

Theoretischer Entwurf eines Millimeterwellenklystrons mit bandförmigem Elektronenstrahl

von Diplom-Ingenieur
Steffen Solyga
aus Berlin

von der Fakultät IV – Elektrotechnik und Informatik
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften
– Dr.-Ing. –

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuß:

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Dr. rer. nat. H. Boche

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. H. Henke

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. H.-D. Stahlmann

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 4. November 2003

Berlin 2003
D 83

Vorwort der Herausgeber

Die Schriftenreihe Prozessmodelle zeigt an Beispielen aus der Praxis die Erstellung von Prozessmodellen im Bereich Prozessmodellentwicklung und Prozessführung. Hierbei ist unter einem Prozessmodell ein physikalisches Modell zu verstehen, welches einen Prozess in seinem fertigungstechnisch interessanten Bereich so einfach wie möglich und so genau wie möglich beschreibt, um als Grundlage zur Automatisierung oder Arbeitsplanung dienen zu können. Dieses so genannte *eingeschränkte Prozessmodell* unterscheidet sich vom *allgemeinen Prozessmodell* durch die Grenzen der Prozessparameter, wodurch aber die Bildung des Prozessmodells im interessierenden Anwendungsbereich erheblich erleichtert wird.

Dieses zeigt sich gerade im vorliegenden Fall der physikalischen Machbarkeit eines Millimeterwellenklystrons mit bandförmigem Elektronenstrahl, bei dem die scharfe Querschnittsbegrenzung (Kreis) des Driftrohres durch dessen geforderte Frequenz gelockert wird, indem man sich der bisher verschenkten dritten Dimension bedient: Verwendet man für das Driftrohr einen Rechteckhohlleiter, so ist die Grenzfrequenz der gefährlichen E-Wellen praktisch nur noch durch die Höhe des Hohlleiters gegeben, und seine Breite kann beliebig groß gewählt werden. Die zentrale Frage lautet, inwieweit ein derartiges Klystron als kompakter und preiswerter Leistungsverstärker im geforderten Frequenzbereich realisierbar ist.

Mikrowellenverstärker im Bereich von 90 GHz mit hoher Leistung sind bis heute selten und extrem teuer. Verfügbar sind Wanderfeldröhren mit bis zu 5 kW Spitzen- und 500 W Dauerstrichleistung oder Gyroklystrons mit bis zu 60 kW Spitzenleistung. Die Preise liegen zwischen 200.000, – und 400.000, – € für die Röhren, und für die Stromversorgung fällt noch einmal derselbe Betrag an. Wenn es gelänge, die Kosten um eine Größenordnung zu reduzieren, könnten im Bereich von Radar, keramischer Sinterung, Medizintechnik oder Teilchenbeschleunigern sehr interessante Anwendungen entstehen.

Was also hindert die Leistungsquelle im GHz-Bereich daran, dieser Tage einen Siegeszug anzutreten, wie es das Magnetron vor einigen Jahrzehnten getan hat und heute in Form der *Mikrowelle* in jedem Haushalt zu finden ist? Fragt der Autor.

Dieses konnte er anhand eines relativ einfachen Prozessmodells zeigen. Das gemäß der Aufgabenstellung entworfene Bandstrahlklystron kann danach naturgemäß die geforderten Parameter nicht erreichen. Bei der vorgegebenen Arbeitsfrequenz von 91 GHz und einer Strahlspannung von 25 kV arbeitet es zu ineffizient.

Dies ist zwar schade, aber trotzdem ist die Arbeit richtungsweisend, denn die bestehende Idee der Ausnutzung der dritten Dimension braucht nun von anderen Arbeitsgruppen nicht mehr in dieser Form (Rechteck) weiter verfolgt werden.

Cottbus, Dezember 2003

Arnim Nethe, Hanns-Dietrich Stahlmann

Inhaltsverzeichnis

Vorwort der Herausgeber	I
Inhaltsverzeichnis	IV
1 Einleitung	1
2 Analyse des Bandstrahlklystrons	5
2.1 Eindimensionale Rechnung	5
2.1.1 Elektronenkanone - Strahlerzeugung	6
2.1.2 Eingangsresonator - Geschwindigkeitsmodulation	7
2.1.3 Driftstrecke - Dichtemodulation	11
2.1.4 Ausgangsresonator - Energieauskopplung	33
2.1.5 Leistungsbilanz	47
2.2 Zweidimensionale Erweiterungen	51
2.2.1 Pierce-Kanone	51
2.2.2 Resonatoren	57
2.2.3 Geschwindigkeitsmodulation	64
2.2.4 Strahlfokussierung	65
3 Entwurf des Bandstrahlklystrons	83
3.1 Festlegung der fehlenden Parameter	83
3.2 Elektronenkanone	84
3.3 Resonatoren	90
3.3.1 Resonatoren mit flachem Feldverlauf	90
3.3.2 Untersuchungen zum Shuntwiderstand	95
3.4 Kopplung	98
3.5 Fokussierung	101
3.6 Abschätzung der resultierenden Parameter	106
3.7 Weitere PIC-Simulationen	108
3.7.1 Modulation und Fokussierung	108
3.7.2 Energieauskopplung	111
3.8 Perspektiven für das Bandstrahlklystron	116
A Ausführlichere Betrachtungen	121
A.1 Das Raumladungsgesetz	121
A.1.1 Herleitung	121

A.1.2	Berechnung der Perveanz	123
A.1.3	Die planare Diode	125
A.1.4	Die zylindrische Diode	131
A.2	Zur relativistischen Dynamik der Punktladung	137
A.2.1	Grundgleichungen	137
A.2.2	Abgeleitete Gleichungen	138
A.2.3	Longitudinale und transversale Masse	138
A.2.4	Energie-Spannungs-Äquivalenz	140
A.2.5	Punktladung im homogenen Magnetfeld	141
A.3	Nichtlineare Geschwindigkeitsmodulation	144
A.3.1	Modulationsgrenze	144
A.3.2	Geschwindigkeitsgewinn	146
A.3.3	Energiegewinn	147
A.3.4	Zusammenhang zwischen den Gewinnen	151
A.3.5	Nichtrelativistische Beziehungen	152
A.4	Theoretische Grenze der Strommodulation	154
A.5	Über Influenzströme	156
A.6	Der Shuntwiderstand	160
A.7	Grabenhohlleiter und ebener Grabenresonator	164
A.7.1	Feldgleichungen	164
A.7.2	Randbedingungen	166
A.7.3	Feldansatz	167
A.7.4	Orthogonalentwicklung	168
A.7.5	Mittlere Feldenergie	174
A.7.6	Mittlere transportierte Wirkleistung	177
A.7.7	Mittlere Wandverlustleistung	178
A.7.8	Dämpfung und Güte	180
A.7.9	Shuntwiderstand des Grabenresonators	181
	Zusammenfassung	183
	Literaturverzeichnis	185
	Danksagung	189

1 Einleitung

Mikrowellenverstärker im Bereich von 90 GHz mit hoher Leistung sind bis heute selten und extrem teuer. Verfügbar sind Wanderfeldröhren mit bis zu 5 kW Spitzen- und 500 W Dauerstrichleistung oder Gyroklystrons mit bis zu 60 kW Spitzenleistung. Die Preise liegen zwischen 200.000, – und 400.000, – € für die Röhren, und für die Stromversorgung fällt noch einmal derselbe Betrag an. Wenn es gelänge, die Kosten um eine Größenordnung zu reduzieren, könnten im Bereich von Radar, keramischer Sinterung, Medizintechnik oder Teilchenbeschleunigern sehr interessante Anwendungen entstehen. Was also hindert die Leistungsquelle im GHz-Bereich daran, dieser Tage einen Siegeszug anzutreten, wie es das Magnetron vor einigen Jahrzehnten getan hat und heute in Form der „Mikrowelle“ in jedem Haushalt zu finden ist?

Diese Frage sei am Beispiel des Verstärkerklystrons beantwortet, welches sich – wie auch die Wanderwellenröhre – die Trägheit (kinetische Energie und Laufzeit) der Elektronen zunutze macht, jedoch eine geringere Bandbreite als letztere aufweist. Aufgrund ihres relativ einfachen Aufbaus sind diese Röhren am ehesten dafür prädestiniert, die Vorreiterrolle bei der breiten Einführung der Millimeterwellenverstärker zu spielen.

Aufbau. Wie in Abbildung 1.1 dargestellt, besteht ein Verstärkerklystron aus einer Elektronenkanone (i.allg. raumladungsbegrenzte Röhrendiode, d.h. eine geheizte Katode und eine Anode), dem fremdgespeisten Eingangsresonator, einem feldfreien Driftraum, einem Ausgangsresonator und einem Kollektor. Hinzu kommen eine Fokussierungseinheit (meist ein die gesamte Röhre einschließender Elektromagnet) und oft zusätzliche leerlaufende Resonatoren im Bereich des Driftraumes. Der gesamte strahlführende Bereich ist evakuiert, um Ionisationsvorgänge in der Röhre gering zu halten.

Wirkungsweise. Der von der Elektronenkanone bereitgestellte Strahl wird durch das im Eingangsresonator befindliche longitudinale elektrische Hochfrequenzfeld geleitet und durch dieses geschwindigkeitsmoduliert. Im Zyklus der Hochfrequenz werden Strahlteile beschleunigt bzw. abgebremst, so daß es im sich anschließenden feldfreien Driftraum zu Überholeffekten und damit zur Ausdünnung bzw. Anreicherung von Elektronen kommt — es bilden sich Elektronenpakete. Der nun dichtemodulierte Elektronenstrahl durchfliegt anschließend den Ausgangsresonator, in welchem er unter Abgabe kinetischer Energie ein Hochfrequenzfeld induziert, das von außen durch einen (ohmschen) Verbraucher bedämpft wird. Bei Umwandlung ihrer verbleibenden kinetischen Energie in Wärme werden die Elektronen schließlich vom Kollektor aufgefangen und über die Anodenbatterie zur Elektronenkanone zurückgeführt. Zur Erklärung der prinzipiellen Wirkungsweise des Klystrons – nicht jedoch für seinen praktischen Betrieb – entbehrlich sind die Fokussierungseinheit und die leerlaufenden Resonatoren. Erstere verwendet zumeist Magnetfelder, um die COULOMB¹-schen Kräfte im Elektronenstrahl auszugleichen und damit seine Auf-

¹Coulomb, Charles-Augustin de (1736-1806), französischer Physiker

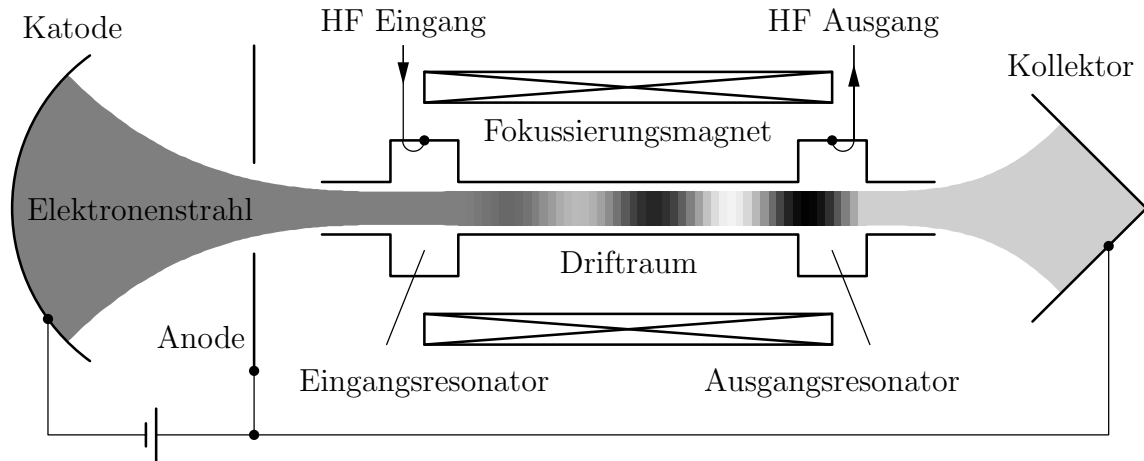


Abbildung 1.1: Prinzipieller Aufbau eines Verstärkerklystrons.

weitung zu unterbinden. Die leerlaufenden Resonatoren hingegen bewirken eine stärkere Strahlmodulation und damit einen höheren Wirkungsgrad: Der gering modulierte Strahl induziert in ihnen ein Feld, welches modulierend auf ihn zurückwirkt, sofern die durch Verstimmung einstellbaren Phasenverhältnisse entsprechend gewählt wurden.

Leistungsbilanz. Die Eingangsleistung des Verstärkerklystrons ist im wesentlichen durch die Gleichstromleistung des Elektronenstrahls, also durch die von der Anodenbatterie gelieferte Leistung gegeben. Zusätzlich hat man die dem Eingangsresonator zugeführte Hochfrequenzleistung, welche sich in Wandverluste und Modulationsverluste aufteilt. Erstere werden durch einen geschickten Resonatoraufbau gering gehalten und letztere verschwinden mit guter Näherung, da genausoviele Elektronen beschleunigt wie auch abgebremst werden. Die Ausgangsleistung des Klystrons ist stark von den Eigenschaften und der Belastung des Ausgangsresonators abhängig. Im günstigsten (anzustrebenden) Falle werden alle Elektronen im Resonator vollständig abgebremst und die Wandverluste vernachlässigbar gering, so daß die Gleichstromleistung des Strahls vollständig in Mikrowellenleistung umgesetzt wird.

Welche technischen Probleme stehen nun einer preiswerten Realisierung eines leistungsstarken Millimeterwellenklystrons im Wege? Das Problem beim Klystron besteht darin, daß die übliche Methode des Skalierens im Millimeterwellenbereich versagt, und zwar sowohl in elektrischer als auch technologischer Hinsicht: Generell verringern sich mit abnehmender Wellenlänge die Ausgangsleistung eines Verstärkers und die Abmessungen seiner Bauteile. Ist man bei einer Wellenlänge von wenigen Millimetern angelangt, liefert eine skalierte herkömmliche Röhre nur noch einige zehn Watt. Gleichzeitig hat man Abmessungen von einigen Milli- und Toleranzforderungen von wenigen Mikrometern. Derartige Teile lassen sich mit herkömmlichen Mitteln aber nicht fertigen. Betrachten wir diese Probleme detaillierter, um zu einem Lösungsansatz zu gelangen.

In der Vergangenheit wurden Verstärkerklystrons sowohl bezüglich des Elektronenstrahls als auch der mechanischen Elemente (Kanone, Resonatoren, usw.) zylindersymmetrisch ausgelegt, weil man die für die Fertigung unerläßliche dritte Dimension gewissermaßen geschenkt bekommt: Bei azimuthaler Unabhängigkeit der Felder – dies ist der praktisch

angestrebte Fall – reduzieren sich alle Berechnungen auf zwei Dimensionen, und trotzdem sind alle wesentlichen mechanischen Probleme in drei Dimensionen gelöst; Resonatoren und Driftraum können durch Bohren und Drehen gefertigt werden, und zur Strahlfokussierung verwendet man eine große Zylinderspule. Charakteristisch für ein kreiszylindrisches Verstärkerklystron ist jedoch seine relativ scharfe Leistungsbegrenzung bei gegebener Frequenz und Strahlspannung: Zur Gewährleistung eines stabilen Verstärkerbetriebs muß die interne Rückkopplung vom Ausgangs- zum Eingangsresonator über den Driftraum sehr gering gehalten werden, d.h. der Radius des Driftrohres muß so klein gewählt werden, daß keine Wellenausbreitung im Rohr möglich ist. Andererseits kann man aufgrund von Begrenzungen in der Elektronenkanone (Katodenbelastung, Durchbruchspannung, Kompression) und der Fokussierung bei gegebener Spannung die Stromstärke des Strahls nicht beliebig erhöhen, womit die Strahlleistung und mithin – entsprechend der weiter oben aufgestellten Bilanz – die Ausgangsleistung des Klystrons begrenzt ist. Selbstverständlich könnte man nun die bis hierhin als festliegend betrachtete Strahlspannung erhöhen. Dies erforderte dann jedoch größere, schwerere und kostspieligere Netzteile. Bei Spannungen von mehr als 30 kV hat man außerdem eine schwere und teure Strahlenabschirmung vorzusehen; die Teilchenenergie ist dann bereits so groß, daß die selbst bei völlig planmäßigem Arbeiten der Röhre auftretende Röntgenstrahlung nicht mehr zu vernachlässigen ist. Für eine preiswerte Realisierung des Klystrons ist man folglich auf eine Strahlspannung von 25 kV festgelegt.

Man kann jedoch die scharfe Querschnittsbegrenzung des Driftrohres durch dessen geforderte kritische Frequenz lockern, indem man sich der bisher verschenkten dritten Dimension bedient: Verwendet man für das Driftrohr einen Rechteckhohlleiter, so ist die Grenzfrequenz der gefährlichen E-Welle praktisch nur noch durch die Höhe des Hohlleiters gegeben, und seine Breite kann beliebig groß gewählt werden. Um diesen Freiheitsgrad nutzen zu können, geht man nun zweckmäßigerweise zu Rechteckresonatoren und einem Bandstrahl über, dessen Stromstärke durch die frei wählbare Breite theoretisch beliebig groß gemacht werden kann.² Damit wäre das Leistungsproblem – zumindest theoretisch – überwunden.

Zur Lösung des weiter oben bereits angesprochenen Technologieproblems bei der Fertigung der für das Klystron benötigten winzigen Strukturen könnte man die neuartigen Methoden der Mikromechanik wie Drahterosion oder LIGA³ nutzen, wobei letzteres prinzipbedingt vor allem für große Stückzahlen attraktiv ist. Daß sich mit diesen Methoden vorzugsweise planare Strukturen fertigen lassen, erweist sich in unserem Fall als großer Vorteil.

Damit liegt ein neuartiger, vielversprechender Ansatz für die Entwicklung eines preiswerten Leistungsverstärkers für Millimeterwellen vor. In der vorliegenden Arbeit wird auf rechnerischem Wege untersucht, inwieweit die mit diesem neuen Ansatz verbundenen neuen Probleme gelöst werden können, d.h. inwieweit sich ein Verstärkerklystron mit den

²Alternativ kann man auch einen runden Hohlstrahl verwenden; wählt man seinen Durchmesser groß gegenüber der Dicke, erhält man praktisch einen Bandstrahl.

³(Röntgen-) Lithografie-Galvanik-Abformung, ein in den 80er Jahren am damaligen Kernforschungszentrum Karlsruhe entwickeltes Verfahren zur Herstellung von Strukturen geringer Breite ($\geq 1 \mu\text{m}$) und großer Tiefe ($\leq 1 \text{ mm}$); es zeichnet sich aus durch hohe Fixkosten (für die Herstellung der Maske) und geringe Kosten pro Struktur.

1 Einleitung

Eigenschaften

- Arbeitsfrequenz 91.392 GHz,
- Strahlspannung 25 kV,
- Verwendung eines Bandstrahls
- geringes Gewicht, geringes Volumen,
- geringe Fertigungskosten,
- Impulsleistung ≥ 10 kW,
- Wirkungsgrad $\geq 30\%$,

verwirklichen läßt.⁴ Insgesamt soll eine hohe Ausgangsleistung gegenüber der Wirtschaftlichkeit in den Hintergrund treten.

⁴Der konkrete Wert der Arbeitsfrequenz wurde aus Gründen der Kompatibilität mit am SLAC (Stanford Linear Accelerator Center, Stanford University, California) entwickelten und verwendeten Komponenten gewählt. Ihr erster Linearbeschleuniger arbeitete bei 2.856 GHz. Um die Wiederverwendung alter Komponenten beim Wechsel auf höhere Frequenzen zu ermöglichen, wurde sie schrittweise verdoppelt. Inzwischen ist man (im Forschungsbereich) beim 32-fachen der ursprünglichen Frequenz angelangt.

2 Analyse des Bandstrahlklystrons

Das Verstärkerklystron ist von Hause aus modularer Natur. Jedem Modul läßt sich im wesentlichen genau eine Wirkung zuordnen: Elektronenkanone – Strahlerzeugung, Eingangsr resonator – Geschwindigkeitsmodulation, Driftstrecke – Dichtemodulation, Ausgangsr resonator – Felderzeugung. Dies erweist sich als großer Vorteil bei dessen Analyse: Es muß nicht von vornherein eine Gesamtbetrachtung angestellt werden, vielmehr läßt sich jedes Bauteil unabhängig von den anderen analysieren, um schließlich das Gesamtverhalten durch Kaskadierung zu erhalten. Dieser Weg wird im folgenden besprochen.

Aber das Verstärkerklystron besitzt noch eine weitere angenehme Eigenschaft: Sein Wesen läßt sich bereits bei Beschränkung auf eine räumliche Dimension erfassen, denn die in der Einleitung beschriebenen Effekte sind (mit Ausnahme der Fokussierung) longitudinaler Art, sie fallen mit der Ausbreitungsrichtung des Elektronenstrahls zusammen. Daher wird zunächst eine eindimensionale Analyse vorgestellt, um im darauffolgenden Abschnitt einige Elemente durch Ausdehnung der Betrachtung auf zwei Dimensionen detaillierter zu untersuchen.

Eine vollständige zwei- oder gar dreidimensionale Analyse des Verstärkerklystrons ist — wenn überhaupt möglich — als zu aufwendig einzustufen. Erforderliche Informationen beschafft man sich einfacher durch Computersimulationen und schließlich durch Versuche mit Prototypen.

