

Einflusslinien und Einflussflächen

Prof. Dr.-Ing. Casimir Katz, SOFiSTiK AG, Oberschleißheim

Zusammenfassung:

Obwohl viele Ingenieure glauben, dass diese uralte Technik nicht mehr gebraucht wird, da man doch heute ohne Probleme hunderte von Laststellungen berechnen und überlagern kann, ist es nicht nur schneller und einfacher, manchmal auch unverzichtbar, Einflusslinien und Flächen zu verwenden. Weiter erlauben sie auch eine tiefere Einsicht in die Ursache der numerischen Abweichungen einer Finite-Element-Berechnung.

Summary:

Although many engineers believe that this old technique is no longer required, as the problems of variable loadings may be easily solved with some hundreds of load cases, it is not only that influence lines and areas are faster and easier to use, sometimes they are the only possibility. And they allow a deeper insight in the numerical error of finite element analysis.

1 WAS SIND EINFLUSSLINIEN ODER -FLÄCHEN?

1.1 Klassische Sichtweise

Einflusslinien waren früher nicht nur ein wichtiger Bestandteil der Statik-Grundvorlesung [1] sondern auch ein wesentliches Hilfsmittel um bei einer bestehenden Brücke schnell überprüfen zu können, ob ein Sonderfahrzeug die Brücke überfahren darf.

Eine Einflusslinie einer Schnittgröße eines Stabwerks ist die linear ermittelte Verformungsfigur die sich aus einem Einheitsknick oder Einheitsprung an einer bestimmten Stelle ergibt. Die Einflusslinie für eine Auflagerkraft ist eine entsprechende Stützensenkung, die Einflusslinie einer Verformung ist die Verformung unter einer entsprechenden Einzellast. Die maximale korrespondierende Schnittgröße ist die Auswertung des Integrals aus Belastung in ungünstigster Stellung mal Einflusslinie:



Abbildung 1: Einflusslinie für eine Querkraft im ersten Feld mit schwedischem Lastenzug

1.2 Wozu braucht man Einflusslinien?

Verkehrslasten wirken nicht überall gleichzeitig mit der vollen Intensität, daher kann man Lasten im Hochbau abmindern und deshalb gibt es Lastenzüge im Brückenbau. Man kann das Problem mit vielen Laststellungen angreifen, was man gemeinhin unter der Methode „brute force“ einzuordnen hat, was aber relativ leicht und zuverlässig zu kontrollieren ist.

Die Methode der Einflusslinien ist sehr anschaulich, in der Regel schneller und genauer, ist aber letztendlich bei der Auswertung ein Optimierungsverfahren, das entsprechend aufwändiger zu implementieren ist. Besonders wertvoll sind sie bei der nachträglichen Bewertung ob ein Sonderlastenzug über ein bestehendes Bauwerk fahren darf.

1.3 Invertierte Sichtweise und Ökonomie der Berechnung

Die Dualität der Beziehung zwischen Aufpunkt und Lastenpunkt funktioniert in mehreren Richtungen, die Verformung der Einflusslinien ist ein Maß für die Größe der korrespondierenden Schnittgröße im Aufpunkt wenn die Last im Lastpunkt steht. Superpositionen, Integrale und Differentiale können beliebig angewendet werden, die Ableitung der Einflusslinie für eine vertikale Belastung ist daher die Einflusslinie der gleichen Schnittgröße für eine Momentenbelastung.

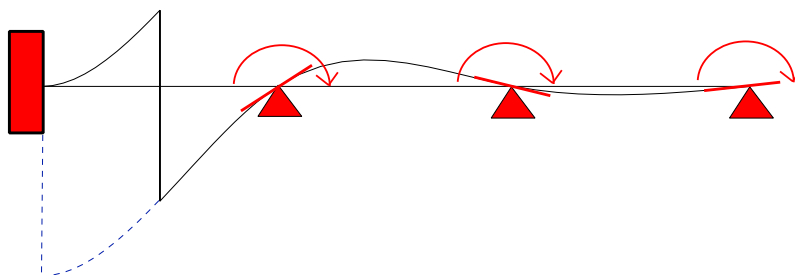


Abbildung 2: Berechnung einer Einflusslinie

Wenn im Beispiel des Dreifeldträgers der Abbildung 2 jeder Stab in 10 Schnitte unterteilt wird ergäben sich bei einem ebenen Tragwerk 33 Schnitte mit 3 Schnittgrößen (V , M_x , M_y), also 99 Lastfälle mit einem Einheitssprung. Mit diskreten Laststellungen wären es vermutlich 31 Lastfälle. Wenn man aber weiß, dass die Einflusslinie eines Stabes durch eine kubische Parabel dargestellt wird, dann benötigt man zur Ermittlung der Einflusslinien für alle Schnittgrößen nur 8 Lastfälle (M_x und M_y in den Auflagerpunkten), deren Verschiebungen die Schnittgrößen in jedem Schnitt erzeugen, die der Ableitung oder Stützstelle an dem Lastpunkt entsprechen. Die finalen Einflusslinien können dann durch einfache Interpolation ermittelt werden. Bei größeren Systemen macht es auch einen beachtlichen Unterschied im Umfang der erzeugten Datenmengen auf der Festplatte.

