

Grundlagen

1 Baustoffe

1.1 Beton (Concrete)

Der Baustoff Beton setzt sich aus mehreren Komponenten zusammen:

- Zement
- Zuschlagstoff
- Wasser
- Evtl. Betonzusätze (z.B. Verflüssiger)

Je nach Mischungsverhältnis können unterschiedliche Betonfestigkeiten erzielt werden. Die folgende Tabelle zeigt ein Beispiel für die Zusammensetzung von Betonen unterschiedlicher Festigkeit:

Festigkeitsklasse	C20/25		C50/60	
	Masse (kg)	Volumen (l)	Masse (kg)	Volumen (l)
Zement	295	95,0	416	134,1
Flugasche	30	10,7	-	-
Wasser	190	190	125	125
Fließmittel	-	-	13	10,8
Poren	-	15	-	15
Zuschlag 0/2	660	249	685	264
Zuschlag 2/8	584	220	401	135
Zuschlag 8/16	584	220	770	297

Tabelle: 2 verschiedene Betonzusammensetzungen

Die Eigenschaften des Betons werden weitestgehend von den folgenden 3 Eigenschaften bestimmt:

- Zementstein (= erhärteter Zementleim = Zement + Wasser)
- Zuschlagstoff
- Verbund zwischen Zuschlagstoff und Zementstein

Der Zementstein spielt hierbei die entscheidende Rolle, der im Wesentlichen durch den Wasser-Zement-Wert und den Hydratationsgrad beeinflusst werden kann. Beim Zuschlagstoff entscheidet die Kornzusammensetzung, wofür in Deutschland sog. Regelsieblinien existieren.

Diese Thematik wird hier nicht weiter behandelt, da sie in der Betontechnologie ausführlich besprochen wird.

Die **wichtigste Eigenschaft des Betons ist seine hohe Druckfestigkeit**, die nach 28 Tagen gemessen und statistisch ausgewertet wird:

- Normalbeton: bis ca. 80 MN/m²
- Hochfester Beton mit Silicat: bis ca. 150 MN/m²

Da der Bruch eines Bauteils an seiner schwächsten Stelle passiert, wird nicht die mittlere Druckfestigkeit f_{cm} , sondern die sog. **charakteristische Druckfestigkeit f_{ck}** (95%-Fraktile) als Grundlage für die **Festlegung von Betonfestigkeitsklassen** benutzt. Je nach Probekörper unterscheidet man zwischen Zylinder- ($h = 30 \text{ cm}$, $d = 15 \text{ cm}$) und Würfel- ($l = 15 \text{ cm}$) Druckfestigkeit.

Die maßgebenden **Materialeigenschaften des Betons für die Rechnung werden im EC 2 festgelegt**, wobei die erste Zahl im Betonname die charakteristische Zylinderdruckfestigkeit und die zweite die charakteristische Würfeldruckfestigkeit angibt, z.B. C20/25.

Betonfestigkeitsklasse																	
1	f_{ck}	N/mm ²	12 ¹⁾	16	20	25	30	35	40	45	50	55	60	70	80	90	100 ²⁾
2	$f_{ck,cube}$	N/mm ²	15	20	25	30	37	45	50	55	60	67	75	85	95	105	115
3	f_{cm}	N/mm ²	20	24	28	33	38	43	48	53	58	63	68	78	88	98	108
4	f_{ctm}	N/mm ²	1,6	1,9	2,2	2,6	2,9	3,2	3,5	3,8	4,1	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,2
5	$f_{ctk,0,05}$	N/mm ²	1,1	1,3	1,5	1,8	2,0	2,2	2,5	2,7	2,9	3,0	3,1	3,2	3,4	3,5	3,7
6	$f_{ctk,0,95}$	N/mm ²	2,0	2,5	2,9	3,3	3,8	4,2	4,6	4,9	5,3	5,5	5,7	6,0	6,3	6,6	6,8
7	$E_{cm} \cdot 10^{-3}$	N/mm ²	27	29	30	31	33	34	35	36	37	38	39	41	42	44	45
8	ϵ_{c1}	‰	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,25	2,3	2,4	2,45	2,5	2,6	2,7	2,8	2,8	2,8
9	ϵ_{cu1}	‰	3,5									3,2	3,0	2,8	2,8	2,8	2,8
10	ϵ_{c2}	‰	2,0									2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,6
11	ϵ_{cu2}	‰	3,5									3,1	2,9	2,7	2,6	2,6	2,6
12	n		2,0									1,75	1,6	1,45	1,4	1,4	1,4
13	ϵ_{c3}	‰	1,75									1,8	1,9	2,0	2,2	2,3	2,4
14	ϵ_{cu3}	‰	3,5									3,1	2,9	2,7	2,6	2,6	2,6

(NCI) ¹⁾ Die Festigkeitsklasse C12/15 darf nur bei vorwiegend ruhenden Einwirkungen verwendet werden.
²⁾ Die analytischen Beziehungen interpolieren nur bis C90/105. Die Werte für C100/115 wurden unabhängig davon festgelegt.