2.1 Eindimensionale Rechnung

Man abstrahiere die in Abbildung 1.1 skizzierte Klystrongeometrie durch die Annahme, daß ihre Symmetrieachse repräsentativ für die gesamte Anordnung sei. Ein derartiges eindimensionales Modell ist in Abbildung 2.1 skizziert. Bei einem solchen gedanklichen Schnitt des zweidimensionalen Modells gehen die Informationen über einige Elektroden verloren, weshalb diese jetzt als Gitter berücksichtigt werden. Diese mögen den Strahl elektrisch, nicht aber mechanisch beeinflussen, d.h. sie mögen dem Strahl Äquipotentialflächen aufzwingen ohne selbst Strom aufzunehmen.¹ Damit haben wir nun anstelle des Eingangsr resonators die beiden Eingangsgitter und anstelle des Ausgangsr resonators die Ausgangsgitter. Das verlorengegangene gedämpfte resonante Verhalten wird durch eine externe Beschaltung der Gitter mit Widerständen und Induktivitäten nachgebildet. Da die Resonatoren und das Driftrohr auf demselben Potentialniveau wie die Anode liegen, wurde

¹In der Praxis wurden und werden zum Teil noch immer sowohl in der Elektronenkanone als auch für die Resonatoren Gitter verwendet, weil die elektrische Beeinflussung des Strahls wesentlich besser gelingt. Dies entspricht auch der traditionellen Bauweise von Verstärkerröhren, [2, 36, 37, 26, 43, 24, 20]. Bei hohen Stromdichten führt das jedoch zu großen Verlustleistungen auf den Gittern bis hin zu deren Beschädigung, so daß man bei hohen Leistungen gezwungen ist, die Elektroden außerhalb des Strahls zu placieren.

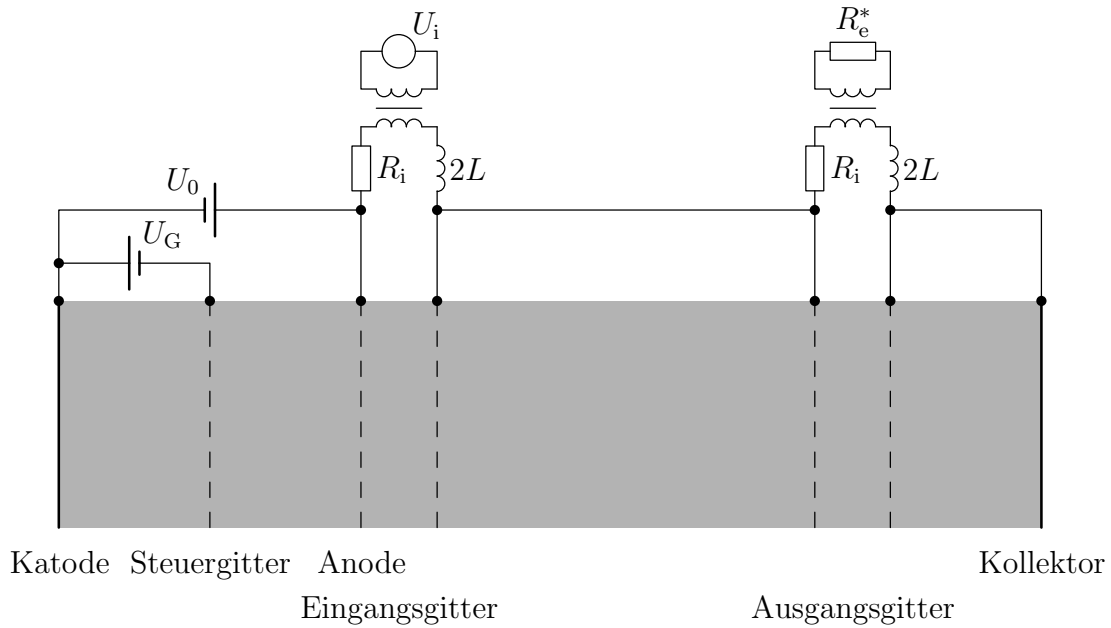


Abbildung 2.1: Abstraktion des Verstärkerklystrons auf eine Dimension.

das erste Eingangsgitter mit der Anode zusammengefaßt. Hinzugekommen ist das von den Röhrentrioden bekannte Steuergitter in der Elektronenkanone. Es soll ein leistungsloses An- und Abschalten des Strahls ermöglichen.

2.1.1 Elektronenkanone - Strahlerzeugung

Die Erzeugung von stromstarken Elektronenstrahlen erfolgt im allgemeinen durch thermische Emission und nachfolgende Beschleunigung der Elektronen durch ein statisches elektrisches Feld; der geheizte Emittor (Katode) wird negativ und der ungeheizte Kollektor (Anode) positiv geladen. Um störende Ioneneffekte gering zu halten, wird der Raum zwischen den Elektroden evakuiert. Eine solche Anordnung nennt man auch (Röhren-) Diode. Der Zusammenhang zwischen dem Strahlstrom I_0 und der Strahlspannung U_0 ist für den üblichen raumladungsbegrenzten Betrieb bei Vernachlässigung der Elektronengeschwindigkeit bei Austritt aus der Katode durch das Raumladungsgesetz²

$$I_0 = KU_0^{3/2} \quad (2.1)$$

gegeben, welches wegen ihrer frühen Arbeiten zur Theorie der Entladung auch LANGMUIR³-CHILD⁴-Gesetz genannt wird, siehe [11, 27]. Der Proportionalitätsfaktor K ist von der Geometrie der Kanone abhängig; er wird Perveanz der Kanone (bzw. des Strahls, siehe Abschnitt 2.2.4 Seite 65) genannt. Für die eindimensionale ebene Anordnung, Abbildung

²Eine ausführlichere Abhandlung zum Raumladungsgesetz ist im Anhang, Abschnitt A.1 zu finden.

³Langmuir, Irving (1881-1957), amerikanischer Chemiker und Physiker

⁴Child, Clement Dexter (1868-1933), amerikanischer Chemiker und Physiker

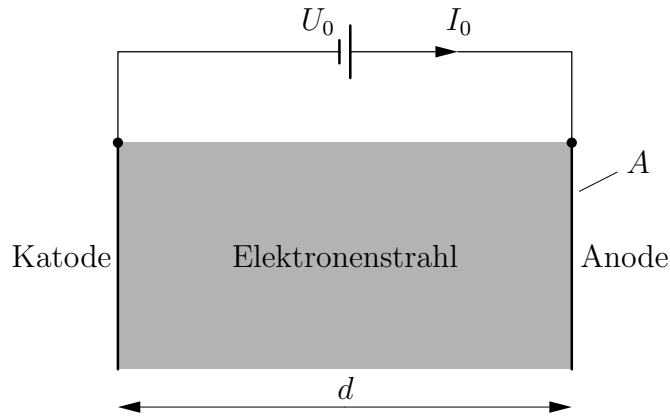


Abbildung 2.2: Eindimensionale ebene Elektronenkanone.

2.2, erhält man

$$K = \frac{4\epsilon_0\sqrt{2\eta_0}A}{9d^2}; \quad (2.2)$$

es bezeichnen A die Fläche der Elektroden und d den Abstand zwischen ihnen, $\eta_0 = e/m_0$ ist die spezifische Ladung des Elektrons im Ruhezustand.

Die Wirkung des in Abbildung 2.1 eingezeichneten Steuergitters (auch Modulationsanode genannt) läßt sich mittels eindimensionaler Betrachtung nur qualitativ erfassen. Ersetzt man dieses gedanklich durch eine Äquipotentialfläche, so übernimmt es die bisherige Funktion der Anode ohne jedoch Strom aufzunehmen. Das Raumladungsgesetz 2.1 gilt nun für den Anodenstrom und die Gitterspannung. Wegen des geringeren Abstands zur Katode erhält man gemäß Gleichung 2.2 eine größere Perveanz und damit denselben Anodenstrom bei geringerer Spannung. Die Spannung zwischen Anode und Katode besitzt bei diesem Modell keinerlei Einfluß auf den Anodenstrom. In der Praxis jedoch schirmt das Steuergitter die Anode nicht vollständig gegen die Katode ab, so daß ein gewisser – wenn auch erheblich verringerter – Einfluß von Anodenspannung auf den Anodenstrom bestehen bleibt. In jedem Falle wird das Steuergitter einen größeren Einfluß auf den Strahlstrom ausüben als die Anode. Der wesentliche Vorteil, den Strahl mittels des Gitters anstelle der Anode zu schalten, besteht jedoch darin, daß der Gitterstrom idealerweise verschwindet währenddessen die Anode (bzw. der Kollektor) den vollen Strahlstrom aufnehmen muß. Damit durchfließt den Schalter nur ein geringer von der Katode-Gitter-Kapazität herrührender Umschaltstrom, womit der Aufwand für die Stromversorgung geringer ausfällt. Die angeführten Formeln 2.1 und 2.2 genügen jedoch, um für die Katodenoberfläche und den Abstand zwischen Katode und Anode Startwerte für den Entwurf zu liefern.

2.1.2 Eingangsresonator - Geschwindigkeitsmodulation

Die durch die Anodenspannung U_0 auf die Geschwindigkeit v_0 beschleunigten Strahlelektronen durchlaufen das zwischen den Gittern des Eingangsresonators befindliche Hochfrequenzfeld $E(t) = \hat{E}e^{j\omega t}$ und werden in Abhängigkeit von dessen Phase beschleunigt

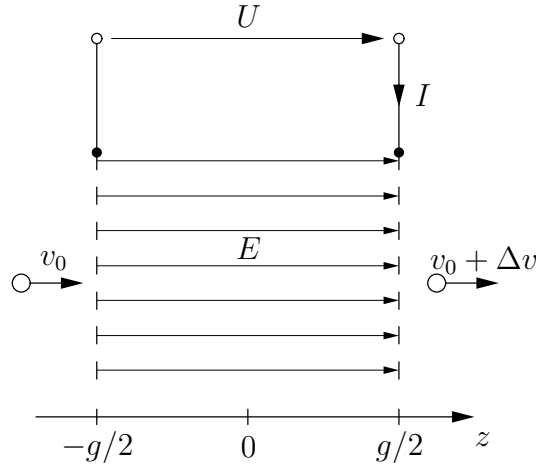


Abbildung 2.3: Eindimensionale Geschwindigkeitsmodulation: Geschwindigkeitszuwachs einer Punktladung beim Passieren eines Resonators aufgrund seines zeitlich veränderlichen elektrischen Feldes.

bzw. abgebremst. Wie groß ist ihr relativer Geschwindigkeitszuwachs beim Passieren des zweiten Gitters?

Zur Beantwortung dieser Frage sei eine Punktladung q als repräsentativ für die gesamte Strömung betrachtet, welche sich allein unter dem Einfluß des elektrischen Feldes und ihrer Trägheit⁵ vom ersten zum zweiten Gitter bewegt, Abbildung 2.3. Unter Anwendung der LORENTZschen⁶ Kraftgleichung $\dot{p} = m_0 \gamma^3 \dot{v} = qE$ (vgl. Abschnitt A.2 Gleichung (A.112)) erhält man für den Geschwindigkeitszuwachs

$$\Delta v = \frac{q}{m_0} \int_{t_1}^{t_2} \frac{E(t)}{\gamma^3(t)} dt, \quad (2.3)$$

wobei t_1 und t_2 die Zeitpunkte des Gitterpassierens bezeichnen. Da zunächst weder $\gamma(t)$ noch der Zusammenhang zwischen t_1 und t_2 bekannt sind, berechnet man das Integral näherungsweise unter Annahme einer konstanten Geschwindigkeit $v \approx v_0$, $\gamma \approx \gamma_0$ (Diskussion am Ende dieses Abschnitts). Ist t_0 der Zeitpunkt, zu welchem die Punktladung die Ebene $z = 0$ passiert, so gilt für ihren Ort $z = v_0(t - t_0)$, und (2.3) verwandelt sich in

$$\Delta v = \frac{q \hat{E} e^{j\omega t_0}}{m_0 \gamma_0^3 v_0} \int_{-g/2}^{g/2} e^{jkz} dz. \quad (2.4)$$

Hier wurde zur Abkürzung $k = \omega/v_0$ gesetzt; diesen Term kann man sinngemäß als Wellenzahl der Punktladung bzw. des Strahls bezeichnen. Mit $\hat{E} = \hat{U}/g$, der relativen Modu-

⁵Raumladungseffekte wie Potentialabsenkung (potential depression) und das Auftreten von Raumladungswellen können hier aufgrund des im Verhältnis zur gesamten Strahllänge geringen Gitterabstandes vernachlässigt werden.

⁶Lorentz, Hendrik Antoon (1853-1928), niederländischer Physiker

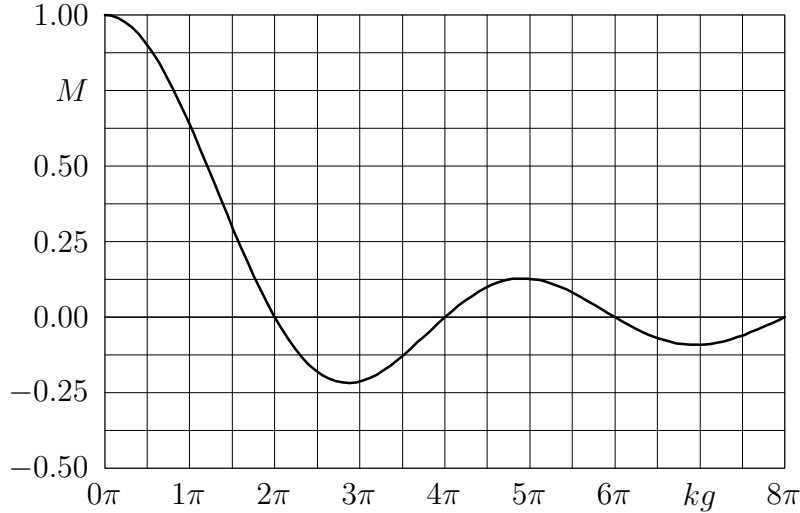


Abbildung 2.4: Strahl-Resonator-Kopplungskoeffizient als Funktion des Laufwinkels.

lationsspannung⁷ $\alpha = \hat{U}/U_0$ und dem Masse-Energie-Äquivalent $qU_0 = m_0c_0^2(\gamma_0 - 1)$ folgt unter Verwendung der Identität $\beta^2\gamma^2 = \gamma^2 - 1$

$$\frac{\Delta v(t_0)}{v_0} = \frac{\alpha}{\gamma_0(\gamma_0 + 1)} \frac{\sin kg/2}{kg/2} e^{j\omega t_0}. \quad (2.5)$$

Der relative Geschwindigkeitszuwachs der Elektronen beim Passieren des Gitterpaares ist in erster Näherung eine harmonische Schwingung mit der Frequenz des elektrischen Feldes. Ihre Amplitude, die *Geschwindigkeitsmodulation*

$$M_v = \frac{\hat{\Delta v}}{v_0} = \frac{M\alpha}{\gamma_0(\gamma_0 + 1)} \quad (2.6)$$

hängt neben der relativen Modulationsspannung α maßgeblich vom *Strahl-Resonator-Kopplungskoeffizienten*

$$M = \frac{\sin kg/2}{kg/2} \quad (2.7)$$

ab, welcher sein Maximum 1 für verschwindende Laufzeit (Laufwinkel $\psi_0 = \omega g/v_0 = kg = 0$) einnimmt und verschwindet, wenn die Laufzeit gleich der Dauer einer vollen Hochfrequenzperiode ($\psi_0 = 2\pi$) ist. Um bei gegebener Klemmenspannung U eine große Geschwindigkeitsmodulation erreichen zu können, sollte der Laufwinkel so klein wie möglich sein. Die Abhängigkeit des Strahl-Resonator-Kopplungskoeffizienten vom Laufwinkel ist in Abbildung 2.4 dargestellt.

⁷Der Term $\alpha = \hat{U}/U_0$ wird in der Literatur oft als Spannungsmodulation bezeichnet, obwohl er den Zustand des Resonators und nicht des Strahls beschreibt. Im Rahmen dieser Arbeit ist jedwede Modulation als Strahleigenschaft zu verstehen; speziell wird daher der Term $M\alpha$ als Spannungsmodulation (oder Energiemodulation) bezeichnet, siehe Abschnitt A.3.

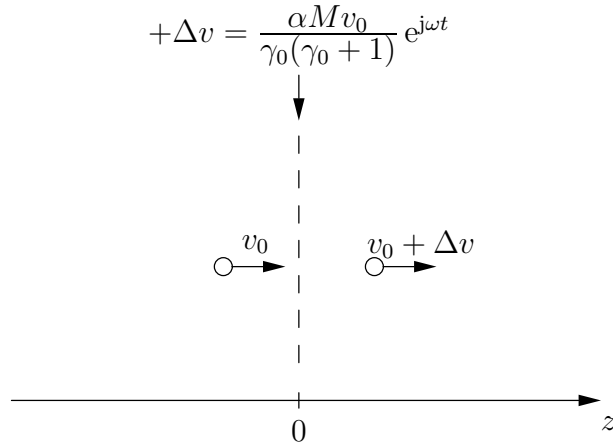


Abbildung 2.5: Gedankliche Reduktion der Resonatorausdehnung auf eine Ebene, in welcher die Ladungsträger einen zeitabhängigen Geschwindigkeitssprung erfahren.

Der Strahl-Resonator-Kopplungskoeffizient – Parameter von Strahl (v_0) und Resonator (ω, g) – ist eine wichtige Größe bei der Beschreibung der Wechselwirkung zwischen freien Ladungsträgern und Hochfrequenzfeldern und trägt der Tatsache Rechnung, daß sich die Resonatorfeldstärke während der Wechselwirkungszeit (Laufzeit) ändert. Solange die Laufzeit $\tau_0 = g/v_0$ klein gegenüber der Periodendauer $T = 2\pi/\omega$ ist, kann dieser Effekt vernachlässigt werden; es ist dann $\omega g/v_0 = kg \ll 2\pi$ und $M \approx 1$. Für größere Laufzeiten tritt jedoch eine merkbare Wirkungsreduktion ein. Wie der obenstehenden Rechnung entnommen werden kann, reduziert der Strahl-Resonator-Kopplungskoeffizient die Amplitude der Klemmenspannung \hat{U} auf die im günstigsten Falle von einem Elektron durchlaufene Spannung $M\hat{U}$. Da man rechnerisch dieselbe Wirkung mit einem Resonator verschwindender Länge aber reduzierter Klemmenspannung MU erzielen würde, kann man nach Einführung des Strahl-Resonator-Kopplungskoeffizienten gedanklich von der tatsächlichen Ausdehnung des Resonators absehen und den Bereich zwischen den Gittern auf eine Ebene zusammenziehen. Anstelle des komplizierten Geschwindigkeitsverlaufs zwischen den Gittern hat man dann einen Geschwindigkeitssprung in $z = 0$, was die Betrachtung erheblich vereinfacht, ohne an der Rechnung etwas zu ändern, Abbildung 2.5.

Abschließend sei die eingangs getätigte Annahme der konstanten Geschwindigkeit der Ladungsträger untersucht: Schreibt man Gleichung (2.5) als

$$v(t_0) = v_0(1 + M_v e^{j\omega t_0}), \quad (2.8)$$

ist leicht zu sehen, daß die Annahme $v \approx v_0$ sicherlich für $M_v \ll 1$ gerechtfertigt ist, was wegen (2.6) für $\alpha \ll 1$ der Fall ist. Solange also die Klemmenspannung deutlich kleiner als die Anodenspannung U_0 – im folgenden auch *Strahlspannung* – ist, dürfen die Gleichungen (2.4) bis (2.6) als gute Näherung betrachtet werden. In der Praxis ist dies im allgemeinen der Fall, weil das Resonatorfeld aus Gründen geringer Wandverluste klein gehalten werden muß, die Strahlspannung jedoch zum Erreichen kleiner Laufwinkel groß gewählt wird.

Eine ausführlichere Betrachtung über die Geschwindigkeitsmodulation, den zum Zwecke

der Linearisierung getätigten Näherungen und der damit verbundenen Fehler ist im Anhang A.3 zu finden.

2.1.3 Driftstrecke - Dichtemodulation

Wie im Abschnitt 2.1.4 ausführlicher dargelegt, erfolgt die Anregung des Ausgangskreises durch einen Hochfrequenzstrom, also durch die verknüpfte Wirkung von Elektronendichte und -geschwindigkeit, nicht jedoch durch eine dieser Komponenten direkt. Folgerichtig ist das Ziel der im Eingangskreis bewerkstelligten Geschwindigkeitsmodulation das Erreichen einer hohen *Strommodulation*. Unmittelbar nach Verlassen des Eingangskreises ist diese jedoch gleich der Geschwindigkeitsmodulation – die Raumladungsdichte ist noch unmoduliert – und damit wesentlich kleiner als 1. Es ist unmittelbar einleuchtend, daß sich mit einer derart geringen Strommodulation nur verschwindend geringe Wirkungsgrade erzielen lassen werden.

