

Bemessung für Querkraft

1. Einleitung

1.1 Bauteile im ungerissenen Zustand (Zustand I)

Im ungerissenen Zustand verhält sich ein Stahlbetonbalken wie ein homogenes Bauteil, d.h. die **Normal- und Schubspannungen** können entsprechend der technischen Biegelehre berechnet werden zu:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A_c} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z \qquad \tau_{xy} = \frac{Q_z \cdot S_y}{I_y \cdot b} \qquad (1.1)$$

Normal- und Schubspannungen sind reine Hilfsgrößen und dienen nur der einfachen und übersichtlichen Berechnung. In Wirklichkeit existieren nur senkrecht zueinander stehende **Hauptspannungen** im Bauteil, die aus den Normal- und Schubspannungen berechnet werden können:

$$\sigma_{1/2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \tan(2\varphi) = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x} \qquad (1.2)$$

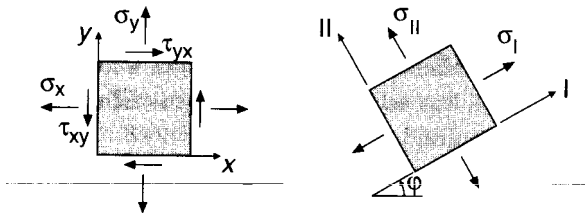


Bild: Spannungen am Balkenelement

Das folgende Bild zeigt einen Balken im Zustand I mit den zugehörigen Hauptspannungen, deren Winkel nach (1.2) an jedem Punkt des Balkens berechnet werden können:

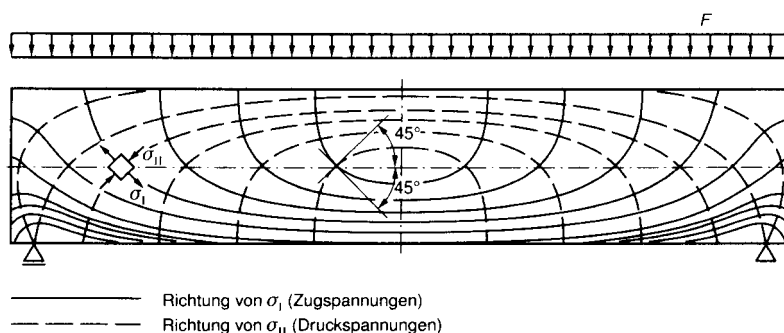


Bild: Balken im Zustand I mit Hauptspannungen

Man kann erkennen, dass in Balkenmitte die Hauptzugspannungen horizontal verlaufen, da dort die Querkraft null ist. Wenn die Betonzugfestigkeit überschritten wird, muss in Richtung der Hauptzugspannungen Stahl eingelegt werden. In Balkenmitte entspricht dies exakt der Biegebemessung, in anderen Bereichen ist es auf Grund des Zugtrajektorienverlaufs praktisch nicht möglich.

1.2 Bauteile im gerissenen Zustand (Zustand II)

1.2.1 ohne Querkraftbewehrung

Das folgende Bild zeigt ein Lastabtragungsmodell für einen Balken ohne Schubbewehrung: Bei einer Belastung durch Einzellasten bildet sich ein **Sprengwerk** aus, bei einer gleichmäßigen Belastung ein **Gewölbe** mit einem Druckbogen. In beiden Fällen wird das Gleichgewicht durch die Biegezugbewehrung gewährleistet, die ein Zugband bildet:

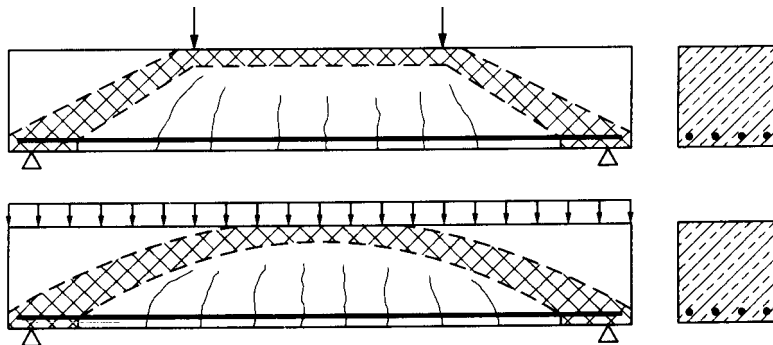


Bild: Sprengwerk-/Gewölbewirkung bei Biegebauteilen

Die in den folgenden Bildern gezeigten Versagensarten können auftreten:

Biegeschubbruch:

Der kritische Schubriss dringt bis in die Druckzone vor, was zu einem schlagartigen Versagen der Druckzone führt.

Stegzugversagen:

Bei profilierten Trägern mit dünnen Stegen und ausgeprägten Gurten kann die Hauptzugspannung im Steg die Betonzugfestigkeit überschreiten, während der Zuggurt noch ungerissen ist (*Diagonal- oder Stegrissbildung*). Der Riss setzt sich in den Zug- und Druckgurt fort und führt ähnlich dem Biegeschubversagen zum schlagartigen Bruch.

Verankerungsversagen:

Bei ungenügender Verankerung der Bewehrung über dem Auflager kann es durch einen entlang der Zugbewehrung fortschreitenden Riss (*Dübelriss*) und ein damit verbundenes Absprennen der Betonschale unterhalb der Bewehrungslage mit dem damit einhergehenden Anstieg der Betonstahlzugkraft im Auflagerbereich zum plötzlichen Herausziehen der Bewehrungsstäbe kommen.



Bild: Biegeschubbruch

Stegzugversagen

Verankerungsversagen

Nach der Rissbildung unterteilt sich der Balken unterhalb des Druckbogens in lauter Abschnitte, die als Zähne interpretiert werden können (Zahnmodell nach Kani, Reineck):

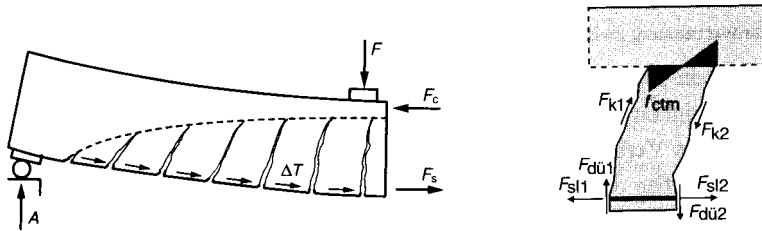


Bild: Zahnbildung nach Aufreißen

Der Kraftfluss im Balken kann durch Betrachtung eines einzelnen Zahnes erklärt werden: Eine Weiterleitung der Kräfte wird im Wesentlichen durch die folgenden 3 Mechanismen sichergestellt:

- Kornverzahnung zwischen den Rissufern, F_k (vgl. Bild unten)
- Verdübelung durch die Längsbewehrung $F_{dü}$ (vgl. Bild unten)
- Einspannung in den Druckbogen

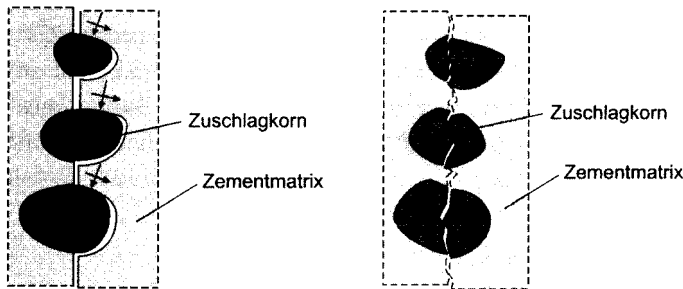


Bild: Kornverzahnung für normalfesten und hochfesten Beton

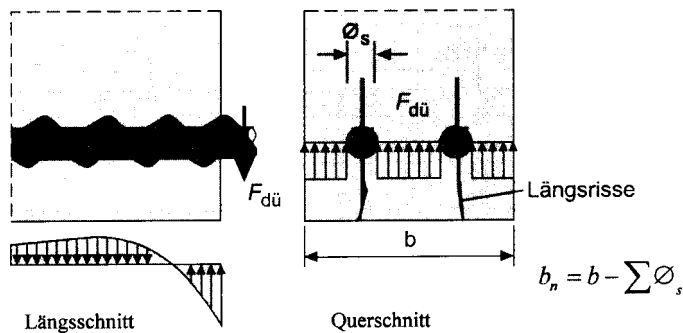


Bild: Dübelwirkung der Längsbewehrung

Außer den oben genannten Mechanismen hat man weitere Effekte durch Versuche festgestellt:

- Je kleiner die Bauteilhöhe ist, desto größer ist die Biegezugfestigkeit des Betons (Maßstabeffekt). Dies wird durch einen Faktor im EC 2 berücksichtigt.
- Eine Drucknormalkraft erhöht die Querkrafttragfähigkeit, da der Druckbogen dadurch größer und die Rissbreiten kleiner werden, was die o.g. Mechanismen verbessert. Dies wird ebenfalls im EC 2 über die Normalspannung berücksichtigt.

1.2.2 mit Querkraftbewehrung

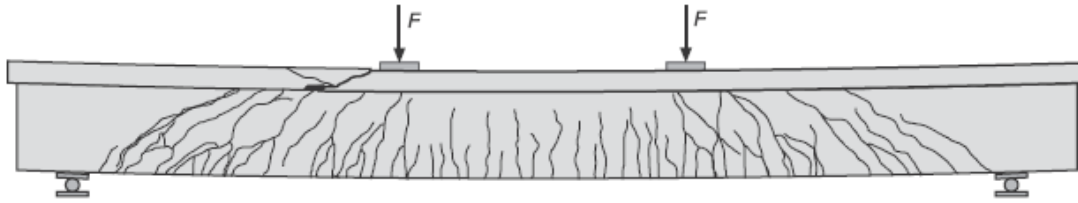


Bild: Balken unter Einzellasten mit Querkraftbewehrung aus vertikalen Bügeln

Bei Überschreiten der Betonzugfestigkeit treten in der Regel zuerst im Mittelbereich Risse auf, die logischerweise senkrecht zu den Hauptzugspannungen, d.h. hier vertikal verlaufen müssen. Diese Risse heißen Biegerisse, da sie aufgrund von Biegung entstehen (V ist zwischen den Einzellasten 0). Ein Versagen in diesem Bereich erfolgt entweder als **Biegedruck-** (Betonversagen) oder **Biegezugbruch** (Stahlversagen).

Im Bereich zwischen Auflager und Einzellast weichen die Risse wegen höherer Schubbelastung von der Senkrechten ab. Wenn die Biegebelastung nicht maßgebend für den Bruch ist, dann handelt es sich um einen **Biegeschubbruch**. Dieser entsteht entweder durch Fließen der Schubbewehrung oder durch Versagen auf Druck, was letztlich zur Einschnürung der Biegedruckzone führt (siehe Bild unten).

