit D1/3/88
FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1988
- /4.22/ Henniges, D. Zur Analyse von Antriebswellen aus Faser-Kunststoff-
Verbunden mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode
Diplomarbeit D1/4/87
FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1987
- /4.23/ Kirstein, U. Interlaminare Schubspannungen in Faser-Kunst-
stoff-Verbunden und ihre Berechnung mit
finiten Platten-/Schalenelementen
Diplomarbeit D2/1/87
FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1987
- /4.24/ Schreiber, W. NCFIX-Programmpaket zur Erstellung von
Plugge, D. NC-Filament Winding-Steuerdaten, Rev. 1.0
FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1987
- /4.25/ Kieler, N. FEM-Berechnung von Faserverbundbauteilen
unter Verwendung der Geometriedaten aus der
NC-Fertigung (CIM/FEM-Kopplung)
Diplomarbeit D1/5/87
FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1987
- /4.26/ DIN 7190 Preßverbände - Berechnung und Gestaltungsregeln
Entwurf Januar 1986
- /4.27/ Hasse, Th. Anwendungsmöglichkeiten axialsymmetrischer
finiter Elemente in der Strukturanalyse von Bau-
teilen aus Faser-Kunststoff-Verbunden
Diplomarbeit D1/8/86
FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1986
- /4.28/ Schäfer, U. Entwicklung eines Algorithmus zur FEM-Kontaktanalyse
unter Berücksichtigung von Haft- und Gleitreibung
Studienarbeit S/1/88
FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1988

- /4.29/ Zimmermann, R. Berechnung dünnwandiger, rotationssymmetrischer, fadengewickelter Innendruckbehälter nach der Membrantheorie; Teil 1: Netztheorie DLR-Forschungsbericht 69-83 (1969)
- /4.30/ Förster, R. Vergleich verschiedener Schalenformen dünnwandiger fasergewickelter Rotationsschalen bei Dimensionierung auf Ribbildung
Kraft, G. Kunststoffe 62 (1972) 9, S. 587-591
- /4.31/ Fukunaga, H. Optimum Design of Helically Wound Composite Pressure Vessels
Uemura, M. Composite Structures 1 (1983), 31-49
- /4.32/ Knaust, U. Zur Zeitabhängigkeit von Eigenspannungen in Wickelrohren mit zwei oder drei Faserrichtungen
Diplomarbeit D2/2/82
FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1982
- /4.33/ Hasse, Th. AUTONET - Behältertopologie für beliebige Faserverbundwerkstoffe unter Berücksichtigung des Tragverhaltens nach Netz- oder Kontinuumsstheorie Rev. 2.0
Knaust, U. FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1988
- /4.34/ Neitzel, M. Verbundwerkstoffe im Druckbehälterbau
VDI-Fortschrittsberichte Reihe 5, Nr. 8, 1969

5

- /5.1/ Sattler, H.-J. Ersatzprobleme für Vektoroptimierungsaufgaben und ihre Anwendung in der Strukturmechanik
Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 1, Nr. 88
- /5.2/ Krabs, W. Einführung in die lineare und nichtlineare Optimierung für Ingenieure
B. G. Teubner, Stuttgart, 1983
- /5.3/ Eschenauer, H. Optimization Methods in Structural Design
Olhoff, N. Euromech - Colloquium; BI-Verlag, 1983
- /5.4/ Atrek, E. New Directions in Optimum Structural Design
Gallagher, R. H. John Wiley & Sons, 1984
Ragsdall, K. M.
Zienkiewicz, O. C.

- /5.5/ Vanderplaats, G. N. Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: with Applications
McGraw-Hill, 1984
- /5.6/ Stadler, W. Multicriteria Optimization in Engineering and in the Sciences
Plenum Press, New York, 1988
- /5.7/ Knepe, G. Direkte Lösungsstrategien zur Gestaltoptimierung von Flächentragwerken
Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 1, Nr. 135
- /5.8/ Siodla, Th. Rechnergestützte Optimierung dickwandiger Faserverbund-Bauteile
Diplomarbeit D1/1/87
FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1987
- /5.9/ Küster, J. L. Optimization Techniques with FORTRAN
Mize, J. H. McGraw-Hill, 1973
- /5.10/ Siddall, J. N. Optimal Engineering Design - Principles and Applications
Marcel Dekker, New York - Basel, 1982
- /5.11/ Apel, K. UNOP - Universelles numerisches Optimierungspaket
Knaust, U. FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1988
Siodla, Th.
- /5.12/ Jacob, H. G. Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme
Springer, 1982
- /5.13/ Schittkowski, K. On the convergence of a sequential quadratic programming method with an augmented Lagrangian line search function
Math. Operationsforschung und Statistik, Serie Optimization, Vol. 14 (1983), S. 197-216
- /5.14/ Schittkowski, K. Computational Mathematical Programming
Springer, 1985

6

- /6.1/ Puck, A. KFK - Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden,
Teil 1 und 2, Vorlesungsmanuskript
FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1987
- /6.2/ Schreiber, W. Entwicklung eines Torsionsfedersystems in Faser-
verbundbauweise für einen Pkw
Diplomarbeit D2/3/84
FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1984
- /6.3/ Apel, K. Rechnergestützte Optimierung von Drehstabfedern
Diplomarbeit D1/8/87
FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1987
- /6.4/ Kampke, M. Zum Einsatz von GFK-Blattfedern mit gezielt ein-
gebrachten Eigenspannungen
Diss. Universität - Gh Kassel -, D 34, demnächst
- /6.5/ Jakobi, R. Steigerung der Belastbarkeit von dickwandigen
Schreiber, W. Torsionsrohren aus Faser-Kunststoff-Verbunden
21. AVK-Jahrestagung, Mainz 1987
- /6.6/ Niebergall, M. Formoptimierung von Faserverbundbehältern
mit Hilfe der FEM
Diplomarbeit D1/4/88
FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1988
- /6.7/ Zimmermann, R. Experimentelle Untersuchungen über den Einfluß der
Behälterform auf die Güte fadengewickelter, dünn-
wandiger Druckbehälter aus GFK
IB 152-73/23, DFVLR, Braunschweig, 1973
- /6.8/ Siodla, Th. Strukturoptimierung mit Hilfe der FEM am
Beispiel eines Faserverbundbehälters
Diplomarbeit D2/5/88
FG Faserverbundtechnik, Uni - Gh Kassel -, 1988

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Ulrich Knaust
Geburtsdatum/Ort: 24.11.1955, Kassel
Familienstand: verheiratet, 3 Kinder
Nationalität: deutsch



Schulbildung

1962 – 1970 Grundsule in Felsberg-Lohre
1970 – 1974 König-Heinrich-Gymnasium, Fritzlar, Abitur

Wehrdienst

10/1974 – 10/1976 Bundeswehr Marburg

Studium

10/1976 – 05/1983 Studium des Maschinenbaus an der Universität-
Gesamthochschule Kassel

Wissenschaftliche Berufstätigkeit

06/1983 – 12/1988 Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universität-
Gesamthochschule Kassel, Fachgebiet Faserverbundtechnik

Promotion

12/1988 Titel: Zur Analyse und Optimierung von Faserverbund-
Leichtbauteilen

Berufstätigkeit

seit 01/1989 Audi AG Ingolstadt, Technische Entwicklung