Glücklicherweise löst der Elektronenstrahl dieses Problem gewissermaßen von selbst, denn die längs des Strahls unterschiedlichen Geschwindigkeiten bewirken ohne äußeres Zutun eine Raumladungsdichte- und damit eine stärkere Strommodulation: Schnelle Elektronen holen auf und langsame fallen zurück, so daß sich im Strahl Bereiche erhöhter und verringerter Elektronenkonzentration bilden. In diesem Abschnitt wird dieser im von äußeren Feldern freien Driftraum auftretende Effekt untersucht und der Strahlstrom am Ausgang der Driftstrecke berechnet.

In der Vergangenheit wurden im wesentlichen zwei Wege zur analytischen Erschließung dieses Bündelungseffektes (*bunching*, in der deutschsprachigen Literatur oft Phasenfokussierung, siehe auch Fußnote auf Seite 105) besprochen, welche sich grundlegend hinsichtlich der Betrachtung der Vorgänge im Driftraum unterscheiden:

1. **Ballistische Analyse:**⁸ Die Elektronen bewegen sich allein aufgrund ihrer Trägheit; sie können sich durchdringen und *überholen*,⁹ ohne sich gegenseitig zu beeinflussen. Das hat zur Folge, daß sich an einunddemselben Ort gleichzeitig mehrere Elektronen befinden können, welche außerdem verschiedene Geschwindigkeiten besitzen können; es existiert kein Geschwindigkeitsfeld im klassischen Sinne.

Bei gegebenen Startbedingungen für die Elektronen am Eingang der Driftstrecke sind somit alle Trajektorien bekannt, und der Strahlstrom kann an jeder Stelle des Driftraumes – inklusive seines Ausgangs – durch „Zählen“ der Elektronen berechnet werden (laufzeitbasierte Stromberechnung).

⁸Obwohl das Phänomen der Phasenfokussierung bereits früher untersucht und sogar praktisch genutzt wurde [1, 8, 17], ist die erste strenge Analyse erst später im Umfeld der Schöpfung des „Klystrons“ an der Stanford University entstanden [45] und von WEBSTER [46] im Sommer 1939 publiziert worden. Zur Geschichte des Klystrons siehe [15].

⁹Diese Annahme ist praktisch identisch mit der Vorstellung von ausschließlich elastischen Stößen, was folgendes Gedankenexperiment erhellen soll: Eine kleine Kugel befinde sich ruhend auf einem Tisch. Eine zweite (gleicher Größe, Masse, Farbe, . . .) wird in Bewegung gebracht und stoße die erste Kugel im Falle (a) und rolle an ihr im Falle (b) knapp vorbei. Im Falle (a) tauschen die Kugeln lediglich ihre Zustände (die erste Kugel rollt weiter, die zweite bleibt an der Stelle der ersten liegen), während im Falle (b) jede Kugel ihren Zustand beibehält. Ein seitlicher Beobachter wird die beiden Fälle optisch nicht unterscheiden können.

2. **Feldtheoretische Analyse:**¹⁰ Der Driftraum ist mit einem Plasma gefüllt bestehend aus stationären positiv geladenen Ionen und den sich bewegenden Strahlelektronen. Es gelten die Gesetze der Magnetohydrodynamik (MAXWELLSche¹¹ Gleichungen, LORENTZsche Kraftgleichung, Existenz eines Geschwindigkeitsfeldes), Wechselwirkungen zwischen den Elektronen finden statt vermittelt durch elektromagnetische Felder. Elektronen können sich *nicht überholen*,¹² ihre Reihenfolge bleibt über alle Zeiten hinweg erhalten.

Die Verhältnisse am Eingang der Driftstrecke gehen als Randbedingung in die Rechnung ein; die Stromdichte ist als Produkt der Felder von Raumladungsdichte und Geschwindigkeit nach vollzogener Rechnung im gesamten Driftraum und damit auch an seinem Ausgang bekannt.

Beide Rechnungen werden im folgenden vorgestellt und anschließend diskutiert. Im Vorfeld soll die später verwendete Methode der kinematischen oder *laufzeitbasierten Stromberechnung* behandelt werden, da diese von den Annahmen über die Vorgänge im Driftbereich unabhängig ist und daher sowohl bei der ballistischen als auch bei der feldtheoretischen Analyse Verwendung finden kann.¹³

Laufzeitbasierte Stromberechnung

Betrachtet sei eine geradlinige Strömung von Ladungsträgern, welche bei Ausrichtung der z -Achse eines Koordinatensystems parallel zur Strömung folgende Eigenschaft besitzt: Für jede Länge $l \geq 0$ passieren alle Ladungsträger, die in der Umgebung $dt_e \geq 0$ des Zeitpunktes t_e in $z = 0$ gestartet sind, die Ebene $z = l$ in einer gewissen Umgebung $dt_a \geq 0$ des Zeitpunktes t_a . Anscheinend ist neben der Erhaltung der Ladung die Existenz einer der Strömung zugeordneten, bezüglich t differenzierbaren und beschränkten *Laufzeitfunktion* $L(z, t)$ mit der Eigenschaft

$$L(l, t_e) = \tau = t_a - t_e \quad (2.9)$$

hinreichend dafür, daß die Strömung die oben genannte Eigenschaft besitzt. Aus Gründen der Kausalität kann L nirgendwo negative Werte annehmen.

¹⁰Die erste Publikation, die Raumladungswellen zur Erklärung des Bündelungsvorgangs verwendet, stammt von HAHN (General Electric Company) [18] und ist unmittelbar vor WEBSTERS ballistischer Analyse erschienen. Anscheinend wurde diese Publikation von Stanford zunächst ignoriert, später jedoch durch geradlinigere Analysen ergänzt [20].

¹¹Maxwell, James Clerk (1831-1879), britischer Physiker

¹²Dies ist eine Folge der eindimensionalen Betrachtung; bereits im Zweidimensionalen können Überholungen stattfinden. Diese Tatsache hat keine physikalischen Ursachen (die COULOMBSchen Kräfte hängen bei einer Dimension nicht vom Abstand der Ladungsträger ab!) sondern folgt allein aus der Annahme der Existenz eines Geschwindigkeitsfeldes. Man beweise zur Übung folgenden Satz: Gegeben sei eine in einem gewissen Bereich stetig differenzierbare Funktion $v(z, t)$. Dann gilt für jedes Lösungspaar $z_1(t), z_2(t)$ der Gleichung $\dot{z} = v$ entweder $z_1 = z_2$ oder $z_1 \neq z_2$ für alle t .

¹³Die laufzeitbasierte Stromberechnung wird in der Literatur üblicherweise als elementarer Bestandteil der ballistischen Analyse der Dichtemodulation betrachtet [46], [48], [21], [19], [14], ... Eine derartige Darstellung verschleierte jedoch sowohl die Komplexität als auch die Universalität dieser Berechnungsmethode. Aus diesem Grunde erhielt sie in dieser Arbeit einen eigenen Namen (nämlich laufzeitbasierte Stromberechnung) und wird getrennt von allen klystronspezifischen Annahmen behandelt.

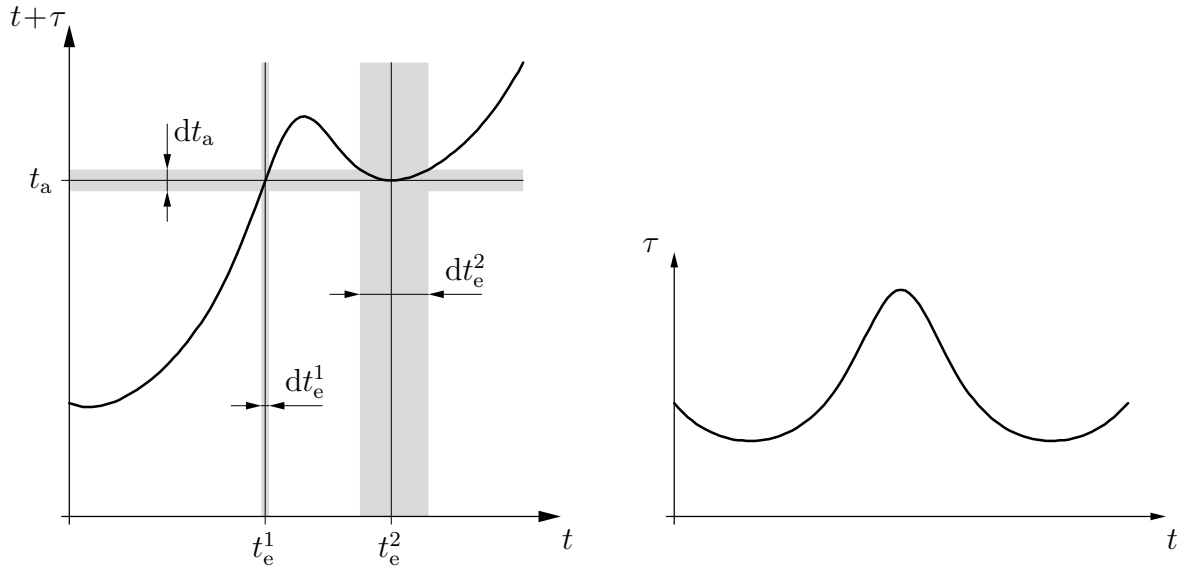


Abbildung 2.6: Laufzeitbasierte Stromberechnung: Ankunftszeit in der Ebene z (links) und zugehörige Laufzeit (rechts) in Abhängigkeit von der Startzeit in $z = 0$ für eine Strömung mit der Laufzeitfunktion (2.16).

Die Stärke $I(z, t)$ der Strömung – die die Ebene z zum Zeitpunkt t pro Zeiteinheit passierende Ladungsmenge – läßt sich nun bei Bekanntsein der Laufzeitfunktion und des zeitlichen Verlaufs der Stromstärke in $z = 0$ gewissermaßen durch „Zählen“ der Ladungsträger wie folgt bestimmen: Es sei dQ_a die Ladungsmenge, die in der Zeitspanne $dt_a \geq 0$ in der Umgebung des beliebig gewählten Zeitpunkts $t = t_a$ in der Ebene z eintrifft, $dQ_a = I(z, t_a)dt_a$. Wegen der Erhaltung der Ladung müssen alle Elektronen aus dQ_a einmal in $z = 0$ gestartet sein, eventuell jedoch zu verschiedenen Zeitpunkten, wie in Abbildung 2.6 dargestellt. Allerdings kommen aufgrund der Beschränktheit der Laufzeit nur endlich viele Startzeitpunkte in Frage (zwei im gewählten Beispiel Abbildung 2.6); sie seien mit $i = 1, 2, \dots, n$ durchnummeriert. Dann setzt sich dQ_a aus n Teilladungen dQ_e^i zusammen, welche in den Zeitspannen $dt_e^i \geq 0$ in den Umgebungen der Zeitpunkte t_e^i gestartet sind, $dQ_e^i = I(0, t_e^i)dt_e^i$, und es gilt

$$dQ_a = I(z, t_a) dt_a = \sum_{i=1}^n dQ_e^i = \sum_{i=1}^n I(0, t_e^i) dt_e^i. \quad (2.10)$$

Die als nicht negativ vorausgesetzten Differentiale kann man nun durch die Ableitung der Laufzeitfunktion eliminieren, wobei zu berücksichtigen ist, daß letztere durchaus negative Werte annehmen kann. Um konventionell (und damit negative Differentiale zulassend)

$$\frac{dt_a}{dt_e^i} = \frac{d(t_e^i + \tau^i)}{dt_e^i} = 1 + \frac{\partial L}{\partial t}(z, t_e^i) \quad (2.11)$$

schreiben zu können – man beachte, daß z unabhängig von der Zeit ist –, muß Gleichung

2 Analyse des Bandstrahlklystrons

(2.10) modifiziert werden zu

$$I(z, t_a) |dt_a| = \sum_{i=1}^n I(0, t_e^i) |dt_e^i|. \quad (2.12)$$

Die Beträge tragen damit der Tatsache Rechnung, daß es für die Stromstärke unerheblich ist, ob sich die Reihenfolge der Elektronen innerhalb einer Teilladung dQ_e^i umgekehrt hat ($\partial L/\partial t < -1$) oder nicht ($\partial L/\partial t > -1$). Allgemein gilt folglich

$$I(z, t) = \sum_{i=1}^n \frac{I(0, t_i)}{\left|1 + \frac{\partial L}{\partial t}(z, t_i)\right|}, \quad (2.13)$$

$$t = t_i + L(z, t_i) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.14)$$

Um den Strom in der Ebene z zu einem beliebigen Zeitpunkt t zu bestimmen, hat man also zunächst die n Lösungen t_i der Gleichung (2.14) für die Ankunftszeit zu berechnen und anschließend die Summe (2.13) auszuwerten. Das Ergebnis einer derartigen Rechnung ist für eine Strömung mit

$$I(0, t) = I_0 \quad (2.15)$$

$$L(z, t) = \frac{kz/\omega}{1 + \frac{1}{2} \sin(\omega t)} \quad (2.16)$$

in Abbildung 2.7 dargestellt.

Sind die Laufzeitfunktion (und damit auch ihre zeitliche Ableitung) und der Strom in $z = 0$ periodisch in der Zeit mit $T = 2\pi/\omega$, so muß wegen (2.13) auch der Strom in der Ebene z mit T periodisch sein, und es bietet sich eine harmonische Analyse an. Schreibt man

$$I(z, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i(z) \cos(i\omega t) + b_i(z) \sin(i\omega t), \quad (2.17)$$

so gilt für die Koeffizienten bekanntlich

$$a_i(z) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} I(z, t) \cos(i\omega t) dt \quad i = 0, 1, \dots \quad (2.18)$$

$$b_i(z) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} I(z, t) \sin(i\omega t) dt \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.19)$$

Anstatt in diese Gleichungen die wegen der Summe und des Betrages unhandliche Darstellung (2.13) des Stroms einzusetzen, kann man die Integrale mittels Substitution der Integrationsvariablen wesentlich vereinfachen: Jede zum Zeitpunkt t in der Ebene z eintreffende Teilladung $dQ = I(z, t) dt$ wird in den Integralen mit einer gewissen, ebenfalls

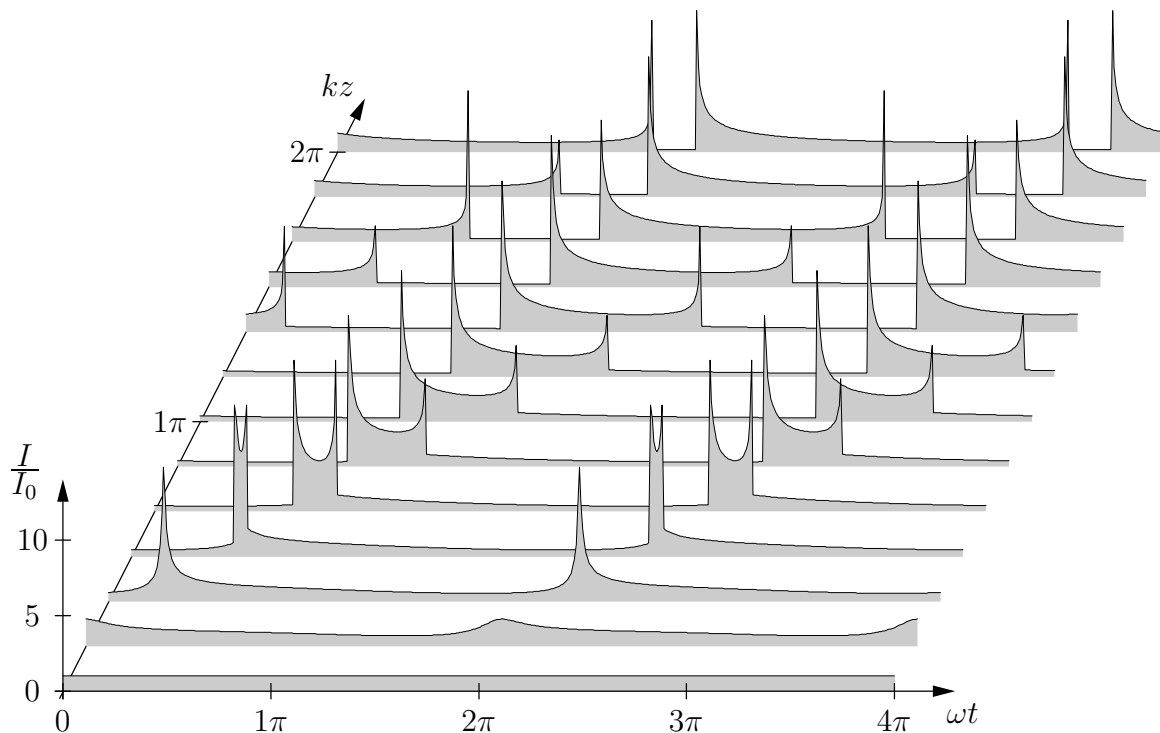


Abbildung 2.7: Laufzeitbasierte Stromberechnung: Zeitlicher Verlauf der Stromstärke in mehreren Ebenen berechnet aus den Eigenschaften (2.15) und (2.16) der Strömung.

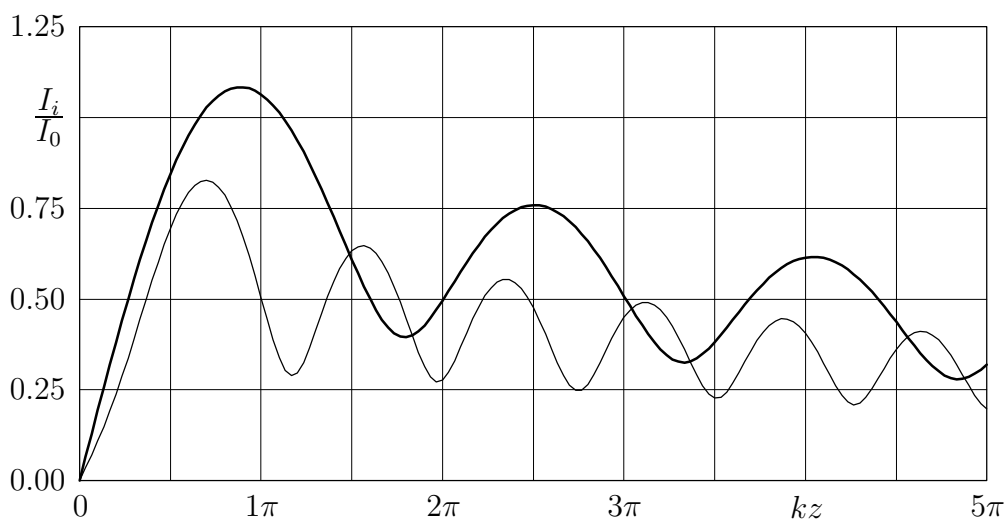


Abbildung 2.8: Laufzeitbasierte Stromberechnung: Normalisierte Amplituden der Stromstärke für die Grund- (dicke Kurve) und die erste Oberwelle (dünne Kurve) der Strömung aus Abbildung 2.7.

von der Ankunftszeit abhängigen Funktion gewichtet; integriert wird über eine volle Periode, also über die Ladung, die in der Zeitspanne T die Ebene z durchquert. Diese Ladung tritt aber aufgrund der Periodizität der Laufzeitfunktion (und der Erhaltung der Ladung) in genau derselben Zeitspanne auch durch die Ebene $z = 0$. Man kann sie folglich auch in die Teilladungen $dQ = I(0, t) dt$ zerlegen und die Gewichte gemäß (2.14) als Funktion der Startzeit in $z = 0$ schreiben:

$$a_i(z) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} I(0, t) \cos [i\omega(t + L(z, t))] dt \quad i = 0, 1, \dots \quad (2.20)$$

$$b_i(z) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} I(0, t) \sin [i\omega(t + L(z, t))] dt \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.21)$$

Das Ergebnis einer solchen Rechnung (numerische Auswertung) für die Strömung mit den Eigenschaften (2.15) und (2.16) ist in Abbildung 2.8 dargestellt. Dazu wurde die Reihe (2.17) in die praktischere Form

$$I(z, t) = I_0 + \sum_{i=1}^{\infty} I_i(z) \cos [i\omega t + i\psi_i(z)], \quad (2.22)$$

$$I_0 = a_0/2; \quad I_i(z) = \sqrt{a_i^2(z) + b_i^2(z)}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.23)$$

gebracht; die Phasenfunktionen $\psi_i(z)$ sind von untergeordneter Bedeutung.

Zusammenfassend gilt: Ist die Laufzeitfunktion einer Strömung nebst ihrer zeitlichen Ableitung bekannt, so läßt sich die Stromstärke in jeder Ebene z aus jener in der Ebene $z = 0$ mittels der Gleichungen (2.13) und (2.14) bestimmen. Handelt es sich um ein zeitlich periodisches Problem, kann man auch die Gleichungen (2.17), (2.20) und (2.21) verwenden.