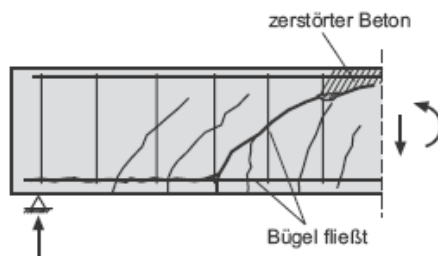


Bild: Biegeschubbruch

In Auflagernähe kommt es selten zur Rissbildung. Nur bei sehr dünnen Stegen können plötzlich Schrägrisse entstehen, weil die Betonzugfestigkeit überschritten wird. Ein Versagen in diesem Bereich heißt, je nachdem ob Beton oder Stahl versagen, **Schubdruck-** bzw. **Schubzugversagen**.

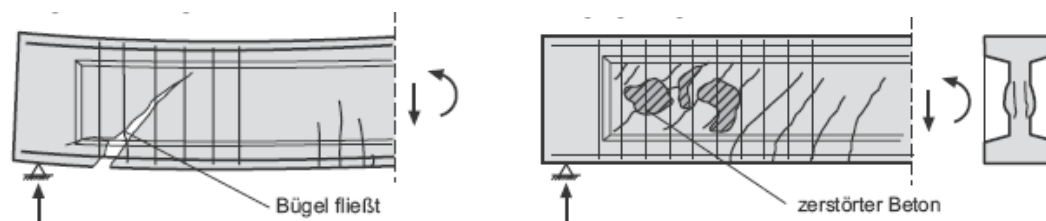


Bild: Stegzugversagen

Stegdruckversagen

Durch Analyse der Rissbilder hat Mörsch ein Fachwerkmodell zur Beschreibung des Kraftflusses im Zustand II entwickelt. Druck- und Zuggurt gewährleisten das Momentengleichgewicht der Biegebemessung (Abstand = innerer Hebelarm z), die vertikalen Zugstreben bilden die Querkraftbewehrung. Die diagonalen Druckstrebenkräfte werden vom Beton aufgenommen.

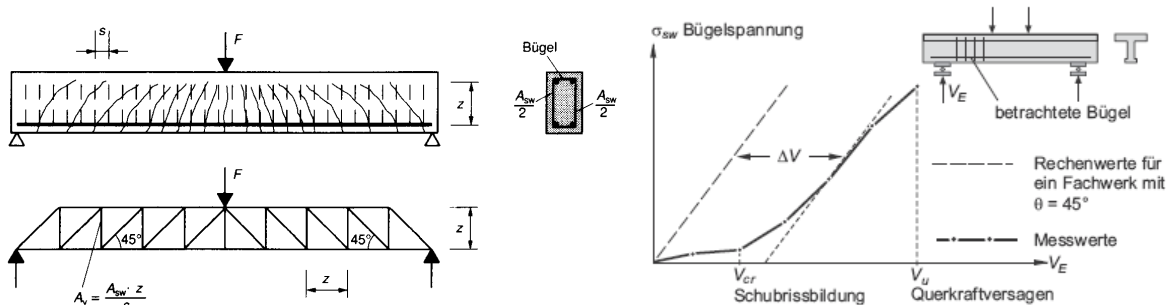


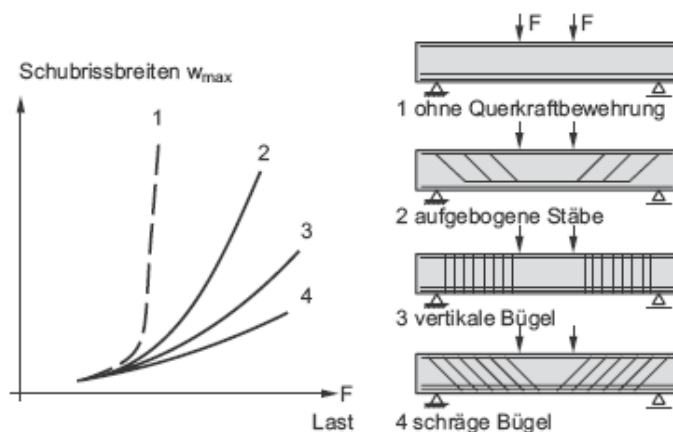
Bild: Fachwerkmodell nach Mörsch

Nach dem Modell von Mörsch wird die gesamte Querkraft der Querkraftbewehrung zugewiesen, was auf der sicheren Seite liegt, aber unwirtschaftlich ist. Die oben genannten Mechanismen der Querkraftübertragung ohne Schubbewehrung, die im Prinzip auch mit Querkraftbewehrung funktionieren, werden deshalb heute in die Berechnung mit einbezogen. Dazu stehen 2 Möglichkeiten zur Verfügung:

- Berechnung der Querkrafttragfähigkeit an einem Fachwerk mit veränderlicher Druckstrebenneigung.
- Explizite Anrechnung des Betontraganteils ΔV auf die Querkrafttragfähigkeit.

In der Norm wird mit einer veränderlichen Druckstrebenneigung gerechnet, die in Abhängigkeit von dem Betontraganteil ΔV und der Normalkraft begrenzt wird.

Das folgende Bild zeigt verschiedene Möglichkeiten der Querkraftbewehrung und deren Effektivität. Je nach verwendetem Fachwerkmodell können die Zugstreben vertikal oder schräg angeordnet werden, Schrägbewehrung kann aus Bügeln oder aufgebogener Biegezugbewehrung bestehen.



2. Nachweis auf Querkraft nach EC 2

2.1 Nachweiskonzept

Der grundsätzliche Nachweis im Grenzzustand der Tragfähigkeit ist generell gleich: Die einwirkende Querkraft muss immer kleiner oder gleich der aufnehmbaren Querkraft sein:

$$V_{Ed} \leq V_{Rd} \quad (2.1.1)$$

Die maximal aufnehmbare Querkraft hängt logischerweise entweder vom Beton oder vom Stahl ab. Je nach Nachweisziel werden die folgenden Grenzwerte festgelegt:

$V_{Rd,c}$	Bemessungswert der aufnehmbaren Querkraft für Bauteile ohne Querkraftbewehrung.
$V_{Rd,s}$	Bemessungswert der aufnehmbaren Querkraft aufgrund der Bewehrung.
$V_{Rd,max}$	Bemessungswert der aufnehmbaren Querkraft aufgrund der Betondruckstrebe.

Für $V_{Ed} < V_{Rd,c}$ ist rechnerisch keine Schubbewehrung erforderlich. Dies gilt für Platten und untergeordnete Bauteile wie z.B. für einen Sturz mit $l < 2,0$ m. In allen anderen Bauteilen muss eine Mindestschubbewehrung angeordnet werden.

Die Bewehrung ist so zu dimensionieren, dass $V_{Ed} < V_{Rd,s}$ bleibt.

$V_{Rd,max}$ darf an keiner Stelle des Bauteils überschritten werden.

2.2 Bauteile ohne Querkraftbewehrung

2.2.1 Bauteile im Zustand II (gerissen)

Wie schon in der Einführung erläutert müssen in der hauptsächlich empirisch ermittelten Formel für $V_{Rd,c}$ die Betongüte (für Druck- und Zugfestigkeit), die Normalspannung, die Biegezugbewehrung und der Maßstabeffekt eingehen:

$$V_{Rd,c} = [C_{Rd,c} \cdot k \cdot (100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck})^{1/3} + k_1 \cdot \sigma_{cp}] \cdot b_w \cdot d \dots \geq \dots V_{Rd,c,min} \quad (2.2.1)$$

$$V_{Rd,c,min} = [v_{min} + k_1 \cdot \sigma_{cp}] \cdot b_w \cdot d \quad (2.2.2)$$

$$v_{min} = \left(\frac{\kappa_1}{\gamma_c} \cdot \sqrt{k^3 \cdot f_{ck}} \right) \quad f_{ck} \text{ in MN/m}^2 \quad (2.2.3)$$

$$C_{Rd,c} = \frac{0,15}{\gamma_c} \quad k_1 = 0,12$$

$$k = 1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \leq 2,0 \quad \text{Berücksichtigung der Bauteilhöhe (Maßstabeffekt), } d \text{ in cm}$$

$$\kappa_1 = 0,0525 \quad \text{für } d \leq 60 \text{ cm}$$

$$\kappa_1 = 0,0375 \quad \text{für } d \geq 80 \text{ cm, Zwischenwerte interpolieren.}$$

$$b_w \quad \text{kleinste Querschnittsbreite innerhalb der Zugzone}$$

$$\rho_l = \frac{A_{sl}}{b_w \cdot d} \leq 0,02 \quad \text{Längsbewehrungsgrad in der Zugzone}$$

$$A_{sl} \quad \text{Fläche der Zugbewehrung, die mind. um } d \text{ über den betrachteten Querschnitt hinausgeführt und dort verankert wird (siehe Bild unten).}$$

$$\sigma_{cp} = \frac{N_{Ed}}{A_c} < 0,2 \cdot f_{cd} \quad \text{Betonlängsspannung im Schwerpunkt von } A_c \text{ (=Gesamtquerschnitt)}$$

$$N_{Ed} \quad \text{Längskraft infolge äußerer Einwirkung oder Vorspannung (Druck } > 0)$$

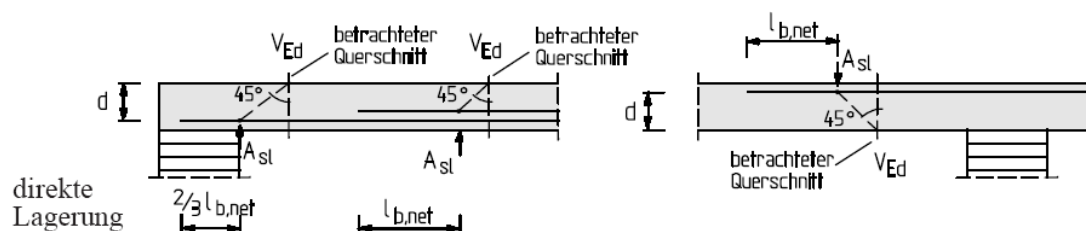


Bild: Verankerung der Zugbewehrung

Zum Vergleich die empfohlenen Werte nach EC 2:

$$C_{Rd,c} = \frac{0,18}{\gamma_c} \quad k_1 = 0,15 \quad \kappa_1 = 0,035$$

2.2.2 Bauteile im Zustand I (ungerissen)

Wenn die Betonzugspannung im Grenzzustand der Tragfähigkeit unter vorwiegend ruhender Belastung kleiner als $\alpha_{ct} \cdot f_{ctk;0,05} / \gamma_c$ ist (γ_c für unbewehrten Beton!), dann darf $V_{Rd,c}$ (außer für vorgespannte Elementdecken) nach der folgenden Gleichung berechnet werden:

$$V_{Rd,c} = \frac{I_y \cdot b_w}{S_y} \cdot \sqrt{(f_{ctd})^2 + \alpha_l \cdot \sigma_{cp} \cdot f_{ctd}} \quad (2.2.4)$$

I_y	Trägheitsmoment
S_y	Statisches Moment
$\alpha_l = 1,0$	außer bei Vorspannung mit sofortigem Verbund
$f_{ctk;0,05}$	unterer Quantilwert der Betonzugfestigkeit, maximal 2,7 MN/m ²
$f_{ctd} = \alpha_{ct} \cdot f_{ctk;0,05} / \gamma_c$	Bemessungswert der Betonzugfestigkeit ($\alpha_{ct} = 0,85$)

Das bedeutet im Prinzip, dass nach der normalen Spannungstheorie für zugfeste Werkstoffe gerechnet werden kann, da der Beton als nicht gerissen gilt.

