Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

Dualitätstheoretische Untersuchung des Einigungsbereichs von Optionsgeschäften auf unvollkommenen Märkten

Stefan Mirschel

Diskussionspapier 08/2006
Oktober 2006

Rechts- und Staatswissenschaftliche Fakultät

Wirtschaftswissenschaftliche
Diskussionspapiere

Anschrift
Dipl.-Wirtsch.-Ing. Stefan Mirschel
Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald
Rechts- und Staatswissenschaftliche Fakultät
Lehrstuhl für Allg. Betriebswirtschaftslehre und
Produktionswirtschaft
Friedrich-Loeffler-Str. 70
17489 Greifswald
Telefon: + 49(3834)86-2491
Fax: + 49(3834)86-2428
E-Mail: stemi@uni-greifswald.de

Dualitätstheoretische Untersuchung des Einigungsbereichs von Optionsgeschäften auf unvollkommenen Märkten

Stefan Mirschel

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

Aufl.	Auflage
bzw.	beziehungsweise
et al.	et alii
f.	folgende
ff.	fortfolgende
ggf.	gegebenenfalls
GPF	Grenzpreisfunktion
Hrsg.	Herausgeber
insb.	insbesondere
i. V. m.	in Verbindung mit
Jg.	Jahrgang
max.	maximiere
min.	minimiere
Nr.	Nummer
q. e. d.	quod erat demonstrandum
S.	Seite
u. d. N.	unter den Nebenbedingungen
vgl.	vergleiche
z. B.	zum Beispiel
ZGPM	Zustandsgrenzpreismodell

Symbolverzeichnis

Variablen, Konstanten und Parameter

a	Aktienkurs / Kurs des Basisguts
B	Ausübungspreis der Option
C_u	Optionszahlung im Zustand nach der Aufwärtsbewegung
C_d	Optionszahlung im Zustand nach der Abwärtsbewegung
d	Abwärtsfaktor
DP	Wert der dualen Grenzpreisfunktion
EK	Eigenkapital
en	Entnahme
ga	Geldanlage
GEN	Wert der gewichteten Entnahmen
gw	Eintrittswahrscheinlichkeit
k	Kaufmenge des Basisguts / der Aktie
v	(Leer-)Verkaufsmenge des Basisguts / der Aktie
ka	Kreditaufnahme
p	Grenzpreis
P	Grenzpreis
q	risikoloser Aufzinsungsfaktor
q_H	Haben-Aufzinsungsfaktor
q_S	Soll-Aufzinsungsfaktor
s	Zustand
u	Aufwärtsfaktor
WAR	Wert der ausgeschöpften Restriktionen
x_{EK}	mit dem Eigenkapital abgesicherte Aktienmenge eines Leerverkaufs- oder Kaufgeschäfts
x_O	mit den Optionszahlungen abgesicherte Aktienmenge eines Leerverkaufs- oder Kaufgeschäfts
δ	duale Strukturvariable der Mindestzielfunktionswertrestriktion
λ	duale Strukturvariable einer Liquiditätsrestriktion
ρ	endogener Abzinsungsfaktor

Deskriptoren

b	Bewertungsprogramm
K	Käufer
KO	Kaufoption
min	minimal
opt	optimal
S	Stillhalter
VO	Verkaufsoption

1 Bewertung von Optionen bei einheitlichem Zinssatz und Einigungspunkte

Optionen sind bedingte Handlungsmöglichkeiten. Deshalb wird der Umgang mit Optionen grundsätzlich von der Methodik der flexiblen Planung erfaßt,[1] und es lassen sich Optionswerte z. B. mit Hilfe des Zustandsgrenzpreismodells ermitteln, das auf der flexiblen Planung beruht. Dem steht die finanzierungstheoretische Ermittlung von Optionswerten unter Voraussetzung vollkommener und vollständiger Märkte gegenüber. Eine wesentliche Entwicklung dieses Theoriegebäudes ist das Modell von COX, ROSS und RUBINSTEIN.[2] Unter denselben Prämissen müssen sich jedoch die Ergebnisse beider Herangehensweisen entsprechen, insbesondere subjektive Wahrscheinlichkeiten müssen sich auch im Zustandsgrenzpreismodell durch kurs- und zinsabhängige Pseudowahrscheinlichkeiten ersetzen.[3]

Unter den Voraussetzungen, daß

- der Markt vollkommen und
- vollständig ist sowie
- der Aufwärtsfaktor u des Basiswerts größer und der Abwärtsfaktor d des Basiswerts kleiner als der risikolose Aufzinsungsfaktor q sind,

ergibt sich im einperiodigen Binomialmodell sowohl mit der Replikationsmethode von COX, ROSS und RUBINSTEIN als auch mit dem Zustandgrenzpreismodell folgender Grenzpreis P^{opt} für den Käufer und den Stillhalter einer Kaufoption und einer Verkaufsoption, wenn a den Aktienkurs und B den Ausübungspreis der Option symbolisieren:[4]

$$P^{opt} = \frac{1}{q} \cdot \left(\frac{q-d}{u-d} \cdot C_u + \frac{u-q}{u-d} \cdot C_d \right), \tag{1}$$

$$\text{wobei} \qquad C_u = \begin{cases} C_u^{KO} = \max\{u \cdot a - B; 0\} & \text{im Falle einer Kaufoption} \\ C_u^{VO} = \max\{B - u \cdot a; 0\} & \text{im Falle einer Verkaufsoption} \end{cases}$$

---

[1] Vgl. allgemein zur flexiblen Planung HART (1940), S. 56 ff., HAX (1970), S. 136 ff., HAX (1985), S. 165 ff., HAX/LAUX (1972), LAUX (2005), S. 283 ff. und S. 308 ff. Vgl. zur getroffenen Aussage BREUER (2001), S. 249 f., FISCHER et al. (1999), S. 1211 ff., GÖTZE (2006), S. 411, TRIGEORGIS (1996), S. 151.

[2] Vgl. COX et al. (1979), S. 232 ff.

[3] Vgl. BREUER (2001), S. 249 f., insb. Fußnote 15 auf S. 150, FISCHER et al. (1999), S. 1211 ff., TEISBERG (1995), S. 32.

[4] Vgl. COX et al. (1979), S. 232 ff., zur Abbildung im Zustandsgrenzpreismodell vgl. HERING (2006), S. 247 ff.

$$\text{und} \quad C_d = \begin{cases} C_d^{KO} = \max\{d \cdot a - B; 0\} & \text{im Falle einer Kaufoption} \\ C_d^{VO} = \max\{B - d \cdot a; 0\} & \text{im Falle einer Verkaufsoption} \end{cases}$$

Die Faktoren $\frac{q-d}{u-d}$ und $\frac{u-q}{u-d}$ werden auch als Pseudowahrscheinlichkeiten bezeichnet, da sie an die Stelle subjektiver Wahrscheinlichkeiten treten und sich insbesondere zu 1 addieren.[5]

Ein Einigungsbereich zwischen dem Stillhalter und dem Optionskäufer ist immer dann gegeben, wenn der Grenzpreis des Käufers $P^{K,opt}$ (Preisobergrenze), dem Grenzpreis des Stillhalters $P^{S,opt}$ (Preisuntergrenze), mindestens entspricht; wenn also gilt:

$$P^{K,opt} \geq P^{S,opt} \tag{2}$$

Wie sich zeigt, besteht der Einigungsbereich auf dem vollkommenen und vollständigen Kapitalmarkt aus genau einem einzigen Grenzpreis. Ein solches Fall sei im folgenden stets als Einigungspunkt bezeichnet. Vom Einigungsbereich sei nur noch dann gesprochen, wenn tatsächlich ein Intervall möglicher Grenzpreise existiert.

Die Ermittlung der Grenzpreise beruht letztlich auf der Konstruktion eines Replikationsportfolios (Hedging-Portfolio), mit dem die Optionszahlungsströme durch Geldanlage und Leerverkauf der Aktie oder Kreditaufnahme und Kauf der Aktie nachgebildet werden. Der Käufer (Stillhalter) einer Kaufoption (Verkaufsoption) repliziert die Zahlungsströme durch einen Leerverkauf verbunden mit einer Geldanlage. Hingegen besteht das Replikationsportfolio eines Stillhalters (Käufers) einer Kaufoption (Verkaufsoption) aus einem kreditfinanzierten Aktienkauf. In beiden Fällen jedoch wird die Aktienmenge und die Geldanlage oder Kreditaufnahme dadurch begrenzt, daß im Zustand nach der Aufwärtsentwicklung des Basisguts (im folgenden stets der Zustand eins) der Verlust aus einem Leerverkaufsgeschäft oder einem kreditfinanzierten Kaufgeschäft gerade noch durch die Optionszahlung und das angelegte Kapital gedeckt werden kann.

Die Grenzpreisfunktion (1) basiert auf einem einheitlichen Zinssatz, wodurch sich die Grenzpreise eines Optionskäufers und eines Stillhalters genau entsprechen. Die Annahme einheitlicher Zinssätze ist allerdings wenig realitätsnah. In der Realität sind ggf. nur gering differierende Soll- und Habenzinssätze vorzufinden.

---

[5] Vgl. COX et al. (1979), S. 235 f.

2 Einigungslücken bei gespaltenem Zinssatz

Vorab wird die Prämisse gesetzt, daß der Soll-Zinssatz für Kredite höher als der Haben-Zinssatz für Geldanlagen ist. Außerdem muß gelten, daß der Aufwärtsfaktor u größer als der Soll-Aufzinsungsfaktor q_S und der Abwärtsfaktor d kleiner als der Haben-Aufzinsungsfaktor q_H ist.

Die Einführung eines gespaltenen Zinssatzes verändert den bei Optionskäufer und Stillhalter anzusetzenden Diskontierungszinssatz, denn je nach Replikationsportfolio ist einmal eine Geldanlage zum Aufzinsungsfaktor oder eine Kreditaufnahme zum Aufzinsungsfaktor q_S das Grenzobjekt der Bewertung.

Im Falle der *Kaufoption* gilt mithin für die Bewertung der Kaufoption für den Käufer q_H und für den Stillhalter q_S. Der Grenzpreis des Käufers (K) berechnet sich somit nach:

$$P^{opt,K} = \frac{1}{q_H} \cdot \left(\frac{q_H - d}{u - d} \cdot C_u^{KO} + \frac{u - q_H}{u - d} \cdot C_d^{KO} \right) \tag{3}$$

Für den mindestens vom Stillhalter (S) zu fordernden Preis gilt hingegen:

$$P^{opt,S} = \frac{1}{q_S} \cdot \left(\frac{q_S - d}{u - d} \cdot C_u^{KO} + \frac{u - q_S}{u - d} \cdot C_d^{KO} \right) \tag{4}$$

Eine Gleichsetzung der beiden Funktionen beweist, daß die Preisuntergrenze des Stillhalters $P^{opt,S}$ größer als die maximale Zahlungsbereitschaft des Optionskäufers $P^{opt,K}$ ist (siehe dazu den Anhang A). Ein solcher Fall sei im folgenden stets als Einigungslücke bezeichnet. Ein Optionsgeschäft ist also bei gespaltenem Zinssatz und sonst gegenüber dem vollkommenen und vollständigen Markt unveränderten Prämissen wegen eines fehlenden Einigungsbereichs für die Kaufoption unmöglich.

