Kardinalitäten

- gleichmächtige Mengen
- abzählbar unendliche; abzählbare Mengen
    - $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
    - M abzählbar $\Rightarrow$ jede Untermenge $A \subseteq M$ ist abzählbar.

Kardinalitäten

Satz: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist nicht abzählbar.

Beweis durch Widerspruch. Idee (Cantor): Diagonalisierung

Annahme: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ abzählbar, i.e. es gibt $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ bijektiv.

Sei $S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin f(n)\}$.

$S \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, so $\exists n_S \in \mathbb{N}$ mit $S = f(n_S)$.

- Falls $n_S \in S$, so erfüllt n_S die Eigenschaft $n_S \notin f(n_S) = S$. Widerspruch
- Falls $n_S \notin S$, so erfüllt n_S die charakteristische Eigenschaft von S, d.h. $n_S \in S$.Widerspruch.

Kardinalitäten

Definition: Eine Menge M heißt nicht abzählbar oder überabzählbar, wenn M nicht abzählbar ist.

Beispiele:

$(0, 1)$

$\mathbb{R}$

$\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$

Kardinalitäten

Mann kann zeigen, daß nicht alle überabzählbaren Mengen die gleiche Mächtigkeit besitzen.

Es gibt überabzählbar viele verschiedene überabzählbare Mächtigkeiten:

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))$

...

Kardinalitäten

Gleichmächtigkeitsrelation $A \equiv B$ gdw. $\exists f : A \rightarrow B$ bijektiv

- Äquivalenzrelation

- Kardinalität: charakt. Eigenschaft der Äquivalenzklassen

endliche Kardinalitäten: 0, 1, 2, 3, 4, ...

unendliche Kardinalitäten:

$\aleph_0$: Kardinalität der unendlichen abzählbaren Mengen

$\mathfrak{c}$: Kardinalität der reellen Zahlen

Mathematisches Beweisen

Mathematische Aussagen Theoremen (Sätzen, Lemmata, Korollare).

Mathematische Beweis:

- ermöglicht die vollständige Überprüfung und Beurteilung eines in Frage stehenden Sachverhalts.
- hilft Irrtümer und Unklarheiten auszuräumen
- gibt Anlass zur andauernden Neubewertung des Sachverhalts:
    - macht die Hintergründe für die Gültigkeit eines Sachverhalts transparent
    - zeigt Grenzen und Verallgemeinerungsmöglichkeiten.

Mathematisches Beweisen

Mathematische Aussagen

- haben oft die Form: Wenn A, dann B.

- als Formel: $A \longrightarrow B$

Mathematisches Beweisen

Mathematische Aussagen

- haben oft die Form: Wenn A, dann B.
- als Formel: $A \longrightarrow B$

Mathematisches Beweis

- im Bezug auf einem vorgegebenen Axiomensystem
- mit Hilfe von Inferenzregeln

Mathematisches Beweisen

Mathematische Aussagen

- haben oft die Form: Wenn A, dann B.
- als Formel: $A \rightarrow B$

Mathematisches Beweis

- im Bezug auf einem vorgegebenen Axiomensystem
- mit Hilfe von Inferenzregeln

Ein mathematischer Sachverhalt kann nicht als absolute Wahrheit angesehen werden, sondern stets im Bezug auf dem vorgegebenen Axiomensystem / Inferenzregeln.

Mathematisches Beweis

Menge Form von Formeln

Axiomensystem: Menge Ax von Axiomen $\quad (Ax \subseteq \text{Form})$

Inferenzsystem: Menge R von Regeln der Form $\frac{P_1, \dots, P_n}{P}$

Beweis für Formel F: $\quad F_1, F_2, \dots, F_n$

wobei $F_n = F$, und

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$:

- entweder $F_i \in Ax$
- oder es gibt $i_1, \dots, i_k < i$ mit $\frac{F_{i_1}, \dots, F_{i_n}}{F_i} \in R$

Beispiele von Axiomensysteme / Inferenzregeln

Aussagenlogik

Abkürzungen (Definitionen)

$\neg p \equiv (p \rightarrow \text{false}) \quad p \wedge q \equiv \neg p \rightarrow q \quad p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$

Axiome

(A1) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

(A2) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

(A3) $\neg\neg p \rightarrow p$

Inferenzregeln

Modus Ponens (MP): $\frac{p, p \rightarrow q}{q}$

Beispiele von Axiomensysteme / Inferenzregeln

Aussagenlogik

Beispiel von formellem Beweis

Aussage: $a \rightarrow a$

Beweis:

$$(a \rightarrow ((b \rightarrow a) \rightarrow a)) \rightarrow (a \rightarrow (b \rightarrow a) \rightarrow (a \rightarrow a)) \qquad (A2)$$

$$a \rightarrow ((b \rightarrow a) \rightarrow a) \qquad (A1)$$

$$(a \rightarrow (b \rightarrow a)) \rightarrow (a \rightarrow a) \qquad (MP)$$

$$(a \rightarrow (b \rightarrow a) \qquad (A1)$$

$$a \rightarrow a \qquad (MP)$$

Beispiele von Axiomensysteme / Inferenzregeln

Gleichheitslogik

Axiome

(R) $a = a$

Inferenzregeln

(S) $$\frac{a=b}{b=a}$$

(T) $$\frac{a=b, b=c}{a=c}$$

(C) $$\frac{a_1=b_1,\ldots,a_n=b_n}{f(a_1,\ldots,a_n)=f(b_1,\ldots,b_n)}$$

Beispiele von Axiomensysteme / Inferenzregeln

Peano'sche Axiome der natürlichen Zahlen

Axiome:

(A1) 0 ist eine natürliche Zahl

(A2) Jede natürliche Zahl n hat einen Nachfolger $S(n)$

(A3) Aus $S(n) = S(m)$ folgt $n = m$

(A4) 0 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl

(A5) Jede Menge X, die 0 und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger $S(n)$ enthält, umfasst alle natürlichen Zahlen.

Grundlegenden Beweisstrategien

Mathematische Aussagen der Form $p \rightarrow q$

- Direkter Beweis:

  Annahme: p gilt. Benutze p, Axiome, und Inferenzregeln um zu beweisen q.

- Beweis durch Kontraposition:

  Beweis von $\neg q \rightarrow \neg p$.

- Beweis durch Widerspruch:

  Beweise daß $p \wedge \neg q \rightarrow \text{false}$

Grundlegenden Beweisstrategien

Mathematische Aussagen, die nicht die Form $p \rightarrow q$ haben.

- Äquivalenzbeweis ($p \leftrightarrow q$)
- Beweis durch Fallunterscheidung

Aussagen mit Quantoren

- $\forall x\, (p(x) \rightarrow q(x))$
- $\exists x\, (p(x) \rightarrow q(x))$
- $\forall x\, \exists y\, A(x, y)$
- ...