Dieses Vorgehen ist daher optimal um alle Einflusslinien und letztendlich die Grenzlinien der Beanspruchung zu ermitteln. Für einzelne Einflusslinien setzt man sinnvollerweise die Einheitsverformungen an und wertet die Verschiebungsfigur aus.

1.4 Einflusslinien für komplexe Ergebnisse und Auflagerkräfte

Einflusslinien für Spannungen in einem Querschnittspunkt kann man z.B. durch Kombination von Einflusslinien der Schnittgrößen erzeugen. Dies ist für beide Methoden gleichermaßen möglich.

Einflusslinien für Auflagerkräfte sind mit einer einfachen Auflagerverschiebung ermittelbar, jedoch ändert sich dann das statische System, so dass diese Methode sehr aufwändig ist. Bei der Methode der Einheitslasten muss nur eine ausreichend große Anzahl von Koeffizienten bereitgestellt werden, was seit einiger Zeit in ELLA implementiert wurde.

1.5 Einflussflächen

Eine Einflussfläche ergibt sich bei Flächentragwerken völlig analog entweder mit einer entsprechenden Singularität der analytischen Lösung oder einer der FE-Methode angemessenen Einheitsbelastung oder durch Interpolation entsprechender Einheitslastfälle auf der Verkehrsfläche.

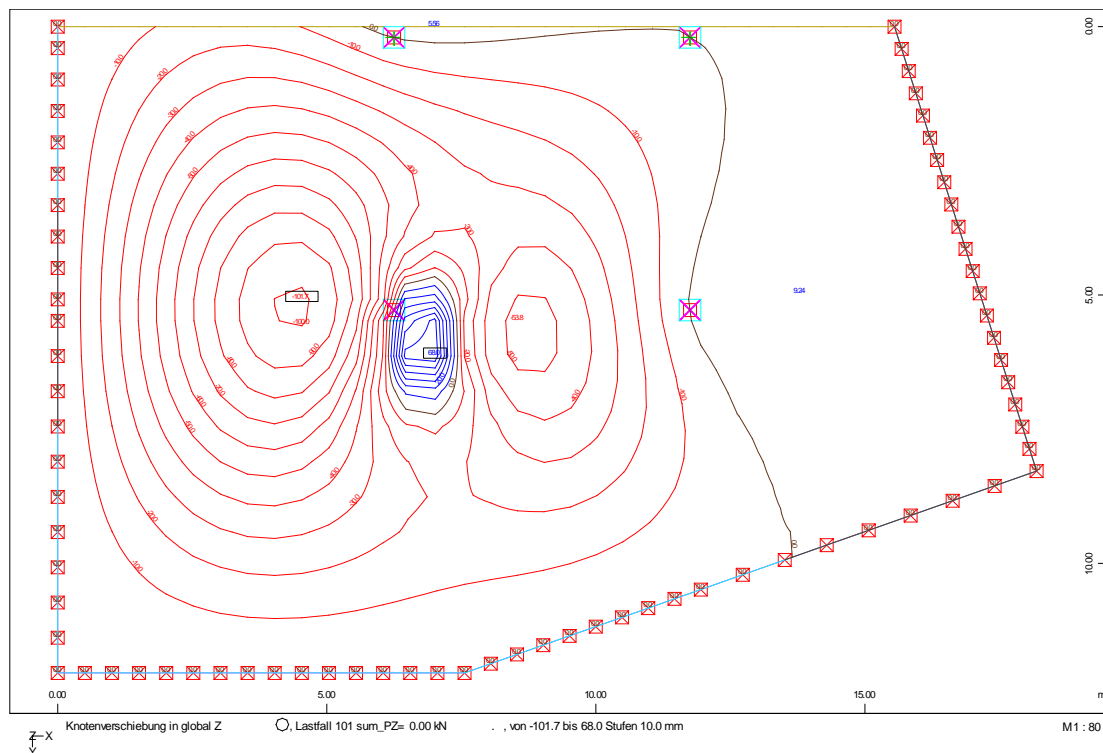


Abbildung 3: Einflussfläche in einer Platte

Da die allgemeine Behandlung von beweglichen Lasten auf einer Fläche (z.B. Gabelstapler) durchaus kompliziert ist, sollte man die Laststellungen quer und längs einer entsprechenden Fahrspur anordnen. Die Anzahl der Lastpunkte richtet sich natürlich nach den Details der Quertragwirkung die man auflösen möchte, in der Regel sind aber drei Lastpunkte für die Mitte und die Ränder der Spur schon ausreichend [2].