Daß bei gespaltenem Zinssatz unterschiedliche Grenzpreise für Käufer und Stillhalter gelten, haben bereits COX, ROSS und RUBINSTEIN erwähnt, geben jedoch keine genauere Interpretation.[6] BERGMANN gelangt für ein zeitstetiges Optionsmodell ebenfalls zu diesem Ergebnis.[7] Allerdings ist seine Interpretation schlicht falsch, daß es sich bei der Einigungslücke um ein „Arbitrageband" handelt, worin ein (oder gar der) Gleichgewichtspreis liegt. Es kann im Falle einer Einigungslücke keinen Gleichgewichtspreis für die Option geben, weil kein Handel zustande kommt. Darauf weist auch KORN hin,[8] der außerdem zeigt, daß für einen bestimmten (neuen) Optionstyp mit speziellen Optionszahlungen die Grenzpreise dennoch übereinstimmen können.[9] Hier soll jedoch

6 Vgl. COX et al. (1979), S. 262.

7 Vgl. BERGMANN (1995), S. 481 ff. i. V. m. S. 487.

8 Vgl. KORN (1995), S. 273.

9 Vgl. KORN (1995), S. 267 ff. und 272 f.

der „klassische" Optionstyp untersucht werden. KANE und MELNIKOV irren hingegen bei der Zielfunktion des Käufers. Nach Meinung der Autoren muß der Käufer die minimale Zahlung ermitteln, für die er am Markt die Option gerade noch kaufen kann.[10] Dadurch wird aber lediglich die niedrigste Preisuntergrenze mehrerer potentieller Stillhalter, im hier beschriebenen Fall also die Preisuntergrenze des einen Stillhalters bestimmt. Dessen Preisuntergrenze ist aber grundsätzlich nicht die Preisobergrenze des Käufers, auch wenn sich die Grenzpreise unter bestimmten Voraussetzungen entsprechen können.

Im Falle der *Verkaufsoption* wurde zuvor festgestellt, daß nun der Optionskäufer ein Replikationsportfolio aus Aktienkauf und Kreditaufnahme aufweist. Der Stillhalter hingegen kann die Optionszahlungen durch einen Leerverkauf und eine Geldanlage replizieren. Somit gilt für die Bewertung der Verkaufsoption für den Käufer der Habenzinssatz und für den Stillhalter der Sollzinssatz. Die maximale Zahlungsbereitschaft für den Käufer (K) berechnet sich demnach wie folgt:

$$P^{opt,K} = \frac{1}{q_S} \cdot \left(\frac{q_S - d}{u - d} \cdot C_u^{VO} + \frac{u - q_S}{u - d} \cdot C_d^{VO} \right) \tag{5}$$

Hingegen berechnet sich die Preisuntergrenze des Stillhalters (S) anhand:

$$P^{opt,S} = \frac{1}{q_H} \cdot \left(\frac{q_H - d}{u - d} \cdot C_u^{VO} + \frac{u - q_H}{u - d} \cdot C_d^{VO} \right) \tag{6}$$

Auch hier läßt sich mit einer Gegenüberstellung der beiden Grenzpreise beweisen, daß es keinen Einigungsbereich zwischen Optionskäufer und Stillhalter gibt (siehe dazu Anhang B). Die Preisuntergrenze des Stillhalters liegt über der Preisobergrenze des Käufers.

Um Optionsgeschäfte bei gespaltenen Zinssätzen erklären zu können, bedarf es offensichtlich einer Modellerweiterung. Im folgenden wird dazu wenigstens eines der beiden Bewertungssubjekte mit Eigenkapital ausgestattet.

[10] Vgl. KANE/MELNIKOV (2005), S. 6.

3 Einigungspunkte und -bereiche bei gegebenem Eigenkapital

3.1 Basisprogramm

Die Einigungslücke wird von den unterschiedlichen Grenzobjekten und deren unterschiedlichen Zinssätzen hervorgerufen.[11] Soll dennoch die Bewertung bei Optionskäufer und Stillhalter zu einem Einigungsbereich oder -punkt führen, dann müssen die Grenzobjektunterschiede aufgehoben werden. Das gilt auch auf vollkommenen Märkten, auf denen diese Anforderung durch die Annahme eines einheitlichen Zinssatzes erfüllt wird. Auf Märkten mit gespaltenen Zinssätzen kann sie erfüllt werden, in dem die Kreditaufnahme zur Finanzierung von Aktienkäufen oder umgekehrt die Geldanlage bei Leerverkäufen umgangen wird. Da dies letztlich nur durch vorhandenes Eigenkapital möglich ist, muß die Existenz subjektiv gegebenen Eigenkapitals vorausgesetzt werden. Auf vollkommenen Märkten spielen Eigenkapitalausstattungen für die Bewertung keine Rolle,[12] was aber nicht auf unvollkommenen Märkten gilt.[13]

Für die Bewertung von Optionen unter Berücksichtigung von Eigenkapital wird im folgenden das bereits erwähnte Zustandsgrenzpreismodell (kurz ZGPM) eingesetzt. Es ist ein von HERING entwickeltes Entscheidungsmodell, das auf dem WEINGARTNER-HAX-Modell zur linearen Investitionsprogrammplanung und den Bewertungsansätzen nach LAUX/FRANKE, JAENSCH und MATSCHKE sowie dem Prinzip der flexiblen Planung beruht.[14]

Zunächst muß ein Basisprogramm aufgestellt werden, mit dessen Hilfe ein Subjekt seinen Investitions- und Finanzierungsplan vor dem Kauf der Option optimiert.[15] Als Zielfunktion wird die Summe der mit den subjektiven Eintrittswahrscheinlichkeiten gewichteten Entnahmen en in den drei Zuständen maximiert.[16] Im einperiodigen Binomialfall kann diese Zielsetzung zu einer Maximierung der Entnahme in Zustand null oder einer Maximierung des Erwartungswerts der zustandsspezifischen Endvermögen führen. Insbesondere bei mehrperiodigen Modellen unter Unsicherheit wird durch diese Zielsetzung das sogenannte Flaschenhalsproblem vermieden.[17] Die Maximierung

---

11 Vgl. auch KORN (1995), S. 261.

12 Vgl. zur FISHER-Separation z. B. FRANKE/HAX (2004), S. 154 f.

13 Vgl. zum HIRSHLEIFER-Modell z. B. FRANKE/HAX (2004), S. 158 ff. Die Autoren zeigen, daß bei gleich hohen Transaktionskosten für alle Finanzierungstitel die Irrelevanz der Finanzierung auch auf unvollkommenen Märkten gilt. Vgl. FRANKE/HAX (2004), S. 162 f.

14 Vgl. HERING (2006), S. 43 ff. Das Grundmodell zur linearen Investitionsprogrammplanung geht auf WEINGARTNER und HAX zurück. Vgl. WEINGARTNER (1974), S. 139 ff., HAX (1964) S. 435 ff. Zum zweistufigen Vorgehen von JAENSCH und MATSCHKE vgl. u. a. JAENSCH (1966), S. 138 f. und MATSCHKE (1969), S. 59. Zum Modell von LAUX und FRANKE vgl. LAUX/FRANKE (1969), S. 210 ff. Zur flexiblen Investitionsplanung vgl. ausführlich INDERFURTH (1982).

15 Die Begriffe des Basis- und später des Bewertungsprogramms gehen auf MATSCHKE zurück. Vgl. MATSCHKE (1969), S. 59. Zum Vorgehen der Bewertung mit Basis- und Bewertungsprogramm vgl. MATSCHKE/BRÖSEL (2005), S. 124 ff.

16 Vgl. zur Begründung dieser Zielfunktion HERING (2003), S. 57 f.

17 Vgl. dazu KLINGELHÖFER (2003), S. 286.

uniformer Entnahmeströme führt nämlich unter Unsicherheit dazu, daß der entnahmeschwächste Zustand die Entnahmehöhe auch aller anderen Zustände bestimmt, weshalb entnehmbare Gelder schlimmstenfalls verfallen. Die Zielfunktion lautet somit:

$$\text{max. GEN;} \qquad GEN := en_0 + gw_1 \cdot en_1 + gw_2 \cdot en_2$$

$$\text{mit } gw_1 + gw_2 = 1 \text{ und } gw_1, gw_2 \geq 0 \tag{7}$$

Das Restriktionssystem besteht aus den Liquiditätsnebenbedingungen der drei Zustände. Sie stellen sicher, daß zu keinem Zeitpunkt die Liquidität von null unterschritten wird. Im Zustand null muß die Summe aus der Entnahme en, der Geldanlage ga und dem bereits grundsätzlich möglichen Kauf k der später als Basisobjekt betrachteten Aktie A zum Kurs a kleiner oder gleich der Geldaufnahme ka, dem Leerverkauf v der Aktie A zum Kurs a und dem gegebenen Eigenkapital sein. In den Zuständen eins und zwei werden die Geldanlage und der Kredit multipliziert mit dem Aufzinsungsfaktor q_H bzw. q_S zurückgezahlt. Im Zustand eins werden außerdem die im Zustand null gekauften (leerverkauften) Aktien zum um den Faktor u gestiegenen Kurs wieder verkauft (gekauft). Im Zustand zwei erfolgt das Gleiche, allerdings zu dem um den Faktor d gesunkenen Aktienkurs. In den Zuständen eins und zwei gibt es jedoch kein zusätzlich zu berücksichtigendes Eigenkapital. Der Saldo aus Geld- und Aktiengeschäften sowie der Entnahme en muß somit im Zustand null kleiner oder gleich dem Eigenkapital und in allen anderen Zuständen kleiner oder gleich null sein. Somit gilt folgendes Restriktionssystem:

$$en_0 + ga_0 - ka_0 + a \cdot k_0 - a \cdot v_0 \leq EK^{K,S} \tag{8}$$

$$en_1 - q_H \cdot ga_0 + q_S \cdot ka_0 - u \cdot a \cdot k_0 + u \cdot a \cdot v_0 \leq 0 \tag{9}$$

$$en_2 - q_H \cdot ga_0 + q_S \cdot ka_0 - d \cdot a \cdot k_0 + d \cdot a \cdot v_0 \leq 0 \tag{10}$$

$$en_0, en_1, en_2, ga_0, ka_0, k_0, v_0 \geq 0 \tag{11}$$

Jedes lineare primale Problem kann auch als duales Problem formuliert werden.[18] Besitzt das primale Problem eine endliche optimale Lösung GEN^{opt}, so besitzt auch das duale Problem eine endliche optimale Lösung WAR^{opt} und die Zielfunktionswerte sind gleich groß. Das Dualproblem minimiert den Wert der ausgeschöpften Restriktionen und sichert somit die beste Verwendung der knappen Ressourcen. Die dualen Strukturvariablen geben den Wert der primalen Restriktionen an. Das Dualproblem ermöglicht eine wesentlich tieferreichende Interpretation des Zielfunktionswertes im Optimum. Das duale Basisprogramm lautet mit λ als dualen Strukturvariablen, die mit den primalen Liquiditätsrestriktionen korrespondieren:

$$\text{min. WAR;} \qquad WAR = EK^{K,S} \cdot \lambda_0 \tag{12}$$

---

[18] Vgl. allgemein zur Dualitätstheorie und den darauf aufbauenden Ausführungen z. B. HILLIER/LIEBERMAN (1997), S. 125 ff.

u. d. N.

$$\lambda_0 \geq 1 \tag{13}$$

$$\lambda_0 - q_H \cdot \lambda_1 - q_H \cdot \lambda_2 \geq 0 \tag{14}$$

$$-\lambda_0 + q_S \cdot \lambda_1 + q_S \cdot \lambda_2 \geq 0 \tag{15}$$

$$a \cdot \lambda_0 - u \cdot a \cdot \lambda_1 - d \cdot a \cdot \lambda_2 \geq 0 \tag{16}$$

$$-a \cdot \lambda_0 + u \cdot a \cdot \lambda_1 + d \cdot a \cdot \lambda_2 \geq 0 \tag{17}$$

$$\lambda_s \geq gw_s \qquad \forall s \in \{0,1,2\} \tag{18}$$

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \tag{19}$$

Kennzeichen einer marktorientierten Bewertung ist die scheinbare Unabhängigkeit der Grenzpreisfunktion von subjektiven Wahrscheinlichkeiten. Um dies sicherzustellen, muß als weitere Prämisse der subjektive Erwartungswert der Aktienkursveränderung $gw_1 \cdot u + gw_2 \cdot d$ entweder kleiner als der Haben-Aufzinsungsfaktor q_H oder größer als der Soll-Aufzinsungsfaktor q_S sein. Ist die erwartete Aktienkursveränderung kleiner q_H, dann lohnt es im Basisprogramm, mit dem Eigenkapital einen Leerverkauf abzusichern. In diesem Falle erfolgt in Zustand zwei eine Entnahme, denn im Zustand eins wird der Verlust aus dem Leerverkaufsgeschäft durch das verzinste Eigenkapital genau ausgeglichen. Sollte hingegen die erwartete Aktienkursveränderung größer q_S sein, dann wird das Eigenkapital zur Deckung des Verlusts aus einem kreditfinanzierten Aktienkauf in Zustand zwei benötigt, so daß eine Entnahme im Zustand eins erfolgt. Liegt die erwartete Aktienkursveränderung aber zwischen q_H und q_S, dann führt ein Leerverkaufsgeschäft zu einem schlechteren Zielwert als der ausschließlich eigenkapitalfinanzierte Kauf von Aktien. Ein darüber hinausgehendes kreditfinanziertes Kaufgeschäft lohnt aber nicht, weil die erwartete Rendite des Kaufgeschäfts unter dem Sollzinssatz liegt. In diesem Falle wären ausschließlich die subjektiven Erwartungen und Eigenkapitalausstattungen maßgeblich und marktorientierte Diskontierungsfaktoren gar nicht möglich.