Analytische Beziehungen:
 Zeile 3: $f_{cm} = f_{ck} + 8$
 Zeile 4: $f_{ctm} = 0,30f_{ck}$ (2/3) für $\leq C50/60$; $f_{ctm} = 2,12 \cdot \ln [1 + (f_{cm} / 10)]$ für $> C50/60$
 Zeilen 5 und 6: $f_{ctk,0,05} = 0,7f_{ctm}$ (5 %-Quantil); $f_{ctk,0,95} = 1,3f_{ctm}$ (95 %-Quantil)
 Zeile 7: $E_{cm} = 22.000 (f_{cm} / 10)^{0,3}$ [N/mm²]; $E_{cm} = 22 \cdot (f_{cm} / 10)^{0,3}$ [GPa]
 Zeile 8: siehe Bild 3.2; $\epsilon_{c1} (\text{‰}) = 0,7 f_{cm}^{0,31} \leq 2,8$
 Zeile 9: siehe Bild 3.2, für $f_{ck} > 50$ N/mm²; $\epsilon_{cu1} (\text{‰}) = 2,8 + 27 [(98 - f_{cm}) / 100]^4$
 Zeile 10: siehe Bild 3.3, für $f_{ck} > 50$ N/mm²; $\epsilon_{c2} (\text{‰}) = 2,0 + 0,085 \cdot (f_{ck} - 50)^{0,63}$
 Zeile 11: siehe Bild 3.3, für $f_{ck} > 50$ N/mm²; $\epsilon_{cu2} (\text{‰}) = 2,6 + 35 [(90 - f_{ck}) / 100]^4$
 Zeile 12: für $f_{ck} > 50$ N/mm²; $n = 1,4 + 23,4 [(90 - f_{ck}) / 100]^4$
 Zeile 13: siehe Bild 3.4, für $f_{ck} > 50$ N/mm²; $\epsilon_{c3} (\text{‰}) = 1,75 + 0,55 [(f_{ck} - 50) / 40]$
 Zeile 14: siehe Bild 3.4, für $f_{ck} > 50$ N/mm²; $\epsilon_{cu3} (\text{‰}) = 2,6 + 35 [(90 - f_{ck}) / 100]^4$

Tabelle 3.1: Festigkeits- und Formänderungskennwerte von Beton

Das Verhalten des Betons unter Druckbeanspruchung wird mit Hilfe von Spannungs-Dehnungs-Linien angegeben. Hierbei wird unterschieden in Schnittgrößenermittlung (statische Berechnung) und Ermittlung der Querschnittstragfähigkeit (Bemessung).

Die **Spannungs-Dehnungs-Linie für die Schnittgrößenermittlung** ist im Folgenden dargestellt. Da hier der E-Modul bei statisch unbestimmten Systemen einen wesentlichen Einfluss auf die Ergebnisse haben kann, wird hier auf eine realistische Modellierung besonderer Wert gelegt. (In bestimmten Fällen kann auch eine lineare Schnittgrößenermittlung gemäß dem Hooke'schen Gesetz erfolgen.)

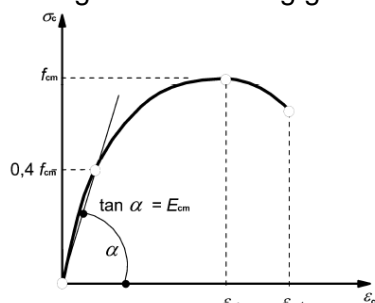


Bild: Spannungs-Dehnungs-Linie für die Schnittgrößenermittlung

Die Funktion für die Betonspannung in dem oben abgebildeten Werkstoffgesetz ist im EC 2

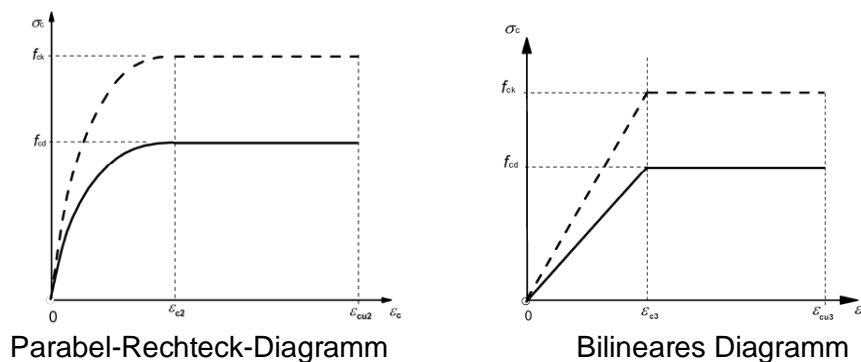
festgelegt:

$$\sigma_c = -f_{cm} \cdot \frac{k \cdot \eta - \eta^2}{1 + (k - 2) \cdot \eta} \quad (1.1.1)$$

Abkürzungen:

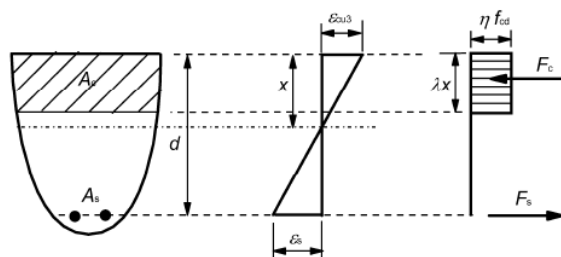
$$\eta = \epsilon_c / \epsilon_{c1} \quad k = 1,05 \cdot E_{cm} \cdot |\epsilon_{c1}| / f_{cm}$$

Für die Ermittlung der **Querschnittstragfähigkeit** spielt der E-Modul keine so große Rolle, weshalb hier mehr auf die einfache Handhabung geachtet wurde. Zur Ermittlung des **Bemessungswertes des Querschnittswiderstandes** dürfen 3 unterschiedliche Werkstoffgesetze für Beton verwendet werden, die im folgenden Bild für einen Beton C < C55/67 dargestellt sind:



Parabel-Rechteck-Diagramm

Bilineares Diagramm



Spannungsblock

Bild: Werkstoffgesetze des Betons für die Ermittlung der Querschnittstragfähigkeit

Für alle drei Werkstoffgesetze wird die Obergrenze der Betondruckspannung mit dem Designwert $f_{cd} = \alpha_{cc} \cdot f_{ck} / \gamma_c$ festgelegt. Hierbei berücksichtigt der Faktor $\alpha_{cc} = 0,85$ die Abnahme der Druckfestigkeit unter lang andauernder Belastung. Die Grenzwerte der Dehnungen können der obigen Tabelle entnommen werden.