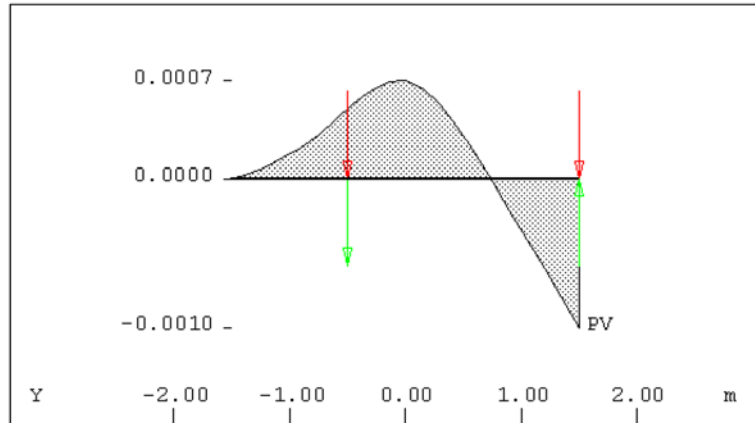


Abbildung 4: Einflusslinie in Querrichtung

1.6 Green'sche Funktionen

Die Green'sche Funktion ist die Fundamentallösung eines Problems, welche die Randbedingungen der unbekannt Funktion erfüllt (z.B. Dirichlet-Randbedingungen) [3],[4]. Für die Elastostatik ist das eine Einzelkraft bei der die Verformungsrandbedingungen eingehalten sind [5]. Da die Finiten Elemente keine Singularitäten abbilden können, treten an deren Stelle einfach zu behandelnde Ersatzkräfte, die zu einer Verformungsfigur führen, die die wahre Green'sche Funktion als Polynom approximiert. Die Abweichung zwischen der exakten Funktion und deren Näherung durch den Verschiebungsansatz des Elementnetzes kann nicht nur dazu verwendet werden, den numerischen Fehler für ein Ergebnis unmittelbar erkennen zu können, sie macht auch offensichtlich, welche Ergebnisse einer FE-Berechnung exakt sind. [4]

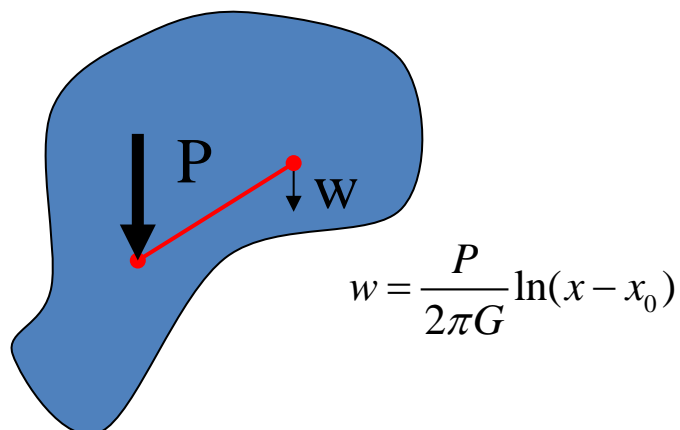


Abbildung 5: Green'sche Funktion in einer Scheibe

2 WAS VERRATEN UNS DIE EINFLUSSFUNKTIONEN?

2.1 Seil

Ein Seil, das als Seileck modelliert wird, kann die Green'sche Funktion für die Verschiebung in einem Knoten exakt abbilden, die Funktion für eine Verschiebung dazwischen aber nicht [4].