Marktorientierte Diskontierungsfaktoren sind bereits im Basisprogramm unter der soeben gesetzten Prämisse vorzufinden. Unter den Voraussetzungen,[19] daß

- eine endliche Lösung des primalen Bewertungsprogramms existiert,
- in keinem Zustand Geld mit null bewertet wird, weil es in unbegrenzter Höhe zu einem nichtnegativen Zinssatz angelegt werden kann und daher

[19] Vgl. zu den Voraussetzungen HERING (2003), S. 147 f.

- jedem Geldbetrag in den Zuständen in einer Partialbetrachtung ein positiver Wert beigemessen wird,

stellen die Dualvariablen der Liquiditätsrestriktionen den zustandsbezogenen Wert des Geldes dar. Im Falle eines Leerverkaufsgeschäfts (wenn die erwartete Aktienkursveränderung kleiner q_H ist), wird wegen der Komplementaritätsbedingungen zwischen primaler Strukturvariable und korrespondierender dualer Restriktion die Ungleichung (14) als Gleichung erfüllt:

$$q_H \cdot \lambda_1 + q_H \cdot \lambda_2 = \lambda_0 \tag{20}$$

Die Restriktionen (16) und (17) lassen sich zusammenfassen zu:

$$u \cdot \lambda_1 + d \cdot \lambda_2 = \lambda_0 \tag{21}$$

Wird Gleichung (21) nach λ_2 umgestellt und in Gleichung (20) eingesetzt sowie der resultierende Ausdruck nach λ_0 umgeformt, dann ergibt sich:

$$\lambda_0 = \lambda_1 \cdot q_H \cdot \frac{u - d}{q_H - d} \tag{22}$$

Der zwischen dem Zustand eins und null gültige Diskontierungsfaktor $\rho_{1,0}$ ermittelt sich anhand der Division von λ_1 durch λ_0:[20]

$$\rho_{1,0} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{1}{q_H} \cdot \frac{q_H - d}{u - d} \tag{23}$$

Entsprechend läßt sich für den Diskontierungsfaktor $\rho_{2,0}$ folgendes errechnen:

$$\rho_{2,0} = \frac{\lambda_2}{\lambda_0} = \frac{1}{q_H} \cdot \frac{u - q_H}{u - d} \tag{24}$$

Die Diskontierungsfaktoren enthalten also die marktorientierten Pseudowahrscheinlichkeiten.

Erfolgt ein kreditfinanziertes Aktienkaufgeschäft, weil die erwartete Aktienkursveränderung größer als q_S ist, dann ist wegen der Komplementaritätsbedingungen zwischen primaler Strukturvariable und korrespondierender dualer Restriktion statt Restriktion (14) nun Restriktion (15) als Gleichung erfüllt. Da dies die einzige Änderung bleibt, muß bei den Diskontierungsfaktoren (23) und (24) lediglich q_H durch q_S ersetzt werden.

---

[20] Vgl. zu zustandsabhängigen Diskontierungsfaktoren WEINGARTNER (1974), S. 24 ff. und HAX (1964), S. 439 ff.

Bei gespaltenem Zinssatz nehmen die subjektiven Wahrscheinlichkeiten somit mittelbar Einfluß, obgleich die Diskontierungsfaktoren unmittelbar frei von ihnen sind. In Abhängigkeit der subjektiv erwarteten Aktienkursveränderung gilt für die theoretisch richtige Diskontierung der Haben- oder der Soll-Aufzinsungsfaktor.

3.2 Einigungspunkte bei einer erwarteten Aktienkursveränderung kleiner als der Haben-Aufzinsungsfaktor

3.2.1 Grenzpreisfunktion und Mindesteigenkapital für den Stillhalter einer Kaufoption

Für die Bewertung einer Kaufoption aus Sicht des Stillhalters müssen deren Zahlungskonsequenzen in einem Bewertungsprogramm berücksichtigt werden.[21] In diesem Programm ist die minimal zu fordernde Zahlung P, mithin die Preisuntergrenze, für den Verkauf der Kaufoption gesucht. Bei der Grenzpreisermittlung ist der alte Zielfunktionswert der gewichteten Entnahmen mindestens einzuhalten, damit sich das Subjekt nicht schlechter stellt als im Basisprogramm.[22]

Die Eigenkapitalausstattung bleibt im Bewertungsprogramm eines Stillhalters natürlich erhalten, so daß sich im Falle einer Kaufoption folgendes Bewertungsprogramm für den Stillhalter ergibt:

$$\max.\, P^S; \quad P^S := -p \tag{25}$$

u. d. N.

$$en_0 + ga_0 - ka_0 + a \cdot k_0 - a \cdot v_0 - p \leq EK^S \tag{26}$$

$$en_1 - q_H \cdot ga_0 + q_S \cdot ka_0 - u \cdot a \cdot k_0 + u \cdot a \cdot v_0 \leq -C_u^{KO} \tag{27}$$

$$en_2 - q_H \cdot ga_0 + q_S \cdot ka_0 - d \cdot a \cdot k_0 + d \cdot a \cdot v_0 \leq -C_d^{KO} \tag{28}$$

$$-en_0 - gw_1 \cdot en_1 - gw_2 \cdot en_2 \leq -GEN^{opt} \tag{29}$$

$$ga_0, ka_0, k_0, v_0 \geq 0 \tag{30}$$

Sofern ein Grenzpreis p größer null existiert, entsprechen sich die Zielfunktionswerte des primalen und dualen Bewertungsprogramms. Das duale Bewertungsprogramm lautet mit δ als dualer Strukturvariable, die mit der primalen Restriktion (29) korrespondiert:

$$\min.\, DP^S; \qquad DP^S := EK^S \cdot \lambda_0^b - C_u^{KO} \cdot \lambda_1^b - C_d^{KO} \cdot \lambda_2^b - GEN^{opt} \cdot \delta^b \tag{31}$$

---

[21] Zum Begriff des Bewertungsprogramms vgl. MATSCHKE (1969), S. 59.

[22] Vgl. MATSCHKE (1975), S. 250 ff.

u. d. N.

$$\lambda_0^b \geq 1 \tag{32}$$

$$\lambda_0^b - q_H \cdot \lambda_1^b - q_H \cdot \lambda_2^b \geq 0 \tag{33}$$

$$-\lambda_0^b + q_S \cdot \lambda_1^b + q_S \cdot \lambda_2^b \geq 0 \tag{34}$$

$$a \cdot \lambda_0^b - u \cdot a \cdot \lambda_1^b - d \cdot a \cdot \lambda_2^b \geq 0 \tag{35}$$

$$-a \cdot \lambda_0^b + u \cdot a \cdot \lambda_1^b + d \cdot a \cdot \lambda_2^b \geq 0 \tag{36}$$

$$\lambda_s^b - gw_s \cdot \delta^b \geq 0 \qquad \forall s \in \{0,1,2\} \tag{37}$$

$$\lambda_0^b, \lambda_1^b, \lambda_2^b \geq 0 \tag{38}$$

In Abschnitt eins wurde dargelegt, daß sich die Zahlungsstruktur der Kaufoption aus Sicht des Stillhalters mit dem kreditfinanzierten Kauf einer bestimmten Aktienmenge replizieren läßt, wenn kein Eigenkapital vorhanden ist. Im Basisprogramm wird mit dem Eigenkapital ein Leerverkaufsgeschäft abgesichert, so daß es nunmehr bereits ausreichend sein kann, lediglich dieses Leerverkaufsgeschäft zu reduzieren. Dennoch ist es nicht auszuschließen, daß die Reduktion nicht ausreicht und ein Aktienkauf zur Replikation der Optionszahlungsstruktur notwendig wird. Trotzdem kann selbst dann noch das vorhandene Eigenkapital ausreichen, eine Kreditfinanzierung und somit den Grenzobjektwechsel zu verhindern. Es wird somit davon ausgegangen, daß beim Stillhalter im Bewertungsprogramm weiterhin eine Geldanlage erfolgt. Daher ist die Restriktion (33) als Gleichung erfüllt und zusammen mit den Restriktionen (35) sowie (36) ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$q_H \cdot \lambda_1^b + q_H \cdot \lambda_2^b = \lambda_0^b \tag{39}$$

$$u \cdot \lambda_1^b + d \cdot \lambda_2^b = \lambda_0^b \tag{40}$$

Existiert ein endlicher positiver Grenzpreis, dann ist Restriktion (32) als Gleichung erfüllt, und daher ist $\lambda_0^b = 1$. Die Dualvariablen der Liquiditätsrestriktionen entsprechen daher den Diskontierungsfaktoren. Wird Gleichung (39) nach λ_2^b umgestellt und der resultierende Ausdruck in Gleichung (40) eingesetzt, dann ergeben sich nach einigen Umformungen für λ_1^b und λ_2^b die gleichen Pseudowahrscheinlichkeiten wie in den Gleichungen (23) und (24).