Ballistische Analyse

Da gemäß dem vorgestellten Modell über die Vorgänge im Driftbereich keine Wechselwirkungen zwischen den Elektronen stattfinden, behält jedes Elektron seine ihm beim Eintritt in den Driftbereich aufgezwungene Geschwindigkeit bei. Damit ist die Trajektorie eines jeden Elektrons bekannt, und jeder Abflugzeit t_e vom Eingang der Driftstrecke ($z=0$) kann eindeutig eine Ankunftszeit t_a am Ausgang der Driftstrecke ($z=l$) zugeordnet werden:

$$z(t) = v(t_e)(t - t_e) \quad (2.24)$$

$$t_a = t_e + l/v(t_e) \quad (2.25)$$

$$v(t_e) = v_0(1 + M_v \sin \omega t_e). \quad (2.26)$$

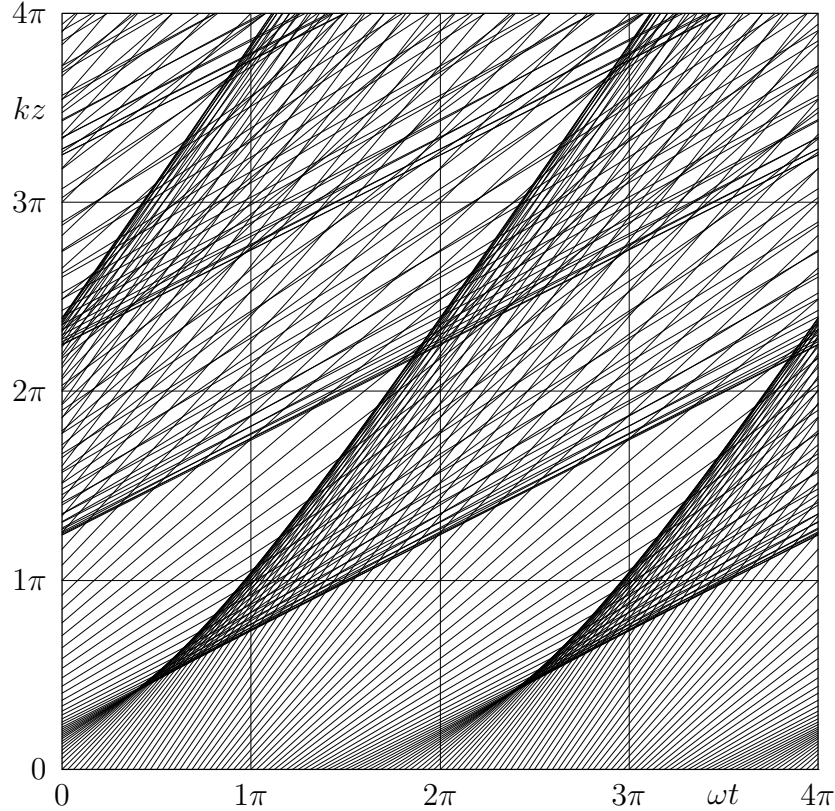


Abbildung 2.9: Ballistische Analyse der Dichtemodulation: Trajektorien einzelner, zu äquidistanten Zeitpunkten in $z = 0$ gestarteter Elektronen nach Gleichung (2.27) mit $M_v = 0.5$ (Applegate diagram).

Bei der letzten Gleichung handelt es sich um (2.8) aus dem vorigen Abschnitt. Die Verwendung einer reellwertigen harmonischen Funktion anstelle der bisher verwendeten e-Funktion ist hier aufgrund der Nichtlinearität in der Zeit erforderlich.

Zu einem ersten Eindruck über den Bündelungsvorgang gelangt man durch Darstellung der Trajektorien einzelner Elektronen in einem Ort-Zeit-Diagramm: Mit der bereits früher verwendeten Wellenzahl des Strahls $k = \omega/v_0$ folgt aus (2.24), (2.26)

$$kz = (1 + M_v \sin \omega t_e)(\omega t - \omega t_e). \quad (2.27)$$

Diese normierte Trajektoriengleichung – in der angelsächsischen Literatur als *Applegate diagram* bezeichnet – ist für äquidistante Werte der Startphase ωt_e (und damit für einzelne Elektronen) in Abbildung 2.9 dargestellt. Jedem der ausgewählten Elektronen ist aufgrund der konstanten Geschwindigkeiten eine Gerade zugeordnet; Schnittpunkte repräsentieren Überholungen und Bereiche hoher Liniendichte erhöhte Elektronenkonzentration. Die anfänglich homogene Elektronenkonzentration am Eingang der Driftstrecke ($z = 0$) weicht einer zeitlich periodischen Konzentrationsschwankung, welche in einer gewissen Ebene ihr Maximum einnimmt, um dann zu noch größeren Werten von z hin wieder abzunehmen.

Um den Strahlstrom in der Ebene z zu berechnen, wird nun die im vorigen Abschnitt

2 Analyse des Bandstrahlklystrons

besprochene Methode der laufzeitbasierten Stromberechnung angewendet, wozu die Laufzeitfunktion und der Strahlstrom am Eingang der Driftstrecke benötigt wird. Letzterer läßt sich mit sehr guter Näherung als

$$I_s(0, t) = -I_0 \quad (2.28)$$

angeben, und das aus folgendem Grunde: Zunächst einmal handelt es sich bei $I_s(0, t)$ um den Strom am zweiten Gitter des Eingangsresonators. Wegen der im Bereich der Eingangsgitter als konstant vorausgesetzten Elektronengeschwindigkeit ist die Laufzeit zwischen den Gittern ebenfalls eine Konstante. Gemäß den Erkenntnissen aus dem letzten Abschnitt muß daher die Stromstärke am zweiten Gitter mit jener am ersten Gitter identisch und damit betragsmäßig gleich der Stromstärke I_0 des unmodulierten Strahls sein. Wegen des im Vergleich zur Länge der Driftstrecke geringen Gitterabstandes ist dies auch dann noch der Fall, wenn man die geringfügige Geschwindigkeitsänderung in die Betrachtung mit einbezieht. Das negative Vorzeichen in Gleichung (2.28) ergibt sich aus der Definition des Strahlstroms als z -gerichteter Konvektionsstrom positiver Ladungsträger und der Konvention, I_0 positiv anzugeben. Die desweiteren benötigte und gemäß (2.9) definierte Laufzeitfunktion läßt sich unmittelbar aus Gleichung (2.27) gewinnen; es gilt

$$\omega L(z, t) = \frac{kz}{1 + M_v \sin \omega t}, \quad (2.29)$$

und mit der bereits im Abschnitt 2.1.2 verwendeten Näherung $M_v \ll 1$ ergibt sich

$$\omega L(z, t) = kz - kzM_v \sin \omega t. \quad (2.30)$$

Der Term $X_0 = kzM_v$ wird auch als *Bündelungsparameter* bezeichnet. Gemäß den Gleichungen (2.13), (2.14) gilt daher für den Strahlstrom in der Ebene z

$$I_s(z, t) = -I_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{|1 - kzM_v \cos \omega t_i|}, \quad (2.31)$$

$$t = t_i + L(z, t_i) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.32)$$

Offenbar handelt es sich um ein mit $T = 2\pi/\omega$ zeitlich periodisches Problem, weshalb auch die folgende Darstellung des Strahlstroms als FOURIERREIHE¹⁴ möglich ist:

$$I_s(z, t) = -I_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i(z) \cos(i\omega t) + b_i(z) \sin(i\omega t), \quad (2.33)$$

$$a_i(z) = -\frac{I_0}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos [i(\omega t + kz - kzM_v \sin \omega t)] d\omega t \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.34)$$

$$b_i(z) = -\frac{I_0}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin [i(\omega t + kz - kzM_v \sin \omega t)] d\omega t \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.35)$$

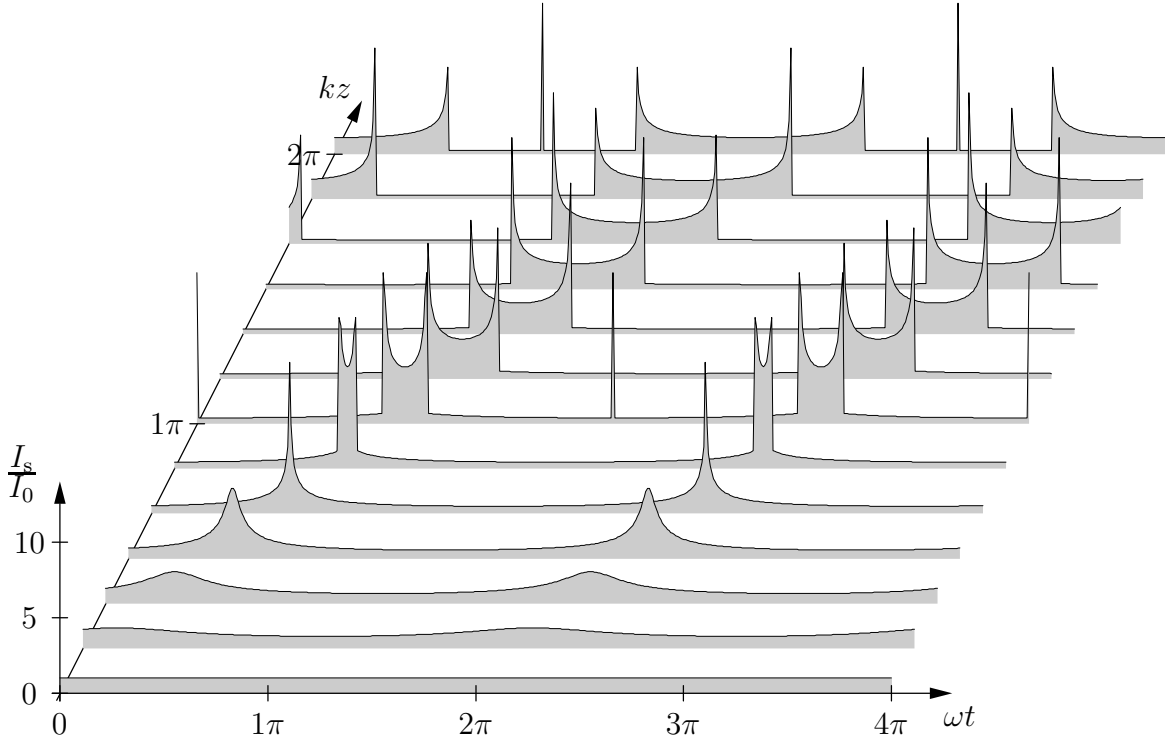


Abbildung 2.10: Ballistische Analyse der Strommodulation: Zeitlicher Verlauf der Strahlstromstärke in mehreren Ebenen; die Geschwindigkeitsmodulation beträgt $M_v = 0.5$.

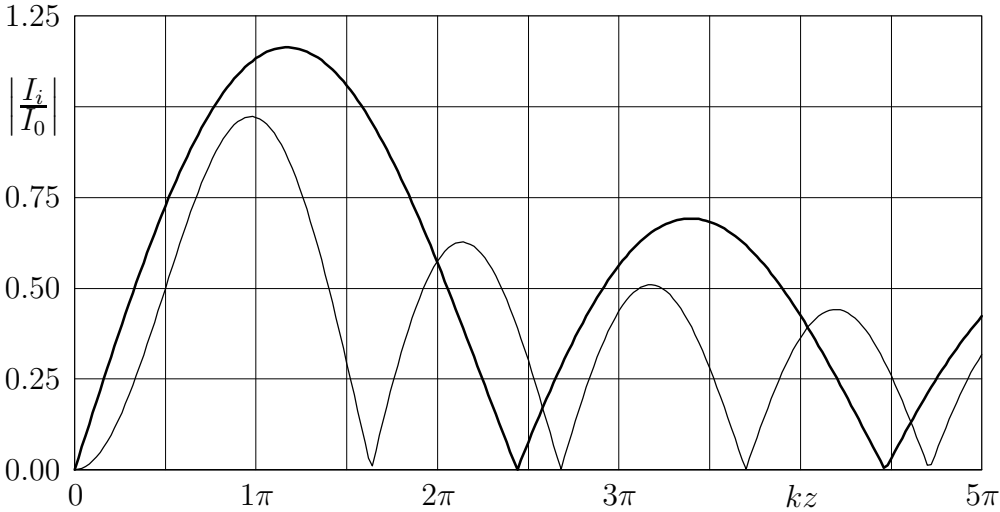


Abbildung 2.11: Ballistische Analyse der Strommodulation: Normalisierte Amplituden der Strahlstromstärke für die Grundwelle (Strommodulation M_I , dicke Kurve) und die erste Oberwelle (dünne Kurve) als Funktion der Driftlänge z für eine Geschwindigkeitsmodulation von $M_v = 0.5$.

2 Analyse des Bandstrahlklystrons

Diese Integrale lassen sich unter Verwendung der Integraldarstellung der BESSELFunktionen¹⁵ für natürliche Zahlen i (siehe [16])

$$J_i(ix) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(i\phi - ix \sin \phi) d\phi \quad (2.36)$$

wesentlich vereinfachen zu

$$a_i(z) = -2I_0 \cos(ikz) J_i(ikzM_v), \quad (2.37)$$

$$b_i(z) = -2I_0 \sin(ikz) J_i(ikzM_v), \quad (2.38)$$

so daß man für den Strahlstrom schließlich erhält

$$I_s(z, t) = - \left[I_0 + \sum_{i=1}^{\infty} I_i(z) \cos(i\omega t - ikz) \right], \quad (2.39)$$

$$I_i(z) = 2I_0 J_i(ikzM_v) \quad (2.40)$$

siehe Abbildungen 2.10 und 2.11.

Für ein Verstärkerklystron mit der Arbeitsfrequenz ω ist vor allem die Grundwelle des Strahlstroms bzw. die als

$$M_I = \left| \frac{I_1(z)}{I_0} \right| \quad (2.41)$$

definierte *Strommodulation* des Elektronenstrahls von Bedeutung. Als Ergebnis der ballistischen Analyse des Bündelungsvorgangs im Driftraum ergibt sich somit

$$M_I = |2J_1(kzM_v)|. \quad (2.42)$$

Die Strommodulation weist für $kzM_v = 1.84$ ein schwaches Maximum von 1.16 auf; einen Ausgangsresonator wird man daher im Abstand $l = 1.84/(kM_v)$ vom Eingangsresonator anordnen. Die interessierende Hochfrequenzkomponente des Strahlstroms übersteigt an dieser Stelle den Gleichstromanteil um 16%.

Wie stark sich die Annahme einer geringen Geschwindigkeitsmodulation – d.h. der Näherung (2.30) – auf das Ergebnis ausgewirkt hat, läßt sich durch einen Vergleich der Abbildungen 2.10 und 2.11 mit 2.7 und 2.8 abschätzen, da letzteren die exakte Laufzeitfunktion der ballistischen Analyse für $M_v = 0.5$ zugrunde liegt. – Diese Modulation ist als groß zu bezeichnen; sie bedarf bereits einer Modulationsspannung von der Größe der Strahlspannung U_0 , siehe Gleichung (2.6). – Das Maximum der Grundwelle des Strahlstroms verschiebt sich infolge der Näherung zu geringfügig größeren Werten von z hin, der Maximalwert ist jedoch in beiden Fällen derselbe. Mithin ist zu erwarten, daß Gleichung (2.42) für den praktisch relevanten Bereich von $M_v < 0.5$ hinreichend genaue Ergebnisse liefert.

¹⁴Fourier, Jean-Baptiste Baron de (1768-1830), französischer Mathematiker und Physiker

¹⁵Bessel, Friedrich Wilhelm (1784-1846), deutscher Astronom und Mathematiker

Feldtheoretische Analyse

Die Wechselwirkung zwischen den Elektronen aufgrund COULOMBScher Kräfte kann sicherlich bei sehr dichten Strahlen nicht ohne weiteres vernachlässigt werden.¹⁶ Um diese berücksichtigen zu können, muß man von der Bewegung einzelner Elektronen zunächst absehen und den Strahl als Kontinuum betrachten. Dies wird notwendig, weil die Trajektorien nun nicht mehr von vornherein bekannt sind, wie es bei der ballistischen Analyse der Fall war. Der Strahl wird nun als kompressibles Medium aufgefaßt, so daß man sich zweckmäßigerweise der Methoden der Hydrodynamik bedient: Man geht von der Existenz eines Geschwindigkeitsfeldes (für die Elektronen) aus und erhält das Strömungsfeld als Produkt aus Raumladungsdichte- und Geschwindigkeitsfeld; außerdem bedient man sich der MAXWELLSchen Gleichungen und der LORENTZschen Kraftgleichung (Magnetohydrodynamik). Aufgrund der eindimensionalen Betrachtung besitzen die Vektorfelder lediglich eine z -Komponente, und alle Felder sind nur von z und t abhängig. Wie es sich zeigen wird, genügt der folgende einfache Wellenansatz zur Beschreibung des Bündelungsphänomens¹⁷

$$\rho(z, t) = \rho_0 + \rho_1 e^{j(\omega t - \beta z)}, \quad (2.43)$$

$$v(z, t) = v_0 + v_1 e^{j(\omega t - \beta z)}, \quad (2.44)$$

$$J(z, t) = J_0 + J_1 e^{j(\omega t - \beta z)}, \quad (2.45)$$

$$E(z, t) = E_0 + E_1 e^{j(\omega t - \beta z)}, \quad (2.46)$$

wobei ρ_0 und v_0 bei gegebenem Strahl von vornherein bekannt sind. Mittels der angeführten Gesetze werden nun die Beziehungen zwischen den Gleich- und Wechselkomponenten der Felder ermittelt.

Aus der Definition des Konvektionsstroms als $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ erhält man mit (2.43) und (2.44)

$$J(z, t) = \rho_0 v_0 + (\rho_0 v_1 + \rho_1 v_0) e^{j(\omega t - \beta z)} + \rho_1 v_1 e^{2j(\omega t - \beta z)}. \quad (2.47)$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit dieser drei Komponenten der Stromdichte ergibt ein Vergleich mit (2.45)

$$J_0 = \rho_0 v_0, \quad (2.48)$$

$$J_1 = \rho_0 v_1 + \rho_1 v_0. \quad (2.49)$$

Um es bei dem einfachen Ansatz (2.45) bewenden lassen zu können, muß die Komponente zweiter Ordnung $J_2 = \rho_1 v_1$ klein gehalten werden; es ist die *Kleinsignalbedingung* $|J_2| \ll |J_1|$ zu erfüllen. Dies ist sicherlich für

$$|v_1| \ll |v_0| \quad (2.50)$$

¹⁶Zur Erinnerung: Die ballistische Analyse beinhaltet zwar elastische Stöße, nicht jedoch Fernwirkungen zwischen den Elektronen.

¹⁷Bei der hier vorgestellten Untersuchung handelt es sich um eine *Kleinsignalanalyse*. Diese Einschränkung ist aufgrund der Nichtlinearität der verwendeten Gleichungen – es taucht das Produkt von Raumladungsdichte und Geschwindigkeitsfeld auf – zur Konstruktion einer einfachen Theorie notwendig.

2 Analyse des Bandstrahlklystrons

der Fall, selbst wenn man ein Anwachsen von ρ_1 auf die Größe von ρ_0 zuläßt. Die Amplitude der Geschwindigkeitswelle muß also wesentlich kleiner sein als die Strahlgeschwindigkeit.

Die Raumladung verlangt gemäß $\epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho$ nach einem elektrischen Feld. Mit (2.43) und (2.46) folgt daraus

$$-j\beta\epsilon_0 E_1 e^{j(\omega t - \beta z)} = \rho_0 + \rho_1 e^{j(\omega t - \beta z)}, \quad (2.51)$$

$$E_0 = 0, \quad (2.52)$$

$$E_1 = j \frac{\rho_1}{\beta\epsilon_0}, \quad (2.53)$$

wobei die statische Komponente der elektrischen Feldstärke willkürlich gewählt wurde. Außerdem verlangt (2.51) nach $\rho_0 = 0$; ρ ist jedoch die Elektronendichte, und diese müßte im Mittel verschwinden, was offenbar nicht der Fall sein kann. Diese Inkonsistenz läßt sich im Eindimensionalen auf zwei verschiedene Weisen beheben: Man kann ein statisches elektrisches Feld $E_0 \propto z$ annehmen und damit gleichzeitig dem Effekt der Potentialabsenkung (potential depression) entlang dem Strahl Rechnung tragen; stattdessen kann man jedoch auch eine kompensierende positive Raumladung annehmen. Im ersten Fall gestaltet sich die Analyse sehr kompliziert, weil keine konstante Strahlgeschwindigkeit v_0 mehr angenommen werden kann; schließlich muß diese aus energetischen Gründen mit dem Potential verknüpft sein. Im Gegensatz dazu lassen sich positive Ionen völlig problemlos in die Analyse integrieren, da diese aufgrund ihrer großen Masse für die Hochfrequenz keine Rolle spielen. Es sei also angenommen, daß ruhende positive Ionen gleichmäßig über den Strahl verteilt sind; ihre Raumladungsdichte betrage $\rho_1 = -\rho_0$, so daß die totale Raumladungsdichte im Mittel verschwindet. Dann ist mit den obigen Komponenten der elektrischen Feldstärke die Divergenzgleichung identisch erfüllt.¹⁸

Aus dem Induktionsgesetz

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.54)$$

erhält man nach Bildung der Divergenz mit (2.45) und (2.46)

$$J_1 = -j\omega\epsilon_0 E_1. \quad (2.55)$$

In (2.54) eingesetzt, folgt

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = J_0 \mathbf{e}_z. \quad (2.56)$$

Daraus ist zweierlei zu schlußfolgern: Zum einen kompensiert der Verschiebungsstrom den Hochfrequenzanteil des Konvektionsstroms, so daß keine Hochfrequenzkomponente

¹⁸Die Annahme eines Plasmas mag zunächst als reiner Hilfsgriff erscheinen, ist aber durchaus berechtigt: Selbst bei sehr hohem Vakuum liegt die Dichte der Restmoleküle nur etwa zwei Größenordnungen unterhalb der Elektronendichte; durch Stoßionisation können diese Moleküle elektrisch wirksam werden. Tatsächlich lassen sich einige beobachtete Phänomene nur durch das Vorhandensein positiver Ionen erklären (siehe [20], Kapitel 5 und 7). Eine vollständige Kompensation der Elektronenladung ist allerdings unrealistisch; wäre dies der Fall, erübrigte sich eine Fokussierung des Strahls.

des Magnetfeldes erforderlich ist. Zum anderen wird für die Konsistenz der Rechnung ein statisches transversales Magnetfeld benötigt. Ein solches Feld müßte jedoch proportional zu $\sqrt{x^2 + y^2}$ sein und hat in einer eindimensionalen Rechnung keinen Platz. Es wird daher $\mathbf{H} \equiv \mathbf{0}$ gesetzt. Die damit verbundene Inkonsistenz ist nicht ohne weiteres hebbar; sie betrifft jedoch lediglich die weniger interessanten statischen Komponenten, so daß ihr keine große Bedeutung zukommt.