Funktion der Parabel:

$$\sigma_c = f_{cd} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] \quad (1.1.2)$$

Gerade in der bilinearen Funktion:

$$\sigma_c = f_{cd} \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c3}} \quad (1.1.3)$$

Spannungsblock:

$$\begin{aligned} \text{bis C50/60:} & \quad \eta = 1,0 \dots \lambda = 0,80 & (1.1.4) \\ \text{ab C 55/67:} & \quad \eta = 1,0 - (f_{ck} - 50)/200 \dots \lambda = 0,8 - (f_{ck} - 50)/400 \end{aligned}$$

Standardmäßig wird mit dem **Parabel-Rechteck-Diagramm** gerechnet, das bilineare Diagramm findet selten Anwendung. Speziell für **unregelmäßige Betondruckzonen**, für die eine Integration der Betondruckspannung zur Ermittlung der Resultierenden mit dem Parabel-Rechteck-Diagramm sehr aufwändig wird, ist der sog. **Spannungsblock** vorgesehen. Hierbei ist darauf zu achten, dass für eine zum Druckrand hin abnehmende Druckzonenbreite die ermittelte Betondruckkraft pauschal um 10 % zu reduzieren ist.

1.2 Betonstahl (www.isb-ev.de)

Heute gibt es fast nur noch Betonstahl mit der charakteristischen Fließgrenze (95%-Fraktil) von 500 MN/m². Folgende Formen werden momentan von den Stahlherstellern angeboten:

- Betonstabstahl (∅ = 6, 8 10, 12, 14 16, 20, 25, 28, 32, 40 mm) B 500 A/B
- Betonstahlmatten (∅ = 6 bis ∅ = 14 mm) B 500 A/B
- Betonstahl in Ringen (bis ∅ = 16 mm) B 500 A/B

Matten werden in verschiedenen Formen als fertige Matten aus **kaltverformtem geripptem** Stahl im Normalfall mit **Durchmessern bis 8 mm** geliefert. Man unterscheidet hierbei **R-Matten**, bei denen das Verhältnis von Quer- zu Längsbewehrung 0,2 (Querdehnzahl von Beton = 0,2) beträgt, und **Q-Matten**, bei den dieses Verhältnis bei 1,0 liegt. R-Matten werden deshalb vorwiegend bei 1-achsiger, Q-Matten bei 2-achsiger Lastabtragung verwendet.

Betonstabstahl wird meist aus produktionstechnischen Gründen **warmverformt** hergestellt. Warmverformter Stahl besitzt ein größeres Verformungsvermögen (Duktilität), als kaltverformter Stahl, deshalb unterscheidet man zwischen **normalduktilen(A)** und **hochduktilen(B)** Stahl.

Für den Betonstahl sind die für die Berechnung wichtigsten Eigenschaften in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

	B 500 A	B 500 A	B 500 B	B 500 B
	Betonstahl	Betonstahlmatten	Betonstahl	Betonstahlmatten
Duktilität	normal		hoch	
Streckgrenze f_{yk} (MN/m ²)	500		500	
Verhältnis f_y / f_{yk} f_y = tatsächl. Streckgrenze	-		<= 1,3	
Verhältnis f_{tk} / f_{yk}	1,05		1,08	
Stahldehnung unter Höchstlast ϵ_{uk} (o/oo)	25		50	
Ermüdungsfestigkeit (MN/m ²)	215	100	215	100
Wärmedehnzahl α (1/K)	0,00001			
Elastizitätsmodul E_s (MN/m ²)	200000			

Tabelle: Eigenschaften der Betonstähle

Wie man sieht, unterscheiden sich normal- und hochduktiler Stahl hauptsächlich in der Bruchdehnung (25‰ bzw. 50‰), was aber nur bei der Schnittgrößenermittlung ausgenutzt werden darf. Genau wie beim Beton existieren auch für den Betonstahl unterschiedliche Spannungs-Dehnungs-Linien für die Schnittgrößenermittlung und die Bemessung:

Kennzeichnung: Betonstahl B500A durch **drei Rippenreihen** (s. Abb.)
 Betonstahl B500B durch **zwei oder vier Rippenreihen** (s. Abb.)

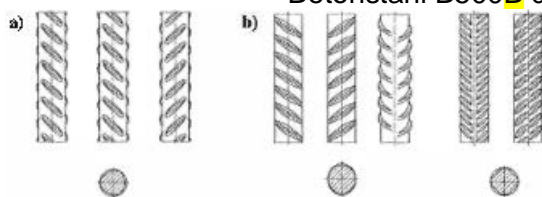


Bild: Kennzeichnung von Betonstahl: a) B500A b) B500B

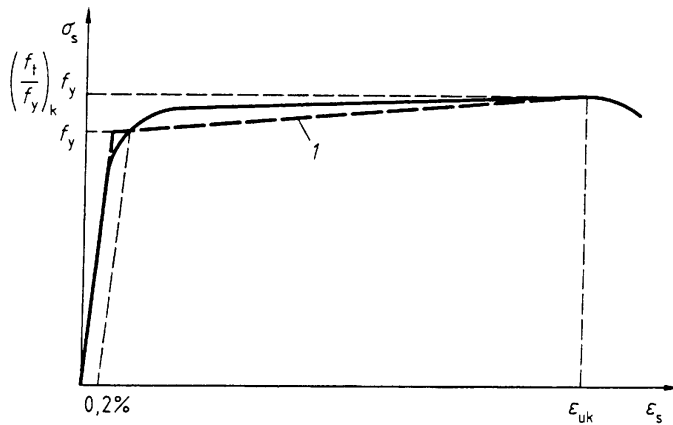


Bild: Spannungs-Dehnungs-Linie von Betonstahl für die **Schnittgrößenermittlung**
 1 = idealisierter Verlauf

Das Werkstoffgesetz für die Bemessung ist im folgenden Bild dargestellt. Es besteht aus 2 Geraden, wobei der Anstieg der oberen (2) näherungsweise vernachlässigt werden darf, d.h. die obere Gerade kann als Horizontale (3) mit dem Bemessungswert $f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s$ angenommen werden. Die steile Gerade repräsentiert das Hooke'sche Gesetz, d. h. die Steigung der Geraden entspricht dem E-Modul.