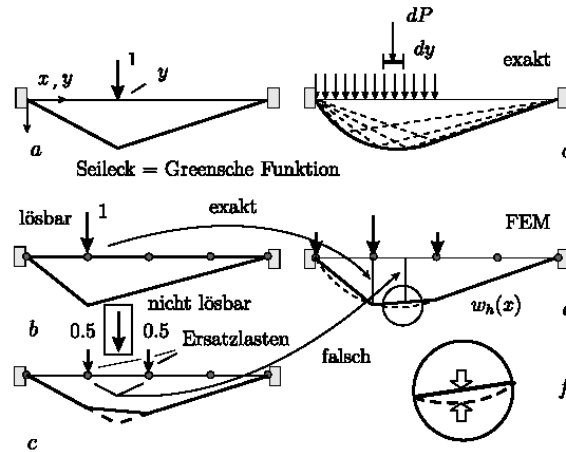


Abbildung 6: Green'sche Funktion am Seileck

2.2 Gelenkig gelagerter Einfeldträger unter Gleichlast

Da die kubischen Ansatzfunktionen des Bernoulli-Euler-Stabes nicht die exakte Lösung unter Gleichlast (Polynom vierter Ordnung) abbilden, können die Verschiebungen innerhalb des FE-Stabes ohne die entsprechende Partikularlösung nicht exakt berechnet werden. Die Green'schen Funktionen für die Auflagerkräfte und Schnittgrößen sind aber maximal von kubischer Ordnung und daher exakt abbildbar. Daraus ergibt sich, dass zwei Elementen die Verschiebung im Mittelknoten exakt abbilden, ein einziges Element aber deutlich zu gering ermittelt:

	exakt	1 Element	2 Elemente
Maximales Moment	281.25	281.25	281.25
Endverdrehung	41.147	41.147	41.147
Durchbiegung in Feldmitte	19.288	15.430	19.288

Tabelle 1: Homogene Ergebnisse am gelenkigen Einfeldträger

Für die statische Berechnung wird dies durch die Verwendung der Partikularlösung des beidseitig eingespannten Stabes korrigiert, aber bei der Dynamik oder der Ermittlung von Stabilitätseigenformen hat dies einen großen Einfluss auf die Lösung. So wird bei nur einem einzigen Element die Knicklast für den Eulerfall 2 um 21 % überschätzt.

	exakt	1 Element	2 Elemente
Eulerfall 1	3303	3328	3305
Eulerfall 2	13212	16065	13312

Tabelle 2: Knickeigenwerte

3 VERÄNDERLICHE BELASTUNGEN

Nahezu alle Belastungsnormen auf der Welt versuchen bei den Lasten unwirtschaftlich große Anhäufungen von Belastungen zu vermeiden. Bei untergeordneten Bauwerken oder Belastungsfällen begnügt man sich mit einer konstanten Ersatzlast, bei größeren Systemen aber gibt es detaillierte Vorgaben zur Belastung. Regelungen zur lokalen Lasteinleitung (z.B. Eurocode Lastmodell 2, oder Sogspitzen beim Wind) sollen hier nicht weiter betrachtet werden.

3.1 Gleichzeitige Wirkung von Verkehrslasten

Beim Nachweis im Hochbau am Gesamtsystem kann man die Verkehrslasten einzelner Stockwerke reduzieren. Im Brückenbau gibt es in allen Vorschriften nicht nur Faktoren für die Belastungen einzelner Spuren (z.B. Anpassungsfaktoren des LM1) sondern auch die Lastgruppen, bei denen Kombinationen unterschiedlicher Lastenzüge (LM3 oder SW) oder auch die Kombination häufiger Werte mit seltenen Werten vorgeschrieben werden. Dadurch steigt die Anzahl der möglichen Lastfallkombinationen noch einmal stark an. Unabhängig von der Lastaufbringung in einzelnen Laststellungen steht in ELLA hier eine sequentielle Überlagerung: „Nimm den ungünstigsten Lastfall und danach den zweitungünstigsten mit einem Abminderungsfaktor und danach die Restflächenbelastungen“ zur Verfügung (Satz KOMB).

3.2 Lastwerte abhängig von der Größe der Einzugsfläche

Nicht nur bei den Verkehrslasten in Parkhäusern findet man abgestufte Lastwerte, auch Bremslasten von Brücken hängen von der gesamten Belastungslänge ab. Besonders problematisch ist die HA-Belastung der Britischen Normen [5]:

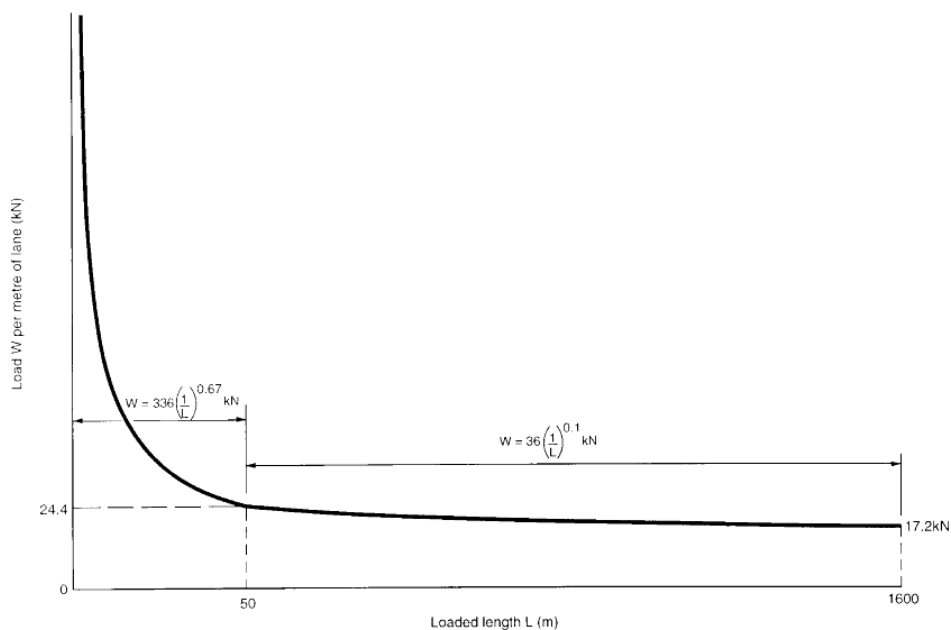


Abbildung 7: Lastwert abhängig von der Lastlänge

Einmal ist der Lastwert nicht nach oben begrenzt, zum anderen wird erwartet, dass die belastete Länge so gewählt wird, dass der ungünstigste Effekt entsteht. Auch wenn man sich auf die praktischen Fälle beschränkt, dass man nur ein oder zwei oder mehrere Felder belastet, wird dadurch die Anzahl der möglichen Laststellungen weiter nach oben getrieben. Wenn die Einflusslinie vorliegt, kann man die belasteten Längen mit positiven oder negativen Vorzeichen daraus leicht abgreifen. Welche reale Lastlänge dann am ungünstigsten ist lässt sich iterativ ermitteln. Ein interessanter Ansatz ist aber auch im BD 37/01 zu finden, dort wird für Element wo das nicht so ganz klar ist im Bild 11 eine mittlere Lastlänge über eine äquivalente Dreieckslast definiert, die man verallgemeinern kann indem man sie auf die reale Lastlänge limitiert:

$$\tilde{L}_{pos} = \min \left[\frac{\int I_{pos}(x) dx}{2 \cdot \max(I_{pos})}, L_{pos} \right] \quad (1)$$

3.3 Schwingbeiwerte

Dynamische Effekte werden häufig durch Schwingbeiwerte näherungsweise erfasst. Auch in die Schwingbeiwerte gehen die belastete Länge bzw. eine andere charakteristische Länge wie ein Trägerabstand, aber auch die Art des Lastenzuges ein. Die Sache wird dadurch komplizierter, dass unterschiedliche Ansätze für unterschiedliche Tragelemente und auch für unterschiedliche Ergebnisgrößen definiert sind. Allgemein hat jede Einflusslinie für jeden Lastenzug einen anderen Schwingbeiwert für die Lasten jedes Feldes. Die Definition entsprechender Überlagerungsregeln wird dann leicht zu einem Albtraum.

Etwas ungeklärt ist die Frage, welcher Schwingbeiwert bei günstig wirkenden Lasten anzusetzen ist. Intuitiv wird man den Wert gar nicht ansetzen, aber bei einer dynamischen Belastung kann man ja auch Werte erhalten, die unter den statischen Werten liegen. Es wäre daher sinnvoll den Schwingbeiwert immer anzusetzen.

3.4 Ganz oder Teilweise

Für den SLW steht in der Norm, dass jedes einzelne Rad einzeln günstig oder ungünstig anzusetzen ist, für das Tandemfahrzeug des LM1 ist geregelt, dass das Fahrzeug nur im Ganzen anzusetzen ist. Für die Behandlung mit einzelnen Laststellungen ist letzteres einfacher, für die Einflusslinien eher das erstere, aber ein Algorithmus zur Auswertung muss natürlich auch damit zurechtkommen.

Ähnlich verhält es sich mit der Frage ob die Lastenzüge in mehreren Spuren synchronisiert fahren oder unabhängig.

Eine spannende Frage ergibt sich bei der Kombination von Horizontallasten mit Vertikallasten: Kann es Fliehkräfte und Bremslasten geben wenn nicht gleichzeitig vertikale Lasten wirken? Hier wird der gesunde Menschenverstand gegenüber einer einfachen ingenieurmäßigen Behandlung zurückstehen müssen.