Schließlich ist die LORENTZsche Kraftgleichung zu erfüllen

$$\dot{\mathbf{p}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.57)$$

welche sich wegen der eingangs getätigten Beschränkungen der Felder zu

$$\dot{v} = \frac{qE}{m_0\gamma^3} \quad (2.58)$$

vereinfacht. Die spezifische Ladung der Ionen kann gegenüber jener der Elektronen vernachlässigt werden, was die Annahme von ruhenden Ionen rechtfertigt. Für die Elektronen mit ihrer großen (relativistischen) spezifischen Ladung

$$\eta = \frac{e}{m_0\gamma_0} \quad (2.59)$$

gilt daher

$$\dot{v} = -\frac{\eta E}{\gamma_0^2}. \quad (2.60)$$

Hier wurde von der Kleinsignalbedingung (2.50) Gebrauch gemacht, derzufolge $\gamma \approx \gamma_0$ gilt. Mit (2.44) und (2.46) folgt daraus

$$jv_1(\omega - \beta v_0)e^{j(\omega t - \beta z)} = -\eta E_1 e^{j(\omega t - \beta z)}/\gamma_0^2, \quad (2.61)$$

$$E_1 = -j \frac{\omega - \beta v_0}{\eta/\gamma_0^2} v_1. \quad (2.62)$$

Dabei wurde die vollständige Ableitung der Phase $\phi = \omega t - \beta z$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \dot{z} = \omega - \beta v \quad (2.63)$$

und erneut die Kleinsignalbedingung (2.50) verwendet.

An dieser Stelle sind nun alle statischen Feldkomponenten bekannt, und mit den Gleichungen (2.49), (2.53), (2.55) und (2.62) besteht das folgende lineare System für die vier unbekanntenen Hochfrequenzkomponenten

$$\begin{pmatrix} v_0 & \rho_0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & j\beta\epsilon_0 \\ 0 & 0 & 1 & j\omega\epsilon_0 \\ 0 & j\gamma_0^2(\omega - \beta v_0)/\eta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ v_1 \\ J_1 \\ E_1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad (2.64)$$

2 Analyse des Bandstrahlklystrons

welches genau dann eine nichttriviale Lösung besitzt, wenn seine Koeffizientendeterminante

$$\Delta = -\frac{\epsilon_0 \gamma_0^2}{\eta} \left((\omega - \beta v_0)^2 + \frac{\rho_0 \eta}{\epsilon_0 \gamma_0^2} \right) \quad (2.65)$$

verschwindet, was offenbar für

$$(\omega - \beta v_0)^2 = \omega_p^2 \quad (2.66)$$

der Fall ist. ω_p bezeichnet die allgemeine (relativistische) *Plasmafrequenz*, welche gemäß

$$\omega_p = \sqrt{\frac{-\rho_0 \eta}{\epsilon_0 \gamma_0^2}} \quad (2.67)$$

definiert ist. Bei gegebenem Strahl (ρ_0, v_0) und gegebener Betriebsfrequenz ω sind die möglichen Wellenzahlen β durch (2.66) bestimmt, welche die beiden Lösungen

$$\beta_{s/f} = \frac{\omega \pm \omega_p}{v_0} \quad (2.68)$$

besitzt.¹⁹ Es sind also stets zwei unabhängige Wellen ausbreitungsfähig, welche sich in der Phasengeschwindigkeit unterscheiden: Eine langsame (Index s, slow) und eine schnelle (Index f, fast) *Raumladungswelle*.²⁰ Der Feldansatz (2.43) bis (2.46) muß daher erweitert werden zu

$$\rho(z, t) = \rho_0 + \rho_s e^{j(\omega t - \beta_s z)} + \rho_f e^{j(\omega t - \beta_f z)}, \quad (2.69)$$

$$v(z, t) = v_0 + v_s e^{j(\omega t - \beta_s z)} + v_f e^{j(\omega t - \beta_f z)}, \quad (2.70)$$

$$J(z, t) = J_0 + J_s e^{j(\omega t - \beta_s z)} + J_f e^{j(\omega t - \beta_f z)}, \quad (2.71)$$

$$E(z, t) = E_0 + E_s e^{j(\omega t - \beta_s z)} + E_f e^{j(\omega t - \beta_f z)}. \quad (2.72)$$

Für den Zusammenhang zwischen den Amplituden erhält man analog zu (2.64)

$$\begin{pmatrix} v_0 & \rho_0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & j\beta_{s/f}\epsilon_0 \\ 0 & 0 & 1 & j\omega\epsilon_0 \\ 0 & j\gamma_0^2(\omega - \beta_{s/f}v_0)/\eta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{s/f} \\ v_{s/f} \\ J_{s/f} \\ E_{s/f} \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad (2.73)$$

¹⁹In der Literatur ([14, 12, 5]) tauchen oft die beiden zusätzliche Werte $\beta = \pm\omega/c_0$ für die Wellenzahl auf und werden als zu Freiraumwellen gehörig identifiziert. Derartige Wellen stellen *keine* Lösung für das eindimensionale Problem dar; sie entstehen durch schematisches Lösen der inhomogenen Wellengleichung für \mathbf{E} und gleichzeitigem Nichtbeachten von $\mathbf{rotrotE} = \mathbf{0}$.

²⁰Wie der Herleitung entnommen werden kann, sind Raumladungswellen *keine* elektromagnetischen Wellen, weil sie ohne magnetisches Feld ausbreitungsfähig sind. Raumladungswellen sind eher mit Schallwellen zu vergleichen; die Funktion des Luftdrucks übernimmt bei ihnen der „Ladungsdruck“ herrührend von den COULOMBSchen Kräften. Konsequenterweise hängen ihre Wellenzahlen auch nicht von irgendeiner Permeabilität ab.

bzw.

$$\rho_{s/f} = \mp \frac{\rho_0}{v_0} \frac{\omega \pm \omega_p}{\omega_p} v_{s/f}, \quad (2.74)$$

$$J_{s/f} = \mp \rho_0 \frac{\omega}{\omega_p} v_{s/f}, \quad (2.75)$$

$$E_{s/f} = \mp \rho_0 \frac{1}{\epsilon_0 \omega_p} v_{s/f}. \quad (2.76)$$

Um bei gegebenen Konstanten ρ_0 , v_0 und ω zu einer eindeutigen Lösung zu gelangen, müssen zwei Feldamplituden bekannt sein, eine für die langsame und eine für die schnelle Raumladungswelle; es sind also zwei skalare Randbedingungen erforderlich. Im Falle des geschwindigkeitsmodulierten Strahls sind diese beiden Randbedingungen durch die Geschehnisse an den Eingangsgittern gegeben:²¹ Zum einen springt die Geschwindigkeit dort von v_0 auf $v_0 + v_0 M_v e^{j\omega t}$ und zum anderen verschwindet dort der Hochfrequenzanteil der Raumladungsdichte.²² Letzteres ergibt sich aus der Tatsache, daß die Elektronenlaufzeit im Bereich der Eingangsgitter im Vergleich zu jener im Driftraum verschwindend gering ist, so daß sich keine bemerkenswerte Dichtemodulation bereits dort einstellen kann. Beginnend mit der zweiten Bedingung

$$\rho(0, t) = \rho_0 \quad (2.77)$$

folgt mit (2.69) sofort

$$\rho_s + \rho_f = 0, \quad (2.78)$$

was mit (2.74) für die Geschwindigkeitsamplituden bedeutet

$$(\omega + \omega_p)v_s - (\omega - \omega_p)v_f = 0. \quad (2.79)$$

Mit der ersten Randbedingung, dem Geschwindigkeitssprung in $z = 0$

$$v(0, t) = v_0(1 + M_v e^{j\omega t}) \quad (2.80)$$

liefert (2.70)

$$v_s + v_f = v_0 M_v. \quad (2.81)$$

Mit der Lösung des linearen Systems (2.79), (2.81) lassen sich alle Amplituden als Vielfache der Geschwindigkeitsmodulation schreiben:

$$\rho_{s/f} = \mp \rho_0 \frac{(\omega + \omega_p)(\omega - \omega_p)}{\omega \omega_p} \frac{M_v}{2}, \quad (2.82)$$

²¹Dies bedeutet gleichzeitig, daß die vorgestellte Analyse keine weiteren Randbedingungen zuläßt, beispielsweise an den Ausgangsgittern.

²²Manchmal wird diese Bedingung durch das Verschwinden des Hochfrequenzanteils der Stromdichte ersetzt, was zwar geringfügig andere Gleichungen zur Folge hat, schließlich jedoch dasselbe Ergebnis liefert.

2 Analyse des Bandstrahlklystrons

$$v_{s/f} = v_0 \frac{\omega \mp \omega_p}{\omega} \frac{M_v}{2}, \quad (2.83)$$

$$J_{s/f} = \mp J_0 \frac{\omega \mp \omega_p}{\omega_p} \frac{M_v}{2}, \quad (2.84)$$

$$E_{s/f} = \mp j \frac{J_0}{\epsilon_0 \omega_p} \frac{\omega \mp \omega_p}{\omega} \frac{M_v}{2}. \quad (2.85)$$

Unter Verwendung der bereits früher verwendeten Wellenzahl des Strahls $k = \omega/v_0$ und der *Plasmawellenzahl*

$$k_p = \omega_p/v_0 \quad (2.86)$$

ergeben sich die interessierenden Felder aus (2.69) bis (2.71) für $z \geq 0$ zu

$$\rho(z, t) = \rho_0 \left[1 + j M_v \frac{(\omega + \omega_p)(\omega - \omega_p)}{\omega \omega_p} \sin k_p z e^{j(\omega t - kz)} \right], \quad (2.87)$$

$$v(z, t) = v_0 \left[1 + M_v (\cos k_p z + j \frac{\omega_p}{\omega} \sin k_p z) e^{j(\omega t - kz)} \right], \quad (2.88)$$

$$J(z, t) = J_0 \left[1 + j M_v \frac{\omega}{\omega_p} (\sin k_p z - j \frac{\omega_p}{\omega} \cos k_p z) e^{j(\omega t - kz)} \right]. \quad (2.89)$$

Mit der für Mikrowellenröhren üblichen Annahme über die Plasmafrequenz, weit unterhalb der Arbeitsfrequenz zu liegen²³

$$\omega_p \ll \omega, \quad (2.90)$$

vereinfachen sich die Felder zu

$$\rho(z, t) = \rho_0 \left(1 + j M_v \frac{\omega}{\omega_p} \sin k_p z e^{j(\omega t - kz)} \right), \quad (2.91)$$

$$v(z, t) = v_0 (1 + M_v \cos k_p z e^{j(\omega t - kz)}), \quad (2.92)$$

$$J(z, t) = J_0 \left(1 + j M_v \frac{\omega}{\omega_p} \sin k_p z e^{j(\omega t - kz)} \right), \quad (2.93)$$

und die verwendete Kleinsignalbedingung (2.50) kann nun als

$$M_v \ll 1 \quad (2.94)$$

geschrieben werden. Der Verlauf dieser Felder ist in Abbildung 2.12 dargestellt. Währenddessen der Hochfrequenzanteil der Geschwindigkeit mit zunehmendem Abstand von den

²³Zwar dient die Forderung nach einer geringen Plasmafrequenz hier lediglich der Vereinfachung der Analyse; für die Fokussierung des Strahls, Abschnitt 2.2.4, ist dies jedoch auch von praktischem Vorteil: Die benötigte Induktion nimmt nämlich proportional mit der Plasmafrequenz ab, Gleichung (2.291).

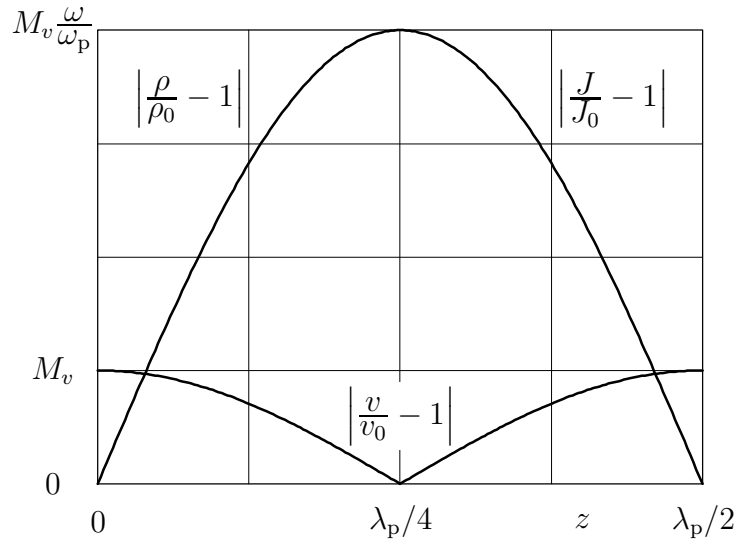


Abbildung 2.12: Amplituden von Geschwindigkeit, Raumladungs- und Stromdichte entlang dem modulierten Elektronenstrahl für $\omega_p = \omega/4$.

Eingangsgittern abnimmt, nehmen die Hochfrequenzanteile von Raumladungs- und Stromdichte wie erwartet zu. Die Extrema liegen bei einem Viertel der Plasmawellenlänge des Strahls, welche gemäß

$$\lambda_p = 2\pi \frac{1}{k_p} = 2\pi \frac{v_0}{\omega_p} \quad (2.95)$$

definiert ist. Strom- und Raumladungsdichte nehmen dort ihr Maximum an, währenddessen die Geschwindigkeitsmodulation verschwindet, d.h. alle Elektronen besitzen wieder ihre ursprüngliche Geschwindigkeit v_0 . Für die gemäß (2.41) definierte *Strommodulation* folgt aus (2.93)

$$M_I = M_v \frac{\omega}{\omega_p} \sin k_p z. \quad (2.96)$$

Unabhängig von der Größe der Geschwindigkeitsmodulation beträgt die optimale Driftlänge stets $l = \lambda_p/4$, so daß man den Ausgangsresonator in diesem Abstand vom Eingangresonator anordnen wird. Liegt nun – wie zuvor gefordert – die Plasmafrequenz weit unterhalb der Arbeitsfrequenz, so läßt sich eine merkbare Strommodulation bereits mit einer sehr geringen Geschwindigkeitsmodulation erreichen. Der bisherigen Theorie zufolge ließen sich sogar Strommodulationen von mehr als 1 erzielen, obwohl diese aus physikalischen Gründen auf 1 beschränkt sein muß: Da – im Gegensatz zur ballistischen Analyse – keine Oberwellen in der Rechnung enthalten sind, würde die Elektronendichte im Falle $M_I > 1$ an einigen Stellen ihr Vorzeichen wechseln, was natürlich nicht möglich ist. Mithin besteht eine zusätzliche Kleinsignalbedingung der Gestalt $M_I \leq 1$ oder

$$M_v \leq \omega_p/\omega. \quad (2.97)$$

Dies bedeutet nicht, daß eine Strommodulation von mehr als 1 technisch nicht realisierbar ist, sondern lediglich, daß die feldtheoretische Kleinsignalanalyse einen solchen Fall nicht

abdeckt. Die eingangs gestellte Forderung nach dem Verschwinden höherer Harmonischer verbietet die Untersuchung großer Strommodulationen.

Abschließend sei auf eine interessante Tatsache hingewiesen: Vergleicht man die Gleichungen (2.91) und (2.93) miteinander, so stellt man fest, daß sich (bei $\omega_p \ll \omega$) an jeder Stelle z die Stromdichte aus der Raumladungsdichte einfach durch Multiplikation mit der Strahlgeschwindigkeit v_0 ergibt. Das bedeutet, daß die Geschwindigkeitswelle für den Hochfrequenzstrom praktisch keine Rolle spielt; sie wird lediglich für die Erregung einer starken Dichtewelle benötigt. Dies berechtigt auch dazu, den Elektronenstrahl als steifes Gebilde zu betrachten; in erster Näherung bewegen sich alle Elektronen mit der Strahlgeschwindigkeit v_0 .

Gemischte Analyse

Unter Verwendung des bereits früher erwähnten *Bündelungsparameters*

$$X_0 = M_v k z \quad (2.98)$$

und des *reduzierten Bündelungsparameters*

$$X = X_0 \frac{\sin k_p z}{k_p z} \quad (2.99)$$

lassen sich die Ergebnisse (2.42) und (2.96) der ballistischen und der feldtheoretischen Analyse wie folgt schreiben

$$M_{I,\text{ball}} = |2J_1(X_0)|, \quad (2.100)$$

$$M_{I,\text{feld}} = |X|. \quad (2.101)$$

Diese Darstellung läßt einen unmittelbaren Vergleich der beiden Analysen zu. Die bei der ballistischen Rechnung vernachlässigte Raumladungswirkung geht über den Reduktionsterm $\sin k_p z / k_p z$ in die Feldrechnung ein; und die Begrenzung der Strommodulation durch das Auftauchen der BESSELFunktion widerspiegelt das Verhalten bei hohen Geschwindigkeitsmodulationen, welche zwar bei der ballistischen, nicht jedoch bei der feldtheoretischen Analyse zulässig sind. Folgerichtig gehen beide Ergebnisse ineinander über, wenn für $kz \in [0, 2\pi]$ einerseits die Geschwindigkeitsmodulation und andererseits die Raumladungsdichte klein gehalten werden: Es ist dann $X_0 \ll 1$ und $X \approx X_0$, so daß sowohl (2.100) als auch (2.101) $M_I \approx X_0$ liefern.

Währenddessen die Forderung nach geringer Geschwindigkeitsmodulation wegen (2.97) fest in der feldtheoretischen Analyse verankert ist, ist dies mit der Forderung nach geringer Raumladungsdichte bei der ballistischen Analyse nicht der Fall. Mit den Erkenntnissen aus dem letzten Abschnitt lassen sich daher Raumladungseffekte in die ballistische Analyse integrieren.²⁴ Dazu nimmt man an, daß sich die Geschwindigkeit der Elektronen

²⁴Dies hatte bereits WEBSTER in seiner legendären Arbeit [46] getan, indem er Raumladungswellen zur Analyse des sogenannten *de-bunching*-Effekts annahm. Da er außerdem Kleinsignalbedingungen voraussetzte, gelangte er lediglich zur Gleichung (2.101), also dem Ergebnis der feldtheoretischen Analyse. Die hier beschriebene Vorgehensweise stammt von HARMAN ([20], Abschnitt 7.5), der damit

entlang ihrer Flugbahn gemäß Abbildung 2.12 ändert. Ein zum Zeitpunkt $t = t_0$ in $z = 0$ gestartetes Elektron besitzt dann die z -abhängige Geschwindigkeit

$$v = v_0 (1 + M_v \cos k_p z \sin \omega t_0). \quad (2.102)$$

Die Laufzeitfunktion $L(z, t)$ ergibt sich durch Integration für nicht zu große Werte von M_v zu

$$\omega L(z, t) = kz - M_v kz \frac{\sin k_p z}{k_p z} \sin \omega t, \quad (2.103)$$

welche sich lediglich durch das Auftreten des Reduktionsfaktors von der die Raumladung vernachlässigenden Version (2.30) unterscheidet. Die laufzeitbasierte Stromberechnung liefert daher

$$M_{I,\text{misch}} = |2J_1(X)|. \quad (2.104)$$

Vergleichende Betrachtungen

Einen guten Einblick in das Wesen der vorgestellten Analysen bieten die in den Abbildungen 2.13 und 2.14 dargestellten *Phasendiagramme*. Sie repräsentieren die Trajektorien einzelner, zu äquidistanten Zeitpunkten in $z = 0$ gestarteter Elektronen. Im Gegensatz zum sogenannten *Applegate diagram* (siehe Abbildung 2.9), in welchem einfach kz über ωt aufgetragen wird, trägt man bei Phasendiagramm $\omega t - kz$ über kz auf und eliminiert damit die ansonsten unvermeidlichen, großen mittleren Anstiege der Kurven: Wegen

$$\frac{d(\omega t - kz)}{dkz} = \frac{d\omega t}{dkz} - 1 = \frac{v_0}{v} - 1 \quad (2.105)$$

besitzt ein sich mit der Strahlgeschwindigkeit v_0 bewegendes Elektron eine konstante Phase und wird daher im Phasendiagramm durch eine horizontal verlaufende Gerade dargestellt. Die Phase von schnelleren Elektronen nimmt ab und jene von langsameren Elektronen nimmt zu – sowohl über kz (siehe Gleichung 2.105) als auch über ωt , denn es gilt analog

$$\frac{d(\omega t - kz)}{d\omega t} = 1 - \frac{dkz}{d\omega t} = 1 - \frac{v}{v_0}. \quad (2.106)$$

Die Phasenfunktion der **ballistischen Analyse** besitzt aufgrund der konstanten Elektronengeschwindigkeiten eine recht einfache Gestalt. Mit der bereits mehrfach verwendeten Näherung $1/(1+x) \approx 1-x$ für kleine x erhält man aus (2.27)

$$\omega t - kz = \omega t_0 - kz M_v \sin \omega t_0; \quad (2.107)$$

seine feldtheoretische Analyse – welche im wesentlichen der in dieser Arbeit vorgestellten entspricht – von der Kleinsignalbedingung $M_v \ll 1$ befreien wollte und sich daher der Methode der laufzeitbasierten Stromberechnung bediente. Wohlgermerkt ist seine Darstellung frei von den Annahmen der ballistischen Analyse! Dies ist einer der Gründe dafür, warum in dieser Arbeit die laufzeitbasierte Stromberechnung unabhängig von der ballistischen Analyse dargestellt wurde.