In der dualen Zielfunktion sind aber noch der Eigenkapitalterm und der mit δ^b multiplizierte Mindestzielfunktionswert des Basisprogramms vorhanden. Sie heben sich gegenseitig auf, was durch die Gültigkeit der folgenden Gleichung zu beweisen ist:

$$EK^{S} \cdot \lambda_0^b - GEN^{opt} \cdot \delta^b = 0 \tag{41}$$

Wird für den optimalen Zielfunktionswert des Basisprogramms dessen duale Entsprechung eingesetzt, dann gilt:

$$EK^{S} \cdot \lambda_0^b - EK^{S} \cdot \delta^b \cdot \lambda_0 = 0 \tag{42}$$

Zu beachten ist, daß nach wie vor nur im Zustand zwei eine Entnahme erfolgt. Dann ist die duale Restriktion (37), die mit der primalen Strukturvariable en_2 korrespondiert, als Gleichung erfüllt und läßt sich nach δ^b umstellen:

$$\delta^b = \frac{\lambda_2^b}{gw_2} \tag{43}$$

Sowohl im Basis- als auch im Bewertungsprogramm läßt sich aus den Gleichungen (20) und (21) sowie (39) und (40) der folgende Zusammenhang für $\lambda_0^{(b)}$ schlußfolgern:

$$\lambda_0^{(b)} = \lambda_2^{(b)} \cdot q_H \cdot \frac{u-d}{u-q_H} \tag{44}$$

Im Basisprogramm war ebenfalls nur eine Entnahme im Zustand zwei möglich, so daß die Restriktion (18) im Zustand zwei als Gleichung erfüllt ist:

$$\lambda_2 = gw_2 \tag{45}$$

Werden die Gleichungen (43) bis (45) in die zu beweisende Gleichung (42) eingesetzt, dann gilt:

$$EK^{S} \cdot \left(q_H \cdot \lambda_2^b \cdot \frac{u-d}{u-q_H} - \frac{\lambda_2^b}{\lambda_2} \cdot q_H \cdot \lambda_2 \cdot \frac{u-d}{u-q_H} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0 \qquad \text{q. e. d.} \tag{46}$$

Somit gilt für den Grenzpreis im Optimum:

$$P^{S,opt} = -DP^{S,opt} = \frac{1}{q_H} \cdot \left(\frac{q_H - d}{u-d} \cdot C_u^{KO} + \frac{u-q_H}{u-d} \cdot C_d^{KO} \right) \tag{47}$$

Der Grenzpreis des Stillhalters der Kaufoption entspricht bei gegebener Eigenkapitalausstattung der Gleichung (3) und daher genau dem Grenzpreis des Optionskäufers, sofern das Eigenkapital den Grenzobjektwechsel zur Kreditaufnahme verhindert. Es existiert ein Einigungspunkt, wenn auch der Käufer eine Aktienkursveränderung kleiner q_H erwartet.[23] Somit ist trotz gespaltenem Zinssatz ein Optionsgeschäft möglich.

[23] Wozu die Aufhebung dieser Prämisse führen kann, wird in Unterkapital 3.5 erörtert.

Ferner zeigt sich, daß das Eigenkapital bei der Bewertung der Option keine unmittelbare Bedeutung besitzt, da es in der Grenzpreisfunktion nicht vorkommt. Allerdings hat es mittelbare Bedeutung, denn ohne Eigenkapital gilt statt der Grenzpreisfunktion (47) die Funktion (4).

Besonders interessant ist dasjenige Mindesteigenkapital, bei dem die Optionsbewertung mit dem Habenzinssatz gerade noch möglich ist. Es läßt sich mit Hilfe der Geldanlagehöhe im Bewertungsprogramm ermitteln, die dann genau null betragen muß. Sie ergibt sich aus der durch das Eigenkapital ermöglichten und mit dem Aktienkurs im Zustand null bewerteten Leerverkaufsmenge zuzüglich des Eigenkapitals selbst und des mindestens zu fordernden Grenzpreises sowie abzüglich der zur Optionszahlungsreplikation notwendigen Reduktion der Leerverkaufsmenge, die mit dem Aktienkurs im Zustand null bewertet wird:

$$ga_0^b = 0 = x_{EK} \cdot a + EK^{S,min} + p - x_O \cdot a \tag{48}$$

Im Zustand eins wird der Aktienkauf zur Bedienung des Leerverkaufs exakt durch das aufgezinste Eigenkapital sowie die aufgezinste Einzahlung aus dem Leerverkauf im Zustand null finanziert, wodurch sich die durch das Eigenkapital ermöglichte Leerverkaufsmenge berechnen läßt:

$$x_{EK} \cdot u \cdot a - \left(x_{EK} \cdot a + EK^{S,min}\right) \cdot q_H = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{EK} \cdot a = EK^{S,min} \cdot \frac{q_H}{u - q_H} \tag{49}$$

Für den Grenzpreis p gilt Gleichung (47). Für die Reduktion der Aktienleerverkaufsmenge vom Basis- zum Bewertungsprogramm muß gelten, daß die Differenz zwischen der durch den Verkauf der zur Optionszahlungsreplikation notwendigen Aktienmenge und der Optionsauszahlung im Zustand eins einer entsprechenden Differenz im Zustand zwei entspricht:[24]

$$x_O \cdot u \cdot a - C_u^{KO} = x_O \cdot d \cdot a - C_d^{KO} \quad \Leftrightarrow \quad x_O \cdot a = \frac{C_u^{KO} - C_d^{KO}}{u - d} \tag{50}$$

Werden die einzelnen Terme in Gleichung (48) durch die entsprechenden Ergebnisse der Gleichungen (47), (49) und (50) substituiert und der resultierende Term nach $EK^{S,min}$ umgestellt, dann gilt für das Mindesteigenkapital des Stillhalters:

$$EK^{S,min} = \frac{1}{q_H} \cdot \frac{u - q_H}{u - d} \cdot \left(\frac{d}{u} \cdot C_u^{KO} - C_d^{KO}\right) \tag{51}$$

Das Eigenkapital muß also mindestens so hoch sein wie die in den Zustand null diskontierte, mit der Pseudowahrscheinlichkeit des Zustands zwei gewichtete Differenz

[24] Diese Gleichung beruht auf den beiden Bestimmungsgleichungen eines Replikationsportfolios (vgl. COX et al. (1979), S. 233), die jeweils nach null umgestellt und gleichgesetzt werden. Die in beiden Gleichungen identisch vorzufindende Höhe der Geldanlage subtrahiert sich zu null.

zwischen der mit dem Quotienten aus Ab- und Aufwärtsfaktor multiplizierten Optionszahlung im Zustand eins und der Optionszahlung im Zustand zwei. Solange das Eigenkapital höher ist als EK^{min} findet ein Optionsgeschäft statt, weil ein Einigungspunkt existiert.

Sollte das Eigenkapital aber niedriger sein, dann erfolgt statt einer Geldanlage eine Kreditaufnahme. In diesem Falle heben sich in Gleichung (31) der erste und letzte Term nicht mehr vollständig auf, denn im Basisprogramm gilt zwar der Habenzinssatz, im Bewertungsprogramm nun jedoch der Sollzinssatz. Die Grenzpreisfunktion lautet dann:

$$P^{S,opt} = \frac{1}{q_S} \cdot \left(\frac{q_S - d}{u - d} \cdot C_u^{KO} + \frac{u - q_S}{u - d} \cdot C_d^{KO} \right) - EK^S \cdot \frac{u}{q_S} \cdot \frac{q_S - q_H}{u - q_H} \tag{52}$$

Weil der Haben- kleiner als der Sollzinssatz ist, ist der letzte zu subtrahierende (Eigenkapitalkorrektur-)Term stets positiv. Somit reduziert das Eigenkapital den Grenzpreis im Vergleich zu Gleichung (4) ohne Berücksichtigung von Eigenkapital. Der Korrekturterm gibt die Aufwertung des in gleicher Höhe vorhandenen Eigenkapitals zwischen Basis- und Bewertungsprogramm an, denn das Eigenkapital verstärkt die Möglichkeit, ein Leerverkaufsgeschäft zu finanzieren, das zu höheren erwarteten Einzahlungen als der zur Replikation der Optionszahlungen notwendige kreditfinanzierte Aktienkauf führt.

Je höher das Eigenkapital ausfällt, um so niedriger wird somit der vom Stillhalter mindestens zu fordernde Preis für die Option. Allerdings gilt diese Gleichung nur bis zu höchstens einem Eigenkapital von $EK^{S,min}$. Bei einem höheren Eigenkapital gibt es keinen Wechsel zur Kreditaufnahme, und Gleichung (47) bleibt die gültige Grenzpreisfunktion. Wird der zuvor ermittelte Zusammenhang (51) für $EK^{S,min}$ in die Gleichung (52) eingesetzt, dann resultiert nach wenigen Umstellungen die Gleichung (47), was die Gültigkeit der herausgefundenen Grenze für das Mindesteigenkapital bestätigt. Wird ein geringeres Eigenkapital als $EK^{S,min}$ angenommen, dann reicht der Eigenkapitalkorrekturterm in Gleichung (52) offensichtlich nicht aus, die in Anhang A bewiesene Lücke zwischen der Preisobergrenze des Optionskäufers und der Preisuntergrenze des Stillhalters zu schließen.

Somit läßt sich festhalten: Solange das Eigenkapital ausreicht, den Wechsel von der Geldanlage zur Kreditaufnahme beim Stillhalter zu unterbinden (also mindestens $EK^{S,min}$ beträgt), entsprechen sich die Grenzpreise von Optionskäufer und Stillhalter, wenn beide eine Aktienkursveränderung kleiner q_H erwarten, und es gibt einen Einigungspunkt. Liegt aber das Eigenkapital unter $EK^{S,min}$, dann findet wegen der Einigungslücke kein Optionshandel statt. Die Einigungslücke wird durch steigendes Eigenkapital jedoch kleiner, weil letzteres die Preisuntergrenze des Stillhalters absenkt.

3.2.2 Grenzpreisfunktion und Mindesteigenkapital für den Käufer einer Verkaufsoption

Im Falle einer Verkaufsoption hat der Käufer, wenn er über kein Eigenkapital verfügt, zur Replikation der Optionszahlungen ein kreditfinanziertes Leerverkaufsgeschäft getätigt. Mit Eigenkapital gilt nun aber folgendes Bewertungsprogramm für den Optionskäufer:

$$\max . P^K; \; P^K := p \tag{53}$$

u. d. N.

$$en_0 + ga_0 - ka_0 + a \cdot k_0 - a \cdot v_0 + p \leq EK^K \tag{54}$$

$$en_1 - q_H \cdot ga_0 + q_S \cdot ka_0 - u \cdot a \cdot k_0 + u \cdot a \cdot v_0 \leq C_u^{VO} \tag{55}$$

$$en_2 - q_H \cdot ga_0 + q_S \cdot ka_0 - d \cdot a \cdot k_0 + d \cdot a \cdot v_0 \leq C_d^{VO} \tag{56}$$

$$-en_0 - gw_1 \cdot en_1 - gw_2 \cdot en_2 \leq -GEN^{opt} \tag{57}$$

$$ga_0, ka_0, k_0, v_0 \geq 0 \tag{58}$$

Die Zielfunktion des dualen Bewertungsprogramms lautet dann:

$$DP^K := EK^K \cdot \lambda_0^b + C_u^{VO} \cdot \lambda_1^b + C_d^{VO} \cdot \lambda_2^b - GEN^{opt} \cdot \delta^b \tag{59}$$

Die dualen Restriktionen entsprechen denen des vorangegangenen Abschnitts, woraus sich auch dieselben Diskontierungsfaktoren ableiten lassen. Ebenfalls heben sich im Falle einer optimalen Lösung bei keinem Grenzobjektwechsel der erste und letzte Term der Grenzpreisfunktion auf. Die dazu notwendigen Rechenschritte gleichen denen des vorangegangenen Abschnitts. Bei ausreichend hohem Eigenkapital, das die Kreditaufnahme unterbindet, gilt somit die Grenzpreisfunktion (6) sowohl für den Optionskäufer als auch den Stillhalter, sofern auch der Stillhalter eine Aktienkursveränderung kleiner q_H erwartet. Ein Optionsgeschäft ist somit möglich, weil ein Einigungspunkt existiert.

