IWR – Universität Heidelberg
Prof. Dr. Guido Kanschat

Abgabe: **7.12.2012**

# Übung Nr. 7
# zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Winter 2012/13

## Aufgabe 7.1: (Bandmatrizen)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Bandmatrix der Bandbreite $m < n$, das heißt, $a_{ij} = 0$ für $|i-j| > m$. Zeigen Sie folgende Behauptungen aus der Vorlesung:

**(a)** Wenn die LR-Zerlegung von $A$ ohne Zeilenvertauschungen durchgeführt wird, sind $L$ und $R$ ebenfalls Bandmatrizen der Bandbreite $m$.

**(b)** Der Aufwand zur Berechnung der LR-Zerlegung ist $\mathcal{O}(nm^2)$. Hinweis: Es ist nicht nötig, den Faktor $1/3$ vor $nm^2$ zu erzielen.

## Aufgabe 7.2: (Zusatzaufgabe: Gerschgorin-Kreise I)

Gegeben eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sei

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \; |z - a_{ii}| \le \sum_{k\neq i} |a_{ik}| \right\}.$$

Zeigen Sie, dass es zu jedem Eigenwert $\lambda$ mindestens ein $i$ gibt, so dass $\lambda \in D_i$.

Hinweis: Skalieren Sie einen Eigenvektor $x$ zu $\lambda$, so dass für den Eintrag $x_i$ mit maximalem Betrag gilt: $|x_i| = 1$.

## Aufgabe 7.3: (Gerschgorin-Kreise II)

Skizzieren Sie das Gebiet in der komplexen Ebene, in dem nach dem Satz aus der vorherigen Aufgabe die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 12 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 10 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

liegen.

## Aufgabe 7.4: (Stabilität der Eigenwerte)

Sei $A_\epsilon$ eine Familie von $n \times n$-Matrizen mit

$$A_\epsilon = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \epsilon & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $A_0$ hat den einen Eigenwert $\lambda$ mit Vielfachheit $n$.

**(a)** Zeigen Sie für $\epsilon > 0$, dass $A_\epsilon$ $n$ verschiedene EW von der Gestalt

$$\lambda_{\epsilon,k} = \lambda + \sqrt[n]{\epsilon}\, e^{\frac{2\pi i k}{n}}$$

hat, und damit $|\lambda - \lambda_{\epsilon,k}| = \sqrt[n]{\epsilon}$ gilt. Hinweis: Berechenen Sie das charakterisitsche Polynom durch Laplace-Entwicklung nach der letzten Zeile.

**(b)** Welche Genauigkeit können Sie bei der Berechnung der Eigenwerte der Matrix $A_0$ der Dimension $8$ mit einer Maschinengenauigkeit von $10^{-16}$ bestenfalls erwarten?

Jede Aufgabe 4 Punkte.