3.2.6. Der Lösungsalgorithmus von GAUSS

0. *Vorbemerkung*: Der GAUSS ist eine Weiterentwicklung aus dem Additions- bzw. Subtraktionsverfahren. Zum besseren Verständnis sollte man vielleicht schon einige Lineare Gleichungssysteme mit dem Additions- bzw. Subtraktionsverfahren (vorige Seite) gelöst haben, damit die grobe Vorgehensweise hinsichtlich Multiplizieren und Verrechnen von Gleichungen über ein gemeinsames Vielfaches klar ist.

1. Zunächst muss man wie beim Additions- bzw. Subtraktionsverfahren das Lineare Gleichungssystem **sortieren.** Auf der linken Seite die Variablen, auch Spaltenweise sortiert, und auf der rechten Seite die bloßen Zahlen.

2. Das Lineare Gleichungssystem wird nun zur Vereinfachung als **Matrix** geschrieben. Dadurch fallen die Variablen weg und man kann einfacher weiterrechnen.

3. Dann versucht man durch Multiplizieren von Zeilen und anschließend entsprechendes Verrechnen (Addieren bzw. Subtrahieren) von Zeilen (Stichwort: gemeinsames Vielfaches)) ein so genanntes **Dreieck aus Nullen** unten links (alternativ oben rechts) zu konstruieren. Dabei geht man übrigens Spaltenweise vor.

4. Als nächstes wandelt man die unterste Zeile der Matrix wieder zurück in eine Gleichung und löst diese nach der verbliebenen Variable auf. Falls keine Variable verbleibt, so muss man die entstehende Aussage interpretieren. Ist die Anzahl der Gleichungen gleich der Anzahl der Variablen, so gilt folgende Interpretation. Ein wahre Aussage (0 = 0) bedeutet, dass es unendlich viele Lösungen gibt. Eine falsche Aussage (0 = 5) bedeutet, dass es keine Lösung gibt.

5. Hat man allerdings für die verbliebene Variable eine Lösung, so wandelt man nun die **darüber liegende Zeile** wieder in eine Gleichung zurück, setzt dort den Wert für die bekannte Variable ein, und löst nach der verbliebenen Variable auf.

6. Existiert darüber wieder eine Zeile verfährt man ebenso wie in Punkt 5, d.h. auch hier wird die Zeile wieder in eine Gleichung zurückverwandelt und die bekannten Variablen eingesetzt. Anschließend wieder nach der verbliebenen Variablen auflösen.

7. Nach und nach werden so alle Zeilen <u>von unten nach oben</u> wieder in Gleichungen zurückverwandelt.

8. Hat man schließlich alle Zeilen (die oberste zuletzt) wieder in Gleichungen zurückverwandelt und jeweils dadurch die Variablen berechnen können, so hat man die Lösung des Linearen Gleichungssystems.

9. *Nachbemerkung:* Diese Beschreibung der Vorgehensweise ist sehr theoretisch und auf diese Weise eigentlich gar nicht zu begreifen. Daher musst du auf jeden Fall folgendes Rechenbeispiel nachvollziehen und noch einige lineare Gleichungssysteme mit dem GAUSS lösen, um ihn nach und nach immer besser verstehen zu können. Beachte auch die unterschiedlichen Interpretationen, die auftreten können, je nach dem, um was für ein Typ von Gleichungssystem S.52 es sich handelt (abhängig von der Anzahl Gleichungen bzw. Variablen).

Beispielaufgabe GAUSS

Gegeben ist ein Lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Variablen

$$\left| \begin{array}{r} 3x + 2y - z = -2 \\ -x + 3y + 4z = 19 \\ -y + 2z = 4 \end{array} \right|$$

Das Gleichungssystem wird als Matrix dargestellt, wobei die erste Spalte die Faktoren der Variable x darstellt, die zweite Spalte die Variable y, die dritte die Variable z und die rechte Spalte die rechte Seite vom Gleichheitszeichen

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 & 19 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Jetzt muss man versuchen, das Nulldreieck unten links zu bauen. Vertauschungen von Zeilen sind hier übrigens noch erlaubt. Man beginnt in der ersten Spalte und versucht nun mithilfe der 3 in der ersten Zeile die –1 in der zweiten Zeile in eine 0 zu verwandeln. Dazu nehme man die zweite Zeile (da man diese verändern will) und multipliziere mit 3, da 3 der Hauptnenner von 1 und 3 ist. Anschließend addiert man die erste Zeile. Der entsprechende Ansatz ist: $3 \cdot II + I$ Die entstehende Zeile ersetzt dann die zweite Zeile

$$\begin{array}{rrrrr} & -3 & 9 & 12 & 57 \\ (+) & 3 & 2 & -1 & -2 \\ \hline & 0 & 11 & 11 & 55 \end{array} \qquad => \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 11 & 11 & 55 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Praktischerweise steht in der ersten Spalte in der dritten Zeile bereits eine Null, sodass man sich ersparen kann, an dieser Stelle extra eine Null zu produzieren. Ab jetzt darf man übrigens die oberste Zeile bei Vertauschungen nicht mehr mit einbeziehen, da man sonst das Nulldreieck in Gefahr bringt. Die erste Spalte sieht soweit ganz gut aus, sodass man sich jetzt um die zweite Spalte kümmern kann. Um das Nulldreieck komplett zu machen, muss mithilfe der ersten 11 in der zweiten Spalte aus der –1 in der dritten Zeile eine Null gemacht werden. Dazu nehme man die dritte Zeile (da man diese verändern will) und multipliziere sie mit 11, um auf das gemeinsame Vielfache 11 zu kommen. Die zweite Zeile braucht man nicht zu multiplizieren, da hier schon die 11 in der zweiten Spalte vorhanden ist. Der entsprechende Ansatz lautet: $11 \cdot III + II$ Die neue Zeile ersetzt dann die dritte Zeile:

$$\begin{array}{rrrrr} & 0 & -11 & 22 & 44 \\ (+) & 0 & 11 & 11 & 55 \\ \hline & 0 & 0 & 33 & 99 \end{array} \qquad => \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 11 & 11 & 55 \\ 0 & 0 & 33 & 99 \end{pmatrix}$$

Die Rechnung wird auf der nächsten Seite fortgeführt!!!