Es ist wiederum interessant, die Mindesteigenkapitalhöhe zu berechnen, bei der die Optionsbewertung mit dem Habenzinssatz gerade noch möglich ist. Sie läßt sich analog zum vorangegangenen Abschnitt mit Hilfe der Geldanlagehöhe im Bewertungsprogramm ermitteln, die dann genau null betragen muß. Diese ergibt sich wie zuvor aus der durch das Eigenkapital ermöglichten und mit dem Aktienkurs im Zustand null bewerteten Leerverkaufsmenge zuzüglich des Eigenkapitals selbst und nun jedoch abzüglich (!) der maximalen Zahlungsbereitschaft sowie abzüglich der zur Optionszahlungsreplikation notwendigen Reduktion der Leerverkaufsmenge, die mit dem Aktienkurs im Zustand null bewertet wird:

$$ga_0^b = 0 = x_{EK} \cdot a + EK^{K,min} - p - x_O \cdot a \tag{60}$$

Die durch das Eigenkapital ermöglichte Leerverkaufsmenge läßt sich wie zuvor mit Gleichung (49) berechnen. Für den Grenzpreis p gilt die Gleichung (6). Die Reduktion des Aktienleerverkaufs zwischen Basis- und Bewertungsprogramm läßt sich dadurch ermitteln, daß die Summe aus der Verkaufseinzahlung der zur Optionszahlungsreplikation notwendigen Aktienmenge und der Optionseinzahlung (!) im Zustand eins einer entsprechenden Summe im Zustand zwei entspricht:

$$x_O \cdot u \cdot a + C_u^{VO} = x_O \cdot d \cdot a + C_d^{VO} \quad \Leftrightarrow \quad x_O \cdot a = \frac{C_d^{VO} - C_u^{VO}}{u - d} \tag{61}$$

Werden diese Zusammenhänge in Gleichung (60) eingesetzt, dann berechnet sich das Mindesteigenkapital wie folgt:

$$EK^{K,\min} = \frac{1}{q_H} \cdot \frac{u - q_H}{u - d} \cdot \left(C_d^{VO} - \frac{d}{u} \cdot C_u^{VO} \right) \tag{62}$$

Das Eigenkapital muß also mindestens so hoch sein wie die in den Zustand null diskontierte, mit der Pseudowahrscheinlichkeit des Zustands zwei gewichtete Differenz zwischen der Optionszahlung im Zustand zwei und der mit dem Quotienten aus Ab- und Aufwärtsfaktor multiplizierten Optionszahlung im Zustand eins. Solange das Eigenkapital höher ist als $EK^{K,\min}$ findet ein Optionsgeschäft statt, weil ein Einigungspunkt existiert.

Sollte das Eigenkapital aber wiederum niedriger sein, dann erfolgt statt einer Geldanlage eine Kreditaufnahme. In diesem Falle heben sich in Gleichung (59) der erste und letzte Term nicht mehr vollständig auf:

$$P^{K,opt} = \frac{1}{q_S} \cdot \left(\frac{q_S - d}{u - d} \cdot C_u^{VO} + \frac{u - q_S}{u - d} \cdot C_d^{VO} \right) + EK^K \cdot \frac{u}{q_S} \cdot \frac{q_S - q_H}{u - q_H} \tag{63}$$

Der Eigenkapitalkorrekturterm entspricht betragsmäßig dem entsprechenden Term in Gleichung (52). Es erfolgt mit der gleichen Begründung wie zuvor eine Aufwertung des Eigenkapitals, die nun aber addiert wird und daher die Zahlungsbereitschaft des Optionskäufers steigert. Die im Anhang B nachgewiesene Lücke zwischen niedrigerer Zahlungsbereitschaft des Optionskäufers und minimalem Grenzpreis des Stillhalters wird somit durch die Eigenkapitalkorrektur ebenfalls vermindert.

Je höher das Eigenkapital ausfällt, um so höher wird folglich die maximale Zahlungsbereitschaft des Optionskäufers. Allerdings gilt auch diese Gleichung nur bis zu höchstens einem Eigenkapital von $EK^{K,\min}$. Bei einem höheren Eigenkapital gibt es keinen Wechsel zur Kreditaufnahme, und Gleichung (6) bleibt die gültige Grenzpreisfunktion für den Optionskäufer. Wird der zuvor ermittelte Zusammenhang (62) für $EK^{K,\min}$ in die Gleichung (63) eingesetzt, so resultiert nach wenigen Umstellungen die Gleichung (6). Ein geringeres Eigenkapital als $EK^{K,\min}$ kann die in Anhang B bewiesene Einigungslücke nicht schließen.

Somit läßt sich festhalten: Solange das Eigenkapital ausreicht, den Wechsel von der Geldanlage zur Kreditaufnahme nun jedoch beim Optionskäufer zu unterbinden, entsprechen sich die Grenzpreise von Optionskäufer und Stillhalter, wenn beide eine Aktienkursveränderung kleiner q_H erwarten, und es existiert ein Einigungspunkt. Liegt aber das Eigenkapital unter $EK^{K,min}$, findet wegen der Einigungslücke kein Optionshandel statt. Die Einigungslücke wird durch steigendes Eigenkapital jedoch kleiner, weil letzteres die Preisobergrenze des Käufers anhebt.

3.3 Einigungspunkte bei einer erwarteten Aktienkursveränderung größer als der Soll-Aufzinsungsfaktor

3.3.1 Grenzpreisfunktion und Mindesteigenkapital für den Käufer einer Kaufoption

Die Bewertungssituation ändert sich, wenn die erwartete Aktienkursveränderung größer als der Soll-Aufzinsungsfaktor ist. Im Basisprogramm wird dann mit dem Eigenkapital wie bereits dargelegt der mögliche Verlust eines kreditfinanzierten Aktienkaufgeschäfts und nicht eines Leerverkaufsgeschäfts gedeckt. Nunmehr muß im Gegensatz zum Abschnitt 3.2 nicht mehr der Stillhalter, sondern der Käufer der Kaufoption über ausreichend Eigenkapital verfügen, mit dem der Wechsel von der Kreditfinanzierung zur Geldanlage verhindert wird.

Es sei hier auf die vollständige Darlegung des primalen und dualen Bewertungsprogramms verzichtet und nur auf die notwendigen Änderungen in den Programmen aufmerksam gemacht. Im Vergleich zu Abschnitt 3.2.1 wird im Bewertungsprogramm nun der Preis P^K maximiert. In den Liquiditätsrestriktionen wechseln die Vorzeichen von p, C_u^{KO} und C_d^{KO} im Vergleich zu den Restriktionen (26) bis (28). Die duale Zielfunktion lautet daher:

$$DP^K := EK^K \cdot \lambda_0^b + C_u^{KO} \cdot \lambda_1^b + C_d^{KO} \cdot \lambda_2^b - GEN^{opt} \cdot \delta^b \tag{64}$$

Die dualen Restriktionen sind gleich zu den Restriktionen (32) bis (38). Da durch ausreichend hohes Eigenkapital der Kredit als Grenzobjekt aufrechterhalten werden soll, wird nunmehr die duale Restriktion (36) als Gleichung erfüllt. Außerdem erfolgt bei einem kreditfinanzierten Aktienkauf im Zustand null eine Entnahme im Zustand eins. Auch heben sich, solange kein Grenzobjektwechsel vom Kredit zur Geldanlage erfolgt, der erste und letzte Term in Gleichung (64) auf. Auf die Darlegung der exakten Rechenwege sei wegen der überaus großen Ähnlichkeit zum vorangegangenen Abschnitt verzichtet. Bei ausreichend hohem Eigenkapital gilt für die Bewertung einer Kaufoption durch den Optionskäufer letztlich die Grenzpreisfunktion (4). Somit existiert dann ein Einigungspunkt, wenn auch der Stillhalter eine Aktienkursveränderung größer q_S erwartet.

Wie im vorangegangenen Abschnitt, so läßt sich auch in diesem Fall das Mindesteigenkapital ermitteln. Dazu muß ermittelt werden, bei welcher Mindesteigenkapitalhöhe der aufzunehmende Kredit gerade null beträgt. Die Kredithöhe im Zustand null berechnet sich mit der Auszahlung für den Aktienkauf im Zustand null abzüglich des Eigenkapitals und zuzüglich des potentiell auszuzahlenden Grenzpreises sowie abzüglich der Reduktion des Aktienkaufgeschäfts vom Basis- zum Bewertungsprogramm:

$$ka_0^b = x_{EK} \cdot a - EK^{K,min} + p - x_O \cdot a \tag{65}$$

Der Aktienkauf im Zustand null wird dadurch begrenzt, daß der Verkauf der Aktien in Zustand zwei die Rückzahlung des Kredits gerade deckt:

$$x_{EK} \cdot d \cdot a - \left(x_{EK} \cdot a - EK^{K,min}\right) \cdot q_S = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{EK} \cdot a = EK^{K,min} \cdot \frac{q_S}{q_S - d} \tag{66}$$

Der einzusetzende Grenzpreis ist mit Gleichung (4) bekannt. Die Reduktionsmenge des Aktienkaufs errechnet sich wie im Unterkapitel 3.2 die Reduktionsmenge des Leerverkaufs aus den Bestimmungsgleichungen des Replikationsportfolios, was zur selben Gleichung (50) führt. Werden diese Zusammenhänge in Gleichung (65) eingesetzt, dann resultiert für das Mindesteigenkapital:

$$EK^{K,min} = \frac{1}{q_S} \cdot \frac{q_S - d}{u - d} \cdot \left(C_u^{KO} - \frac{u}{d} \cdot C_d^{KO}\right) \tag{67}$$

Solange das Mindesteigenkapital beim Optionskäufer vorhanden ist, gilt für ihn die Grenzpreisfunktion (4). Ist das Eigenkapital aber geringer, dann gibt es einen Grenzobjektwechsel vom Basis- zum Bewertungsprogramm verbunden mit dem Wechsel von q_S zu q_H. Es gilt dann folgende Grenzpreisfunktion:

$$P^{K,opt} = \frac{1}{q_H} \cdot \left(\frac{q_H - d}{u - d} \cdot C_u^{KO} + \frac{u - q_H}{u - d} \cdot C_d^{KO}\right) + EK^K \cdot \frac{d}{q_H} \cdot \frac{q_S - q_H}{q_S - d} \tag{68}$$

Da der letzte Term der Gleichung stets positiv ist, steigt mit höherem Eigenkapital der Grenzpreis. Der Eigenkapitalkorrekturterm gibt die Aufwertung des in gleicher Höhe vorhandenen Eigenkapitals zwischen Basis- und Bewertungsprogramm an. Das Eigenkapital verstärkt die Möglichkeit, ein kreditfinanziertes Aktienkaufgeschäft durch Ausgleich der Verluste im Zustand eins zu stützen. Die Reduktion des zur Optionszahlungsreplikation notwendigen Leerverkaufsgeschäfts durch das Eigenkapital ist zusätzlich werterhöhend, weil das kreditfinanzierte Kaufgeschäft zu höheren erwarteten Einzahlungen als das Leerverkaufsgeschäft führt.

Allerdings kann wiederum die in Kapitel zwei geschilderte Bewertungslücke, erst dann geschlossen werden, wenn das Eigenkapital wenigstens dem Mindesteigenkapital entspricht. Auch hier führt das Einsetzen des Mindesteigenkapitals dazu, daß die Grenzpreisfunktion (68) der Gleichung (4) entspricht.

Somit läßt sich festhalten: Solange das Eigenkapital ausreicht, den Wechsel von der Kreditaufnahme zur Geldanlage beim Optionskäufer zu unterbinden, entsprechen sich die Grenzpreise von Optionskäufer und Stillhalter, wenn beide eine Aktienkursveränderung größer q_S erwarten, und es existiert ein Einigungspunkt. Liegt aber das Eigenkapital unter $EK^{K,min}$, findet wegen der Einigungslücke kein Optionshandel statt. Die Einigungslücke wird durch steigendes Eigenkapital jedoch kleiner, weil letzteres die Preisobergrenze des Käufers anhebt.