2.2.3 Auflagnernahe Einzellasten

Bei Bauteilen mit direkter Lagerung und mit oberseitiger Eintragung einer Einzellast im Bereich von $0,5d \leq a_v < 2d$ vom Auflagerrand (oder von der Achse verformbarer Lager), darf der Querkraftanteil dieser Last V_{Ed} mit $\beta = a_v / 2d$ multipliziert werden. Diese Abminderung darf nur verwendet werden, wenn die **Längsbewehrung vollständig am Auflager verankert** ist. Für $a_v \leq 0,5d$ ist in der Regel der Wert $a_v = 0,5d$ anzusetzen.

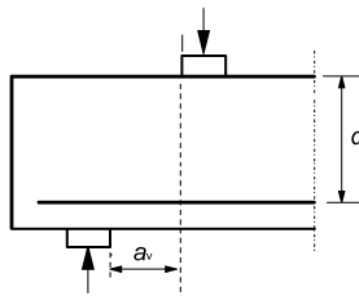


Bild: Träger mit direkter Auflagerung und Einzellast

Die ohne die Abminderung β berechnete Querkraft muss in der Regel folgende Bedingung erfüllen:

$$V_{Ed} \leq 0,5 \cdot b_w \cdot d \cdot v \cdot f_{cd} \quad (2.2.5)$$

Dabei ist v ein Abminderungsbeiwert für die Betonfestigkeit bei Schubrisen:

Für Querkraft: $v = 0,675$

Für Torsion: $v = 0,525$

Ab C55/67 sind die Werte mit $v_2 = (1,1 - f_{ck}/500)$ zu multiplizieren.

Empfohlener Wert nach EC 2: $v = 0,6 \cdot (1,0 - f_{ck}/250)$

2.3 Bauteile mit rechnerisch erforderlicher Querkraftbewehrung

Die Querkraftbewehrung biegebewehrter Bauteile erfolgt auf der Grundlage eines Fachwerkmodells mit begrenzter Druckstrebenneigung. Das folgende Bild zeigt einen Schrägschnitt parallel zur Druckstrebe mit beliebiger Druckstrebenneigung und beliebiger Neigung der Querkraftbewehrung.

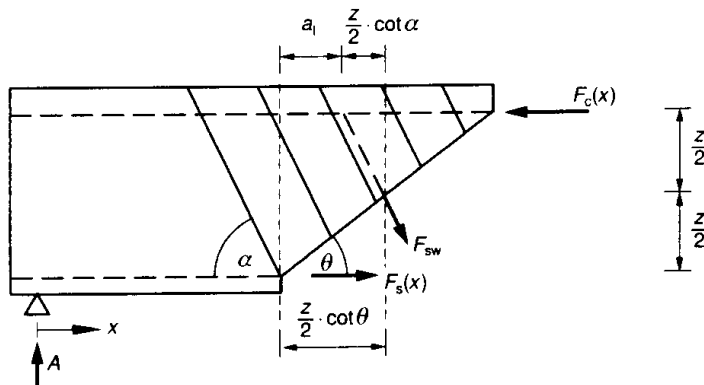


Bild: Kräftegleichgewicht am Schrägschnitt

Summe $M = 0$ um den Schnittpunkt von F_c und F_{sw} ergibt (vereinfacht für $N = 0$):

$$-F_s \cdot z + V_{Ed} \cdot a_l + M_{Ed} = 0 \text{ daraus folgt: } F_s = \frac{M_{Ed}}{z} + \frac{V_{Ed} \cdot a_l}{z} = \frac{M_{Ed}}{z} + \Delta F_{td}$$

Wie man sehr schön erkennen kann, wird die **Zugkraft F_s infolge der Querkraftbeanspruchung um $\Delta F_{td} = V_{Ed} \cdot a_l / z$ größer als bei reiner Biegung** (Biegebemessung!), die Druckkraft entsprechend kleiner.

Die aus der Biegebemessung ermittelte Bewehrung muss also um das Maß a_l verlängert werden, um die volle Zugkraft aus Biegung + Querkraft abzudecken. Man spricht hierbei von der **Zugkraftdeckung**, a_l heißt **Versatzmaß**: $a_l = \frac{z}{2} \cdot (\cot \Theta - \cot \alpha)$

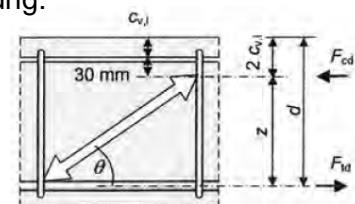
Nach EC 2 darf alternativ die aus der Querkraft resultierende Zugkraft ΔF_{td} auf die Stahlzugkraft aus der Biegebemessung aufaddiert werden. $\Delta F_{td} = \frac{V_{Ed}}{2} \cdot (\cot \Theta - \cot \alpha)$

Für den Ansatz des Hebelarms der inneren Kräfte z gelten folgende Regeln:

- Im Allgemeinen kann näherungsweise $z = 0,9 \cdot d$ angesetzt werden.
- Eine Obergrenze für z ergibt sich aus der folgenden Bedingung:

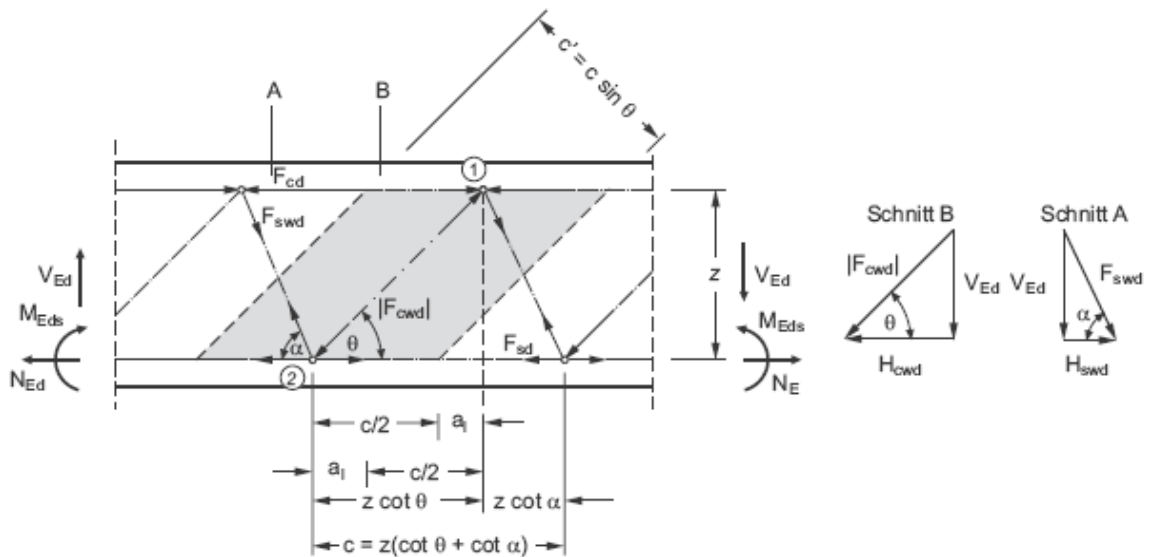
$$\max_z = d - 2 \cdot c_{v,l} \geq d - c_{v,l} - 3 \text{ cm}$$

$c_{v,l}$ = Verlegemaß der Längsbewehrung in der **Betondruckzone**.



Wenn der Querschnitt voll unter Zug steht, dann darf für z der Abstand der Zugbewehrungen angesetzt werden, wenn Bügel die Längsbewehrungen umfassen.

Anhand des folgenden Bildes erfolgt eine Herleitung der erforderlichen Schubbewehrung und der max. aufnehmbaren Querkraft infolge Druckstrebenversagen.



Geometrie:

Abstand Zug/Druckstrebe: $c = z \cdot \cot \Theta + z \cdot \cot \alpha$ (2.3.1)

Druckstrebenhöhe: $c' = c \cdot \sin \Theta$ (2.3.2)

Schnitt A durch die Zugstrebe (Bewehrung):

Gleichgewicht vertikal: $V_{Ed} = F_{swd} \cdot \sin \alpha$ (2.3.3)

Erforderliche Bewehrung: $A_{sw} = \frac{F_{swd}}{f_{ywd}} = \frac{V_{Ed}}{f_{ywd} \cdot \sin \alpha}$ (2.3.4)

Erf. Bewehrung je m Länge(cm²/m): $a_{sw} = \frac{A_{sw}}{c} = \frac{V_{Ed}}{f_{ywd} \cdot z \cdot \sin \alpha \cdot (\cot \Theta + \cot \alpha)}$ (2.3.5)

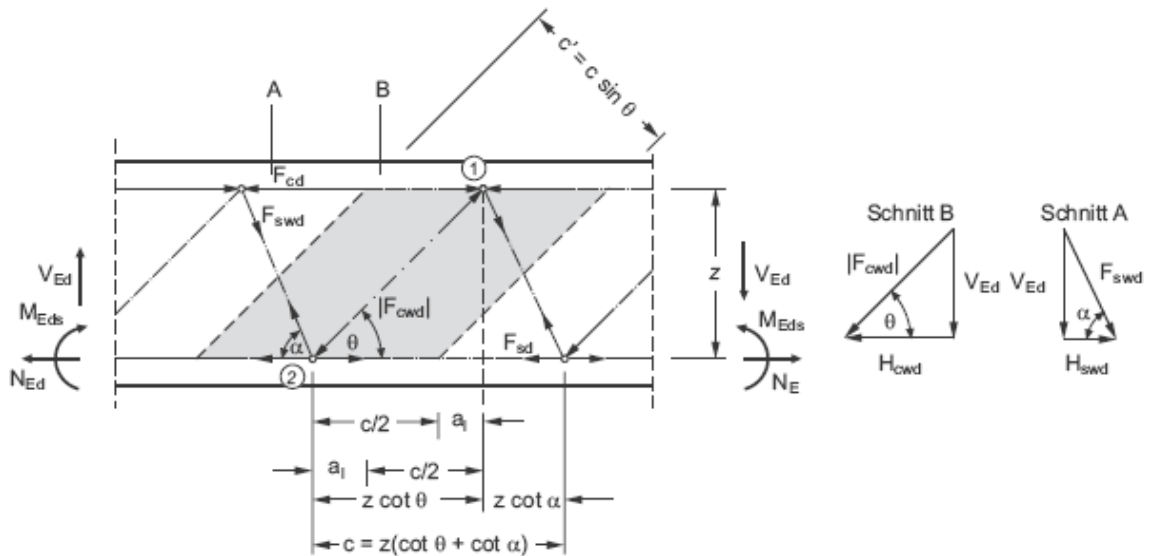
Bei bekannter Bewehrung kann durch einfache Umformung die **aufnehmbare Querkraft** berechnet werden:

$V_{Rd,s} = a_{sw} \cdot f_{ywd} \cdot z \cdot \sin \alpha \cdot (\cot \Theta + \cot \alpha)$ (2.3.6)

Für den häufigen Sonderfall einer **vertikalen Bügelbewehrung (90°)** ergibt sich:

$a_{sw} = \frac{V_{Ed}}{f_{ywd} \cdot z \cdot \cot \Theta}$ (2.3.7)

$V_{Rd,s} = a_{sw} \cdot f_{ywd} \cdot z \cdot \cot \Theta$ (2.3.8)



Schnitt B durch die Druckstrebe:

Gleichgewicht vertikal: $V_{Ed} = F_{cwd} \cdot \sin \Theta$ (2.310)

Zul. Spannung in der Druckstrebe: $\alpha_{cw} \cdot v_1 \cdot f_{cd} = \alpha_{cw} \cdot v_1 \cdot \alpha \cdot f_{ck} / \gamma_c$ (2.3.11)

Mit den Gleichungen 2.3.1, 2.3.2 und 2.3.10 errechnet sich die vorhandene Druckstrebenfestigkeit:

$$\frac{F_{cwd}}{b_w \cdot c'} = \frac{V_{Ed}}{\sin \Theta \cdot b_w \cdot c'} = \frac{V_{Ed}}{b_w \cdot c \cdot \sin^2 \Theta} = \frac{V_{Ed}}{b_w \cdot z \cdot \sin^2 \Theta \cdot (\cot \Theta + \cot \alpha)} \leq \alpha_{cw} \cdot v_1 \cdot f_{cd} \quad (2.3.12)$$

Daraus ergibt sich die aufnehmbare Druckstrebenkraft zu

$$V_{Rd,max} = \alpha_{cw} \cdot v_1 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot z \cdot (\cot \Theta + \cot \alpha) \cdot \sin^2 \Theta = \alpha_{cw} \cdot v_1 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot z \cdot (\cot \Theta + \cot \alpha) / (1 + \cot^2 \Theta) \quad (2.3.13)$$

Für den häufigen Sonderfall einer **vertikalen Bügelbewehrung** ergibt sich:

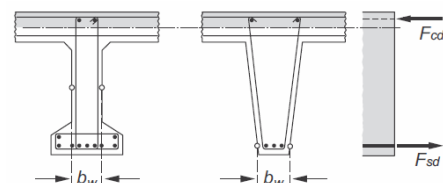
$$V_{Rd,max} = \alpha_{cw} \cdot v_1 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot z \cdot \cot \Theta \cdot \sin^2 \Theta = \alpha_{cw} \cdot v_1 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot z / (\cot \Theta + \tan \Theta) \quad (2.3.14)$$

Der Beiwert für die Berücksichtigung des Spannungszustandes im Druckgurt ist für nicht vorgespannte Tragwerke festgelegt zu: $\alpha_{cw} = 1,0$

Der Beiwert für die Abminderung der Druckstrebenfestigkeit infolge Querkzug (Rissbildung parallel/schräg zu den Druckstreben) ist festgelegt zu:

$$v_1 = 0,75 \cdot v_2 \quad \text{mit} \quad v_2 = (1,1 - f_{ck}/500) \leq 1,0$$

b_w = kleinste Querschnittsbreite zw. den Schwerpunkten des Zug- und Druckgurt.



Empfohlener Wert nach EC 2: $v_1 = v = 0,6 \cdot (1,0 - f_{ck}/250)$

2.4 Neigungswinkel der Druckstreben

Die Neigung der Druckstreben ist wie folgt zu begrenzen:

$$1,0 \leq \cot \Theta \leq \frac{1,2 + 1,4 \cdot \sigma_{cp} / f_{cd}}{1 - V_{Rd,cc} / V_{Ed}} \leq k \quad (2.4.1)$$

$k = 3,0$ für Normalbeton, d.h. $18,4^\circ \leq \Theta \leq 45^\circ$ (Empfehlung EC 2: $k = 2,5$)

Bei geeigneter Querkraftbewehrung darf $\cot \theta$ bis $0,58$ (60°) ausgenutzt werden.

Hierbei ist der Betontraganteil $V_{Rd,cc}$ für Balken mit Querkraftbewehrung wie folgt zu berechnen:

$$V_{Rd,cc} = \left[c \cdot 0,48 \cdot f_{ck}^{1/3} \cdot \left(1 - 1,2 \cdot \frac{\sigma_{cp}}{f_{cd}} \right) \right] \cdot b_w \cdot z \quad (2.4.2)$$

$c = 0,5$ Rauigkeitsbeiwert für die Querkraftübertragung in verzahnten Fugen.

$\sigma_{cp} = \frac{N_{Ed}}{A_c}$ Betonlängsspannung im Schwerpunkt des Querschnitts

N_{Ed} Bemessungswert der Längskraft des Querschnitts infolge äußerer Einwirkungen oder Vorspannung (Druck > 0).

Für **reine Biegung** mit $\sigma_{cp} = 0$ ergibt sich: $\cot \Theta \leq \frac{1,2}{1 - V_{Rd,cc} / V_{Ed}}$

Bei einer hohen Beanspruchung geht $V_{Rd,cc}$ gegen 0, d.h. $\cot \Theta = 1,2 \quad \Theta = 39,8^\circ$

Bei einer geringen Beanspruchung geht $V_{Rd,cc}$ gegen V_{Ed} , d.h. $\cot \Theta \rightarrow \infty \quad \Theta \rightarrow 0$

Da eine Druckstrebenneigung von 0° unsinnig ist, wurde diese für Normalbeton auf $\cot \Theta = 3,0$ begrenzt, d.h. auf $18,4^\circ$. Setzt man den Wert $3,0$ in Gl. 2.4.1 ein, so ergibt sich bei reiner Biegung $V_{Rd,cc} = 0,6 \cdot V_{Ed}$, d.h. 60% der Querkraft wird durch den Beton aufgenommen.

Wie man an Gl. 2.4.1 erkennen kann, verringert eine Drucknormalkraft ebenfalls den Druckstrebenneigungswinkel, da diese wie schon angesprochen günstig auf das Schubtragverhalten wirkt.

Die oben gemachten Überlegungen wurden in die Norm aufgenommen: Bei der Ermittlung von $V_{Rd,s}$ für zur Balkenachse senkrechte Querkraftbewehrung **darf für** $\cot \Theta$ **vereinfachend folgender Wert angesetzt** werden:

$\cot \Theta = 1,2 \quad \Theta = 39,8^\circ$ bei reiner Biegung ($V_{Rd,cc}$ vernachlässigt)

$\cot \Theta = 1,2 \quad \Theta = 39,8^\circ$ bei Biegung mit Längsdruckkraft ($V_{Rd,cc}$ und günstigen Längsdruck vernachlässigt)

$\cot \Theta = 1,0 \quad \Theta = 45^\circ$ bei Biegung mit Längszugkraft

2.5 Konstruktion

Die mindestens erforderliche Querkraftbewehrung für Balken und Platten wird über den Querkraftbewehrungsgrad festgelegt:

$$\rho_w = \frac{A_{sw}}{s_w \cdot b_w \cdot \sin \alpha} \quad \text{oder} \quad \rho_w = \frac{a_{sw}}{b_w \cdot \sin \alpha}$$

- s_w Abstand der Querkraftbewehrung in Längsrichtung
- A_{sw} Querschnittsfläche der Querkraftbewehrung innerhalb s_w (cm²)
- a_{sw} Querschnittsfläche der Querkraftbewehrung je m Balkenlänge (cm²/m)
- b_w kleinste Breite zw. Druck- und Zugzone

Ohne Vorspannung darf der Querkraftbewehrungsgrad den folgenden Mindestwert nicht unterschreiten:

$$\rho_{w,\min} = 0,16 \cdot f_{ctm} / f_{yk}$$

Allgemein nach EC 2: $\rho_{w,\min} = 0,08 \cdot \sqrt{f_{ck}} / f_{yk}$

Der Längs- und Querabstand der **Bügelschenkel** oder **Querkraftzulagen** darf die Werte der Tabelle nicht überschreiten:

Zeile	Spalte Querkraftausnutzung ^a	Betonfestigkeitsklasse			
		<= C50/60		> C50/60	
		Längsabstand		Querabstand	
1	$V_{Ed} \leq 0,3V_{Rd,\max}$	0,7h bzw. 30 cm	0,7h bzw. 20 cm	h bzw. 80 cm	h bzw. 60 cm
2	$0,3V_{Rd,\max} < V_{Ed} \leq 0,6V_{Rd,\max}$	0,5h bzw. 30 cm	0,5h bzw. 20 cm	h bzw. 60 cm	h bzw. 40 cm
3	$V_{Ed} > 0,6V_{Rd,\max}$	0,25h bzw. 20 cm			

a V_{Ed} und $V_{Rd,\max}$ nach Norm
 näherungsweise kann für $V_{Rd,\max}$ mit $\theta = 40^\circ$ gerechnet werden.
 b Bei Balken mit $h < 20\text{cm}$ und $V_{Ed} < V_{Rd,c}$ muss der Längsabstand nicht $< 15\text{ cm}$ sein.

Für **Schrägstäbe** gelten die gleichen maximalen Querabstände der Tabelle. Der max. Längsabstand ist wie folgt festgelegt: $s_{\max} = 0,5 \cdot h \cdot (1 + \cot \alpha)$

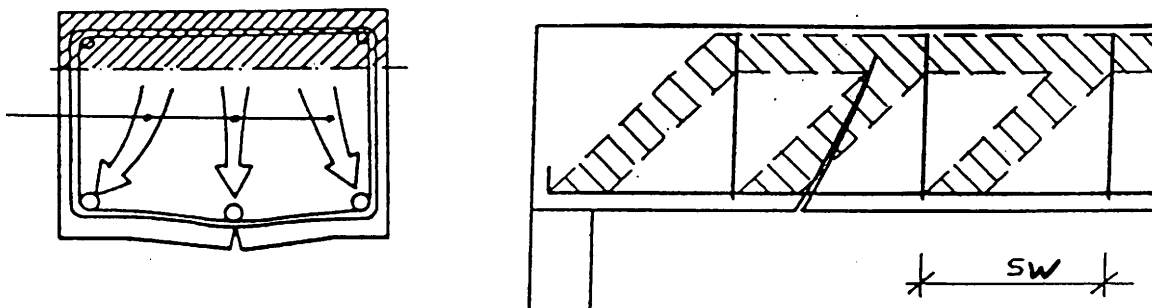
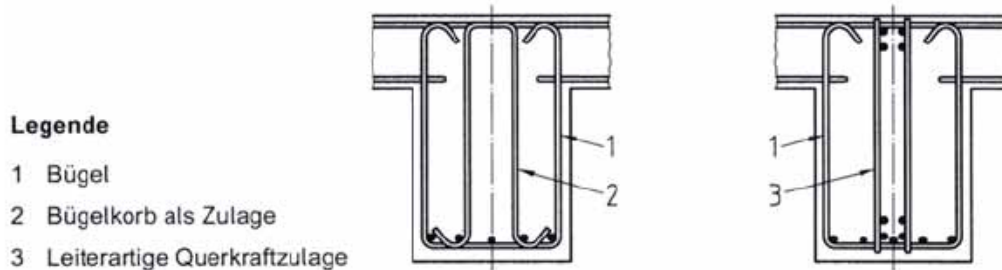


Bild: Mögliche Schäden bei zu großen Abständen der Querkraftbewehrung

Die Querkraftbewehrung soll mit der Schwerlinie des Bauteils einen Winkel von 45° bis 90° bilden. Sie darf aus der Kombination folgender Bewehrungen bestehen:

- Bügeln, die die Längsbewehrung und die Druckzone umfassen
- Schrägstäben
- Schubzulagen wie Leitern und Körbe, die die Längsbewehrung nicht umschließen.

