


Regeln und Theoreme - Spieltheorie aus mathematischer Sicht

Eszter Sikolya

 In diesem Aufsatz geben wir einen Überblick über die Theorie des kompetitiven Gleichgewichts. Wir beweisen die wichtigsten Ergebnisse von Kakutani und Nash, und wir untersuchen ein Beispiel für eine Modellwirtschaft.

1 Einführung

Spieltheorie ist ein sehr großer Bereich innerhalb der Mathematik, deswegen habe ich einen kleinen Teil davon, nämlich die Existenz des kompetitiven Gleichgewichts ausgewählt.

Definition 1.1. Wir sprechen von *kompetitivem Gleichgewicht*, wenn auf dem Markt ein Gleichgewicht entsteht, erzeugt von der Interaktion vieler kleiner, einflussloser Akteure.

Den ersten Versuch, ein mathematisches Modell des kompetitiven Gleichgewichtes aufzubauen, hat *L. Walras* (1874–77) gemacht. Aber für mehr als ein halbes Jahrhundert war die Gleichheit der Zahl seiner Gleichungen und Unbekannten das einzige Argument dafür, dass das Gleichgewicht *existiert*.

In der Literatur gibt es 4 verschiedene Methoden, das Problem zu lösen:

1. Brouwer- und Kakutani-Fixpunktsätze,
2. In den 70er Jahren: kombinatorische Algorithmen,
3. Später Dierker, Smale, Varian, Kalman und Lin: Theorie des Abbildungsgrades,
4. Smale (1976) hat eine Differentialgleichung aufgeschrieben, deren Lösungen „im allgemeinen“ zu dem Gleichgewicht konvergieren.

Im folgenden beschäftigen wir uns nur mit Punkt 1, weil er bis heute von grundlegender Bedeutung ist. Zuerst demonstrieren wir den Fixpunktsatz von Kakutani und den berühmten Satz von Nash. Dann verallgemeinern wir das Ergebnis von Nash, wie es Debreu gemacht hat. Zum Schluss zeigen wir eine konkrete Wirtschaftssituation, in der unser Theorem angewendet werden kann.

2 Gleichzeitige Optimalisierung

2.1 Die Theoreme von Kakutani und Nash

Die Grundlagen für die Theorie des kompetitiven Gleichgewichts hat in den 30er Jahren *von Neumann* (ein Mathematiker ungarischer Herkunft) entwickelt. Er hat das Problem als ein Sattel-Punkt-Problem formuliert. Er benutzte ein von ihm bewiesenes topologisches Lemma, das später, weiterentwickelt von *Kakutani*, das wichtigste Instrument für den Beweis des wirtschaftlichen Gleichgewichtes geworden ist. Bevor wir den Satz von Kakutani formulieren, sollen die dort verwendeten Begriffe erklärt werden.

Definition 2.1. Seien S und T zwei Mengen. Wir sagen, dass $\phi : S \rightarrow T$ eine *mengenwertige Abbildung* ist, wenn ϕ jedem Punkt $x \in S$ eine nichtleere Teilmenge $\phi(x)$ von T zuordnet. Der *Graph* der Abbildung ϕ ist die folgende Teilmenge des Cartesischen Produktes $S \times T$:

$$G(\phi) := \{(x, y) \in S \times T : y \in \phi(x)\}.$$

Wir sagen dass ϕ *konvexwertig* ist, wenn T ein Vektorraum ist, und für alle x die Menge $\phi(x)$ konvex ist.

Definition 2.2. Seien S und T Teilräume von einem euklidischen Raum. Die mengenwertige Abbildung $\phi : S \rightarrow T$ ist im Punkt $x^0 \in S$ *oberhalbstetig*, wenn x^0 eine Umgebung hat, wo ϕ beschränkt ist (das heißt, für alle x aus dieser Umgebung ist $\phi(x)$ eine beschränkte Menge), und

$$\begin{aligned} x^n \rightarrow x^0, y^n \rightarrow y^0, y^n \in \phi(x^n) \\ \Rightarrow y^0 \in \phi(x^0) \end{aligned}$$

(das heißt, $G(\phi)$ ist abgeschlossen).

Remark 2.3. Wenn ϕ in x^0 oberhalbstetig ist, dann ist $\phi(x^0)$ kompakt. Das Cartesische Produkt von auf S oberhalbstetigen mengenwertigen Abbildungen ist auch oberhalbstetig auf S .

Definition 2.4. Sei $S = T$. Wir nennen x^0 einen *Fixpunkt* von ϕ , wenn $x^0 \in \phi(x^0)$.