Auf der vorigen Seite haben wir das Nulldreieck unten links hergestellt. An dieser Stelle beginnt man nun mit der Rückverwandlung der Zeilen in Gleichungen, wobei wichtig ist, dass man mit der untersten Zeile beginnt. Da die dritte Spalte die Variable z und die vierte Spalte die rechte Seite repräsentiert, erhält man folgende Gleichung, die man nach der verbliebenen Variable z auflöst:

$$\begin{aligned} 33z &= 99 \quad \Big| :33 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Als nächstes wandelt man die darüber liegende Zeile (also die zweite) wieder zurück. Die zweite Spalte steht dabei übrigens für die y-Variable. In die wiederhergestellte Gleichung setzt man den für z berechneten Wert ein und löst nach y auf.

$$\begin{aligned} 11y + 11z &= 55 \\ 11y + 11 \cdot 3 &= 55 \\ 11y + 33 &= 55 \quad \Big| -33 \\ 11y &= 22 \quad \Big| :11 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Die nächste darüber liegende Zeile (die oberste) wird wieder in eine Gleichung zurückverwandelt (die erste Spalte stellt die Variable x dar) und auch dort werden die bereits bekannten Variablen (y und z) durch die entsprechenden Werte ersetzt. Anschließend wird nach der verbliebenen Variable (x) aufgelöst.

$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= -2 \\ 3x + 2 \cdot 2 - 3 &= -2 \\ 3x + 1 &= -2 \quad \Big| -1 \\ 3x &= -3 \quad \Big| :3 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Wir haben insgesamt dann folgende Lösung für das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Um das GAUSS-Verfahren zu üben, solltest du versuchen, folgende Lineare Gleichungssysteme zu lösen

Du solltest dir vor dem Lösen noch mal die entsprechende Seite mit der Einteilung von Linearen Gleichungssystemen S.63 und den sich daraus ergebenden Folgen für die Lösungen ansehen. Die Lösungen sind auf dieser Seite ganz unten vermerkt.

Die folgenden 3 Aufgaben stellen jeweils den Typ Nr.1 von Linearen Gleichungssystemen dar, bei denen nämlich die Anzahl der Gleichungen gleich der Anzahl der Variablen ist. Es handelt sich immer um ein System mit 3 Gleichungen und 3 Variablen. Die Aufgaben lauten im Einzelnen:

$$\text{a)}\left|\begin{array}{r} 2x-y+5z=51 \\ -3x+5y+6z=4 \\ 5x+y+z=33 \end{array}\right| \qquad \text{b)}\left|\begin{array}{l} 2x-y+6z=-24 \\ x+y-2z=11 \\ x-2y+8z=30 \end{array}\right| \qquad \text{c)}\left|\begin{array}{r} x-y+2z=13 \\ 3x+y-z=14 \\ -3x+3y-6z=-39 \end{array}\right|$$

Die folgenden 2 Aufgaben stellen jeweils den Typ Nr.2 von Linearen Gleichungssystemen dar, bei denen nämlich die Anzahl der Gleichungen kleiner ist als die Anzahl der Variablen. Es handelt sich immer um ein System mit 3 Gleichungen und 4 Variablen. Die Aufgaben lauten im Einzelnen:

$$\text{d)}\left|\begin{array}{l} 2x-3y+5z+t=9 \\ -5x+3y+z-t=12 \\ x+y-3z-3t=-12 \end{array}\right| \qquad \text{e)}\left|\begin{array}{r} 2x+3y-z+4t=4 \\ -4x-6y+2z-8t=8 \\ x+y-2z+t=9 \end{array}\right|$$

Die folgenden 3 Aufgaben stellen jeweils den Typ Nr.3 von Linearen Gleichungssystemen dar, bei denen nämlich die Anzahl der Gleichungen größer ist als die Anzahl der Variablen. Es handelt sich immer um ein System mit 4 Gleichungen und 3 Variablen. Die Aufgaben lauten im Einzelnen:

$$\left|\begin{array}{r} 2x+3y-z=11 \\ -x-2y+4z=-17 \\ x+y+2z=-3 \\ -6x+3y-2z=6 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{r} 2x+3y-z=11 \\ 4x-3y+z=9 \\ -6x-9y+3z=-30 \\ x+y-9z=-14 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{r} 2x+3y-z=11 \\ 6x+9y-3z=33 \\ -6x+3y-2z=6 \\ -4x-6y+2z=-22 \end{array}\right|$$

Hinweis: Da es 4 Gleichungen und 3 Variablen sind, muss man 1 Nullzeile (4-3) ignorieren.

Lösungen:
a) x = 6 , y = -4 , z = 7
b) keine Lösung (Widerspruch)
c) unendlich viele Lösungen (0=0)
d) unendlich viele Lösungen
e) keine Lösung
f) x = 1 , y = 2 , z = -3
g) keine Lösung
h) unendlich viele Lösungen