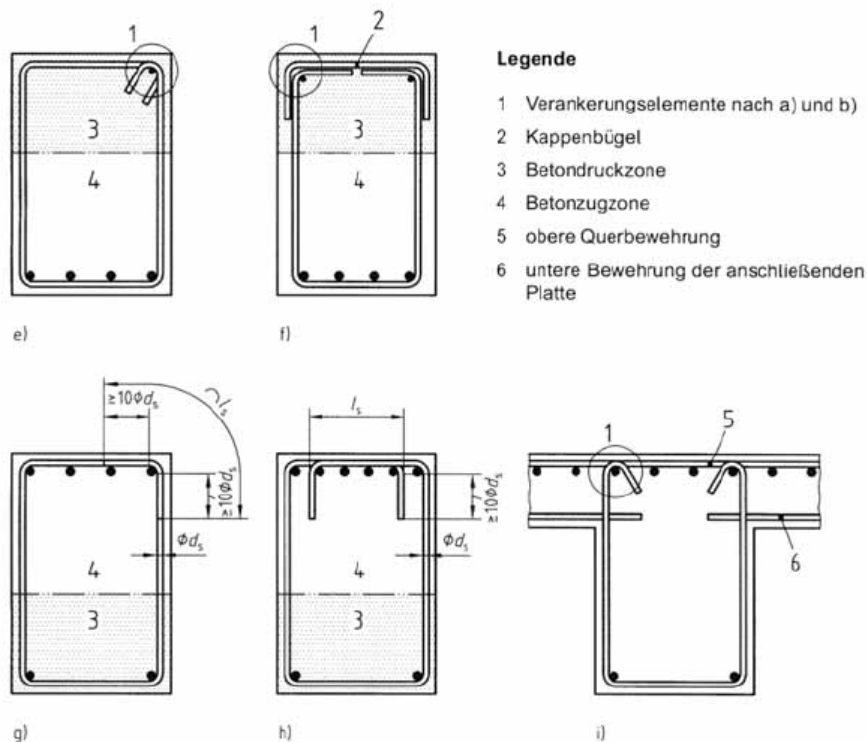
Bei Balken dürfen Schrägstäbe und Querkraftzulagen nur zusammen mit Bügeln verwendet werden. Die Bügelbewehrung muss dabei mindestens 50% ausmachen.



Legende

- 1 Bügel
- 2 Bügelkorb als Zulage
- 3 Leiterartige Querkraftzulage

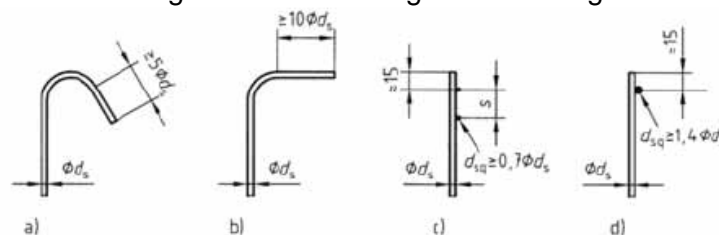
Für das Schließen von Bügeln gilt die folgende Abbildung. Bei Balken sind Bügel möglichst in der Druckzone mit Haken/Winkelhaken (Fall e) oder mit Haken/Winkelhaken mit Kappenbügeln (Fall f) zu schließen, in der Zugzone ist eine Übergreifung mit l_s erforderlich (Fälle g und h). Bei Plattenbalken dürfen die erforderlichen Bügel im Bereich der Platte mit durchgehenden Querstäben geschlossen werden (Fall i), wenn für den Bemessungswert der Querkraft gilt: $V_{Ed} \leq 2/3 V_{Rd,max}$



Legende

- 1 Verankerungselemente nach a) und b)
- 2 Kappenbügel
- 3 Betondruckzone
- 4 Betonzugzone
- 5 obere Querbewehrung
- 6 untere Bewehrung der anschließenden Platte

Die Ausbildung der Verankerungselemente muss gemäß der folgenden Abbildung erfolgen:



2.6 Maßgebende Querkraft

2.6.1 Bauteile mit konstanter Dicke

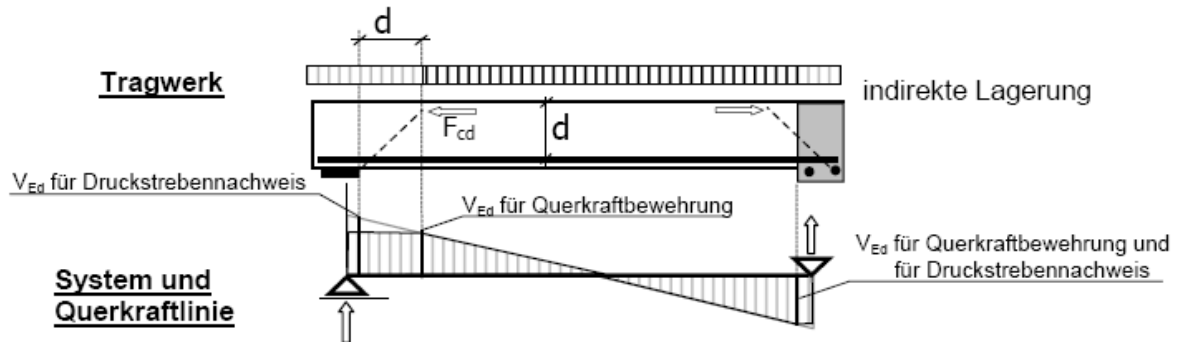


Bild: Ungünstigste Bemessungsschnitte für die Querkraftnachweise.

Bei **unmittelbarer (direkter) Lagerung** kann die letzte Druckstrebe des Fachwerkmodells von oben direkt ins Auflager abgetragen werden, d.h. die letzte Zugstrebe für die Schubbemessung liegt etwas von der Auflagervorderkante entfernt. Deshalb darf die für die **Bemessung der Querkraftbewehrung maßgebende Querkraft V_{Ed} im Abstand d von der Auflagerkante** ermittelt werden, während $V_{Rd,max}$ mit V_{Ed} **direkt am Auflager**rand verglichen werden muss.

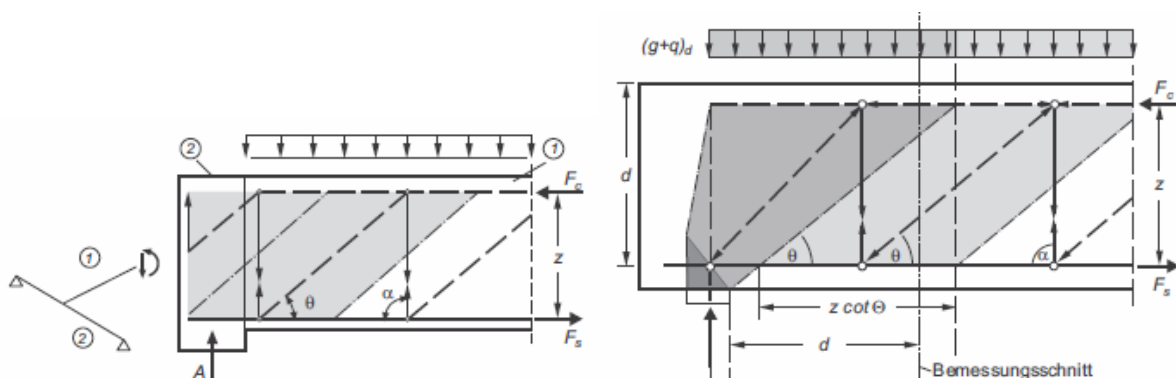
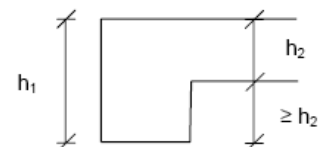


Bild: Indirekte und direkte Lagerung mit der maßgebenden Querkraft

Bei **mittelbarer (indirekter) Lagerung** sind die Gegebenheiten ungünstiger, weswegen dann in der Regel **alle maßgebenden Nachweise in der Auflagerachse** zu führen sind!



Achtung: Die indirekt eingeleitete Auflagerkraft (A im Bild links) muss mit einer **Aufhängebewehrung** nach oben gehängt werden, die auf die Querkraftbewehrung des Hauptträgers (= Träger 2 im Bild) aufaddiert werden muss!

2.6.2 Bauteile mit veränderlicher Dicke

Das folgende Bild zeigt schematisch einen Ausschnitt eines Bauteils mit veränderlicher Dicke. Man kann erkennen, dass in diesem Fall die maßgebende Querkraft unter Berücksichtigung der Anteile der evtl. geneigten Druck- und Zuggurte ermittelt werden muss.