Theorem 2.5 (Kakutani). Wenn S ein nichtleerer, kompakter, konvexer Teilraum von einem euklidischen Raum ist, und $\phi : S \rightarrow S$ eine oberhalbstetige, konvexwertige mengenwertige Abbildung, dann hat ϕ einen Fixpunkt.

Beweis. Ohne Beweis. \square

Jetzt beweisen wir den Satz von Nash (1950), der den obigen Satz von Kakutani benutzt. Wir betrachten ein Spiel mit n Akteuren. Der Akteur i wählt eine Strategie s_i aus der Menge S_i – die, nach Voraussetzung, eine nichtleere, kompakte, konvexe Teilmenge eines euklidischen Raumes ist. Die von den n Spielern gewählten Strategien setzen wir zu $s = (s_1, \dots, s_n) \in S := \times_{i=1}^n S_i$ zusammen. Der i -te Spieler hat davon den Nutzen $f_i(s)$. Von den Nutzenfunktionen f_i nehmen wir an, dass sie

auf S stetig und in den entsprechenden Variablen s_i linear sind.

Notation 1. Wir bezeichnen die Menge $\{1, \dots, n\}$ der Spieler mit N , und dieselbe Menge ohne den Spieler i mit $N \setminus i$.

Definition 2.6. Wir nennen die Strategie $s^* \in S$ einen (*Cournot-Nash*) *Gleichgewichtspunkt*, wenn für alle $i \in N$, die Funktion $f_i(s_i, s_{N \setminus i}^*)$ im Punkt s_i^* auf S_i Maximum hat. Das heißt, ein jeder Spieler wählt solch eine Strategie, die seinen Nutzen maximiert, vorausgesetzt dass die Strategien der anderen angegeben sind.

Theorem 2.7 (Nash). Wenn für alle $i \in N$ (1) die Menge S_i eine nichtleere, kompakte, konvexe Teilmenge eines euklidischen Raumes ist, und (2) f_i auf $S = \times_{i \in N} S_i$ stetig, reellwertig und in s_i linear ist, dann hat das Spiel $(S_i, f_i)_{i \in N}$ einen Gleichgewichtspunkt.

Beweis. Wir definieren für alle i eine mengenwertige Abbildung $\mu_i : S \rightarrow S_i$ wie folgt. Sei $s \in S$:

$$\mu_i(s) := \left\{ x \in S_i : f_i(x, s_{N \setminus i}) = \max_{y \in S_i} f_i(y, s_{N \setminus i}) \right\}.$$

Das heißt, $\mu_i(s)$ ist die Menge derjenigen Strategien des Spielers i , die neben den angegebenen Strategien der anderen Spieler den Nutzen von i maximieren. Das Maximum existiert wegen der Kompaktheit von S_i . Da $S_i \neq \emptyset$ ist, ist $\mu_i(s) \neq \emptyset$. Die Menge $\mu_i(s)$ ist konvex, weil f_i in s_i linear ist, und wir über eine konvexe Menge maximieren. Wir zeigen noch, dass μ_i oberhalbstetig ist. Sei $s^n \rightarrow s^0 \in S$, $x^n \rightarrow x^0 \in S_i$ so dass $x^n \in \mu_i(s^n)$ für alle n . Sei $y \in S_i$ beliebig. Dann

$$f_i(x^n, s_{N \setminus i}^n) \geq f_i(y, s_{N \setminus i}^n)$$

für alle n . Wegen der Stetigkeit von f_i folgt

$$f_i(x^0, s_{N \setminus i}^0) \geq f_i(y, s_{N \setminus i}^0),$$

somit $x^0 \in \mu_i(s^0)$. Für $s \in S$ sei

$$\mu(s) := \times_{i=1}^n \mu_i(s).$$

Somit ist μ eine mengenwertige Abbildung von S nach S , die oberhalbstetig und konvexwertig ist. S ist nichtleer, kompakt und konvex. Der Punkt $s^* \in S$ ist ein Cournot-Nash Gleichgewichtspunkt genau dann, wenn für alle $i : s_i^* \in \mu_i(s^*)$, das heißt $s^* \in \mu(s^*)$. Solch ein Fixpunkt von μ existiert wegen des Theorems 2.5 von Kakutani, da seine Voraussetzungen erfüllt sind. \square

2.2 Verallgemeinerung des Theorems von Nash

1952 hat *Debreu* den obigen Begriff von dem Gleichgewichtspunkt und den Satz von Nash derart verallgemeinert, dass sie für verschiedene wirtschaftliche Probleme anzuwenden sind.