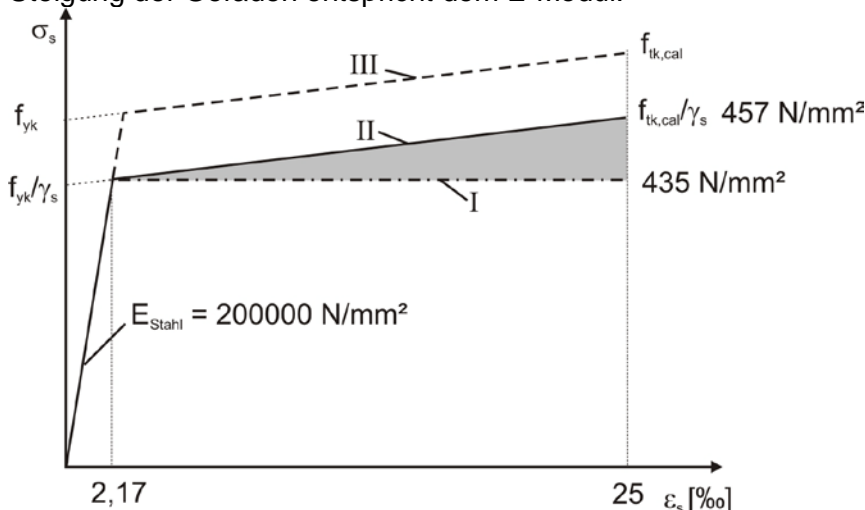


Bild: Materialgesetz für Betonstahl für die **Querschnittsbemessung**
 III = idealisierter Verlauf II = Verlauf für die Bemessung
 I = Vereinfachung für die Bemessung

Für die **Querschnittsbemessung** gilt:

$$f_{tk,cal} = 525 \cdot N/mm^2 \quad (1.2.1)$$

$$\epsilon_{su} = 0,025 \quad (1.2.2)$$

Bemessungswert der Fließspannung:

$$f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s \quad (1.2.3)$$

Bemessungswert der Zugfestigkeit:

$$f_{td,cal} = f_{tk,cal} / \gamma_s \quad (1.2.4)$$

Lage des Knickpunktes (Fließdehnung):

$$\epsilon_{yd} = f_{yd} / E_s = 0,002174 \quad (1.2.5)$$

Stahlspannung unterhalb der Fließgrenze:

$$\sigma_s = E_s \cdot \epsilon_s \quad (1.2.6)$$

Stahlspannung vereinfacht nach Gerade I:

$$\sigma_s = f_{yd} \quad (1.2.7)$$

Stahlspannung nach Gerade II:

$$\sigma_s = f_{yd} + \frac{f_{td,cal} - f_{yd}}{\epsilon_{su} - \epsilon_{yd}} \cdot (\epsilon_s - \epsilon_{yd}) \quad (1.2.8)$$

2 Verbund zwischen Beton und Stahl

Eine wesentliche Voraussetzung für das Funktionieren eines Stahlbetonbauteils ist der Verbund zwischen Beton und Stahl, d.h. die Kraftübertragung zwischen Beton und Stahl muss sichergestellt sein.

Das folgende Bild zeigt die Verhältnisse bei einem Ausziehversuch eines Stabes: Die Einleitung der Stabkraft in den Beton (und damit die Verbundspannung f_{bd}) ist nicht gleichmäßig über die Stablänge verteilt. Für die Rechnung ist das unerheblich, wenn man mit einer mittleren Verbundspannung rechnet, deren Integral über die zylinderförmige Stabfläche (= Stablänge x Umfang des Stabes) die gleiche Kraft ergibt.

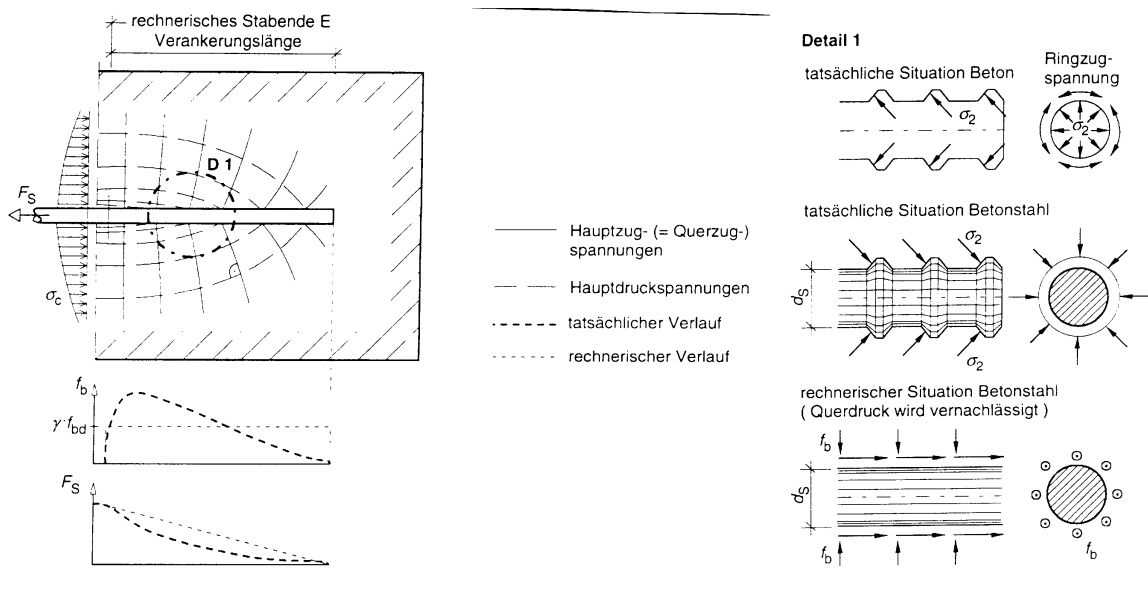


Bild: Ausziehversuch zur Bestimmung der rechnerischen Verbundspannung

Es handelt sich hierbei um einen Scherverbund, d.h. man charakterisiert die Verbundgüte über den Zusammenhang zwischen lokaler Schubspannung und dem entstehenden Schlupf. Dieser Zusammenhang wird durch Messungen bei einem Ausziehversuch festgelegt für einen maximalen Schlupf von z.B. 0,1 mm. Das Resultat ist der Bemessungswert der Verbundfestigkeit, der im EC 2 festgelegt ist:

$$f_{bd} = 2,25 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot f_{ctd}$$

$$f_{ctd} = \alpha_{ct} \cdot f_{ctk,0,05} / \gamma_c$$

$$\alpha_{ct} = 1,0$$

- η_1 ein Beiwert, der die Qualität der Verbundbedingungen und die Lage der Stäbe während des Betonierens berücksichtigt.
 = 1,0 bei „guten“ Verbundbedingungen;
 = 0,7 für alle anderen Fälle sowie für Stäbe in Bauteilen, die im Gleitbauverfahren hergestellt wurden, außer es können „gute“ Verbundbedingungen nachgewiesen werden;
- η_2 ein Beiwert zur Berücksichtigung des Stabdurchmessers
 = 1,0 für $\varnothing < 32$ mm sonst = $(132 - \varnothing)/100$
- f_{ctd} Bemessungswert der Betonzugfestigkeit

Diese Verbundspannung wird durch verschiedene Faktoren beeinflusst:

- Stahlgüte und Rippenausbildung des Stahls
- Betongüte und Betonzusammensetzung
- **Betondeckung**
- Stabdurchmesser
- Lage des Stabes beim Betonieren (**Verbundbereich: I = gut II = schlecht**).

Als Beispiel kann die Ermittlung des Grundwertes der Verankerungslänge $l_{b,rqd}$ eines Stabes für eine bestimmte Kraft betrachtet werden:

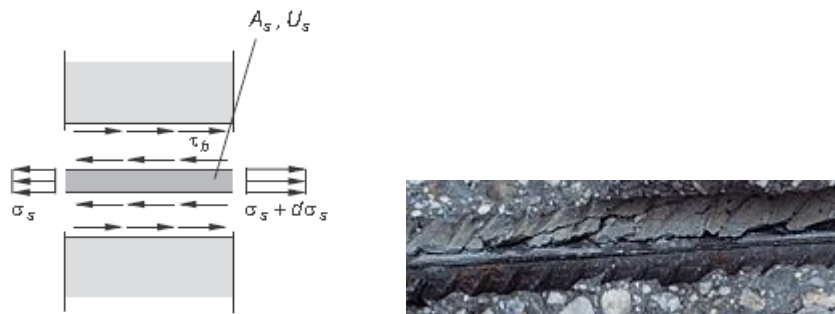


Bild: Gleichgewicht am Stab, max. $\tau_b = f_{bd}$

Gleichgewicht in horizontaler Richtung: $\sum H = 0: f_{bd} \cdot u_s \cdot l_b = \Delta \sigma_s \cdot A_s$

Da die Stahlspannung am Stabende auf 0 fällt ($\sigma_s = 0$), weil die gesamte Stahlkraft auf den Beton übergehen soll, kann für $\Delta \sigma_s = \sigma_s$ gesetzt werden.

Einsetzen folgender Werte ergibt $l_{b,rqd}$: $u_s = \pi \cdot d_s \quad A_s = \pi \cdot \frac{d_s^2}{4}$

Grundwert der Verankerungslänge:

$$l_{b,rqd} = \frac{\sigma_{sd} \cdot d_s}{f_{bd} \cdot 4}$$

Der maximal mögliche Wert für σ_{sd} ist f_{yd} .

3 Prinzipien des Stahlbetons an Beispielen

3.1 Zentrisch gezogener Stahlbetonstab

3.1.1 Ungerissener Zustand (Zustand I)

Für einen ungerissenen Stahlbetonzugstab gilt das **Hooke'sche Gesetz**, d.h. die Spannungen sind proportional zu den Dehnungen. Abgesehen von Krafteinleitungsbereichen, innerhalb derer ein gewisser Teil der Kraft über Verbund in den Beton übertragen wird, existiert eine gleichmäßige Dehnungs- und somit auch Spannungsverteilung in Beton und Stahl, man spricht von **idealem Verbund**: $\varepsilon_s = \varepsilon_c = \varepsilon$