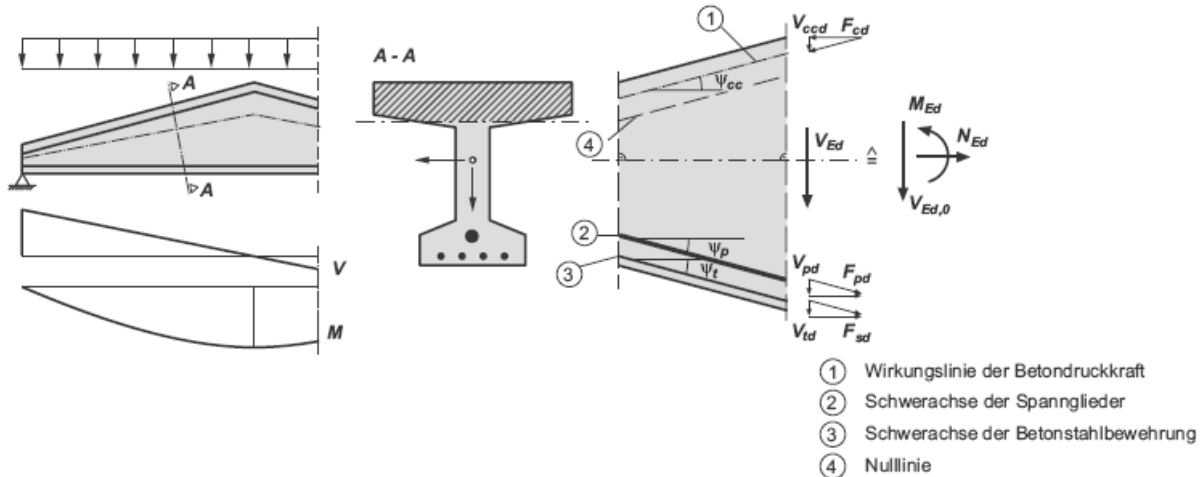


Bild: Ausschnitt eines Balkens mit geneigtem Zug- und Druckgurt

Die Gleichgewichtsbedingungen ohne Berücksichtigung der Vorspannung ergeben folgendes:

$$\sum V = 0 \quad V_{Ed} + V_{ccd} + V_{td} = V_{Ed0} \quad \text{d.h.} \quad V_{Ed} = V_{Ed0} - (V_{ccd} + V_{td}) \quad (2.6.1)$$

$$\sum M_s = 0 \quad M_{Eds} = M_{Ed} - N_{Ed} \cdot z_s \quad (2.6.2)$$

Die Horizontalkomponenten der Stahl- und Betonkraft ergeben sich somit zu:

$$F_{cd,h} = \frac{|M_{Eds}|}{z} \quad F_{sd,h} = \frac{|M_{Eds}|}{z} + N_{Ed} \quad (2.6.3)$$

Die Vertikalkomponenten sind dann:

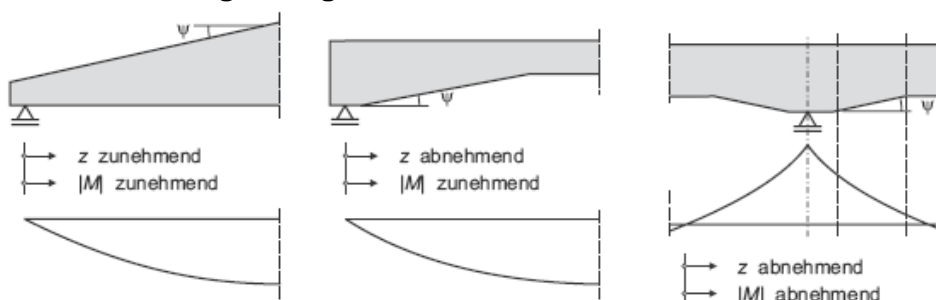
$$V_{ccd} = F_{cd,h} \cdot \tan \psi_{cc} \quad V_{td} = F_{sd,h} \cdot \tan \psi_t \quad (2.6.4)$$

Damit ergibt sich die Bemessungsquerkraft durch Addition aller Vertikalkomponenten zu:

$$V_{Ed} = V_{Ed0} - \frac{|M_{Eds}|}{z} \cdot (\tan \psi_{cc} + \tan \psi_t) - N_{Ed} \cdot \tan \psi_t \quad (2.6.5)$$

Vereinfacht und auf der sicheren Seite liegend kann anstatt z die statische Höhe d eingesetzt werden.

Der Neigungswinkel der Gurte ist positiv einzusetzen, wenn Moment UND innerer Hebelarm z betragsmäßig mit fortschreitender Balkenachse zu- oder abnehmen.



2.6.3 Auflagnaher Einzellasten

Bei Bauteilen mit **direkter Lagerung** und oberseitiger Eintragung einer Einzellast P_{Ed} im Bereich von $0,5d \leq a_v < 2d$ vom Auflagerrand darf der Querkraftanteil **für die Bemessung der Zugstreben** an V_{Ed} mit dem Faktor $\beta = a_v / 2d$ abgemindert werden, da in diesem Fall ein Teil der Einzellast P_{Ed} über die letzte Druckstrebe des Fachwerkmodells direkt in das Auflager abgetragen wird.

Der Abzugsbetrag beträgt also:

$$\Delta V_{Ed} = V_{Ed,P} \cdot \left(1 - \frac{a_v}{2,0 \cdot d}\right)$$

$V_{Ed,P}$ ist hierbei der Querkraftanteil der Einzellast P_{Ed} .
 Für $a_v < 0,5d$ ist in der Regel der Wert $a_v = 0,5d$ zu verwenden.

Achtung: Beim Nachweis der Druckstrebe durch $V_{Rd,max}$ darf keine Reduktion erfolgen!

Die so reduzierte Querkraft V_{Ed} muss in der Regel folgende Bedingung erfüllen:

$$V_{Ed} \leq A_{sw} \cdot f_{ywd} \cdot \sin \alpha$$

Dabei ist $A_{sw} \cdot f_{ywd}$ der Widerstand der Querkraftbewehrung, die den geneigten Schubriss zwischen den belasteten Bereichen kreuzt (siehe Bild). In der Regel darf nur die Querkraftbewehrung in einem mittleren Bereich von $0,75a_v$ berücksichtigt werden. Die Abminderung mit β ist bei der Bemessung der Querkraftbewehrung nur zulässig, wenn die Längsbewehrung vollständig am Auflager verankert ist.

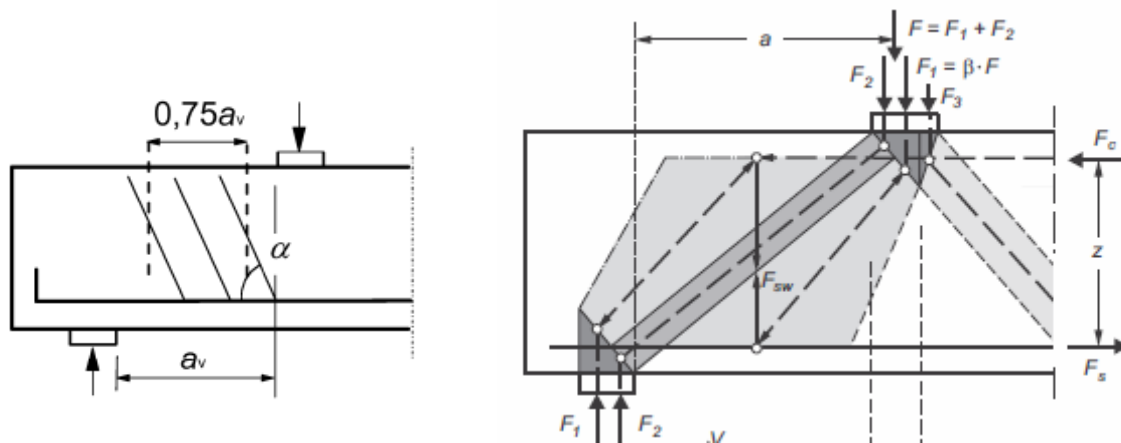


Bild: Querkraftbewehrung mit direkter Strebenwirkung

2.7 Querkraftdeckung

2.7.1 nur senkrechte Querkraftbewehrung

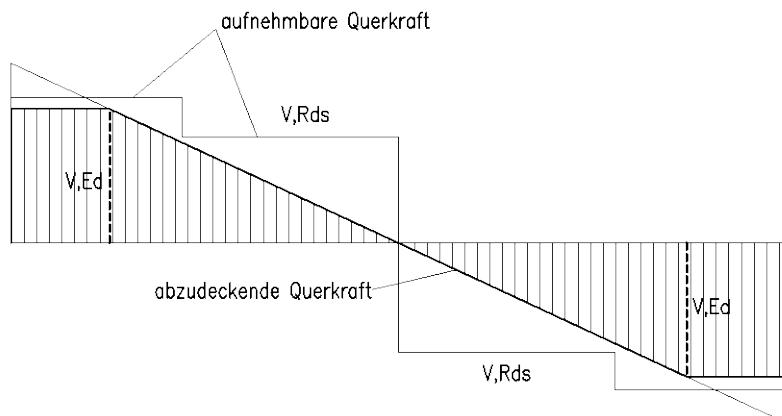
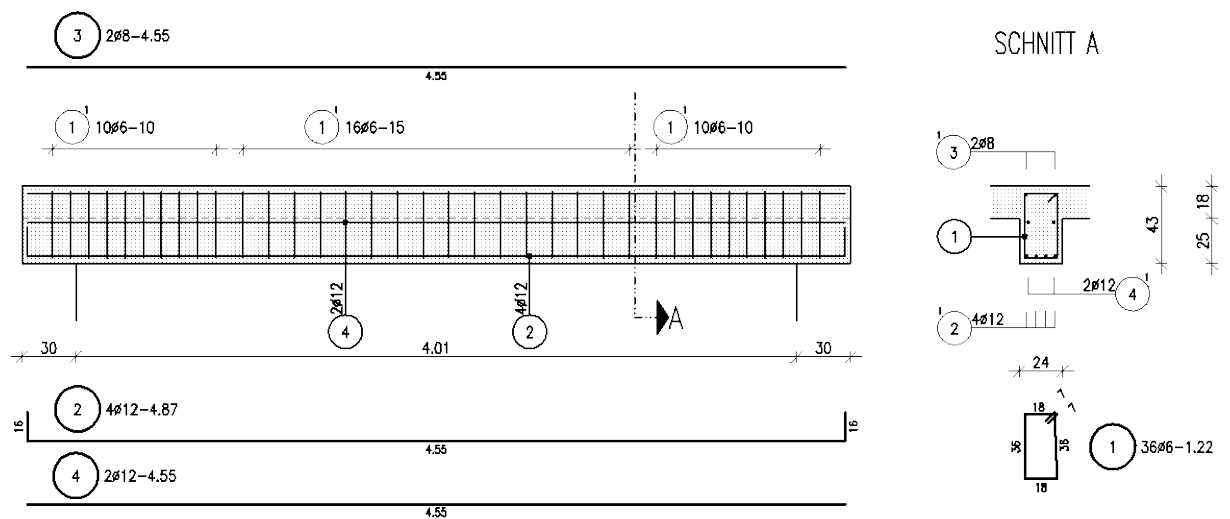
Die Querkraftbewehrung ist entlang der Bauteilachse so anzuordnen, dass die Bemessungsquerkraft an jeder Stelle des Bauteils abgedeckt ist:

$$V_{Ed} \leq V_{Rd,s} = a_{sw} \cdot f_{ywd} \cdot z \cdot \cot \Theta$$

Somit ergibt sich folgendes sinnvolles Vorgehen bei der Querkraftdeckung je Feld eines Balkens:

- Bestimmung der max. Querkraftbewehrung je Auflager a_{sw1} .
- Wahl einer sinnvollen kleineren Bewehrung a_{sw2} (z.B. Mindestbügelbewehrung oder die sich aus den Höchstabständen längs und quer ergebende Bewehrung).
- Berechnung der aufnehmbaren Querkraft von a_{sw2} .
- Berechnung der Stellen von beiden Auflagern aus, ab der a_{sw2} eingelegt werden kann.