2 Analyse des Bandstrahlklystrons

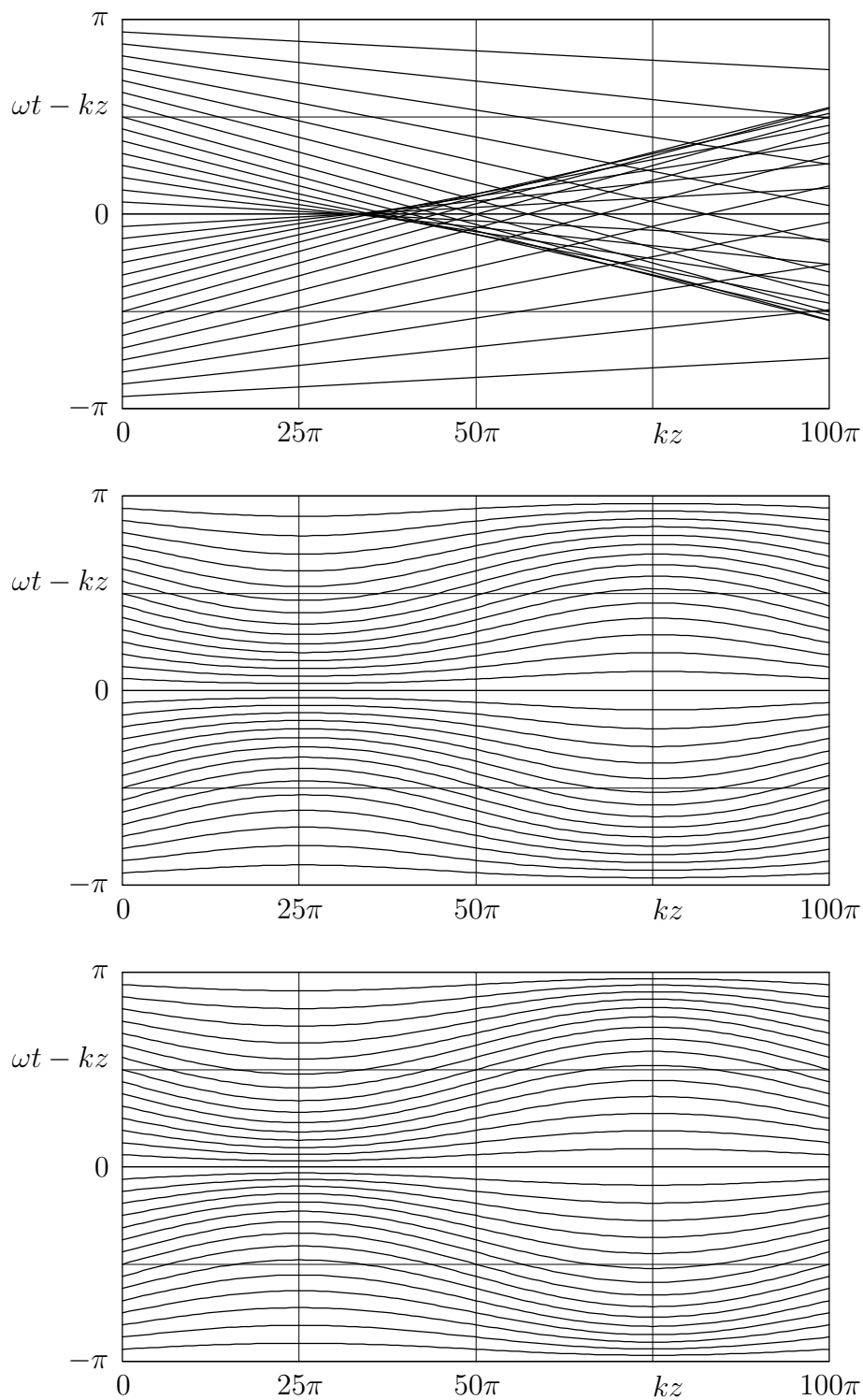


Abbildung 2.13: Phasendiagramme der ballistischen (oben), feldtheoretischen (Mitte) und gemischten Analyse (unten) für $M_v = 0.01$ und $\omega_p/\omega = 0.02$ mit der Startphase ωt_0 als Parameter. Die zugehörigen Gleichungen sind (2.107), (2.109) und (2.112).

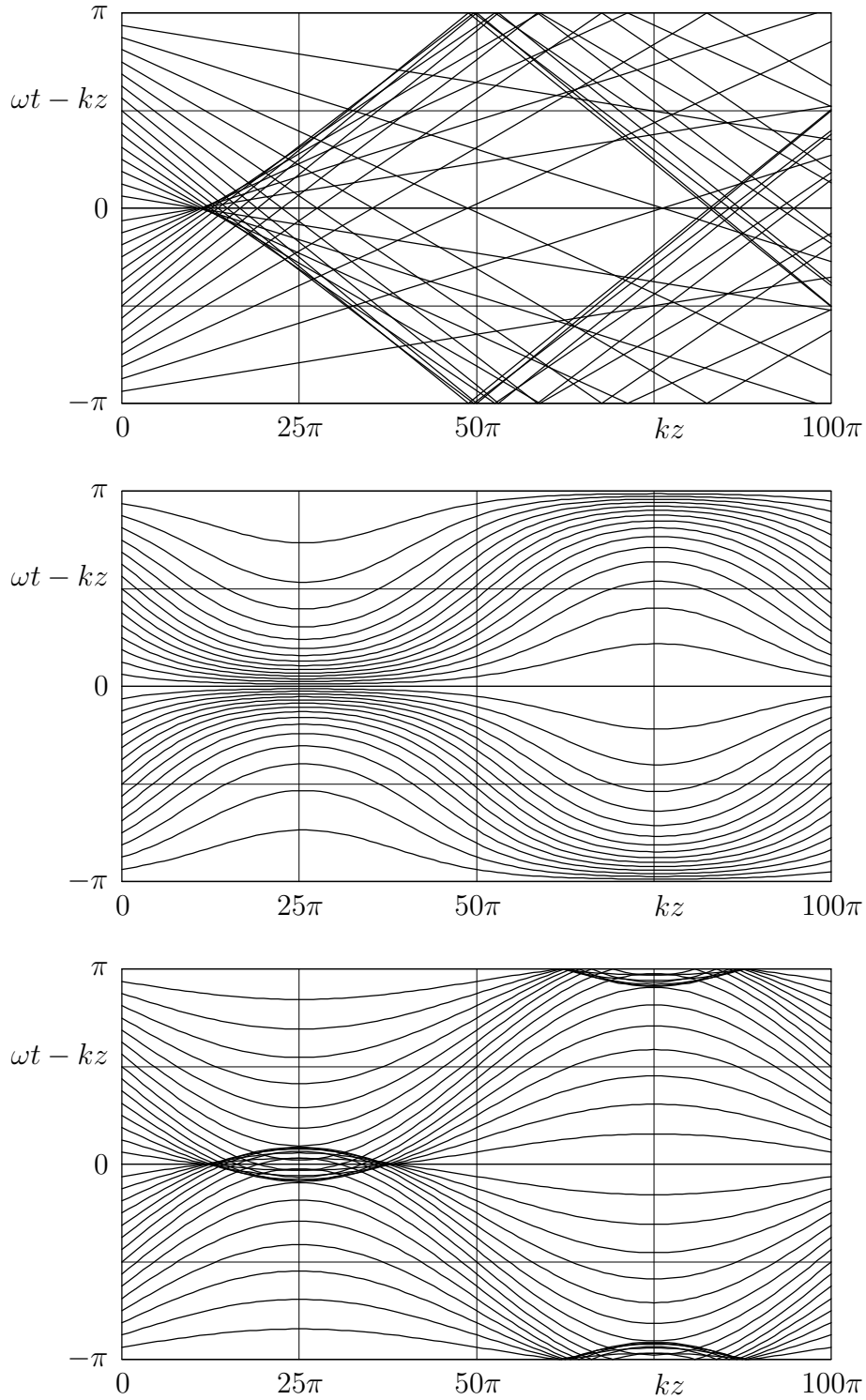


Abbildung 2.14: Phasendiagramme der ballistischen (oben), feldtheoretischen (Mitte) und gemischten Analyse (unten) für $M_v = 0.03$ und $\omega_p/\omega = 0.02$ mit der Startphase ωt_0 als Parameter. Die zugehörigen Gleichungen sind (2.107), (2.109) und (2.112).

t_0 bezeichnet dabei den Zeitpunkt des Startens in $z = 0$. Die Phasenverläufe der ballistischen Analyse sind für zwei verschiedene Geschwindigkeitsmodulationen in den oberen Diagrammen der Abbildungen 2.13 und 2.14 dargestellt. Überholungen sind offenbar unvermeidlich: Selbst für große ωt_0 verschwindet die rechte Seite von (2.107) irgendwann, wählt man kz nur groß genug. Verschwindende Phase bedeutet aber, daß sich die Bahn des zugehörigen Elektrons mit jener kreuzt, die ein zum Zeitpunkt t_0 gestartetes Elektron durchläuft.

Die Berechnung der Phasenfunktion der **feldtheoretischen Analyse** gestaltet sich komplizierter. Ausgehend von Gleichung (2.92) für die Elektronengeschwindigkeit erhält man nach Ersetzen der e-Funktion durch den Sinus zunächst einmal

$$\frac{dkz}{d\omega t} = 1 + M_v \cos k_p z \sin(\omega t - kz). \quad (2.108)$$

Unter Anwendung der obigen Näherung für kleine Geschwindigkeitsmodulationen folgt daraus

$$\frac{d(\omega t - kz)}{dkz} = -M_v \cos k_p z \sin(\omega t - kz), \quad (2.109)$$

so daß man eine nichtlineare explizite Differentialgleichung erster Ordnung zu lösen hat. Der Anfangswert der Phasenfunktion lautet bekanntlich $(\omega t - kz)|_{kz=0} = \omega t_0$. Es existiert daher zu jedem t_0 eine eindeutige Lösung, auch wenn diese nicht in analytischer Form angegeben werden kann. In den mittleren Diagrammen der Abbildungen 2.13 und 2.14 sind die numerisch berechneten Phasenverläufe dargestellt. Für sehr kleine Geschwindigkeitsmodulationen läßt sich allerdings eine Näherungslösung angeben: Die rechte Seite von (2.109) fällt dann sehr klein aus, so daß auch die Phasenänderung minimal wird; die Phase ist also in erster Näherung durch die Startphase ωt_0 gegeben. Dann hat man aber die nicht von der Phase abhängige Differentialgleichung

$$\frac{d(\omega t - kz)}{dkz} \approx -M_v \cos k_p z \sin \omega t_0, \quad (2.110)$$

und eine einfache Integration liefert unter Beachtung des Anfangswertes die Lösung

$$\omega t - kz \approx \omega t_0 - M_v \frac{\omega}{\omega_p} \sin \frac{\omega_p}{\omega} kz \sin \omega t_0. \quad (2.111)$$

Die Phase besitzt also die Periode $2\pi\omega/\omega_p$ in kz und schwingt um ωt_0 mit der Amplitude $M_v(\omega/\omega_p) \sin \omega t_0$. Nun läßt sich auch der Geltungsbereich dieser Näherungslösung angeben: Es ist $M_v\omega/\omega_p \ll 1$ zu fordern, denn für kleine ωt_0 gilt $\sin \omega t_0 \approx \omega t_0$. Ein Vergleich mit der numerischen Lösung zeigt, daß bereits für $M_v \leq \omega_p/\omega$ – die von der feldtheoretischen Analyse bekannte Kleinsignalbedingung (2.97) – eine befriedigende Übereinstimmung gegeben ist. Diese Beschränkung betrifft jedoch lediglich die Näherungslösung der Phasenfunktion. Im allgemeinen kann man sehr wohl $M_v > \omega_p/\omega$ wählen, ohne zu einer großen Geschwindigkeitsmodulation gezwungen zu sein: Bei sehr geringer Raumladungsdichte hat man eine kleine Plasmafrequenz, so daß ω_p/ω sehr geringe Werte annehmen kann. Währenddessen die Näherungslösung für $M_v > \omega_p/\omega$ Überholungen voraussagt, treten diese – in angenehmer Übereinstimmung mit der grundsätzlichen Theorie (siehe Fußnote 12, Seite 12) – tatsächlich nicht auf, siehe Abbildung 2.14 Mitte.

Die Phasenfunktion der **gemischten Analyse** ergibt sich mit der altbekannten Näherung für kleine Geschwindigkeitsmodulationen aus (2.102) zu

$$\omega t - kz = \omega t_0 - M_v \frac{\omega}{\omega_p} \sin \frac{\omega_p}{\omega} kz \sin \omega t_0. \quad (2.112)$$

Dem aufmerksamen Leser wird nicht entgangen sein, daß es sich hierbei gerade um die Näherungslösung für die Phase der feldtheoretischen Analyse handelt. Zwar unterliegt man noch immer der Bedingung einer kleinen Geschwindigkeitsmodulation, jedoch muß diese nicht mehr kleiner als ω_p/ω ausfallen. Dies hat zur Folge, daß Überholungen stattfinden können, und für $M_v > \omega_p/\omega$ treten sie auch tatsächlich auf, siehe Abbildung 2.14 unten. Man kann sich nun fragen, ob es sich bei der gemischten Analyse nicht lediglich um eine schlecht genäherte Feldrechnung handelt. Erinnerung man sich jedoch an die zugrundeliegenden Annahmen – der feldtheoretischen Analyse entstammt lediglich die kosinusförmige Variation der Elektronengeschwindigkeit, ansonsten herrschen ballistische Verhältnisse – ist sie treffender als verbesserte ballistische Rechnung zu bezeichnen. Die Feldrechnung erscheint in diesem Licht als unrealistisch penibel (keine Überholungen zugelassen!). Schließlich wird die Mischanalyse auch durch experimentell gewonnene Daten untermauert, [20].

2.1.4 Ausgangsresonator - Energieauskopplung

Im Ausgangsresonator wird die kinetische Energie der Elektronen in hochfrequente Feldenergie gewandelt; der Elektronenstrahl wird demoduliert. Dieser Vorgang ist – wie auch die Geschwindigkeitsmodulation – der linearen Analyse aufgrund der sich ändernden Elektronengeschwindigkeiten nicht ohne weiteres zugänglich. Um zu einer analytischen Lösung des Problems zu gelangen, bedient man sich des Modells des *steifen Elektronenstrahls* für den verhältnismäßig kurzen Bereich des Ausgangsresonators: Die Positionen der Elektronen zueinander werden als unveränderlich angenommen. Als unmittelbare Konsequenz müssen sich alle Elektronen mit derselben Geschwindigkeit bewegen, welche man sinnvollerweise gleich jener des unmodulierten Strahls und somit als konstant wählt. Auf diese Weise erhält man einen wohldefinierten eingepprägten Strom für die Berechnung des angelegten Hochfrequenzfeldes. Mit Bekanntsein des Feldes kann – analog zur Modulation – der zunächst unbeachtete Energieverlust der Elektronen im Nachhinein aus der von ihnen durchlaufenen Spannung berechnet werden.

Die zu studierende eindimensionale Anordnung ist in Abbildung 2.15 dargestellt und aus der Gesamtanordnung Abbildung 2.1 abgeleitet. Im ersten Schritt wird das Klemmenverhalten an den Gittern ohne äußere Beschaltung untersucht; im zweiten Schritt erfolgt deren Beschaltung und die Analyse der Gesamtschaltung.

Klemmenverhalten ohne äußere Beschaltung

Betrachten wir zunächst einmal eine dünne Scheibe des Elektronenstrahls, welche sich – möglicherweise ungleichförmig – vom linken zum rechten Ausgangsgitter bewegt. Innerhalb der Scheibe sei die Raumladungsdichte ρ konstant, und ihre Dicke d sei klein im Vergleich zum Abstand g der Gitter, so daß sie durch eine Flächenladung $\sigma_p = \rho d$

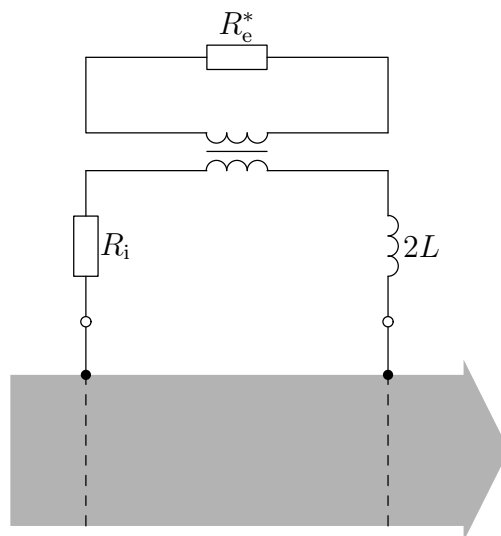


Abbildung 2.15: Eindimensionale Energieauskopplung. Anordnung zur Umwandlung der kinetischen Strahlleistung in elektrische Leistung.

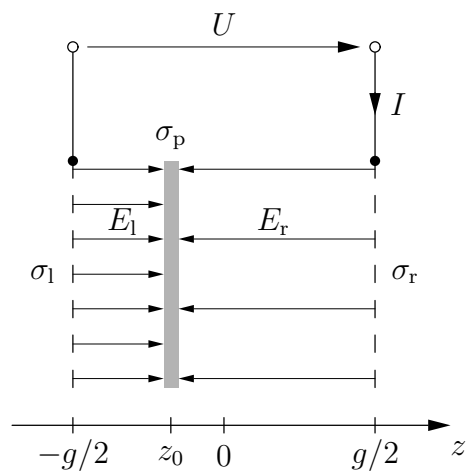


Abbildung 2.16: Eindimensionale Energieauskopplung. Influenzierung eines Klemmenstroms durch eine sich bewegende Flächenladung.

repräsentiert werden kann, Abbildung 2.16. Diese Ladungsscheibe influenziert auf den Gittern die Ladungsdichten σ_1 und σ_r , und die MAXWELLSchen Gleichungen verlangen

$$\sigma_1 = \epsilon_0 E_1 \quad (2.113)$$

$$\sigma_r = \epsilon_0 E_r \quad (2.114)$$

$$-\sigma_p = \epsilon_0(E_1 + E_r) = \sigma_1 + \sigma_r. \quad (2.115)$$

Für die am Gitter und somit an den Klemmen abfallende Spannung gilt

$$U = E_1(g/2 + z_0) - E_r(g/2 - z_0), \quad (2.116)$$

und für die Ladungsdichte auf dem rechten Gitter folgt

$$\sigma_r = -\frac{\epsilon_0 U + \sigma_p(g/2 + z_0)}{g}. \quad (2.117)$$

Offenbar ist diese Ladungsdichte von der Position z_0 der Ladungsscheibe abhängig und damit zeitlich veränderlich, was nur durch einen Klemmenstrom $I = A\dot{\sigma}_r = -A\dot{\sigma}_1$ erklärbar ist, worin A den zugrundegelegten Querschnitt der Anordnung bezeichnet

$$I = -\frac{\epsilon_0 A}{g} \dot{U} - \frac{1}{g} \sigma_p A \dot{z}_0. \quad (2.118)$$

Der Klemmenstrom setzt sich also aus zwei Teilströmen zusammen: Dem Ladestrom des durch die beiden Gitter gebildeten Plattenkondensators mit der Kapazität $C = \epsilon_0 A/g$ aufgrund einer Änderung der Klemmenspannung und einem Influenzstrom aufgrund der sich zwischen den Gittern mit der Geschwindigkeit $v = \dot{z}_0$ bewegenden Ladung $q = \sigma_p A$. Gleichung (2.118) läßt sich auch in der Form

$$I = -C\dot{U} - \frac{1}{g} qv \quad (2.119)$$

schreiben.²⁵ Da die Bewegung der Ladung nicht als gleichförmig vorausgesetzt wurde, gelten diese Gleichungen auch für zeitlich veränderliche und von der Klemmenspannung abhängige Geschwindigkeiten. Zu einer von Ladung und Geschwindigkeit befreiten Darstellung gelangt man unter Verwendung des Strahlstroms $I_s(z, t)$, welcher als der zum Zeitpunkt t durch die Ebene z fließende Konvektionsstrom definiert ist. Im bisher betrachteten Fall der homogenen Plattenladung beträgt dieser $I_p = \rho A v = qv/d$ innerhalb der Ladung – also im Bereich $z \in [z_0 - d/2, z_0 + d/2]$ – und verschwindet sonst überall, Abbildung 2.17. Integriert man den Strahlstrom über den Bereich zwischen den Gittern,

²⁵Im Abschnitt A.5 wird gezeigt, daß für eine sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegenden Punktladung q bei beliebig geformten Elektroden für den Influenzstrom gilt $I = C\dot{U} + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}/U$. Dabei bezeichnet \mathbf{E} das allein durch die Elektrodenspannung U hervorgerufene elektrische Feld am Ort der Punktladung. Das von der Elektrodenspannung unabhängige normierte Feld \mathbf{E}/U bezeichnet man auch als Feldformfaktor. Fällt er mit der Bewegungsrichtung der Ladung zusammen, genügt es, seinen Betrag zu betrachten. Im ebenen Falle beträgt dieser gerade $1/g$.