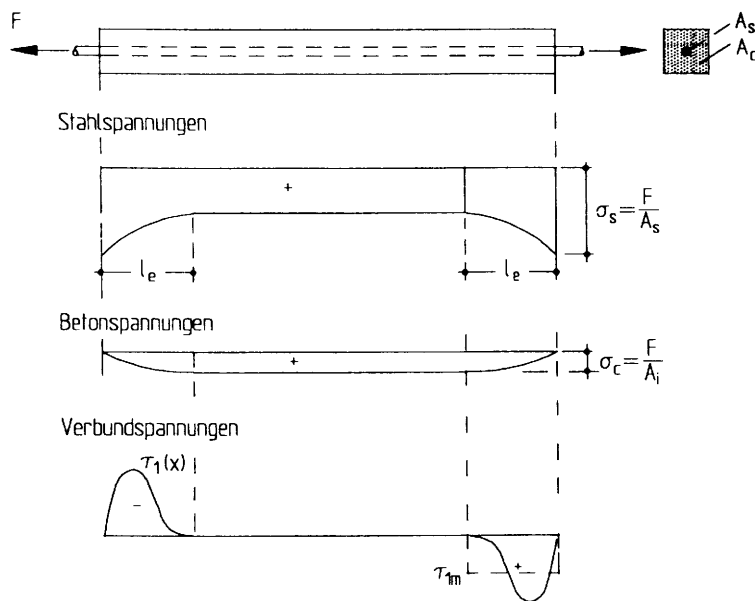
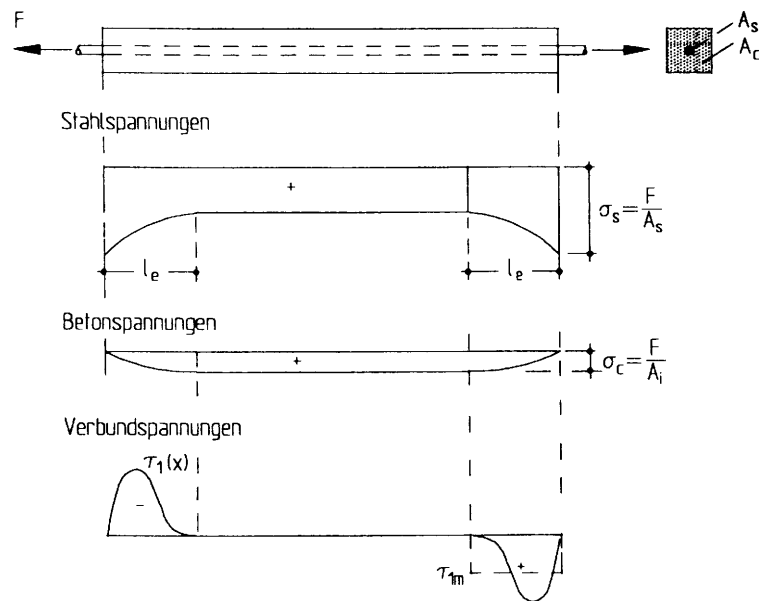


Bild: Stahlbetonzugstab im Zustand I

Bezeichnungen:

A_s	Querschnittsfläche des Stahls im Querschnitt
A_c	Bruttoquerschnittsfläche des Betons incl. Stahlquerschnitt
$A_{cn} = A_c - A_s$	Nettoquerschnittsfläche des Betons ohne Stahlquerschnitt
$\alpha_e = E_s / E_{cm}$	Verhältnis der E-Moduli von Stahl und Beton
$\rho = A_s / A_{cn}$	Geometrischer Bewehrungsgrad



Idealer Verbund: $\varepsilon_s = \varepsilon_c = \varepsilon$ (3.1.1)

Betonspannung: $\sigma_c = E_{cm} \cdot \varepsilon_c$ (3.1.2)

Stahlspannung: $\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s$ (3.1.3)

Gleichgewicht: $\sigma_c \cdot A_{cn} + \sigma_s \cdot A_s = N_{Ed}$ (3.1.4)

(1),(2),(3) in (4): $\varepsilon \cdot E_{cm} \cdot A_{cn} + \varepsilon \cdot E_s \cdot A_s = N_{Ed}$

daraus folgt: $\varepsilon \cdot E_{cm} \cdot A_{cn} \cdot \left(1 + \frac{E_s \cdot A_s}{E_{cm} \cdot A_{cn}}\right) = N_{Ed}$

$\sigma_c \cdot A_{cn} \cdot (1 + \alpha_e \cdot \rho) = N_{Ed}$ (3.1.5)

ideeller Betonquerschnitt: $A_i = A_{cn} \cdot (1 + \alpha_e \cdot \rho)$ (3.1.6)

Betonspannung (5) mit (6): $\sigma_c = N_{Ed} / A_i$ (3.1.7)

Stahlspannung (3):(2)+(1): $\sigma_s = \sigma_c \cdot \alpha_e$ (3.1.8)

Bei **Stahlbetonbauteilen** liegt der Stahlanteil im Querschnitt meist unter 2 %, weswegen im Zustand I anstatt mit ideellen oder Nettoquerschnitten genauso gut mit **Bruttoquerschnitten** gerechnet werden kann, ohne einen großen Fehler zu machen: $\rho = A_s / A_c$

3.1.2 Gerissener Zustand (Zustand II)

Durch Steigerung der Last wird an einer zufälligen Stelle im Stahlbetonzugstab die Betonzugfestigkeit f_{ctm} überschritten, wodurch ein **Einzelriss** entsteht. Deshalb muss jetzt die gesamte Kraft N_{Ed} vom Stahl aufgenommen werden, d.h. die Traglast des Stabes hängt nur noch vom Stahl ab:

Stahlspannung: $\sigma_s = N_{Ed} / A_s$ (3.1.9)

Betonspannung: $\sigma_c = 0$ (3.1.10)

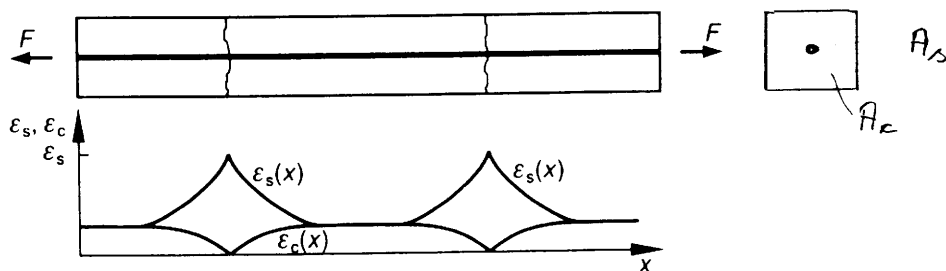


Bild: Dehnungsverteilung bei Einzelrissbildung

Neben dem Riss wird ein Teil der Kraft im Stahl über den Verbund wieder in den Beton eingeleitet, bis an einer anderen Stelle ein weiterer Riss entsteht. Dieser Vorgang setzt sich so lange fort, bis das sog. **abgeschlossene Rissbild** erreicht ist.