Dadurch entstehen im allgemeinen Fall max. 3 unterschiedliche Verlegebereiche je Feld, was wirtschaftlich ausreichend und praktisch noch sinnvoll ist.



2.7.2 Kombination aus senkrechter und schräger Querkraftbewehrung

Die Querkraftbewehrung kann sich aus 2 Anteilen zusammensetzen, wobei mindestens **50 % von V_{Ed} mit Bügeln** abgedeckt werden muss:

- Bügelbewehrung $a_{sw,st}$ (cm^2/m), berechnet je m Balkenlänge.
- Schrägbewehrung $A_{sw,s}$ (cm^2) zw. 45° und 60° , berechnet für eine bestimmte Stelle im Balken.

Der Widerstand der Bügel ergibt sich zu:

$$V_{Rd,s} = a_{sw,st} \cdot f_{ywd} \cdot z \cdot \sin \alpha \cdot (\cot \Theta + \cot \alpha)$$

Da die Schrägbewehrung an einer festen Stelle eingelegt wird, muss die von den Bügeln noch nicht abgedeckte Querkraft über den betroffenen Bereich l integriert werden (= Fläche der noch nicht mit Bügeln abgedeckten Querkraftlinie):

$$V_{Ed,s} = \frac{1}{l} \cdot \int_l (V_{Ed} - V_{Rd,s}) \cdot dx$$

Die zusätzlich zu den Bügeln einzulegende Gesamtschrägbewehrung für den betrachteten Bereich ergibt sich somit zu:

$$A_{sw,s} = \frac{\int_l (V_{Ed} - V_{Rd,s}) \cdot dx}{z \cdot f_{ywd} \cdot \sin \alpha \cdot (\cot \Theta + \cot \alpha)}$$

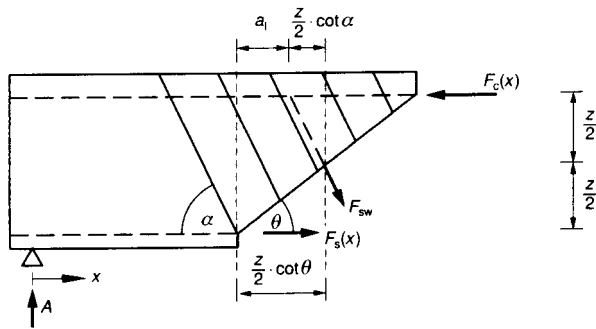
Wenn das betrachtete Bauteil eine **variable Höhe** besitzt, dann operiert man besser über den Schubfluss, da der innere Hebelarm z dann auch variabel ist:

Schubfluss = bezogene Querkraft:
$$v_{Ed} = \frac{V_{Ed}}{z}$$

$$A_{sw,s} = \frac{\int_l (v_{Ed} - v_{Rd,s}) \cdot dx}{f_{ywd} \cdot \sin \alpha \cdot (\cot \Theta + \cot \alpha)}$$

Die berechneten **Schrägstäbe müssen dann so verteilt werden, dass sie im Schwerpunkt der integrierten Querkraftfläche** angeordnet werden. Hierbei ist darauf zu achten, dass die konstruktiven Anforderungen ebenfalls erfüllt werden müssen (max./min. Abstand, max. Abstand vom Auflager, usw.).

2.8 Zugkraftdeckung



Versatzmaß a_l :

$$a_l = \frac{z}{2} \cdot (\cot \Theta - \cot \alpha)$$

$$z = 0,9 \cdot d$$

Wie bereits bei der Betrachtung des Fachwerkmodells gezeigt (siehe Bild oben), ergibt sich bei der Bemessung der Zugstreben für die Querkraft ein **Versatz der Zugkraft im Untergurt um das Versatzmaß a_l** . Dies widerspricht dem Modell für die Biegebemessung, bei dem die max. Zugkraft im Zuggurt exakt an der Stelle des max. Momentes auftritt.

Um diesen Widerspruch zu eliminieren, muss die Zugkraft aus der Biegebemessung an jeder Stelle des Balkens um das Versatzmaß a_l in Richtung Auflager verschoben werden (vgl. Bild unten). Daraus resultiert am Auflager eine Zugkraft in der Biegezugbewehrung, obwohl dort das Moment und damit die Zugkraft = Null sein müsste. !

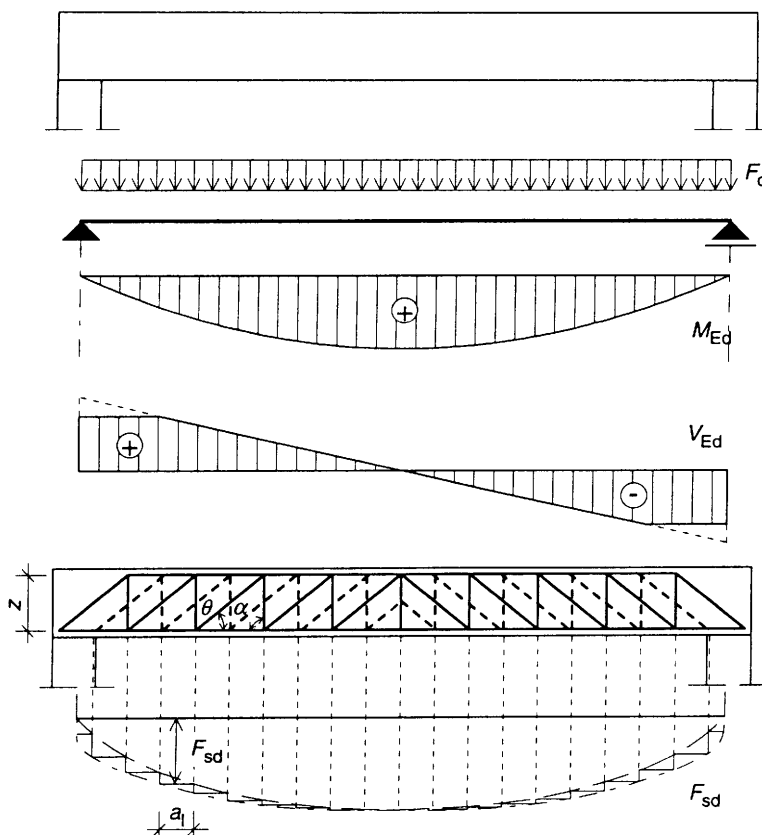


Bild: Zugkräfte im Untergurt eines Einfeldträgers aus Biegung und Querkraft

Praktisch bedeutet dies folgendes:

Die aus der Biegebemessung an einer bestimmten Stelle des Trägers ermittelte

Stahlzugkraft $F_{sd} = \frac{M_{Eds}}{z} + N_{Ed}$ muss auch innerhalb des Versatzmaßes a_l abgedeckt

werden.

Am Auflager muss die Biegezugbewehrung für eine bestimmte Restzugkraft $F_{sd,A}$ verankert

werden: $F_{sd,A} = V_{Ed,A} \cdot \frac{a_l}{z} + N_{Ed} \geq \frac{V_{Ed,A}}{2}$

Das folgende Bild zeigt die grundsätzliche Vorgehensweise für die Zugkraftdeckung. Die erforderliche Verankerungslänge für die Stahlzugkraft heißt $l_{b,net}$ und wird im Kapitel „Konstruktion“ besprochen.

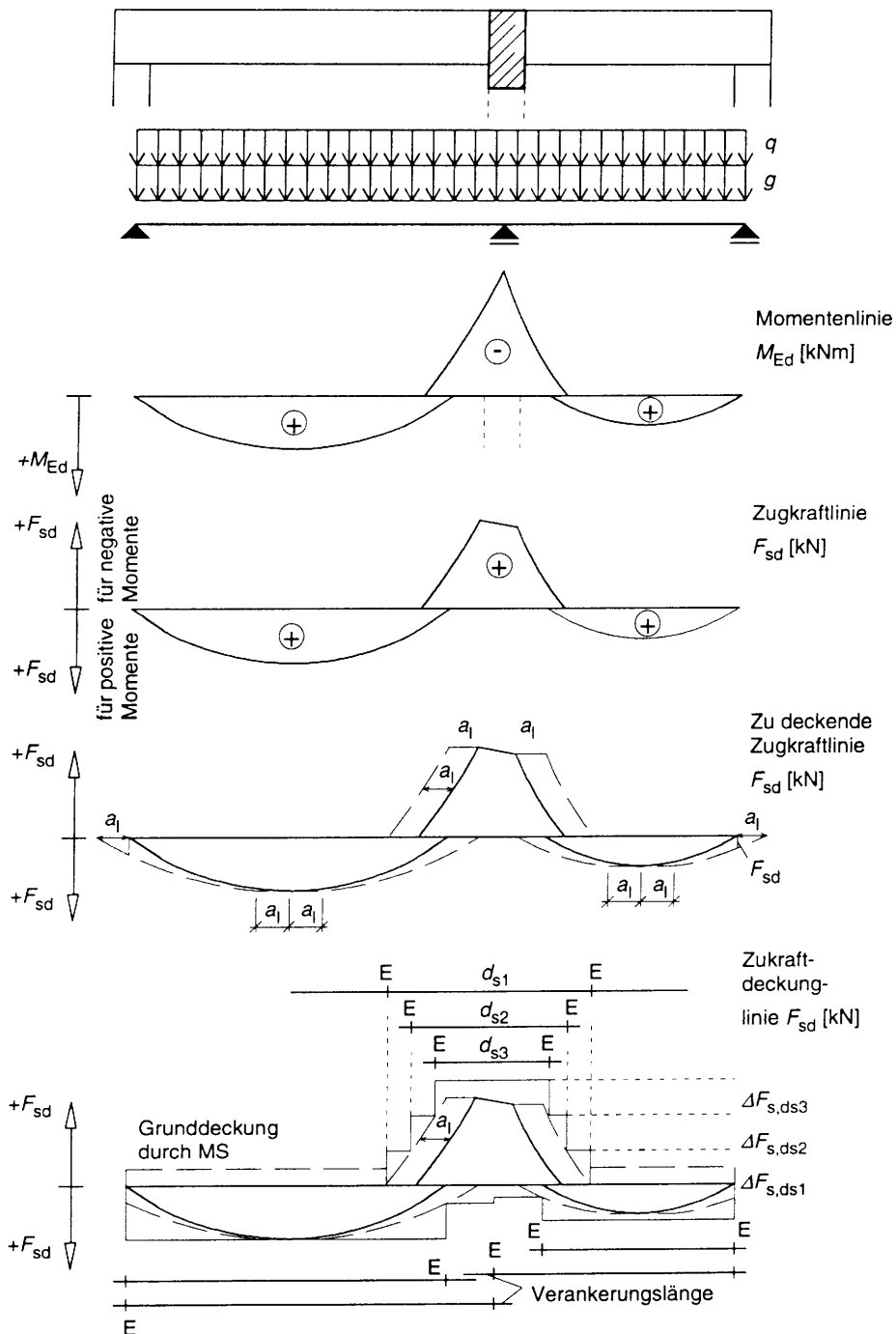


Bild: Durchführung der Zugkraftdeckung am Beispiel Zweifeldträger

2.9 Querkraftdeckung in den Gurten von Plattenbalken

Da sich bei der Biegebemessung von Plattenbalken die Druckzone weit in die Platte auslagern kann, entsteht am Anschnitt zur Platte ebenfalls eine u.U. nicht unbeträchtliche Schubbelastung, da der ausgelagerte Teil der Betondruckkraft meist wesentlich größer ist als der Steganteil. Die Bemessungsquerkraft V_{Ed} im Anschnitt ergibt sich aus der Differenz der Betondruckkräfte ΔF_d in der Platte zwischen 2 verschiedenen Schnitten. Diese Differenz entsteht, weil sich die Betondruckzone entsprechend der Momentenverteilung längs des Trägers verändert (großes Moment ergibt große Betondruckzone, kleines Moment kleine Druckzone).