3.5 Kolonnenfahrt und variable Lastabstände

Bei zahlreichen Verkehrslasten werden die Abmessungen der Fahrzeuge variabel definiert, mitunter auch mit diskreten Werten (Fahrzeug HB des BD37/01).

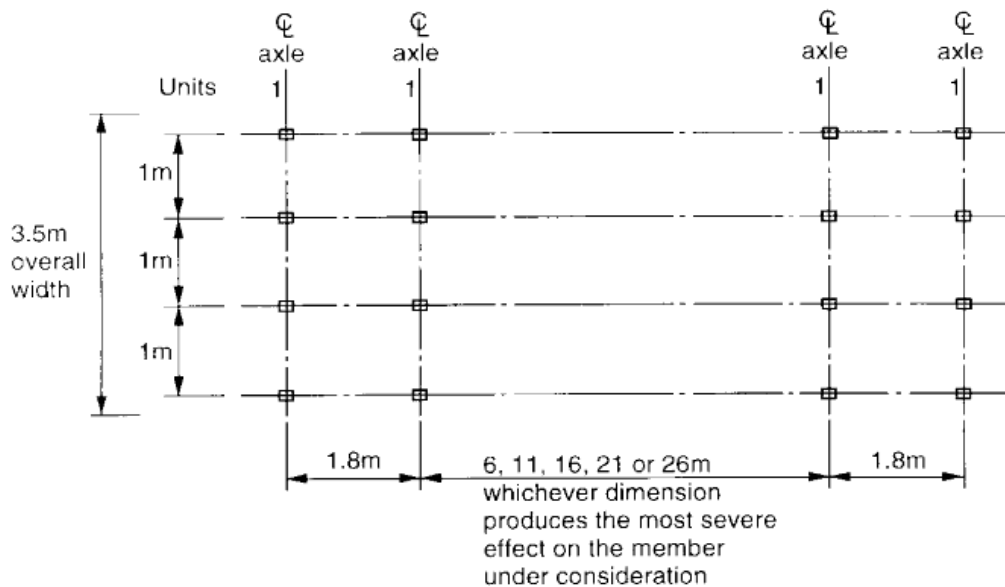


Abbildung 8: Fahrzeug HB des BD 5400 bzw. BD 37/01

Häufig werden die Lasten auch mehrfach aufgebracht, wobei es einen Mindestabstand gibt. Dies erhöht wieder die Möglichkeiten der Laststellungen ganz erheblich.

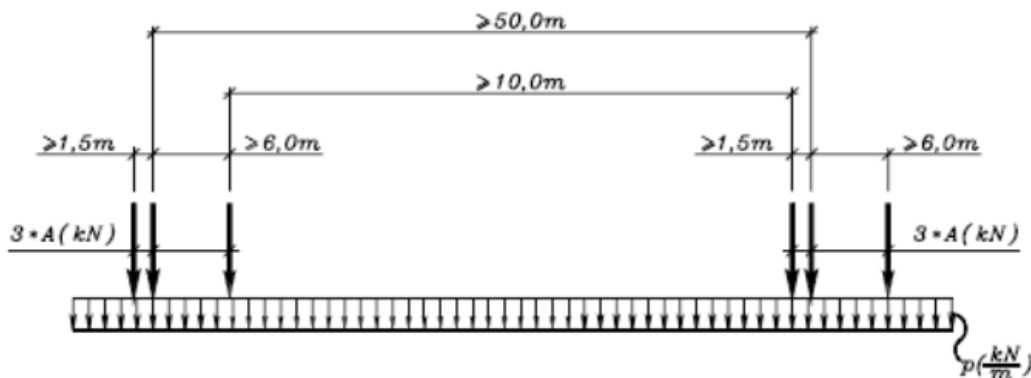


Abbildung 9: Kolonnenfahrt der schwedischen BRO

4 STRATEGIE

Die Berechnung veränderlicher Verkehrslasten kann man grundsätzlich mit einzelnen Laststellungen oder mit der Auswertung von Einflussflächen realisieren. Für die einzelnen Laststellungen sprechen die leichtere Prüfbarkeit der Einzelergebnisse sowie die Möglichkeit auch nichtlineare Fälle berücksichtigen zu können. Allerdings sind dann gar keine Überlagerungen mehr möglich. Für die Einflussflächen spricht hingegen die bessere Übersicht der ungünstigen Laststellungen und die erheblichen Einsparungen an Speicherplatz und meist auch Rechenzeiten. Bei optimaler Auswertung der Einzelflächen wird man nicht alle Effekte kontrollieren können, die Überprüfung der angesetzten Laststellungen kommt daher eine besondere Bedeutung zu.