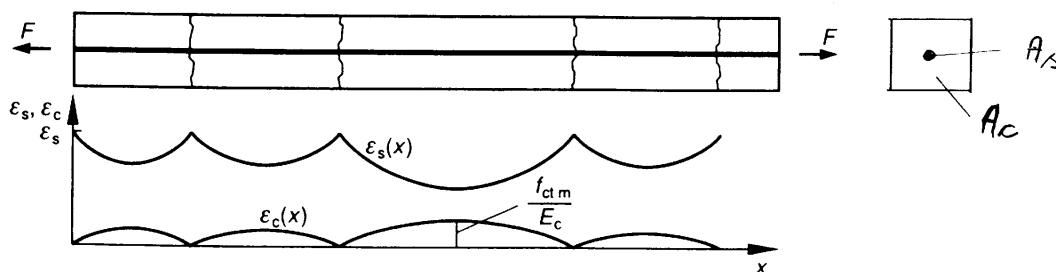


Bild: Dehnungsverteilung beim abgeschlossenen Rissbild

Zwischen den Rissen des abgeschlossenen Rissbildes kann sich der Beton noch an der Aufnahme von Kräften beteiligen, man spricht von der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen (tension stiffening = Zugversteifung). Die Berücksichtigung dieses Effektes ist insbes. bei Verformungsberechnungen (z.B. zur Berücksichtigung der Theorie II. Ordnung) wichtig.

3.2 Zentrisch gedrückter Stahlbetonstab

Auch beim Stahlbetondruckstab wird ein **idealer Verbund** angenommen, d.h. es gilt ebenfalls die **Verbundbedingung**: $\varepsilon_s = \varepsilon_c = \varepsilon = \Delta l / l$ (3.2.1)

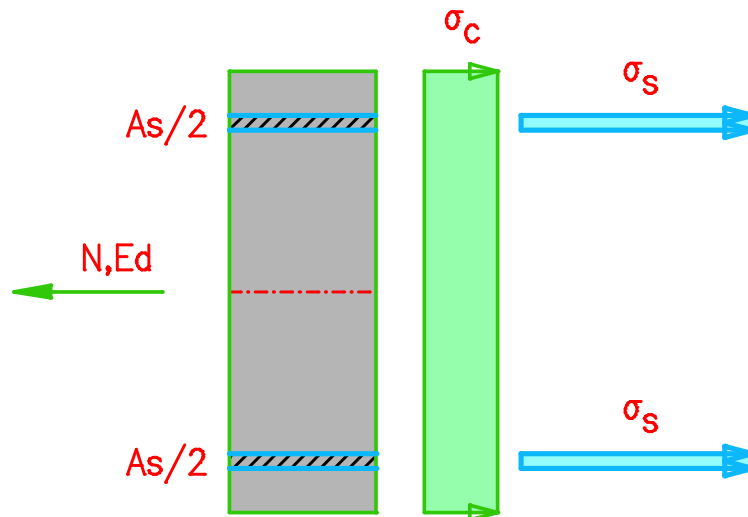


Bild: Zentrisch gedrückter Stahlbetonstab

Gleichgewicht am Stab: $\sigma_s \cdot A_s + \sigma_c \cdot A_{cn} = N_{Ed}$ (3.2.2)

Die maximale Traglast ergibt sich, wenn die Beton- und Stahlspannung ihren Maximalwert erreichen:

$$f_{yd} \cdot A_s + f_{cd} \cdot A_{cn} = N_{Ed} \quad (3.2.3)$$

Die Beton- und Stahlspannungen werden über die Dehnungen aus dem entsprechenden Materialgesetz ermittelt.

Auch hier gilt näherungsweise: $A_c \cong A_{cn}$

3.3 Stahlbetonstab unter Biegung

3.3.1 Ungerissener Zustand (Zustand I)

Der Stahlbetonbalken gilt nur so lange als ungerissen, wie die Randspannung die Betonzugfestigkeit nicht überschreitet:

$$\sigma_c \leq f_{ctm} \quad (3.3.1)$$

Da die Beton- und Stahlspannungen im **ungerissenen Zustand** weit unter den Höchstwerten liegen, gilt näherungsweise hierfür das **Hooke'sche Gesetz**. Die Spannungen in Stahl und Beton können daher mit den bekannten Methoden ermittelt werden:

$$\sigma = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

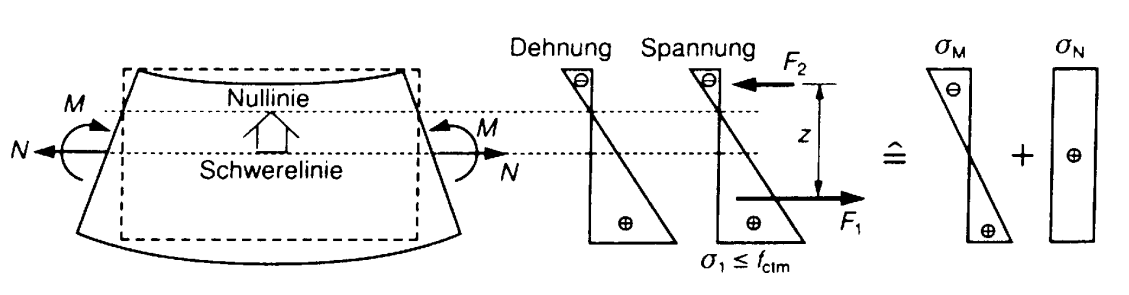


Bild: Balken unter Biegung und Zug

Die Stahleinlagen im Querschnitt vergrößern das Trägheitsmoment und damit die Biegesteifigkeit des Querschnitts, was durch Berechnung mit ideellen Querschnittswerten

berücksichtigt werden kann:

$$\sigma_c = \frac{N_x}{A_i} + \frac{M_y}{I_{yi}} \cdot z \quad (3.3.2)$$

Zugehörige Stahlspannung:

$$\sigma_s = \alpha_e \cdot \sigma_c \quad (3.3.3)$$

Da der Einfluss der Bewehrung bei gewöhnlichen Bewehrungsgraden vernachlässigbar klein ist, kann grundsätzlich mit **Bruttoquerschnittswerten** gerechnet werden: $A_i \cong A_c$ $I_{yi} \cong I_y$

Der Abstand zwischen Zug- und Druckkraft im Querschnitt wird als **innerer Hebelarm z** bezeichnet (beim Rechteckquerschnitt z.B. ist $z = 2/3h$).