3.3.2 Grenzpreisfunktion und Mindesteigenkapital für den Stillhalter einer Verkaufsoption

Im Falle keines Eigenkapitals repliziert der Stillhalter einer Verkaufsoption die Optionszahlungsströme durch ein Leerverkaufsgeschäft verbunden mit einer Geldanlage. Bei einer erwarteten Aktienkursveränderung größer als der Soll-Aufzinsungsfaktor q_S muß somit beim Stillhalter der Wechsel von der Kreditfinanzierung zur Geldanlage vom Basis- zum Bewertungsprogramm durch ausreichend hohes Eigenkapital unterbunden werden.

Auch an dieser Stelle sei wegen der großen Ähnlichkeit auf die vollständige Darlegung des primalen und dualen Bewertungsprogramms verzichtet. Im Vergleich zu Abschnitt 3.2.2 treten im Bewertungsprogramm folgende Änderungen auf: Der Preis P^S wird nun minimiert und in den Liquiditätsrestriktionen wechseln die Vorzeichen von p, C_u^{VO} und C_d^{VO} im Vergleich zu den Restriktionen (54) bis (56). Die duale Zielfunktion lautet daher:

$$DP^S := \lambda_0^b \cdot EK^S - \lambda_1^b \cdot C_u^{KO} - \lambda_2^b \cdot C_d^{KO} - \delta^b \cdot GEN^{opt} \tag{69}$$

Die dualen Restriktionen sind gleich zu den Restriktionen (32) bis (38). Durch ausreichend hohes Eigenkapital wird der Kredit als Grenzobjekt aufrechterhalten und deshalb die duale Restriktion (36) als Gleichung erfüllt. Bei einem kreditfinanzierten Kauf im Zustand null erfolgt eine Entnahme im Zustand eins. Solange kein Grenzobjektwechsel vom Kredit zur Geldanlage stattfindet, heben sich der erste und letzte Term der Addition in Gleichung (69) auf. Bei ausreichend hohem Eigenkapital gilt für die Bewertung einer Verkaufsoption durch den Stillhalter die Grenzpreisfunktion (5). Es existiert daher dann ein Einigungspunkt, wenn auch der Optionskäufer eine Aktienkursveränderung größer q_S erwartet.

Das Mindesteigenkapital läßt sich nach dem gleichen Vorgehen wie in 3.3.1 ermitteln, nur daß der Grenzpreis p als Einzahlung nun die Kredithöhe vermindert und daher ein negatives Vorzeichen aufweist. Es ergibt sich deshalb folgendes Mindesteigenkapital für den Stillhalter:

$$EK^{S,min} = \frac{1}{q_S} \cdot \frac{q_S - d}{u - d} \cdot \left(\frac{u}{d} \cdot C_d^{VO} - C_u^{VO} \right) \tag{70}$$

Solange das Mindestkapital beim Stillhalter nicht unterschritten wird, gilt für ihn die Grenzpreisfunktion (5). Ist das Eigenkapital aber geringer, dann gibt es einen Grenzobjektwechsel vom Basis- zum Bewertungsprogramm verbunden mit dem Wechsel von q_S zu q_H. Es gilt dann folgende Grenzpreisfunktion:

$$P^{S,opt} = \frac{1}{q_H} \cdot \left(\frac{q_H - d}{u - d} \cdot C_u^{VO} + \frac{u - q_H}{u - d} \cdot C_d^{VO} \right) - EK^K \cdot \frac{d}{q_H} \cdot \frac{q_S - q_H}{q_S - d} \tag{71}$$

Der letzte Term der Gleichung ist stets positiv, so daß wegen des negativen Vorzeichens der Grenzpreis mit höherem Eigenkapital sinkt. Für die Aufwertung des Eigenkapitals vom Basis- zum Bewertungsprogramm gilt dieselbe Begründung wie in 3.3.1. Die in Kapitel zwei geschilderte Bewertungslücke kann wiederum erst dann geschlossen werden, wenn das Eigenkapital wenigstens dem Mindesteigenkapital entspricht. Das Einsetzen des Mindesteigenkapitals bewirkt, daß die Grenzpreisfunktion der Gleichung (5) entspricht.

Somit läßt sich festhalten: Solange das Eigenkapital ausreicht, den Wechsel von der Kreditaufnahme zur Geldanlage beim Stillhalter zu unterbinden, entsprechen sich die Grenzpreise von Optionskäufer und Stillhalter, wenn beide eine Aktienkursveränderung größer q_S erwarten, und es existiert ein Einigungspunkt. Liegt aber das Eigenkapital unter $EK^{S,min}$, findet wegen der Einigungslücke kein Optionshandel statt. Die Einigungslücke wird durch steigendes Eigenkapital jedoch kleiner, weil letzteres die Preisuntergrenze des Stillhalters senkt.

3.4 Grafische Darstellung der Grenzpreisverläufe

Obgleich in 3.2 und 3.3 vier verschiedene Situationen untersucht worden sind, ist der grafische Verlauf der Grenzpreise von Abschnitt 3.2.1 und Abschnitt 3.3.2 überaus ähnlich. In beiden Fällen nähern sich die Grenzpreise des Käufers und des Stillhalters, weil die Preisuntergrenze des Stillhalters mit zunehmendem Eigenkapital sinkt. Der grafische Verlauf der Grenzpreise von Abschnitt 3.2.2 und 3.3.1 ist ebenfalls ähnlich. Hier nähern sich die Grenzpreise, weil die Preisobergrenze des Käufers mit zunehmendem Eigenkapital steigt. Ist das Mindesteigenkapital erreicht, hat weiterhin steigendes Eigenkapital keinen Einfluß mehr auf den Grenzpreis. Im Falle der Kaufoption ist $P(q_S)$, im Falle der Verkaufsoption aber $P(q_H)$ der höhere von beiden Grenzpreisen, wenn das Mindesteigenkapital noch nicht erreicht worden ist. Die Abbildung 1 gibt die Grenzpreisverläufe wieder.

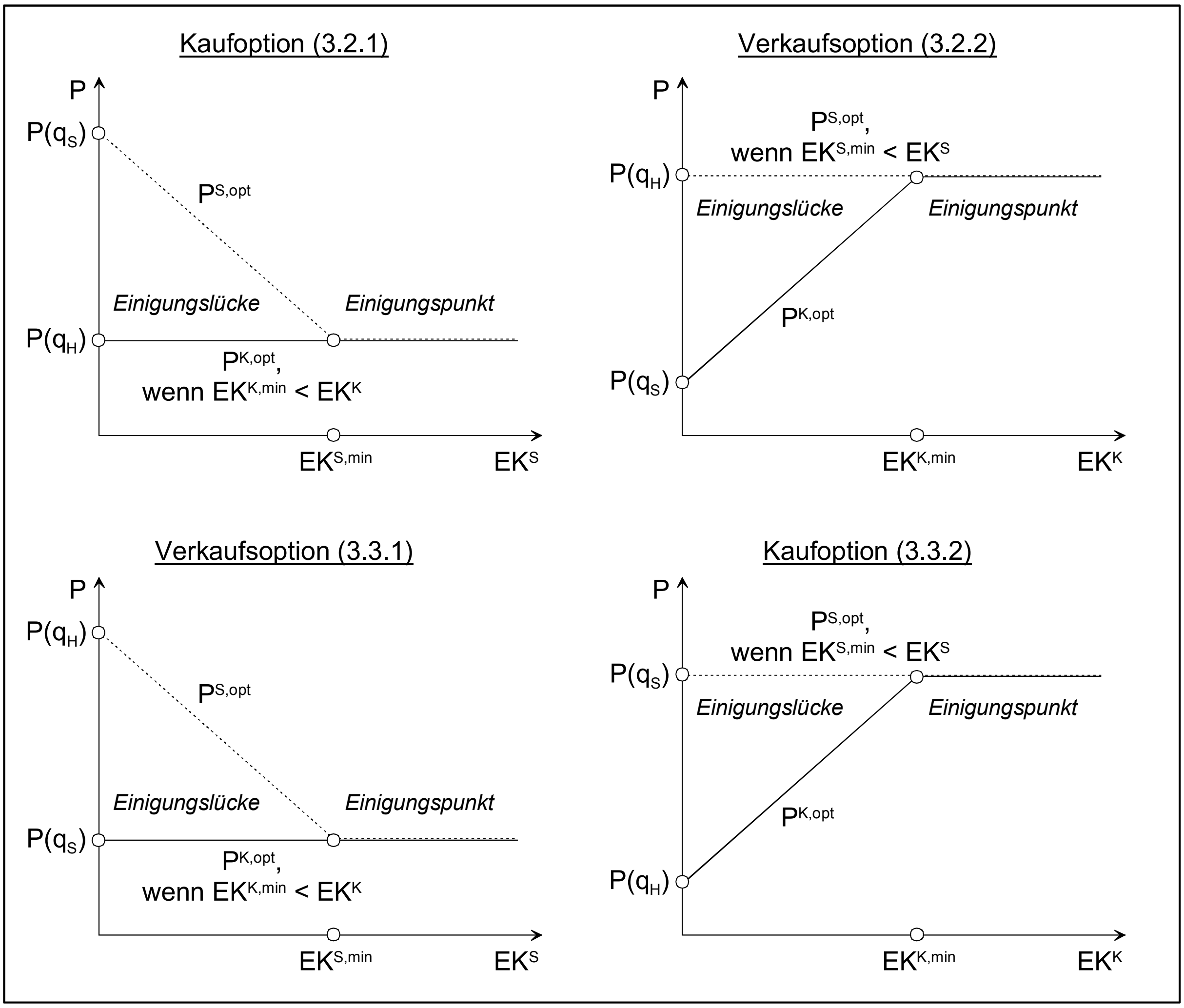

Abbildung 1 Grenzpreisverläufe und Einigungspunkte in Abhängigkeit des Eigenkapitals

3.5 Einigungsbereiche bei Eigenkapitalausstattung und unterschiedlichen Erwartungen der Aktienkursveränderung durch Optionskäufer und Stillhalter

Mit den in den Unterkapiteln 3.2 und 3.3 gewonnenen Erkenntnissen und Gleichungen ist das Instrumentarium vorhanden, auch diejenigen Fälle ohne größere Berechnungen zu untersuchen, in denen sich die subjektiv erwartete Aktienkursveränderung des Käufers von der des Stillhalters unterscheidet. Es können zunächst die beiden Fälle abgegrenzt werden, daß die erwartete Aktienkursveränderung beim Optionskäufer kleiner als q_H und beim Stillhalter größer als q_S sowie umgekehrt ist. Da die Ausstattung mit Eigenkapital erheblichen Einfluß auf die Bewertung hat, ist noch weiter zu unterscheiden, ob in jedem der beiden Fälle beim Käufer und beim Stillhalter das Mindesteigenkapital jeweils gegeben ist oder nicht. Somit resultieren insgesamt acht zu untersuchende Fallkonstellationen, die in der folgenden Tabelle angegeben sind:

	Käufer		Stillhalter	
Fall	*erwarteter Aktienkurs*	*Mindest-eigenkapital gegeben*	*erwarteter Aktienkurs*	*Mindest-eigenkapital gegeben*
I	$<q_H$	ja	$>q_S$	ja
II	$<q_H$	nein	$>q_S$	ja
III	$<q_H$	ja	$>q_S$	nein
IV	$<q_H$	nein	$>q_S$	nein
V	$>q_S$	ja	$<q_H$	ja
VI	$>q_S$	nein	$<q_H$	ja
VII	$>q_S$	ja	$<q_H$	nein
VIII	$>q_S$	nein	$<q_H$	nein

Tabelle 1 Abgrenzung der Fallkonstellationen

<u>*Kaufoption*</u>

Fälle I bis IV

Die Fälle I bis IV weisen bei einer Kaufoption alle eine Einigungslücke auf. Zusätzliches Eigenkapital nimmt sowohl beim Käufer als auch beim Stillhalter keinen Einfluß auf den jeweiligen Grenzpreis, denn es verstärkt lediglich das jeweilige Replikationsportfolio, das auch ohne Eigenkapital anzutreffen ist. Die in Kapitel zwei beschriebene Einigungslücke kann daher durch Eigenkapital nicht vermindert werden, sondern bleibt konstant.