Zuerst betrachten wir die folgende Situation. Wir haben einen wirtschaftlichen Akteur, dessen „Umgebung“ mit einem Element x aus der Menge X beschrieben werden kann. Der Akteur wählt eine Tätigkeit aus der Menge seiner möglichen Tätigkeiten Y . Wenn seine Umgebung x ist, beschränkt er sich auf die Teilmenge $\phi(x)$ von Y . Wenn er die Tätigkeit $y \in \phi(x)$ wählt, hat er den Nutzen $f(x, y)$, wo f auf der Menge $X \times Y$ definiert und reellwertig ist. Für eine gegebene Umgebung x , will der Akteur solch eine Tätigkeit aus $\phi(x)$ wählen, die für ihn den größten Nutzen bietet. Wir bezeichnen die Menge der optimalen Tätigkeiten mit $\mu(x)$, d.h.

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \\ &= \left\{ y \in \phi(x) : f(x, y) = \max_{z \in \phi(x)} f(x, z) \right\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Die Existenz eines Gleichgewichtspunktes liegt an der Oberhalbstetigkeit von der mengenwertigen Abbildung μ . Um das zu beweisen, wollen wir noch zwei Begriffe für mengenwertige Abbildungen definieren.

Definition 2.8. Sei $\phi : S \rightarrow T$ eine mengenwertige Abbildung, S und T Teilmengen von einem euklidischen Raum. Wir nennen ϕ *unterhalbstetig* im Punkt $x^0 \in S$, wenn

$$\begin{aligned} [x^n \rightarrow x^0, y^0 \in \phi(x^0)] \\ \Rightarrow \exists y^n \rightarrow y^0 : y^n \in \phi(x^n). \end{aligned}$$

Die mengenwertige Abbildung ϕ ist *stetig*, wenn sie oberhalbstetig und unterhalbstetig ist.

Theorem 2.9 (Berge). Seien X und Y Teilräume von euklidischen Räumen. Wenn die obige Funktion f und die mengenwertige Abbildung ϕ stetig sind, dann ist die mengenwertige Abbildung μ in (2.1) oberhalbstetig.

Beweis. Seien $x^n \rightarrow x^0$ in X , $y^n \rightarrow y^0$ in Y , so dass $y^n \in \mu(x^n)$ für alle n . Daraus folgt, dass für alle $n : y^n \in \phi(x^n)$ erfüllt ist, und da ϕ oberhalbstetig ist, gilt $y^0 \in \phi(x^0)$. Sei $z \in \phi(x^0)$ beliebig. Da ϕ auch unterhalbstetig ist, existiert $z^n \rightarrow z$ in Y , so dass für alle $n : z^n \in \phi(x^n)$. Sonst gilt

$$f(x^n, y^n) \geq f(x^n, z^n)$$

für alle n . Aus der Stetigkeit von f folgt, dass

$$f(x^0, y^0) \geq f(x^0, z).$$

Da diese Ungleichung für alle $z \in \phi(x^0)$ gilt erhalten wir $y^0 \in \phi(x^0)$. \square

Jetzt betrachten wir ein gesellschaftliches System mit n Akteuren. Wir nehmen an, dass der Akteur i eine Tätigkeit

aus der Menge A_i seiner möglichen Tätigkeiten wählt, die eine nichtleere, kompakte, konvexe Teilmenge eines euklidischen Raumes ist. Wir definieren für alle i eine mengenwertige Abbildung $\phi_i : A := \times_{i=1}^n A_i \rightarrow A_i$, die dem Punkt $a \in A$ eine nichtleere Teilmenge $\phi_i(a)$ von A_i zuordnet. Diese Teilmenge ist die Menge, auf die sich die Wahlen des Akteurs i beschränken, wenn die anderen Akteure die Tätigkeiten $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ gewählt haben. Weiterhin nehmen wir an, dass ϕ_i konvexwertig und stetig ist. Der Vektor $a \in A$ gibt dem Akteur i einen Nutzen $f_i(a)$. Von der Funktion f_i nehmen wir an, dass sie auf A stetig und in a_i quasikonkav ist. Der Akteur i wählt aus $\phi_i(a)$ eine Tätigkeit, mit der er seinen Nutzen maximiert, das heißt er wählt aus der Menge

$$\mu_i(a) := \left\{ x \in \phi_i(a) : f_i(x, a_{N \setminus i}) = \max_{y \in \phi_i(a)} f_i(y, a_{N \setminus i}) \right\}.$$

Definition 2.10. Der Punkt $a^* \in A$ ist ein *Gleichgewichtspunkt*, wenn für alle $i \in N$, die Funktion $f_i(\cdot, a_{N \setminus i}^*)$ im Punkt a_i^* auf der Menge $\phi_i(a^*)$ ein Maximum hat – das heißt, wenn für alle $i \in N$, $a_i^* \in \mu_i(a^*)$.