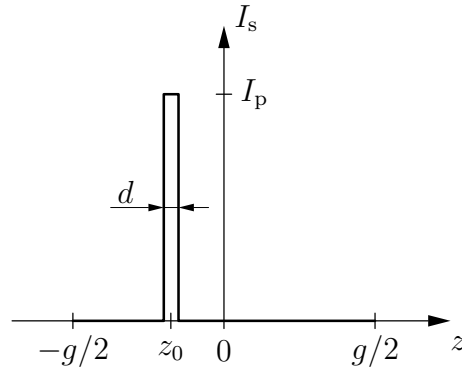


Abbildung 2.17: Eindimensionale Energieauskopplung. Durch eine sich bewegende plattenförmige Ladung homogener Dichte definierter Strahlstrom zu einem bestimmten Zeitpunkt.

erhält man gerade qv . Definiert man weiterhin den örtlichen Mittelwert des Strahlstroms gemäß

$$\bar{I}_s(t) = \frac{1}{g} \int_{-g/2}^{g/2} I_s(z, t) dz, \quad (2.120)$$

so läßt sich (2.119) auch einfach schreiben als

$$I = -C\dot{U} - \bar{I}_s. \quad (2.121)$$

Obwohl die letzte Gleichung vom Aussehen her Allgemeingültigkeit beansprucht, wurde sie bisher nur für eine einzelne Plattenladung hergeleitet. Allerdings wird im Anhang, Abschnitt A.5, gezeigt, daß sich der bei mehreren bewegten Ladungen einstellende Influenzstrom in der Tat aus der Überlagerung der Teilströme ergibt. Damit ist auch im allgemeinen Fall der Influenzstrom betragsmäßig gleich dem über den Resonatorbereich gemittelten Strahlstrom, wobei das Vorzeichen im Sinne der Stromkontinuität zu wählen ist, und Gleichung (2.121) ist allgemein gültig.

Zur weiteren Auswertung wird nun das eingangs erwähnte Modell des steifen Strahls verwendet. Da sich alle Elektronen mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 in z -Richtung bewegen, ist einerseits der Strahlstrom bereits durch den Verlauf der Raumladungsdichte gegeben, und andererseits ist diese für alle Zeiten bekannt, wenn sie nur für einen bestimmten Zeitpunkt bekannt ist: Bezeichnet $\rho_0(z)$ ihren Verlauf zum Zeitpunkt $t = t_0$, dann gilt $\rho(z, t) = \rho_0[z - v_0(t - t_0)]$. Die Raumladungsdichte ist folglich eine sich mit der Phasengeschwindigkeit v_0 in z -Richtung ausbreitende Welle. Da ihre Anregung im Eingangsresonator periodisch mit der Kreisfrequenz ω erfolgt ist, muß sie in der Zeit – und damit auch im Ort – periodisch sein. Mit der Wellenzahl des Strahls $k = \omega/v_0$ folgt daraus eine Periodizität von 2π in $\omega t - kz$, so daß der Strahlstrom schließlich als Summe von Kosinusfunktionen bzw. komplex als

$$I_s(z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} I_{s,i} e^{jiv_i} e^{j\omega t} e^{-jikz} \quad (2.122)$$

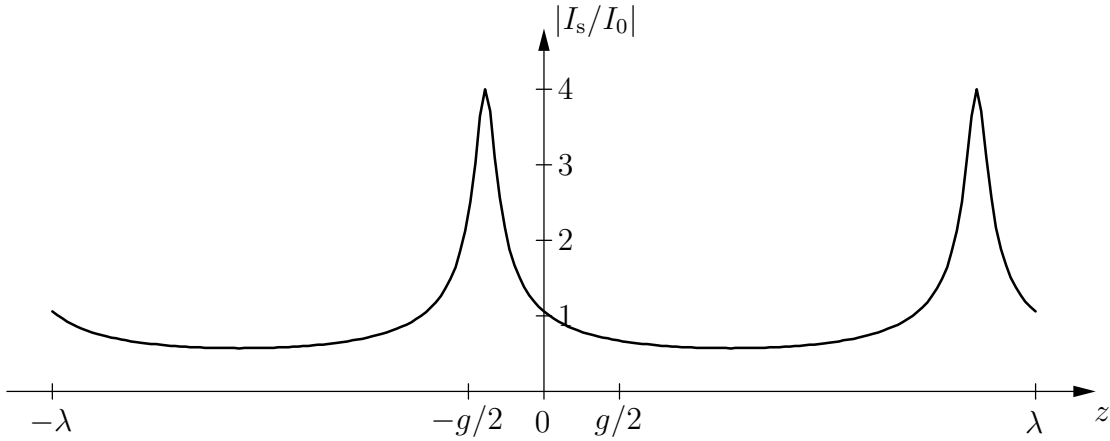


Abbildung 2.18: Aus der ballistischen Analyse ($kzM_v = 3/4$) und dem Modell des steifen Strahls gewonnener Strahlstrom zu einem gewissen Zeitpunkt.

dargestellt werden kann. Analog läßt sich die Wellendarstellung des Strahlstroms gewinnen, wenn er nur an einem Ort, dafür aber für alle Zeiten bekannt ist.

Zur Veranschaulichung dieser Zusammenhänge ist in Abbildung 2.18 das Stromprofil eines realistischen dichtemodulierten Elektronenstrahls dargestellt, welches aus der ballistischen Analyse stammt. Die Parameter dieses Stroms gemäß (2.122) lauten $I_{s,0} = -I_0$, $I_{s,i} = -2I_0J_i(i3/4)$ und $\psi_i = 3/4$.

Die Darstellung des Strahlstroms läßt sich weiter vereinfachen, wenn man bereits an dieser Stelle berücksichtigt, daß die Energieauskopplung mittels einer stark resonanten Anordnung erfolgen wird. Um eine hohe, die Elektronen abbremsende Feldstärke zu erhalten, muß die Resonanzfrequenz der Auskoppelinrichtung sehr dicht bei einer der im Strahl „enthaltenen“ Frequenzen $i\omega$ liegen. Im allgemeinen wird keine Frequenzvervielfachung gewünscht, so daß die Auskoppelinrichtung bei ω ihre Resonanz haben wird. Eine hohe Güte vorausgesetzt, sind damit nur noch die ersten beiden Glieder der Reihe aus (2.122) interessant. Bei Vernachlässigung der Phase – diese kann bei Bedarf im Nachhinein wieder eingebracht werden – hat man daher als allgemeine Darstellung des Strahlstroms

$$I_s(z, t) = -I_0 (1 + M_I e^{j(\omega t - kz)}), \quad (2.123)$$

worin I_0 den – der Konvention folgend – positiven Strahlgleichstrom und $M_I \in [0, 2]$ die positive und reelle Strommodulation bezeichnet.²⁶ Wie auch bisher wird der Strahlstrom positiv in z -Richtung gezählt. Für seinen örtlichen Mittelwert innerhalb des Gitterpaares erhält man gemäß Gleichung (2.120)

$$\bar{I}_s(t) = -I_0 (1 + MM_I e^{j\omega t}) \quad (2.124)$$

mit dem bereits von der Analyse der Geschwindigkeitsmodulation bekannten Strahl-Resonator-Kopplungskoeffizienten

$$M = \frac{\sin kg/2}{kg/2}. \quad (2.125)$$

²⁶Wegen der oberen Grenze der Modulation siehe Anhang A.4.

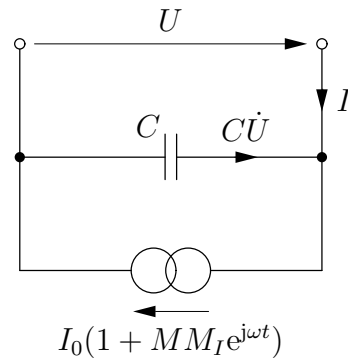


Abbildung 2.19: Ersatzschaltung für die Anordnung bestehend aus moduliertem Elektronenstrahl und Gitterpaar.

Mit der Gleichung für den Klemmenstrom (2.121) ist damit das Klemmenverhalten der Anordnung aus Abbildung 2.15 ohne äußere Beschaltung bekannt: Bei gegebenem Gitter und Strahl gilt für den Zusammenhang zwischen Klemmenspannung und Klemmenstrom

$$I = -C\dot{U} + I_0 (1 + MM_I e^{j\omega t}), \quad (2.126)$$

woraus sich die in Abbildung 2.19 dargestellte Ersatzschaltung ergibt.

Verhalten der Gesamtschaltung

Die äußere Beschaltung des Gitterpaares soll nun derart erfolgen, daß die an eine ohmsche Last abgegebene HF-Leistung so groß wie möglich wird. Da bei galvanischer Ankopplung der Last keine Anpassung des Lastwiderstandes an den Strahl möglich ist, empfiehlt sich eine Transformatorkopplung. Außerdem sollte sie resonant ausgelegt sein, um einerseits den Strahl maximal belasten und andererseits die stets im Strahl vorhandenen und bei normalem Betrieb nicht zu vernachlässigenden höheren Harmonischen von der Last weitgehend fernhalten zu können. Damit ergibt sich die in Abbildung 2.20 dargestellte Ersatzschaltung. Der Widerstand R_i repräsentiert die Verluste im Primärkreis, also im wesentlichen die Kupferwiderstände der beiden Spulen, weshalb er mit diesen in Reihe geschaltet ist, und R_e^* stellt die eigentliche Last dar.

Die Analyse vereinfachte sich weiter, wenn man sich auf die Hochfrequenzanteile der Ströme und Spannungen beschränken könnte. Momentan enthält die Rechnung jedoch noch den Strahlgleichstrom I_0 , welcher eine eventuell nicht vernachlässigbar geringe Verlustleistung in den realen Spulen – in der Ersatzschaltung also in R_i – hervorruft. Zur Klärung der Bedeutung dieses Gleichstromes betrachte man noch einmal das gesamte Klystron aus Abbildung 2.1 und stelle dieselben Überlegungen bezüglich des influenziereten Stroms für das Elektrodenpaar zweites Ausgangsgitter und Kollektor an. Offenbar muß der Gleichstrom einerseits von außen auf den Kollektor fließen, und zum anderen muß er vom zweiten Ausgangsgitter nach außen fließen. Die bisherige Rechnung ergab aber, daß derselbe Gleichstrom von außen auf das Gitter fließt, siehe Abbildung 2.16. In der Summe passiert folglich *kein* Gleichstrom die Klemme des zweiten Ausgangsgitters. Das ist auch einleuchtend, denn pro Periode fliegen dieselbe Anzahl von Elektronen

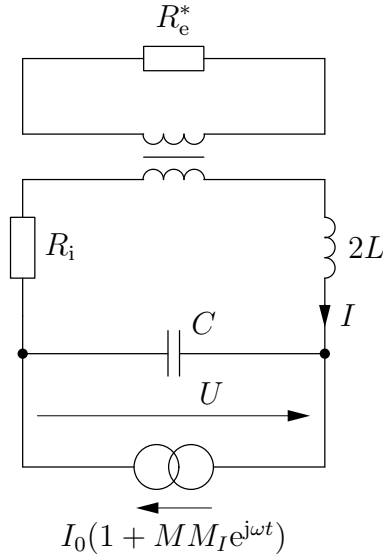


Abbildung 2.20: Ersatzschaltung für die resonante transformatorgekoppelte Auskoppelinrichtung aus Abbildung 2.15.

auf das Gitter zu, wie auch von ihm weg. Analoge Überlegungen für alle anderen Gitter liefern dasselbe Ergebnis. Die einzigen Klemmen, die tatsächlich einen Gleichstrom – nämlich I_0 – führen, sind jene von Kathode und Kollektor.²⁷ Damit gibt es keinen Grund, den Strahlgleichstrom tatsächlich durch die Primärkreise fließen zu lassen, wie es bei einer Beschaltung gemäß Abbildung 2.1 der Fall wäre. Mit der Konsequenz, daß die statischen Potentiale der Gitter durch den Strahl bestimmt wären, könnte man den Kollektor direkt mit der Spannungsquelle verbinden, und die Primärkreise wären gleichstromfrei.²⁸

Der Strahlgleichstrom kann also ohne Bedenken in der weiteren Rechnung ignoriert werden. Dies hat gleichzeitig die angenehme Konsequenz, daß der eigentliche Lastwiderstand R_e^* einfach in den Primärkreis transformiert werden kann. Unter der Annahme eines idealen Transformators mit dem Übertragungsverhältnis μ erscheint er dort ebenfalls als ohmscher Widerstand $R_e = \mu^2 R_e^*$, und man erhält die in Abbildung 2.21 dargestellte Ersatzschaltung. Diese sei nun vor allem hinsichtlich der umgesetzten Leistungen untersucht.

Da die hier durchgeführte eindimensionale Analyse als Näherung für den dreidimensionalen Fall dienen soll, ist es sinnvoll, schnell von den konzentrierten Elementen Widerstand, Induktivität und Kapazität wegzukommen und stattdessen die in der Mikrowellentechnik gebräuchlichen Größen Resonanzfrequenz, Güte und Shuntwiderstand zu verwenden. Zu diesem Zweck wird die Differentialgleichung für den Klemmenstrom I aus Abbildung 2.21

$$\ddot{I} + \frac{R}{2L}\dot{I} + \frac{1}{2LC}I = \frac{1}{2LC}MM_I I_0 e^{j\omega t} \quad (2.127)$$

²⁷Dies gilt natürlich nur unter der eingangs getätigten Annahme, daß keine Elektronen von den Gittern eingefangen werden.

²⁸In der Praxis stellt sich das Problem des Gleichstroms ohnehin in anderer Weise, da die Sektion Eingangresonator, Driftraum, Ausgangsresonator üblicherweise aus einem Stück Kupfer gebaut wird.

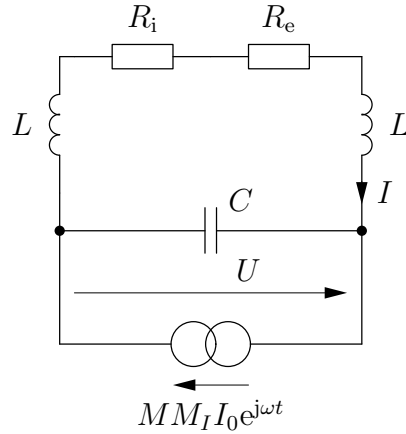


Abbildung 2.21: Hochfrequenzersatzschaltung für die resonante Auskoppelinrichtung. Der Lastwiderstand wurde in den Primärkreis transformiert.

mit der allgemeinen Form der Schwingungsdifferentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 y \quad (2.128)$$

verglichen, und man erhält für die Dämpfung δ , die Resonanzfrequenz ω_0 und die Güte Q

$$2\delta = \frac{R}{2L} \quad (2.129)$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{2LC} \quad (2.130)$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta}. \quad (2.131)$$

Hier wurde $R = R_i + R_e$ gesetzt, weshalb δ und Q die *belastete* Dämpfung bzw. Güte des Kreises angeben. Betrachtet man – wie in der Mikrowellentechnik üblich – die *internen* Größen δ_i , Q_i (externe Last verschwindet, $R_e = 0$) und die *externen* Größen δ_e , Q_e (interne Last verschwindet, $R_i = 0$), so gilt für diese

$$2\delta_i = \frac{R_i}{2L} \quad 2\delta_e = \frac{R_e}{2L} \quad (2.132)$$

$$Q_i = \frac{\omega_0}{2\delta_i} \quad Q_e = \frac{\omega_0}{2\delta_e} \quad (2.133)$$

mit den leicht zu verifizierenden Zusammenhängen

$$\delta = \delta_i + \delta_e \quad (2.134)$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_i} + \frac{1}{Q_e} \quad (2.135)$$

$$RQ = R_i Q_i = R_e Q_e. \quad (2.136)$$

Für die Amplituden der Klemmengrößen $I = \hat{I}e^{j\omega t}$ und $U = \hat{U}e^{j\omega t}$ erhält man bei Verwendung der Verstimmung $V = \omega/\omega_0 - \omega_0/\omega$

$$\hat{I} = -jQ \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{1+jQV} MM_I I_0 \quad (2.137)$$

$$\hat{U} = \left(Q^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{1}{1+jQV} - jQ \frac{\omega_0}{\omega} \right) RMM_I I_0 \quad (2.138)$$

und bei Resonanz mit $\omega = \omega_0$ (also $V = 0$) – dies wird im folgenden stets vorausgesetzt –

$$\hat{I} = -jQMM_I I_0 \quad (2.139)$$

$$\hat{U} = (Q^2 - jQ)RMM_I I_0, \quad (2.140)$$

woraus für die vom Strahl gelieferte und in der Last umgesetzte zeitlich gemittelte Wirkleistung folgt

$$P = \frac{Q^2 M^2 R}{2} (M_I I_0)^2. \quad (2.141)$$

Für die interne und die externe Leistung gilt

$$P_i = \frac{Q^2 M^2 R_i}{2} (M_I I_0)^2 \quad P_e = \frac{Q^2 M^2 R_e}{2} (M_I I_0)^2. \quad (2.142)$$

Von den konzentrierten Elementen sind noch immer die Widerstände in der Rechnung verblieben, welche nun durch die allgemeineren *Shuntwiderstände* ersetzt werden sollen. Der (belastete) Shuntwiderstand eines Resonators ist definiert als

$$R_{\text{sh}} = \frac{|\hat{U}_r|^2}{2P}, \quad (2.143)$$

worin P die gesamte im Resonator umgesetzte Wirkleistung und \hat{U}_r die Amplitude der wie folgt definierten *Resonatorspannung* bezeichnen.²⁹ Man wähle einen geradlinigen Pfad durch den Resonator, der parallel zu (einer) seiner Symmetrieachse(n) verläuft und prinzipiell als Trajektorie eines Strahlelektrons in Frage kommt. Ein sich mit der Strahlgeschwindigkeit v_0 auf diesem Pfad bewegendes Probeteilchen möge das gesamte Eigenfeld des Resonators durchqueren. Die dabei von ihm durchlaufene Spannung ist die Resonatorspannung U_r . Im hier betrachteten Fall erfüllt die z -Achse die an den Pfad gestellten Forderungen, und das Probeteilchen möge sich zum Zeitpunkt $t = t_0$ in $z = 0$ befinden, also in der Mitte zwischen den Gittern, so daß seine Trajektorie durch $z = v_0(t - t_0)$ gegeben ist. Das Resonatorfeld ergibt sich aus der Klemmenspannung U und dem Gitterabstand g zu

$$E = \frac{\hat{U}}{g} e^{j\omega t}, \quad (2.144)$$

²⁹In der Literatur findet man unterschiedliche Definitionen des Shuntwiderstandes bzw. der Shuntimpedanz. Im Anhang A.6 wird die hier verwendete diskutiert und alternativen Varianten gegenübergestellt.

2 Analyse des Bandstrahlklystrons

so daß sich für die vom Probeteilchen durchlaufene Spannung

$$U_r = \frac{\hat{U}}{g} e^{j\omega t_0} \int_{-g/2}^{g/2} e^{j\omega z/v_0} dz \quad (2.145)$$

ergibt. Die Amplitude dieser Schwingung beträgt

$$\hat{U}_r = M\hat{U}, \quad (2.146)$$

ist also gleich der mit dem Strahl-Resonator-Kopplungskoeffizienten reduzierten Klemmenspannung und kann unter Beachtung von (2.140) und $Q \gg 1$ als

$$\hat{U}_r = Q^2 M^2 R M_I I_0 \quad (2.147)$$

dargestellt werden. Damit folgt für den Shuntwiderstand

$$R_{sh} = Q^2 M^2 R, \quad (2.148)$$

und für Resonatorspannung und umgesetzte Leistung erhält man die einfachen Ausdrücke

$$\hat{U}_r = R_{sh} M_I I_0, \quad (2.149)$$

$$P = \frac{R_{sh}}{2} (M_I I_0)^2. \quad (2.150)$$

Den internen und den externen Shuntwiderstand definiert man analog zu (2.143) als

$$R_{shi} = \frac{|\hat{U}_r|^2}{2P_i} \quad R_{she} = \frac{|\hat{U}_r|^2}{2P_e}, \quad (2.151)$$

woraus mit (2.136) folgt

$$R_{shi} = Q_i^2 M^2 R_i \quad R_{she} = Q_e^2 M^2 R_e, \quad (2.152)$$

und es gelten die Zusammenhänge

$$\frac{1}{R_{sh}} = \frac{1}{R_{shi}} + \frac{1}{R_{she}} \quad (2.153)$$

$$\frac{R_{sh}}{Q} = \frac{R_{shi}}{Q_i} = \frac{R_{she}}{Q_e}. \quad (2.154)$$

Für die Leistungen folgt aus (2.142) mit (2.136)

$$P_i = \frac{P}{1 + Q_i/Q_e} \quad P_e = \frac{P}{1 + Q_e/Q_i}. \quad (2.155)$$

Es sei darauf hingewiesen, daß sich die internen und externen Shuntwiderstände nicht – wie ein erster Blick auf (2.152) nahelegt – proportional sondern umgekehrt proportional zu den

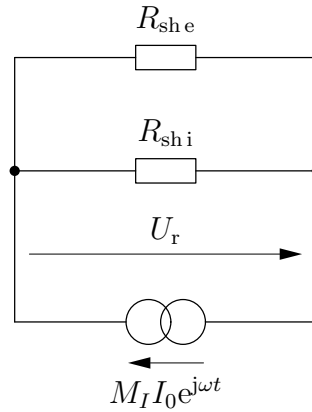


Abbildung 2.22: Ersatzschaltung für einen strahlstromgetriebenen belasteten Ausgangsresonator hoher Güte bei Resonanz.

entsprechenden konzentrierten Widerständen verhalten, denn es gilt $Q_{i/e} = 2L\omega_0/R_{i/e}$. Eine verschwindende externe Last wird daher durch $R_e = 0$ oder $R_{sh e} \rightarrow \infty$ repräsentiert.

