R. Herzog, G. Müller, M. Hashemi, S. Meggendorfer
Universität Heidelberg

Übung 12

Ausgabedatum: 8. Juli 2022
Abgabedatum: 19. Juli 2022

Hausaufgabe 1. (Banachscher Fixpunktsatz und Kontraktionseigenschaft) 6 Punkt(e)

(i) Geben Sie eine abgeschlossene und nichtleere Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ und eine Familie von Funktionen $f_\lambda \colon M \to \mathbb{R}$ an, sodass f_λ Lipschitz-stetig mit Konstante $\lambda \geqslant 0$ ist und

- für $\lambda < 1$ genau einen Fixpunkt hat, welcher der Grenzwert jeder Fixpunkt-Iteration mit Startwert in M ist,
- für $\lambda = 1$ jeder Punkt in M ein Fixpunkt ist
- für $\lambda > 1$ genau ein Fixpunkt existiert, der nur der Grenzwert einer einzigen Fixpunkt-Iteration ist.

(ii) Untersuchen Sie die relle Funktion $f(x) = \ln(1 + e^x)$ auf Kontraktions- und Fixpunkteigenschaften. Was können Sie über die Striktheit der formulierten Kontraktionseigenschaft im Banachschen Fixpunktsatz folgern?

Hausaufgabe 2. (Banachscher Fixpunktsatz für kontrahierende Potenzen) 5 Punkt(e)

Zeigen Sie die folgende Erweiterung des Banachschen Fixpunktsatzes:

Satz. *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, abgeschlossene Menge und $T \colon M \to M$, so dass*

$$\|T^{k_0}(x) - T^{k_0}(y)\| \leqslant \lambda \|x - y\| \quad \forall x, y \in M$$

für ein $k_0 \in \mathbb{N}$ und ein $\lambda \in [0, 1)$. Dann hat die Abbildung T einen eindeutigen Fixpunkt $x^* \in M$ und es gilt

$$T^n(x_0) \xrightarrow{n\to\infty} x^*$$

für jedes $x_0 \in M$.

Hausaufgabe 3. (Newton-Raphson) 10 Punkt(e)

Es sei die reelle Funktion $f(x) = \sin(x)$ gegeben.

(i) Erklären Sie, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit das lokale Newton-Verfahren gegen eine Nullstelle von f konvergiert.

(ii) Bestimmen Sie einen Startpunkt $x^{(0)}$, so dass die Folge der Iterationspunkte $x^{(k)}$ bestimmt gegen ∞ divergiert.

(iii) Bestimmen Sie einen Startpunkt $x^{(0)}$, sodass die Folge der Iterationspunkte zwischen zwei verschiedenen (nicht optimalen) Punkten alterniert.

(iv) Bestimmen Sie das größte Interval um die Nullstelle $x = 0$, so dass das Newton-Verfahren von jedem Punkt des Intervals aus gegen $x = 0$ konvergiert.

Hausaufgabe 4. (Implementierung und Vergleich der nichtlinearen Löser) 8 Punkt(e)

(i) Implementieren Sie das Bisektionsverfahren, die (Banachsche) Fixpunktiteration und das lokale Newton-Verfahren für die Bestimmung einer Nullstelle einer gegebenen Funktion mit entsprechenden Voraussetzungen.

(ii) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten und die Konvergenzgeschwindigkeit der vorgestellten Verfahren exemplarisch anhand der in der nachfolgenden Tabelle gelisteten Funktionen und Startwerte/Startinvervalle.

$f(x)$	Startwerte (x_0)	Startintervalle
$x^2 - 0.5$	$0.5, -0.5, 0, 2$	$[x_0 - 1, x_0 + 1]$
$\exp(x) - 2$	$0, \log(2) + 10^{-8}, 10$	$[x_0 - 1, x_0 + 1]$
$\frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1+x)^2+(1-x)^2}$	$0.5, 1, 1 - 10^{-8}$	$[x_0 - 1, x_0 + 1]$

Erzeugen Sie eine geeignete Ausgabe und reichen Sie ihre Ausgabe und ihren Code ein.

Für die Abgabe Ihrer Lösungen zu diesem Übungsblatt verwenden Sie bitte die dafür vorgesehene Abgabefunktion in Moodle.