Remark 2.11. Sei μ die mengenwertige Abbildung von A nach A definiert für $a \in A$ mit

$$\mu(a) := \times_{i \in N} \mu_i(a).$$

Damit ist $a^* \in A$ ein Gleichgewichtspunkt genau dann, wenn $a^* \in \mu(a^*)$ ist, das heißt a^* ein Fixpunkt von μ ist.

Theorem 2.12. Wenn für alle $i \in N$

- (1) A_i eine nichtleere, kompakte, konvexe Teilmenge eines euklidischen Raumes ist,
- (2) f_i eine auf $A := \times_{i=1}^n A_i$ definierte stetige, reellwertige, in der i -ten Variable quasikonkave Funktion ist, und
- (3) $\phi_i : A \rightarrow A_i$ eine stetige, konvexwertige

mengenwertige Abbildung ist, dann hat das gesellschaftliche System $(A_i, f_i, \phi_i)_{i \in N}$ einen Gleichgewichtspunkt.

Beweis. Da für alle i , f_i und ϕ_i stetig sind, ist μ_i nach dem Satz 2.9 oberhalbstetig. Daher ist μ – das Cartesische Produkt von den μ_i 's – auch oberhalbstetig. Weiterhin, ist für alle $a \in A$, $\mu_i(a)$ konvex, da sie der Durchschnitt von zwei konvexen Mengen ist, nämlich von

$$\phi_i(a) \text{ und } \left\{ x \in A_i : f_i(x, a_{N \setminus i}) = \max_{y \in \phi_i(a)} f_i(y, a_{N \setminus i}) \right\}.$$

Deshalb ist für alle $a \in A$,

$$\mu(a) = \times_{i \in N} \mu_i(a)$$

auch konvex. Die Menge A ist nichtleer, kompakt und konvex. Daher gelten die Voraussetzungen von dem Satz 2.5 von Kakutani für die mengenwertige Abbildung μ von A nach A , deswegen hat μ einen Fixpunkt, und das System hat damit einen Gleichgewichtspunkt. \square

2.3 Beispiel für eine Wirtschaft

Im folgenden erklären wir eine Wirtschaftssituation, die 1954 Arrow und Debreu beschrieben haben.

In der Wirtschaft haben wir zwei Typen von Akteuren: Konsumenten und Produzenten. Die Konsumtion des Konsumenten i ($i = 1, \dots, m$) ist von einem Vektor in \mathbb{R}^l beschrieben, wo seine „Inputs“ mit positiven, seine „Outputs“ mit negativen Zahlen bezeichnet sind. Seine möglichen Wahlen befinden sich in der Menge $X_i \subseteq \mathbb{R}^l$. Sein „Geschmack“ ist von einer vollständigen, reflexiven, transitiven, binären *Präferenzrelation* \succsim_i auf X_i beschrieben. Der Fakt $x \succsim_i x'$ bedeutet, dass für den Konsument

i der Warenvektor x' mindestens so erwünscht wie x ist. Neben dem Preisvektor $p \in \mathbb{R}^l$ und der Konsumtion $x_i \in X_i$ ist der Wert der Konsumtion des Konsumenten i gleich das Skalarprodukt $p \cdot x_i$. Dieses kann nicht größer sein als sein Einkommen w_i . Weiterhin wählt er aus der Menge $\{x \in X_i : p \cdot x \leq w_i\}$ das Element, das für ihn nach der Relation \succsim_i das beste ist. Sein Einkommen besteht aus einem Anfangsbestand $e_i \in \mathbb{R}^l$ der verschiedenen Waren, und aus den Gewinnanteilen θ_{ij} , $j = 1, \dots, n$ von den Profiten r_j , $j = 1, \dots, n$ der verschiedenen Produzenten. So ist

$$w_i = p \cdot e_i + \sum_{j=1}^n \theta_{ij} r_j.$$

Für den Produzenten j ($j = 1, \dots, n$) bezeichnen wir seine „Inputs“ mit negativen und seine „Outputs“ mit positiven Zahlen in dem Warenvektor $y_j \in \mathbb{R}^l$. Er hat eine mögliche Produktionsmenge $Y_j \subseteq \mathbb{R}^l$, aus der er den den größten Profit $p \cdot y_j$ bieten den Warenvektor y_j produziert.