Fall V

In diesem Fall gilt für den Käufer der Sollzinssatz (GPF (4)),[25] für den Stillhalter aber der Habenzinssatz als Diskontierungszinssatz (GPF (3)), also genau die umgekehrte Situation wie bei der Bewertung ohne jegliches Eigenkapital. Es ergibt sich daher ein Einigungsbereich.

Fall VI

Für den Käufer gilt der Habenzinssatz als Diskontierungszinssatz, allerdings führt vorhandenes Eigenkapital zu einem höheren Grenzpreis (GPF (68)). Der Stillhalter diskontiert ebenfalls mit dem Habenzinssatz (GPF (3)), so daß mit steigendem Eigenkapital beim Käufer auch der Einigungsbereich solange größer wird, bis Fall VI bei einem Eigenkapital des Käufers gleich dem Mindesteigenkapital in den Fall V übergeht.

[25] GPF = Grenzpreisfunktion.

Fall VII

Hier gilt wie im Fall V für den Käufer der Sollzinssatz als Diskontierungszinssatz (GPF (4)). Für den Stillhalter gilt ebenfalls der Sollzinssatz, ergänzt um den Eigenkapitalkorrekturterm, der zu einer Herabsetzung der Preisuntergrenze führt (GPF (52)). Mit steigendem Eigenkapital beim Stillhalter ergibt sich solange ein immer größer werdender Einigungsbereich, bis das Eigenkapital gleich dem Mindesteigenkapital wird und Fall VII in Fall V übergeht.

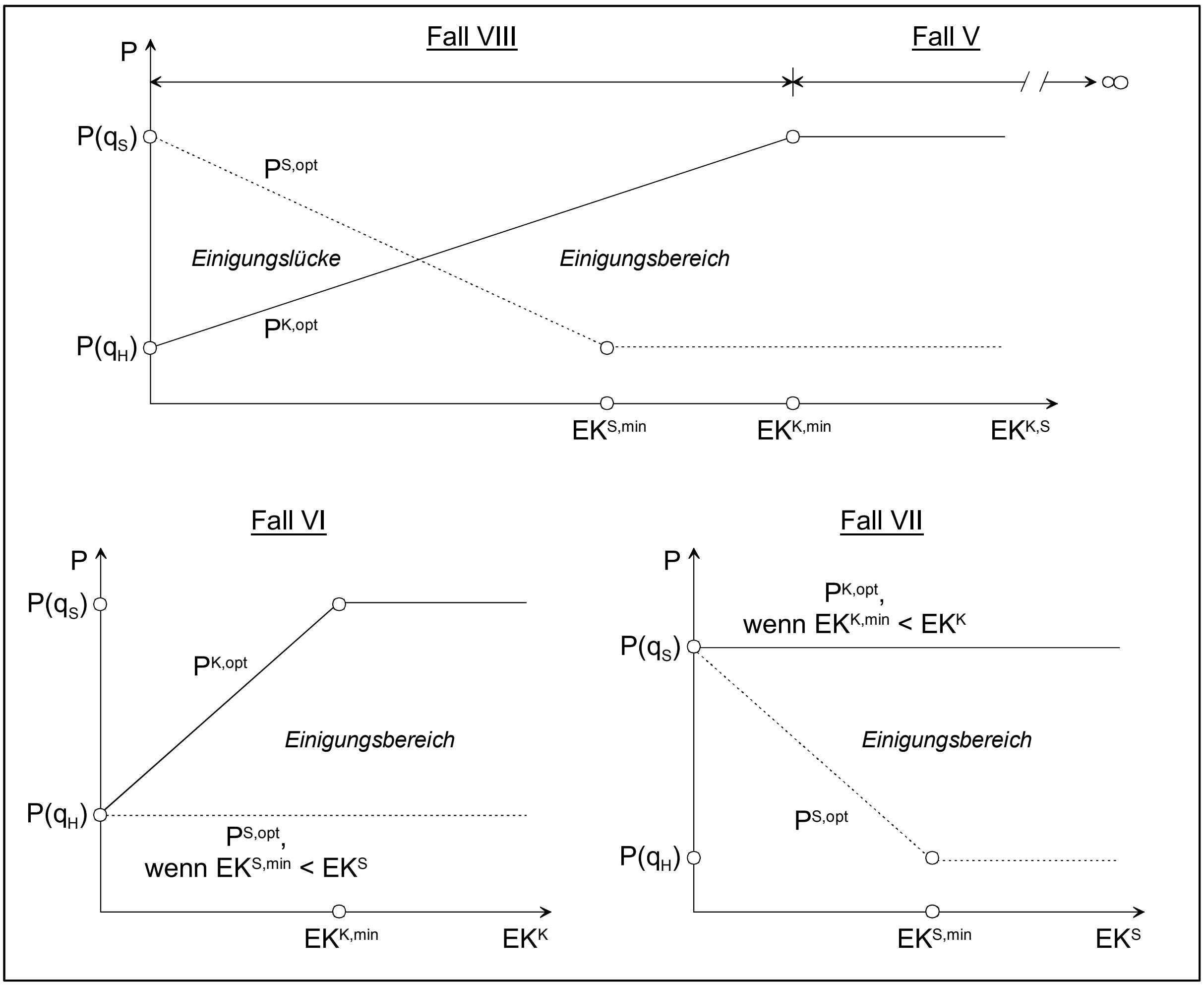

Abbildung 2 Grenzpreisverläufe und Einigungsbereiche für eine Kaufoption in Abhängigkeit des Eigenkapitals bei unterschiedlichen Erwartungen zur Kursveränderung des Basisguts

Fall VIII

Auch in diesem Fall ergibt sich ein Einigungsbereich. Dazu bedarf es lediglich der Überlegung, daß für den Stillhalter zunächst der Sollzinssatz als Diskontierungszinssatz gilt, der Grenzpreis aber mit steigendem Eigenkapital abnimmt (GPF (52)), bis er bei Erreichen des Mindesteigenkapitals dem mit dem Habenzinssatz ermittelten Grenzpreis (GPF (3)) entspricht. Der Käufer diskontiert hingegen zunächst mit dem Habenzinssatz, ergänzt um den Eigenkapitalkorrekturterm (GPF (68)). Mit steigendem Eigenkapital nähert sich der Grenzpreis immer mehr dem mit dem Sollzinssatz ermittelten Grenzpreis an (GPF (4)). Somit ergibt sich nicht wie in den Fällen V bis VII bereits von Beginn an ein Einigungsbereich, sondern erst ab einer bei Käufer und Stillhalter anzutreffenden Eigenkapitalausstattung im Schnittpunkt der beiden beschriebenen Grenzpreisentwicklungen. Es ist logisch, daß dieser Schnittpunkt kleiner als das jeweilige Mindesteigenkapital von Käufer oder Stillhalter ist. Wird das Mindesteigenkapital erreicht, geht auch Fall VIII in den Fall V über.

Die Abbildung 2 gibt die verbal beschriebenen Fälle V bis VIII für eine Kaufoption wieder. Dabei wird deutlich, daß die Fälle VI und VII nur Sonderfälle der Fälle V und VIII sind, die sich aus einer Verschiebung des jeweiligen Grenzpreisastes von Käufer oder Stillhalter nach rechts ergeben.

<u>*Verkaufsoption*</u>

Fall I

Der Käufer diskontiert mit dem Habenzinssatz (GPF (6)), der Stillhalter hingegen mit dem Sollzinssatz (GPF (5)). Die Situation ist also genau umgekehrt wie im Falle keines Eigenkapitals, weshalb sich statt einer Einigungslücke ein Einigungsbereich ergibt.

Fall II

Für den Käufer ist der Sollzinssatz der Diskontierungszinssatz, und die Grenzpreisfunktion enthält einen Eigenkapitalkorrekturterm, der den Grenzpreis ansteigen läßt (GPF (63)). Der Stillhalter diskontiert mit dem Sollzinssatz (GPF (5)). Somit resultiert mit steigendem Eigenkapital beim Käufer ein größer werdender Einigungsbereich. Erreicht das Eigenkapital das Mindesteigenkapital, dann geht Fall II in den Fall I über.

Fall III

Der Käufer diskontiert mit dem Habenzinssatz (GPF (6)). Die Grenzpreisfunktion des Stillhalters enthält ebenfalls den Habenzinssatz als Diskontierungszinssatz, sie wird aber um den Eigenkapitalkorrekturterm ergänzt, der die Preisuntergrenze sinken läßt (GPF (71)). Somit wächst der Einigungsbereich mit steigendem Eigenkapital beim Stillhalter. Erreicht das Eigenkapital das Mindesteigenkapital, dann geht auch Fall III in den Fall I über.

Fall IV

Dieser Fall ist ähnlich dem Fall VIII der Kaufoption. Der Käufer diskontiert mit dem Sollzinssatz, die Preisobergrenze steigt jedoch durch den Eigenkapitalkorrekturterm (GPF (63)). Der Stillhalter diskontiert dagegen mit dem Habenzinssatz, die Preisuntergrenze sinkt durch die Eigenkapitalkorrektur (GPF (71)). Beide Grenzpreisentwicklungen weisen einen Schnittpunkt auf, ab dem sich mit steigendem Eigenkapital auf einer oder auf beiden Seiten ein wachsender Einigungsbereich ergibt. Erreichen sowohl Käufer als auch Stillhalter das Mindesteigenkapital, geht auch dieser Fall in den

Fall I über. Die Fälle II und III erweisen sich als Sonderfälle der Fälle I und IV, die aus einer Rechtsverschiebung jeweils einer der beiden Grenzpreisäste resultieren.

Fälle V bis VIII

Zusätzliches Eigenkapital verstärkt lediglich das auch ohne Eigenkapital vorzufindende Replikationsportfolio. Es gelten daher für den Käufer die Grenzpreisfunktion (5) und für den Stillhalter die Grenzpreisfunktion (6). Somit ist stets eine Einigungslücke anzutreffen.

Auf eine Abbildung der Grenzpreisverläufe sei wegen der großen Ähnlichkeit zu Abbildung 2 verzichtet.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Wie sich zeigt, führt ein gespaltener Zinssatz bei Fortgeltung aller übrigen Prämissen des vollkommenen und vollständigen Kapitalmarkts zu einer Lücke im Einigungsbereich zwischen Optionskäufer und Stillhalter. Deren Ursache ist die Replikation der Optionszahlungsströme durch kreditfinanzierte Aktienkäufe beim Stillhalter (Käufer) einer Kaufoption (Verkaufsoption), der die Replikation beim Käufer (Stillhalter) einer Kaufoption (Verkaufsoption) durch ein Leerverkaufsgeschäft gekoppelt mit einer Geldanlage gegenübersteht. Bei gespaltenem Zinssatz haben daher ein Optionskäufer und ein Stillhalter ohne Berücksichtigung von Eigenkapital stets verschiedene Grenzzinssätze zur Bewertung heranzuziehen.

Steht Eigenkapital in ausreichender Höhe zur Verfügung, so kann verhindert werden, daß Käufer und Stillhalter mit verschiedenen Zinssätzen diskontieren. Unter der Voraussetzung, daß beide eine Aktienkursveränderung kleiner q_H (3.2) oder größer q_S (3.3) erwarten, ergeben sich Einigungspunkte.