Grundsätzlich kann man Einflusslinien auch mit einer nichtlinear ermittelten Tangentensteifigkeit ermitteln. Damit sind zumindest Theorie II. Ordnung und kleinere geometrisch nichtlineare Effekte berücksichtigbar.

Die Aufgabe zerfällt dann in zwei Teile: Ermittlung der Einflussfläche und Auswertung der Einflussfläche für bestimmte Laststellungen. Der erste Teil ist algorithmisch relativ gut festgelegt, beim zweiten Teil handelt es sich um eine Optimierungsaufgabe mit mehreren Variablen und lokalen und globalen Extrema, die entsprechend erkannt werden müssen.

Nach den Bemerkungen des vorigen Abschnitts erscheint eine allgemeine Strategie mit Einflussflächen als hochgradig komplexe Aufgabe. Da die besonders komplexen Verkehrslasten im Brückenbau aber entlang von definierten Verkehrsspuren fahren, bietet sich die Auswertung entlang dieser Linien an.

4.1 *Ermittlung von Einflusslinien*

Das grundsätzliche Verfahren besteht darin, mit einer zerlegten bestehenden tangentialen Gesamtsteifigkeit eine überschaubare Anzahl von Einzellastfällen zu berechnen, bei denen Kräfte und Momente in ausgezeichneten Punkten auf der Verkehrsfläche des Tragwerks stehen. Für jedes Element erhält man dann aus der Multiplikation des Verschiebungsvektors mit der Element-Spannungs-Verschiebungsmatrix den Wert oder die Neigung der Einflussfläche an diesem Lastpunkt. Die gesamte Einflusslinie erhält man durch Interpolation und der optionalen Einschaltung von Sprungstellen für Stabelemente.

Bei einer Einflussfläche muss in einem ersten Schritt die Querrichtung innerhalb der Spur ausgewertet werden. Es ist sinnvoll, dies mit einigen Vereinfachungen durchzuführen, so dass man Einflusslinien entlang der Spur getrennt für eine Vertikallast, für ein Torsionsmoment (z.B. Wind

oder Fliehkraft als Kräftepaar auf die Räder) sowie für Flächenlasten mit positiven und negativen Einflussbereichen erhält. Dies kann bei einem Einzelstab einfach durch die Extrapolation der Einflusslinie für die Torsionsbelastung erfolgen. Auch eine Interpolation der Werte zwischen zwei Hauptträgern ist eine Möglichkeit, im Allgemeinen wird man jedoch 3 bis 7 diskrete Laststellungen quer zur Spur auswerten müssen. Dabei kann man die ungünstigste Laststellung in Querrichtung für die maximale Vertikalbelastung und die maximale Torsionsbelastung gemeinsam oder separat je nach erlaubter Exzentrizität in der Spur auswerten.

4.2 Auswertung der Einflusslinien

Die Optimierung der Laststellung selbst in Abhängigkeit von der Laststellung und den Abständen kann mit einem einfachen Newtonverfahren durchgeführt werden. Besondere Beachtung müssen lediglich die Stellen erfahren, bei denen Sprünge in der Einflusslinie bestehen oder die Last das Tragwerk verlässt. Bei Kranbahnen ist letzteres z.B. ausgeschlossen, bei den Verkehrslasten kann es auch passieren, dass die ungünstigste Laststellung sich ergibt, wenn der Lastenzug nur zu einem ganz geringen Teil auf der Struktur steht. Die möglichen Schrittweiten sind dadurch stark begrenzt, so dass ein Linesearch oder eine aufwändigere Lösung der Hesse-Matrix nicht erforderlich ist. Die ersten Ableitungen der Variablen lassen sich sehr effektiv berechnen, wenn man sich vor Augen hält, dass für eine häufig vorkommende konstante Linienbelastung nur die Differenz der Einflusswerte am Anfang und Ende der Last benötigt werden.

Wesentlich kritischer ist die Auswahl des richtigen lokalen Maximums. Da die ungünstigsten Laststellungen sehr dicht beieinander liegen können, ist eine Auswahl der Startpunkte mit einer groben Monte-Carlo-Methode oder über ein festes Raster nicht genau genug. Eine Analyse der wesentlichen Maxima der Funktion und ihrer Ableitungen ist unbedingt erforderlich. Dann kann man die ausgesuchten Lasten diesen Positionen zuordnen. Eine gleichsinnige Belastung wird in der Nähe der maximalen Stelle der Einflusslinie zu positionieren sein, eine gegensinnige Belastung (Schräglauf eines Krans) aber an der Stelle mit der größten Neigung. Für die Entscheidung ob das nächste Fahrzeug einer Kolonne besser im gleichen Feld oder im nächsten Feld angeordnet werden sollte, kommt man ohne eine gewisse Empirie leider nicht aus.