Zusammenfassend, ist die Wirtschaft \mathcal{E} durch

$$\mathcal{E} = ((X_i, \succsim_i, e_i), (\theta_{ij}), (Y_j))$$

beschrieben. Der Zustand der Wirtschaft ist mit den Konsumptionsvektoren (x_i) , mit den Produktionsvektoren (y_j) und mit dem Preisvektor p zu beschreiben.

Definition 2.13. Wir nennen den Zustand $((x_i^*), (y_j^*), p^*)$ einen „Free Disposal“-Gleichgewichtspunkt, wenn

(i) für alle i der Punkt x_i^* der beste Punkt nach der Relation \succsim_i aus der Menge

$$\left\{ x \in X_i : p^* \cdot x \leq p^* \cdot e_i + \sum_{j=1}^n \theta_{ij} p^* \cdot y_j^* \right\}$$

ist,

(ii) für alle j der Punkt y_j^* das Skalarprodukt $p^* \cdot y_j$ maximiert,

(iii)

$$z^* := \sum_{i=1}^m x_i^* - \sum_{j=1}^n y_j^* - \sum_{i=1}^m e_i \leq 0,$$

$$p^* \geq 0,$$

$$p^* \cdot z^* = 0.$$

Definition 2.14. Der Zustand

$((x_i), (y_j), p)$ ist realisierbar, wenn

(i) für alle i , $x_i \in X_i$,

(ii) für alle j , $y_j \in Y_j$,

(iii) $\sum_{i=1}^m x_i - \sum_{j=1}^n y_j - \sum_{i=1}^m e_i \leq 0$.

Die Menge der realisierbaren Konsumtionen für den Konsumenten i – das heißt die Warenvektoren, für die es realisierbare Zustände gibt, die dem Konsumenten diese Warenvektoren zuteilen –, bezeichnen wir mit \hat{X}_i . Weiterhin sagen wir, dass $x \prec_i x'$, wenn $x \succsim_i x'$, aber $x \neq x'$. Für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^l$, $x < y$ bedeutet, dass $x \leq y$, aber $x \neq y$; und $x \ll y$ bedeutet, dass für alle Koordinaten $x^h < y^h$ ($h = 1, \dots, l$) erfüllt ist. Mit Hilfe des obenstehenden können wir unser Theorem formulieren:

Theorem 2.15. Nehmen wir die folgenden Eigenschaften für alle i ($i = 1, \dots, m$) an:

(i) X_i ist nichtleer, kompakt und konvex,

(ii) in \hat{X}_i gibt es für den Konsumenten keinen besten Punkt,

(iii) die Menge $\{(x, x') \in X_i \times X_i : x \succsim_i x'\}$ ist abgeschlossen,

(iv) wenn für $x, x' \in X_i$, $x \prec_i x'$ erfüllt ist, und $r \in (0, 1]$, dann gilt

$$x \prec_i (1 - r)x + rx',$$

(v) $\exists x_i^0 \in X_i$ so dass $x_i^0 \ll e_i$,

(vi) für alle j , Y_j ist kompakt, konvex, und enthält die 0.

Dann existiert ein „Free Disposal“-Gleichgewichtspunkt in der Wirtschaft.

Beweis. Der Beweis benutzt Theorem 2.12 und die Tatsache, dass aus der Abgeschlossenheit der Präferenzrelation (iii) folgt,

dass eine stetige Nutzenfunktion u_i existiert, die die Relation in dem folgenden Sinne darstellt:

$$x \succsim_i x' \Leftrightarrow u_i(x) \leq u_i(x').$$

□

Literatur

1. K. J. Arrow and G. Debreu: *Existence of an equilibrium for a competitive economy*, *Econometrica*, **22** (1954), 265–290
2. C. Berge: *Espaces Topologiques*, Dunod, Paris, 1959
3. Gerard Debreu: *Existence of Competitive Equilibrium*, *Handbook of Mathematical Economics* (Ed.: K. J. Arrow, M. D. Intriligator), vol. II (1982), Chapter 15, 697–713
4. Gerard Debreu: *A social equilibrium existence theorem*, *Proceedings of the National Academy of Sciences, USA*, **38** (1952), 886–893
5. S. Kakutani: *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*, *Duke Mathematical Journal*, **8** (1941), 457–459
6. J. F. Nash: *Equilibrium points in N -person games*, *Proceedings of the National Academy of Sciences, USA*, **36** (1950), 48–49