Karlsruher Institut für Technologie

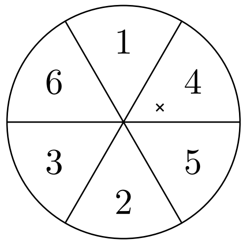
Maximilian Katzmann
Hans-Peter Lehmann
Stefan Walzer

Übungsblatt 00

Randomisierte Algorithmik – Wintersemester 2023/2024

Aufgabe 1 – Wahrscheinlich weiß ich's noch ...

Eine Darts-Spielerin wirft einen Pfeil auf eine Dartscheibe. Diese ist in 6 gleichgroße Segmente unterteilt, welchen verschiedene Punkte aus $\{1, \ldots, 6\}$ zugeordnet sind. Da sich die Spielerin noch im Training befindet, landet der Pfeil zufällig gleichverteilt auf der Scheibe, jedoch niemals daneben. Im Beispiel rechts hat der Wurf 4 Punkte erzielt.



a) Modelliere das Zufallsexperiment des Wurfes (nicht das der resultierenden Punktzahl), indem du Ergebnismenge und Wahrscheinlichkeitsmaß eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsraumes angibst.

b) Wir interessieren uns nun insbesondere für folgende Eigenschaften eines Wurfes:
   - Der Abstand der steckenden Pfeilspitze zum Zentrum der Scheibe
   - Die resultierende Punktzahl
   - Die resultierende Punktzahl ist gerade

   Definiere die zugehörigen Zufallsvariablen und Ereignisse.

c) Bestimme die Verteilungsfunktion des Abstands aus Teilaufgabe b).

Im Folgenden interessieren wir uns jetzt nicht mehr für die Position der Pfeilspitze sondern lediglich für die resultierende Punktzahl.

d) Modelliere dieses Zufallsexperiment, indem du Ergebnismenge und Wahrscheinlichkeitsmaß eines geeigneten *diskreten* Wahrscheinlichkeitsraumes angibst.

e) Sei X die Zufallsvariable, die die Punktzahl widerspiegelt. Bestimme folgende Werte:
   - Den Erwartungswert von X
   - Die Varianz von X
   - Den Erwartungswert von X, unter der Annahme, dass nur ungerade Punktzahlen gewertet werden
   - Den Erwartungswert eines Wurfes der eine ungerade Punktzahl erzielt hat.

Aufgabe 2 – Folge dem weißen Kaninchen

Du findest dich in einem ledernen Sessel wieder, der in einem nur schwach beleuchteten Raum steht. Dir gegenüber sitzt ein Mann (der hier drin komischerweise eine Sonnenbrille trägt) und dich vor die Wahl stellt: „Nimmst du die blaue Pille, endet die Geschichte hier. Nimmst du die rote, bleibst du im Wunderland. Halt, nein. Moment. War's andersrum?“ Verwirrt geht er zu einer großen Tonne, schraubt den Deckel ab, nimmt eine Handvoll Pillen heraus und sagt: „Hier drin sind n Pillen. Davon sind entweder $\geq 80\%$ blau oder $\geq 80\%$ sind rot. Welche Farbe es auch ist, sie führt dich ins Wunderland.“

Sichtlich genervt beginnst du eine Pille nach der anderen raus zu nehmen und auf einen roten und einen blauen Haufen zu sortieren, während du jeweils mitzählst. Belustigt sagt der Mann: „Wenn du dir alle anschauen möchtest, sitzen wir morgen noch hier.“ Du entgegnest: „Um sicher zu gehen, muss ich mir nur $2n/5 + 1$ viele anschauen.“

a) Begründe, dass du (unabhängig von der Reihenfolge der betrachteten Pillen) nach $2n/5 + 1$ überprüften Pillen sicher weißt, welche Farbe häufiger vertreten ist.

b) Begründe, dass du nach echt weniger als $2n/5 + 1$ überprüften Pillen nicht sicher wissen kannst, welche Farbe häufiger vertreten ist.

Der Mann reißt dich aus deiner konzentrierten Zählarbeit: „Uns läuft die Zeit davon! Geht das *zufällig* schneller?“

c) Begründe, dass es für $p > 0$ reicht $O(\log(1/p))$ Pillen zu überprüfen, um höchstens mit Wahrscheinlichkeit p die falsche Wahl zu treffen.

Aufgabe 3 – Wer nicht wagt, der nicht gewinnt

Bei Tic-Tac-Toe kann bekanntermaßen immer ein Unentschieden erzwungen werden. Um die Gewinnchancen zu verbessern wird dir folgende Variante des Spiels vorgeschlagen:

> Einmalig werden neun unabhängige, faire Münzen geworfen: eine für jedes der 3×3 Felder, um zu bestimmen ob in das jeweilige Feld ein **X** oder ein **O** eingetragen wird. Gibt es eine **X**-Folge (drei horizontal, vertikal oder diagonal) aber keine **O**-Folge, so gewinnt **X**. Umgekehrt gewinnt **O**. Wenn es keine Folge gibt oder sowohl eine **X**- als auch eine **O**-Folge, so bleibt es unentschieden.

a) Modelliere das Zufallsexperiment, indem du Ergebnismenge und Wahrscheinlichkeitsmaß eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsraumes angibst.

b) Bestimme, welches der beiden Ereignisse wahrscheinlicher eintritt:
   - **X** gewinnt
   - Keiner gewinnt.

   Hinweis: Es kann hilfreich sein, hier einen Computer rechnen zu lassen.