3.3.2 Gerissener Zustand (Zustand II)

Wenn die Betonzugfestigkeit im Bauteil überschritten wird, dann reduziert sich der Widerstand leistende Querschnitt auf die Biegedruckzone und den Stahl in der Zugzone. Es stellt sich somit ein anderes Kräftegleichgewicht im Querschnitt her. Bei reiner Biegebelastung z.B. muss die Betondruckkraft gleich der Stahlzugkraft sein (siehe Bild).

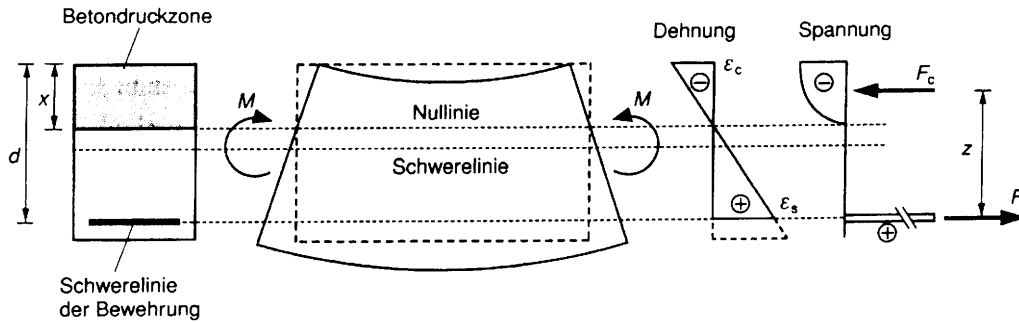


Bild: Stahlbetonquerschnitt im gerissenen Zustand

Da die **Zugzone rechnerisch komplett ausfällt**, kann ein Kräftegleichgewicht nur entstehen, wenn der Stahl eine größere Dehnung bekommt, d.h. die Nulllinie verschiebt sich nach oben. Dadurch wird der innere Hebelarm z größer als im Zustand I. Es ist offensichtlich, dass der Querschnitt der Stahleinlage im Gegensatz zum Zustand I jetzt eine große Rolle spielt.

Eine Veränderung des Kräftegleichgewichts wird genau wie im Zustand I durch eine zusätzliche Normalkraft hervorgerufen. Das folgende Bild verdeutlicht die Veränderungen für reine Biegung und Biegung mit Zug- oder Druckkraft:

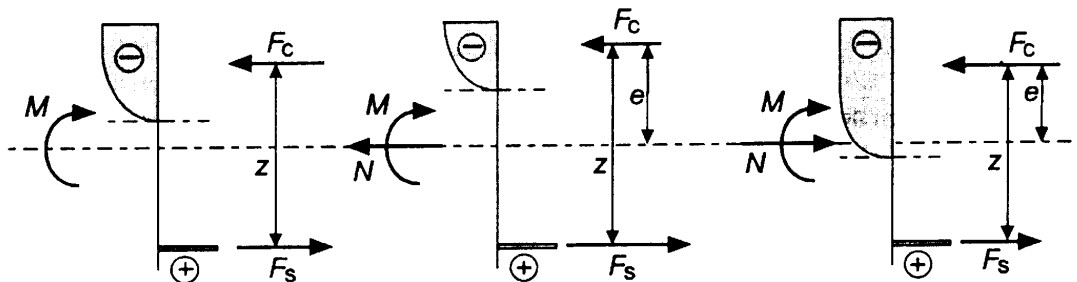
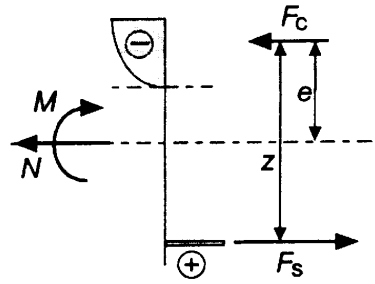


Bild: Einfluss der Normalkraft auf das innere Kräftegleichgewicht



Eine Auswertung der Gleichgewichtsbedingungen im Querschnitt für den **allgemeinen Fall** (Bild oben) ergibt folgendes:

$$\sum H = 0 \quad F_s - F_c - N = 0 \quad (3.3.4)$$

$$\sum M_{Stahl} = 0 \quad -F_c \cdot z + M - N \cdot z_s = 0 \quad (3.3.5)$$

z_s Abstand von der Schwerlinie zum Stahlschwerpunkt
 z innerer Hebelarm, mit guter Näherung $z = 0,90 \cdot d$ (3.3.6)

Durch Auswertung der Gleichgewichtsbedingungen 3.3.4 und 3.3.5 kann man bei bekanntem innerem Hebelarm sofort die erforderliche Stahlzugkraft und somit die erforderliche Stahleinlage berechnen:

Moment bezogen auf den Stahlschwerpunkt: $M_s = M - N \cdot z_s$ (3.3.7)

3.3.7 in 3.3.5 eingesetzt ergibt: $F_s = \frac{M_s}{z} + N$ (3.3.8)

Wenn man direkt mit den Schnittgrößen M und N zur Stahlzugkraft kommen will (ohne M_s zu berechnen), dann muss F_c aus 3.3.4 in 3.3.5 eingesetzt werden:

$$(N - F_s) \cdot z + M - N \cdot z_s = 0 \quad \text{daraus folgt:} \quad N \cdot z - F_s \cdot z + M - N \cdot z_s = 0$$

$$N \cdot (z - z_s) + M = F_s \cdot z$$

$$F_s = \frac{M}{z} + N \cdot \left(1 - \frac{z_s}{z}\right) \quad (3.3.9)$$