4.3 Schubmittelpunkt

Für die maximale Torsion muss man die Lage des Schubmittelpunkts kennen, um die Flächenlasten nur auf der entsprechenden Seite anzusetzen. Wenn man sich die Einflusslinie in der Querrichtung ansieht, wird man den Wechsel des Vorzeichens sofort erkennen und entsprechend berücksichtigen.

Für den Einzelstab hat man hingegen nur eine Einflusslinie für die Vertikalbelastung I_{Pz} und eine für eine Torsionsbelastung I_{Mx} . Aus dem Verhältnis von I_{Mx} / I_{Pz} ergibt sich aber die Lage des Schubmittelpunkts an dieser Stelle, so dass man die Flächenlasten links und rechts davon aufteilen kann.

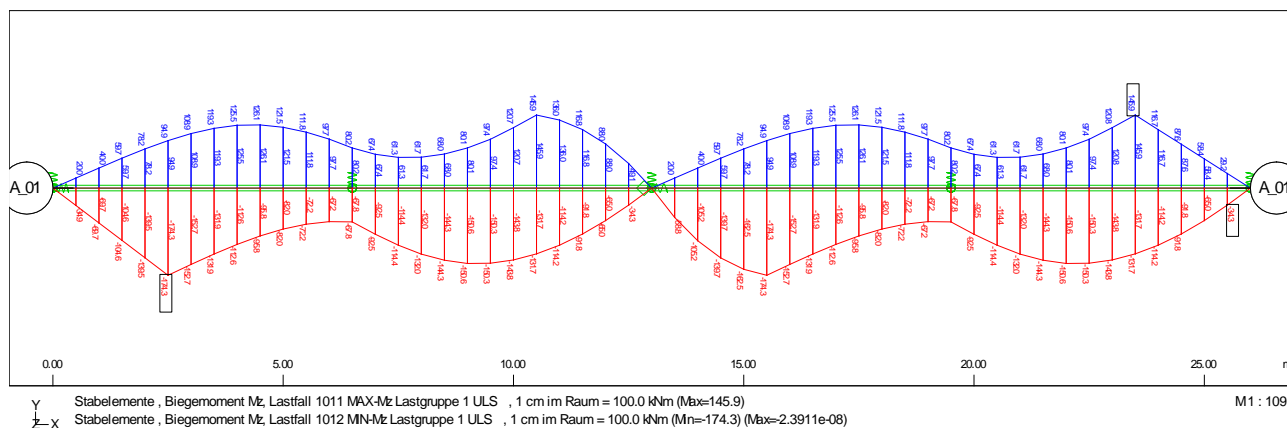


Abbildung 10: Grenzlinsen der Querbiegemomente an einer Kranbahn

5 ZUSAMMENFASSUNG

Die Berechnung veränderlicher Verkehrslasten mit Einflusslinien ist eine sehr attraktive Alternative zu der „brute-force“-Methode ganz viele Laststellungen durchzurechnen. Auch wenn Speicher und Rechenleistungen heute in ausreichender Form zur Verfügung stehen, gewinnt ein sinnvoller effektiver Algorithmus immer Zeit und kann Kapazitätsprobleme der Hardware von vorne herein vermeiden.

Darüber hinaus sind Einflusslinien eine wertvolle Hilfe um das Verhalten eines Tragwerks und last not least der ganzen FE-Methode zu verstehen. Der Ingenieur sollte sich dieser Hilfsmittel bedienen.

6 LITERATUR

- [1] Hirschfeld, K., Baustatik, Theorie und Beispiele, Springer, Berlin, 3. Auflage 1969
- [2] Katz, C., ELLA – Einflusslinien und –flächen, Benutzerhandbuch, SOFiSTiK, Oberschleißheim, 2011
- [3] Hartmann, F.; Katz, C., Structural Analysis with Finite Elements, Springer, Berlin, 2. Auflage 2007
- [4] Hartmann, F., Green's Functions and Finite Elements, Springer, Berlin, 2. Auflage 2013
- [5] British Standard BS 5400 Part 13, BD 37/01, Design Manual – Loads for highway bridges BS, London, 2001