Besonders interessant sind jedoch die in Abschnitt 3.4 beschriebenen Fälle unterschiedlicher Erwartungen zur Aktienkursveränderung bei Käufer und Stillhalter. Dann sind sogar Einigungsbereiche möglich. Die in Abschnitt 3.4 gewonnenen Erkenntnisse können daher eine Erklärung bieten, warum es auf realen Märkten mit gespaltenen Zinssätzen auch in einer Momentbetrachtung Überschneidungsbereiche von Preisgeboten und -forderungen geben kann.

Solange gesichert ist, daß die erwartete Aktienkursveränderung kleiner q_H oder größer q_S ist, sind in den in Kapitel drei ermittelten Grenzpreisfunktionen nirgends die subjektiven Zustandswahrscheinlichkeiten unmittelbar enthalten. Allerdings haben sie entscheidenden Einfluß darauf, ob überhaupt eine Einigungslücke, ein Einigungspunkt oder sogar ein Einigungsbereich existiert, denn die erwartete Aktienkursveränderung und das vorhandene Eigenkapital bestimmen den Grenzzinssatz und die ggf. stattfindende Eigenkapitalkorrektur. Dieses Ergebnis ist widersprüchlich zu einer rein marktorientierten Bewertung, bei der subjektive Erwartungen überhaupt keine Rolle spielen sollen. Somit ist es augenscheinlich, daß eine Bewertung bei gespaltenen Zinssätzen einerseits mit marktorientierten Grenzpreisfunktionen erfolgt, die aber andererseits von subjektiven Erwartungen vorkonfektioniert werden. Ferner ist die Höhe des Eigenkapitals dann nicht für die Bewertung irrelevant, wenn sie unter dem Mindesteigenkapital liegt.

Es wäre zu überprüfen, ob diese Erkenntnisse auch in mehrperiodigen Modellen gelten. Außerdem müssen auch andere Optionstypen daraufhin untersucht werden, ob es bei gespaltenen Zinssätzen Einigungslücken gibt und ob diese ebenfalls durch Eigenkapital geschlossen werden können.

Anhang A

Es ist $P^{opt,K} < P^{opt,S}$.

Folglich ist zu beweisen:

$$\frac{1}{q_H} \cdot \left(\frac{q_H - d}{u-d} \cdot \max\{u \cdot a - B; 0\} + \frac{u - q_H}{u-d} \cdot \max\{d \cdot a - B; 0\} \right) <$$

$$\frac{1}{q_S} \cdot \left(\frac{q_S - d}{u-d} \cdot \max\{u \cdot a - B; 0\} + \frac{u - q_S}{u-d} \cdot \max\{d \cdot a - B; 0\} \right) \qquad \text{(A.1)}$$

Das läßt sich umformen zu:

$$\max\{u \cdot a - B; 0\} \cdot \left(\frac{d}{q_S} - \frac{d}{q_H} \right) < \max\{d \cdot a - B; 0\} \cdot \left(\frac{u}{q_S} - \frac{u}{q_H} \right) \qquad \text{(A.2)}$$

Erfolgt die Substitution $q_s = \alpha \cdot q_H$ mit $\alpha > 1$, dann gilt:

$$\max\{u \cdot a - B; 0\} \cdot \left(\frac{d}{\alpha \cdot q_H} - \frac{d}{q_H} \right) < \max\{d \cdot a - B; 0\} \cdot \left(\frac{u}{\alpha \cdot q_H} - \frac{u}{q_H} \right) \qquad \text{(A.3)}$$

Annahme: $u \cdot a - B > 0$ und $d \cdot a - B > 0$

Dann läßt sich (A.3) wie folgt umformen:

$$\frac{d \cdot a - B}{u \cdot a - B} < \frac{d}{u} \qquad \text{(A.5)}$$

Substituiere $u = \beta \cdot d$ mit $\beta > 1$:

$$\frac{d \cdot a - B}{\beta \cdot d \cdot a - B} < \frac{1}{\beta} \qquad \text{(A.6)}$$

Da $d \cdot a - B > 0$ ist, sei ein $\Delta > 0$ so gewählt, daß $d \cdot a - B - \Delta = 0$ und daher $d \cdot a = B + \Delta$ ist. Dann läßt sich (A.6) umformen zu:

$$\frac{\Delta}{\beta \cdot \Delta + B \cdot (\beta - 1)} < \frac{1}{\beta} \qquad \text{(A.7)}$$

$$\frac{1}{\beta + \frac{B}{\Delta} \cdot (\beta - 1)} < \frac{1}{\beta} \qquad \text{(A.8)}$$

Weil $\beta + \frac{B}{\Delta} \cdot (\beta - 1) > \beta$ ist, gilt somit $P^{opt,K} < P^{opt,S}$.

q. e. d.

Anhang B

Es ist $P^{opt,K} < P^{opt,S}$.

Folglich ist zu beweisen:

$$\frac{1}{q_S}\cdot\left(\frac{q_S-d}{u-d}\cdot\max\{B-u\cdot a;0\}+\frac{u-q_S}{u-d}\cdot\max\{B-d\cdot a;0\}\right)<$$
$$\frac{1}{q_H}\cdot\left(\frac{q_H-d}{u-d}\cdot\max\{B-u\cdot a;0\}+\frac{u-q_H}{u-d}\cdot\max\{B-d\cdot a;0\}\right) \tag{B.1}$$

Der Tausch von Minuend und Subtrahend im Operanden der Maximumverknüpfung sowie die Multiplikation mit –1 führen zu:

$$\frac{1}{q_S}\cdot\left(\frac{q_S-d}{u-d}\cdot\max\{u\cdot a-B;0\}+\frac{u-q_S}{u-d}\cdot\max\{d\cdot a-B;0\}\right)>$$
$$\frac{1}{q_H}\cdot\left(\frac{q_H-d}{u-d}\cdot\max\{u\cdot a-B;0\}+\frac{u-q_H}{u-d}\cdot\max\{d\cdot a-B;0\}\right) \tag{B.2}$$

Die zu beweisende Ungleichung (B.2) entspricht der im Anhang A zu beweisenden Ungleichung (A.1). Siehe daher den dort angegebenen Beweis.

Literaturverzeichnis

BERGMANN, Y. Z. (1995): Option Pricing with Differential Interest Rates, in: The Review of Financial Studies, 8. Jg. (1995), S. 475-500.

BLACK, F., SCHOLES, M. (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities. In: Journal of Political Economy, 81. Jg. (1973), S. 637-654.

BREUER, W. (2001): Investition II – Entscheidung bei Risiko, Wiesbaden 2001.

COX, J. C., ROSS, S. A., RUBINSTEIN, M. (1979): Option Pricing – A Simplified Approach. In: Journal of Financial Economics, 7. Jg. (1979), S. 229-263.

FISCHER, T. R., HAHNENSTEIN, L., HEITZER, B. (1999): Kapitalmarkttheoretische Ansätze zur Berücksichtigung von Handlungsspielräumen in der Unternehmensbewertung. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 69. Jg. (1999), S. 1207-1231.

FRANKE, G., HAX, H. (2004): Finanzwirtschaft des Unternehmens und Kapitalmarkt, 5. Aufl., Berlin et al. 2004.

GÖTZE, U. (2006): Investitionsrechnung, 5. Aufl., Berlin et al. 2006.

HART, A. G. (1940): Anticipations, Uncertainty, and Dynamic Planning, Chicago 1940 (2. Nachdruck, New York 1965).

HAX, H. (1964): Investitions- und Finanzplanung mit Hilfe der linearen Programmierung. In: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 16. Jg. (1964), S. 430-446.

HAX, H. (1970): Investitionsentscheidungen bei unsicheren Erwartungen. In: HAX, H. (Hrsg.): Entscheidungen bei unsicheren Erwartungen, Köln/Opladen 1970, S. 129-140.

HAX, H. (1985): Investitionstheorie, 5. Aufl., Heidelberg 1985.

HAX, H., LAUX, H. (1972): Flexible Planung – Verfahrensregeln und Entscheidungsmodelle für die Planung bei Ungewißheit. In: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 24. Jg. (1972), S. 318-340.

HERING, T. (2003): Investitionstheorie, 2. Aufl., München/Wien 2003.

HERING, T. (2006): Unternehmensbewertung, 2. Aufl., München/Wien 2006.

HILLIER, F. S., LIEBERMAN, G. J. (1997): Operations Research, 5. Aufl., München/Wien 1997.

INDERFURTH, K. (1982): Starre und flexible Investitionsplanung, Wiesbaden 1982.

JAENSCH, G. (1966): Wert und Preis der ganzen Unternehmung, Köln et al. 1966.

KANE, S., MELNIKOV, A. (2005): On Pricing Contingent Claims in a Two Interest Rates Jump-Diffusion Model via Market Completions, Vortrag auf der „International Conference on Finance" des Ökonomischen Instituts der Universität Kopenhagen, 02.-04.09.2005, heruntergeladen unter http://www.econ.ku.dk/fru/conference/Programme/Friday/B6/Melnikov&Kane.pdf am 20.09.2006.

KLINGELHÖFER, H. E. (2003): Investitionsbewertung auf unvollkommenen Kapitalmärkten unter Unsicherheit. In: Betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis, 55. Jg. (2003), S. 279-305.

KORN, R. (1995): Contingent Claim Valuation in a Market with Different Interest Rates, in ZOR – Mathematical Methods of Operations Research, 42. Jg. (1995), S. 255-274.

LAUX, H. (2005): Entscheidungstheorie, 6. Aufl., Berlin et al. 2005.

LAUX, H., FRANKE, G. (1969): Zum Problem der Bewertung von Unternehmungen und anderen Investitionsgütern. In: Unternehmensforschung, 13. Jg. (1969), S. 205-223.

MATSCHKE, M. J. (1969): Der Kompromiß als betriebswirtschaftliches Problem bei der Preisfestsetzung eines Gutachters im Rahmen der Unternehmungsbewertung. In: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 21. Jg. (1969), S. 57-77.

MATSCHKE, M. J. (1975): Der Entscheidungswert der Unternehmung, Wiesbaden 1975.

MATSCHKE, M. J., BRÖSEL, G. (2005): Unternehmensbewertung, Wiesbaden 2005.

MERTON, R. C. (1973): A Theory of Rational Option Pricing. In: The Bell Journal of Economics and Management Science, 4. Jg. (1973), S. 141-183.

TEISBERG, E. O. (1995): Methods for Evaluating Capital Investment Decisions under Uncertainty. In: TRIGEORGIS, L. (Hrsg.): Real Options in Capital Investment, Westport 1995, S. 31-46.

TRIGEORGIS, L. (1996): Real Options, Cambridge 1996.

WEINGARTNER, H. M. (1974): Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems, 3. Aufl., London 1974.

Wirtschaftswissenschaftliche Diskussionspapiere der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald zum ZGPM und verwandten Modellen

MIRSCHEL, S.: Die Optionsbewertungsformel von COX, ROSS und RUBINSTEIN im Zustandgrenzpreismodell – Ein dualitätstheoretischer Nachweis, Dikussions-papier Nr. 04/2006.

BYSIKIEWICZ, M., MATSCHKE, M. J., BRÖSEL, G.: Einige grundsätzliche Bemerkungen zur Entscheidungswertermittlung im Rahmen der Konfliktsituation vom Typ der Spaltung, Diskussionspapier Nr. 02/2005.

MIRSCHEL, S., LERM, M.: Zur Interpretation der Dualvariable der Mindestziel-funktionswertrestriktion im Zustandsgrenzpreismodell, Diskussionspapier Nr. 07/2004.

MIRSCHEL, S., KLINGELHÖFER, H. E., LERM, M.: Bewertung von Stimmrechts-änderungen, Diskussionspapier Nr. 03/2004.

Alle bisher erschienenen Diskussionspapiere können unter
http://www.rsf.uni-greifswald.de/bwl/paper.html
abgerufen werden.

ISSN 1437 – 6989