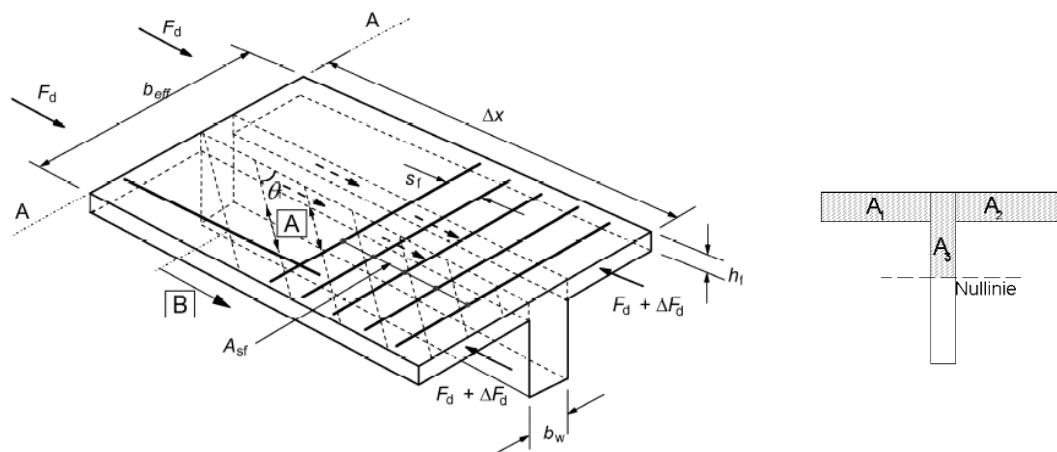


Bild: Anschluss zwischen Gurt und Steg
 A Druckstreben B hinter diesem Punkt verankerte Längsbewehrung

Die sich ergebende Querkraftbewehrung zwischen den gewählten Schnitten wird gleichmäßig verteilt eingelegt. Deshalb darf der Abstand der Schnitte nicht zu groß sein, um eine sinnvolle Verteilung zu gewährleisten. Gemäß Norm darf der Abstand der Schnitte maximal die Hälfte des Abstandes zw. Momentenmaximum und Momentennullpunkt sein:

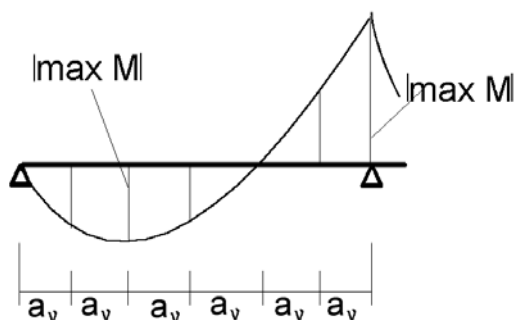


Bild: Maximale Länge $\Delta x = a_v$ zur Ermittlung von ΔF_d

Bei Querkraftsprüngen z.B. durch Einzellasten sollte der Querkraftsprung als Schnitt gewählt werden.

Als **Bemessungsmodell** kann logischerweise das gleiche **Fachwerkmodell** benutzt werden, wie bei der normalen Bemessung auf Querkraft. Es müssen nur andere Werte für die Geometrie eingesetzt werden: $b_w = h_f$ $z = \Delta x = a_v$

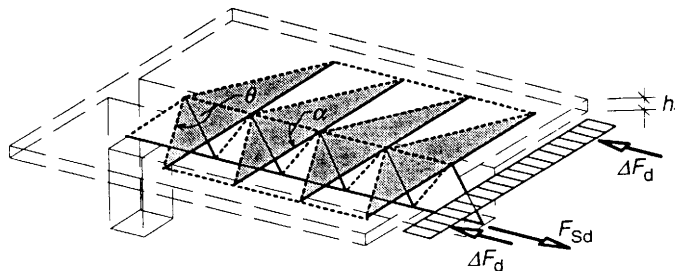


Bild: Fachwerkmodell für den Druckflansch eines Plattenbalkens

Bemessungsquerkraft: $V_{Ed} = \Delta F_d$

Bei kombinierter Beanspruchung durch Schub zwischen Gurt und Steg und durch Querbiegung kann vereinfacht der größere erforderliche Stahlquerschnitt je Seite eingelegt werden. Da die Querkraftbewehrung je zu Hälfte oben und unten eingelegt wird, muss dieser Wert getrennt mit dem aus der Querbiegung erforderlichen Stahl für die Biegedruckzone bzw. die Biegezugzone verglichen werden.

Alle oben gemachten **Überlegungen für Druckgurte können uneingeschränkt für Zuggurte übertragen werden.** Die Druckstrebenrichtung dreht sich dann um. Die Kraft ΔF_d ergibt sich dann aus der Differenz der Stahlkräfte im Zugflansch zwischen den betrachteten Schnitten. Die Bemessung ist identisch mit der Bemessung für einen Druckgurt.

Da sich meist wenig Querkraftbewehrung ergibt, können für den Druckstrebenneigungswinkel vereinfachte Werte angesetzt werden (vgl. unten). Bei genauer Berechnung des Druckstrebenneigungswinkels darf für σ_{cd} die mittlere Längsspannung im anzuschließenden Gurtabschnitt innerhalb von $\Delta x = a_v$ angesetzt werden.

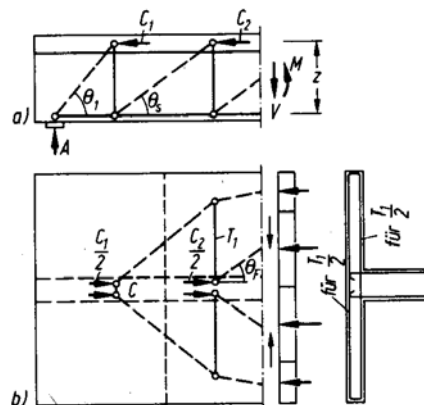


Bild: Räumliches Fachwerkmodell für das Endauflager eines Plattenbalkens
 a) Stegbereich b) Plattenbereich

Zusammenfassung für Druckgurte:

Gesamtbetondruckkraft (Summe M um Stahlage 1 = 0):

$$F_{cd,ges} = \frac{M_{Eds}}{z} \quad (2.9.1)$$

Betondruckkraft in einem Flansch:

$$F_{cd,f} = F_{cd,ges} \cdot \frac{A_{c,f}}{A_{c,ges}} + F_{sd,f} \quad (2.9.2)$$

$F_{sd,f}$ = Kraft in einer evtl. vorhandenen Druckbewehrung

Vereinfachter Druckstrebenneigungswinkel Druckgurte:

$$\cot \Theta_f = 1,2 \dots \Theta_f = 40^\circ \quad (2.9.3)$$

Zusammenfassung für Zuggurte:

Gesamtstahlzugkraft (Summe M um Stahlage 2 = 0):

$$F_{sd,ges} = \frac{M_{Eds}}{z} + N_{Ed} \quad (2.9.4)$$

Stahlzugkraft in einem Flansch:

$$F_{sd,f} = F_{sd,ges} \cdot \frac{A_{s,f}}{A_{s,ges}} \quad (2.9.5)$$

Vereinfachter Druckstrebenneigungswinkel für Zuggurte:

$$\cot \Theta_f = 1,0 \dots \Theta_f = 45^\circ \quad (2.9.6)$$

Bemessung für Zug- und Druckgurte ($b_w = h_f$ $z = \Delta x = a_v$):

Schubspannung aus $V_{Ed} = \Delta F_d = F_{cd,f,2} - F_{cd,f,1}$

$$v_{Ed} = \frac{\Delta F_d}{h_f \cdot \Delta x} \quad (2.9.7)$$

Erforderliche Bew. in cm^2/m :

Druckstrebentragungsfähigkeit:

Nach EC2:

$$a_{sf} = \frac{A_{sw}}{s_f} = \frac{v_{Ed} \cdot h_f}{f_{yd} \cdot \cot \theta_f}$$

$$V_{Rd,max} = v \cdot f_{cd} \cdot \sin \Theta_f \cdot \cos \Theta_f \quad (2.9.8)$$

$$a_{sf} = \frac{\Delta F_d}{f_{yd} \cdot \Delta x \cdot \sin \alpha \cdot (\cot \Theta_f + \cot \alpha)}$$

$$V_{Rd,max} = v \cdot f_{cd} \cdot h_f \cdot \Delta x \cdot (\cot \Theta_f + \cot \alpha) \cdot \sin^2 \Theta_f \quad (2.9.9)$$

$$v = v_1 = 0,75 \cdot v_2 \quad \text{mit} \quad v_2 = (1,1 - f_{ck}/500) \leq 1,0 \quad \text{nach EC 2: } v = 0,6 \cdot (1,0 - f_{ck}/250)$$

Wenn Querkraftbewehrung in der Gurtplatte erforderlich wird, sollte der Nachweis der Druckstreben in beiden Beanspruchungsrichtungen des Gurtes (Scheibe und Platte) in

linearer Interaktion geführt werden:

$$\left(\frac{V_{Ed}}{V_{Rd,max}} \right)_{Platte} + \left(\frac{V_{Ed}}{V_{Rd,max}} \right)_{Scheibe} \leq 1,0$$

Bei kombinierter Beanspruchung durch Querbiegung und durch Schubkräfte zwischen Gurt und Steg ist in der Regel der größere erforderliche Stahlquerschnitt anzuordnen, der sich entweder als Schubbewehrung nach Gleichung (2.9.8) oder aus der erforderlichen Biegebewehrung für Querbiegung und der Hälfte der Schubbewehrung nach Gleichung (2.9.8) ergibt.

In monolithischen Querschnitten mit einer Mindestbiegebewehrung ist in Bereichen mit $v_{Ed} \leq 0,4 \cdot f_{ctd}$ keine zur Biegebewehrung zusätzliche Bewehrung erforderlich.

Die Längszugbewehrung im Gurt ist in der Regel hinter der Druckstrebe zu verankern, die am Stegbereich beginnt, an dem diese Längsbewehrung benötigt wird (vgl. Schnitt A-A im Bild S.22).