Damit ergibt sich eine in ihrer Einfachheit wohl unschlagbare Ersatzschaltung für den Ausgangskreis bei Resonanz, Abbildung 2.22. Der von der Stromquelle gelieferte Strom ist nun nichtmehr laufzeitreduziert; es handelt sich genau um die Grundwelle des modulierten Strahls. Genauso ist die über der Stromquelle abfallende Spannung die vom Strahl durchlaufene und nichtmehr die Klemmenspannung, wie es in den vorherigen Ersatzschaltbildern der Fall war. Die Strahl-Resonator-Kopplungskoeffizienten von Strom und Spannung stecken vollständig in den Shuntwiderständen. Mithin sind diese im Gegensatz zu den konzentrierten Widerständen Parameter von Resonator *und* Strahl, nicht mehr nur vom Resonator allein.³⁰ Der belastete Shuntwiderstand ist der Widerstand, der dem Strahl von Resonator und Last entgegengesetzt wird, gewissermaßen die Last des Strahls. Ist der Laufwinkel der Elektronen im Resonator klein, so ist der dem Strahl entgegengesetzte Widerstand groß. Bei Laufwinkeln von mehr als 360° wird der Widerstand vernachlässigbar gering.

Die bisherige Analyse ist aufgrund der allgemeingehaltenen Strahlstromverteilungen wenig eingängig. Besser vorstellbar hingegen sind die Vorgänge im Falle eines optimal gebündelten Elektronenstrahls, welcher im folgenden diskutiert werden und der Verifikation dienen soll. Wird die gesamte sich in einem Strahlabschnitt der Periodenlänge $\lambda = v_0 T$ befindende Ladung $q = -I_0 T$ auf einen kleinen Bereich $d \ll \lambda$ gleichmäßig zusammengedrängt, so hat man den eingangs behandelten Fall der Plattenladung, siehe Abbildung 2.17, Seite 36 – nun jedoch in periodischer Form. Aufgrund der pro Periodenlänge erhaltenen Ladung beträgt der Strahlstrom $I_p = qv_0/d = -I_0\lambda/d$ innerhalb einer Platte und verschwindet in den Zwischenräumen. Die Aufenthaltszeit einer Ladungsplatte im Bereich

³⁰ Mit Hinblick auf die allgemeineren Betrachtungen zum Shuntwiderstand im Abschnitt A.6 ist dies folgendermaßen zu verstehen: Der Shuntwiderstand ist und bleibt im strengen Sinne unabhängig vom Strahl; allerdings ist er wegen (2.145) von der „Integrationsgeschwindigkeit“ abhängig. Wählt man diese gleich der Strahlgeschwindigkeit, wie es in dieser Arbeit fast durchweg geschieht, so wird er natürlich strahlabhängig. Diese Wahl ist deshalb sinnvoll, weil anderenfalls zwischen Resonator- und Strahlparametern unterschieden werden müßte.

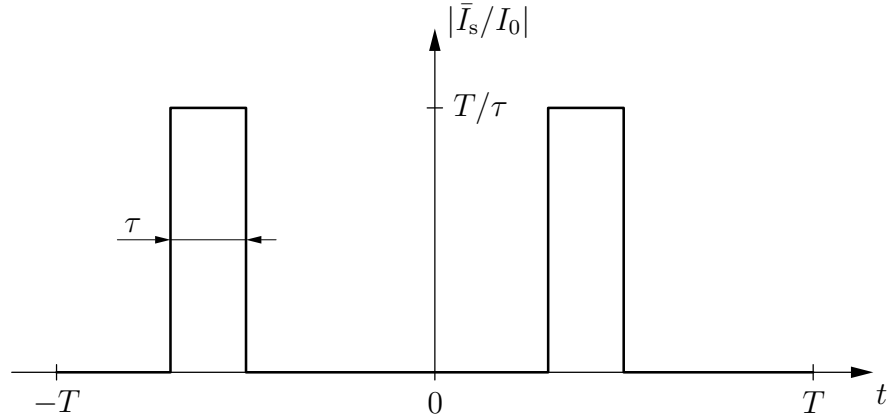


Abbildung 2.23: Influenz- bzw. örtlich gemittelter Strahlstrom eines optimal modulierten steifen Elektronenstrahls.

zwischen den Gittern (Laufzeit) beträgt $\tau = g/v_0$. Während dieser Zeit hat man einen Influenzstrom von $qv_0/g = -I_0\lambda/g = -I_0T/\tau$ (siehe Gleichung (2.119)), währenddessen er in der verbleibenden Zeitspanne $T - \tau$ verschwindet, Abbildung 2.23. Bei Vernachlässigung der Phase erhält man für diesen Strom mittels FOURIER-Entwicklung

$$\bar{I}_s = -I_0 \left(1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin ikg/2}{ikg/2} e^{j\omega t} \right), \quad (2.156)$$

worin $k = 2\pi/\lambda$ wie bisher die Wellenzahl des modulierten Strahls bezeichnet. Werden aus den bereits bekannten Gründen die höheren Harmonischen vernachlässigt, gilt für den Klemmenstrom also

$$I = -C\dot{U} + I_0(1 + 2Me^{j\omega t}). \quad (2.157)$$

Dies ist aber gerade Gleichung (2.126) für $M_I = 2$. Dann muß bei derselben äußeren Beschaltung der Gitter das Ergebnis der allgemeinen Schaltungsanalyse gelten, d.h. für hohe Güten und Anregung auf der Resonanzfrequenz gilt für die Klemmenspannung gemäß Gleichung (2.140)

$$\hat{U} = 2Q^2 R M I_0. \quad (2.158)$$

Die Phase des elektrischen Feldes zwischen den Gittern wird sich bei Resonanz derart einstellen, daß jeder Ladung die maximale Energie entzogen wird. Dies war auch das Ergebnis der früheren Rechnung; die Klemmenspannung besaß bei Resonanz dieselbe Phase wie die Grundwelle des Strahlstroms. Mithin durchläuft jede Ladungsplatte die mit dem Strahl-Resonator-Kopplungskoeffizienten reduzierte Klemmenspannung

$$U_d = M\hat{U}. \quad (2.159)$$

Die jeder Ladungsplatte entzogene kinetische Energie beträgt folglich $-qU_d = I_0U_dT$, und die vom Strahl gelieferte mittlere Leistung I_0U_d ,

$$P = 2Q^2 R (M I_0)^2. \quad (2.160)$$

Wie es sein muß, ergibt sich dieselbe vom Strahl gelieferte, in der ohmschen Last umgesetzte Leistung wie bei der früheren Rechnung. Würde die Grundwelle des Strahlstroms direkt durch einen Widerstand R_d fließen, so würde er die Leistung $(2I_0)^2 R_d / 2$ umsetzen. Man kann also einen virtuellen Resonatorwiderstand mit der bekannten Leistung aus (2.160) gemäß $P = (2I_0)^2 R_d / 2$ definieren und ihn *Shuntwiderstand* taufen. Für diesen gilt dann

$$R_{\text{sh}} = R_d = Q^2 M^2 R, \quad (2.161)$$

womit diese Definition der ehemaligen äquivalent ist, siehe Gleichung (2.148) und Fußnote auf Seite 43. Daß der Strahl-Resonator-Kopplungskoeffizient quadratisch in die vom Strahl gelieferte Leistung und damit auch quadratisch in den Shuntwiderstand eingeht, liegt daran, daß sowohl der Strahlstrom als auch die Klemmenspannung bei der Analyse reduziert werden mußten. Obwohl beide Reduktionen von derselben Größe sind, besitzen sie verschiedene physikalische Hintergründe: Die Laufzeitreduktion des Strahlstroms ergibt sich durch die integrierende Wirkung der Gitter (örtlicher Mittelwert), welche den ursprünglich schmalen Stromimpuls der relativen Breite d/λ auf den Betrag g/λ aufweiten und seine Höhe reziprok verringern. Die Laufzeitreduktion der Klemmenspannung hingegen trägt der sich während des Passierens der Ladung ändernden Resonatorfeldstärke Rechnung.

Der Effekt der Strahlsättigung

Abschließend soll ein Effekt diskutiert werden, der mit der Annahme einer konstanten Elektronengeschwindigkeit vernachlässigt wurde: Die *Begrenzung der Resonatorspannung* aufgrund der *Strahlsättigung*. Jedes Elektron kann an das Feld im Ausgangsresonator maximal soviel Energie abgeben, wie es in Form von kinetischer Energie besitzt. Hat es seine gesamte Energie abgegeben und befindet sich noch immer im Resonatorfeld, so wird es wieder Energie aufnehmen. Man nennt einen Elektronenstrahl durch das Resonatorfeld *gesättigt*, wenn die ersten seiner Elektronen ihre gesamte Energie an das Feld abgeben und am Resonatorausgang zum Stehen kommen. Solange die Resonatorfeldstärke gering ist, wird bei gegebenem Strahl eine Vergrößerung des Shuntwiderstandes eine Erhöhung der Resonatorspannung nach sich ziehen. Ist der Shuntwiderstand so groß, daß Sättigung einsetzt, wird seine weitere Vergrößerung jedoch nicht mehr zur Zunahme der Resonatorspannung führen, denn die die Sättigung einläutenden Elektronen entziehen dem Resonator bereits wieder Energie und tragen daher nicht mehr zum Feldaufbau bei. Die Begrenzung der Resonatorspannung ist somit eine direkte Folge der Strahlsättigung; sie erklärt sich aus dem Energiehaushalt einzelner (nämlich der am stärksten abgebremsten) Elektronen. Der mittlere Energiehaushalt von Strahl und Resonator ist für den Sättigungseffekt nicht von Belang.³¹

³¹Eine obere Grenze für die Resonatorspannung kann man unter Verwendung des mittleren Energieumsatzes aus dem Energieerhaltungssatz gewinnen:

$$P = R_{\text{sh}}(M_I I_0)^2 / 2 = U_r M_I I_0 / 2 \leq P_0 = U_0 I_0 \Rightarrow U_r \leq 2U_0 / M_I.$$

Diese Abschätzung ist offenbar zu grob. Für einen unmodulierten Strahl hätte man die triviale Aussage: „Die Resonatorspannung muß kleiner als unendlich sein.“

Es ist bereits an dieser Stelle offensichtlich, daß ein Klystron mit einem gesättigten Strahl arbeiten muß, um hohe Wirkungsgrade erzielen zu können, denn bei ungesättigtem Strahl gibt kein einziges Elektron seine gesamte kinetische Energie an das Resonatorfeld ab. Der Sättigungsfall muß folglich – wenigstens als Grenzfall – in der hier vorgestellten Analyse enthalten sein. Unter Beibehaltung des Modells des steifen Strahls sei der Sättigungseffekt wie folgt idealisiert: Die Sättigung setzt schlagartig ein; bei gegebenem Strahl gilt weiterhin $U_r \propto R_{sh}$ bis die Sättigungsspannung $U_{r\text{sat}}$ erreicht ist. Größere Shuntwiderstände sind nicht erlaubt. Für die Trajektorien der Elektronen gelte mit dieser Vorstellung vereinbar: Bis zur Sättigung passieren alle Elektronen den Resonator mit konstanter Geschwindigkeit und verlassen ihn mit einer Geschwindigkeit > 0 , welche sich aus ihrer Restenergie ergibt. Im Grenzfall der Sättigung passieren weiterhin alle Elektronen den Resonator mit konstanter Geschwindigkeit; die die Sättigung einläutenden Elektronen kommen jedoch am Resonatorausgang schlagartig zum Stehen; eine Reflexion von Elektronen im Resonatorfeld ist damit nicht möglich.³²

Mit diesem Modell läßt sich nun die Sättigungsspannung des Resonators leicht angeben: Die kinetische Energie der Elektronen beträgt am Eingang des Resonators mit guter Näherung eU_0 , worin U_0 wieder die Anodenspannung der Elektronenkanone bezeichnet. Unter Vernachlässigung der Emissionsenergie auf der Katode folgt dies aus der feldtheoretischen Analyse der Dichtemodulation sofort ($v(\lambda_p/4) = v_0$) und aus der ballistischen Analyse bei Vernachlässigung der Geschwindigkeits- gegenüber der Strommodulation ($M_v \ll M_I \leq 2$). Dann kann jedes Elektron maximal gegen eine Spannung U_0 im Ausgangsresonator anlaufen, d.h. es gilt³³

$$\hat{U}_r \leq \hat{U}_{r\text{sat}} = U_0. \quad (2.162)$$

Es sei nocheinmal darauf hingewiesen, daß die Resonatorspannung U_r aufgrund ihrer in dieser Arbeit gewählten Definition und dem oben besprochenen Modell der konstanten Elektronengeschwindigkeit mit der von den Strahlelektronen durchlaufenen Spannung U_d identisch ist, d.h. es gilt $U_r = U_d$. Diese Größe wurde weiter oben bereits verwendet.

Dem erweiterten Modell zufolge kann der Betriebsmodus der Auskoppelinrichtung stets einem der beiden Bereiche *linearer Betrieb* und *Stättigungsbetrieb* zugeordnet werden: Solange $U_r \propto R_{sh}$ gilt, liegt linearer Betrieb vor und für größere Shuntwiderstände Stättigungsbetrieb. Im Grenzfall $\hat{U}_{r\text{sat}} = M_I I_0 R_{sh}$, dem *Betrieb auf der Stättigungsgrenze*, ist der Shuntwiderstand gerade groß genug, um Sättigung zu erreichen; dieser Betriebsmodus kann beiden Bereichen zugeordnet werden. Mit dem als

$$R_{\text{krit}} = \frac{\hat{U}_{r\text{sat}}}{M_I I_0} = \frac{R_0}{M_I} \quad (2.163)$$

definierten *kritischen Widerstand* – $R_0 = U_0/I_0$ ist der Gleichstromwiderstand des Elektronenstrahls – hat man einen reinen Strahlparameter, mit dessen Hilfe der Betriebsmodus

³²Würde man unter denselben Annahmen größere Shuntwiderstände zulassen, verliefen in der Tat nicht mehr alle Elektronen den Resonator auf die übliche Weise. Eine auf diesen Bereich ausgedehnte lineare Theorie wäre in höchstem Grade inkonsistent.

³³Hingegen kann die weiter vorn betrachtete Klemmenspannung sehr wohl die Strahlgleichspannung übersteigen; wegen (2.146) gilt für sie $\hat{U} \leq U_0/M$.

leicht angegeben werden kann: Bei $R_{\text{sh}} \leq R_{\text{krit}}$ liegt linearer Betrieb vor, bei $R_{\text{sh}} \geq R_{\text{krit}}$ Sättigungsbetrieb, und bei $R_{\text{sh}} = R_{\text{krit}}$ arbeitet man auf der Sättigungsgrenze. Die in dieser Arbeit vorgestellte Analyse ist also nur für $R_{\text{sh}} \leq R_{\text{krit}}$ gültig.

2.1.5 Leistungsbilanz

Es wird nun untersucht, wie bei gegebenem Strahl die Shuntwiderstände und Güten zu wählen sind, um aus der eingespeisten Gleichstromleistung $P_0 = U_0 I_0$ die größtmögliche Hochfrequenzleistung P_e in der externen Last $R_{\text{sh}e}$ zu gewinnen. Dazu wird die letztendlich zu maximierende *Haupteffektivität*

$$\eta = \frac{P_e}{P_0} \quad (2.164)$$

in die beiden Teileffektivitäten, η_w und η_k , die *Wandlungs-* und *Kreiseffektivität* zerlegt

$$\eta_w = \frac{P}{P_0} \quad (2.165)$$

$$\eta_k = \frac{P_e}{P}. \quad (2.166)$$

Die Wandlungseffektivität ist ein Maß für die Güte der Umwandlung der der Elektronenkanone zugeführten Gleichstromleistung in Mikrowellenleistung. Die Kreiseffektivität gibt an, welcher Anteil dieser Mikrowellenleistung an die externe Last – den eigentlichen Verbraucher – abgegeben wird. Zur Auffindung optimaler Lastbedingungen ist es zweckmäßig, Strahl und unbelasteten Resonator als gegeben zu betrachten und die externe Last gedanklich zu variieren. Für jeden Lastfall wird sich ein gewisser Bruchteil der Sättigungsspannung am Resonator einstellen, d.h. in Abhängigkeit von der externen Last wird sich ein gewisser *Sättigungsgrad*

$$\delta = \frac{\hat{U}_r}{\hat{U}_{r \text{ sat}}} = M_I \frac{R_{\text{sh}}}{R_0} = \frac{R_{\text{sh}}}{R_{\text{krit}}} \quad (2.167)$$

einstellen, wobei nur Werte aus dem Intervall $[0, 1]$ zulässig sind. Offenbar läßt sich der Strahl nicht immer durch eine passende Wahl der externen Last sättigen: Da die externe Last den Shuntwiderstand verringert, ist Sättigung nur dann erreichbar, wenn sie auch gänzlich ohne externe Belastung erreichbar ist. Die Anordnung Strahl + unbelasteter Resonator ist nur dann für Sättigungsbetrieb geeignet, wenn der interne Shuntwiderstand nicht kleiner als der kritische Widerstand ist, d.h. wenn der als

$$\theta = \frac{R_{\text{sh}i}}{R_{\text{krit}}} = M_I \frac{R_{\text{sh}i}}{R_0} \quad (2.168)$$

definierte *potentielle Sättigungsgrad* größer oder gleich eins ist. Im Gegensatz zum Sättigungsgrad ist der potentielle Sättigungsgrad lastunabhängig; es ist ein Parameter von

Strahl und unbelastetem Resonator. Der mit der aktuellen externen Last tatsächlich realisierte Bruchteil des potentiellen Sättigungsgrades ist offenbar durch das Verhältnis zwischen belastetem und internem Shuntwiderstand gegeben. Unter Verwendung der Beziehungen (2.154) und (2.135) erhält man daher

$$\delta = \theta \frac{R_{\text{sh}}}{R_{\text{shi}}} = \frac{\theta}{1 + Q_i/Q_e}. \quad (2.169)$$

Für die Wirkungsgrade folgt schließlich³⁴

$$\eta_w = \frac{M_I^2 R_{\text{sh}}}{2 R_0} = \frac{M_I}{2} \delta \quad (2.170)$$

$$\eta_k = \frac{R_{\text{sh}}}{R_{\text{she}}} = \frac{1}{1 + Q_e/Q_i} = 1 - \frac{\delta}{\theta} \quad (2.171)$$

$$\eta = \frac{M_I}{2} \delta \left(1 - \frac{\delta}{\theta}\right). \quad (2.172)$$

Um dem Strahl möglichst viel seiner kinetischen Energie zu entziehen, ist daher zunächst einmal Sättigungsbetrieb ($\delta = 1$) zu fordern. Die Strommodulation des Strahls sollte so groß wie möglich sein; im optimalen Falle besteht der Strahl aus extrem schmalen Impulsen ($M_I = 2$). Nur dann wird eine vollständige Wandlung von kinetischer Strahl- in Hochfrequenzenergie möglich.³⁵ Um nun auch möglichst die gesamte Feldenergie an die externe Last weiterzureichen, muß der potentielle Sättigungsgrad groß gegenüber dem tatsächlichen sein. Da letzterer den Wert 1 annehmen soll, ist schließlich $\theta \gg 1$ zu fordern, d.h. der unbelastete Shuntwiderstand sollte wesentlich größer als der Strahlwiderstand sein.

Die Zusammenhänge seien nun quantitativ betrachtet. Der Hauptwirkungsgrad (2.172) besitzt für $\delta = \theta/2$ ein relatives und absolutes Maximum von $M_I\theta/8$, das für $R_{\text{sh}} = R_{\text{shi}}/2$ bzw. $Q_e = Q_i$, also bei *Anpassung* angenommen wird, wie es aus der Leistungstechnik bekannt ist. Dieses Maximum kann wegen der Begrenzung $\delta \leq 1$ jedoch nur im Falle von $\theta \leq 2$ eingestellt werden. Für höhere potentielle Sättigungsgrade ist vermöge der externen Last $\delta = 1$ einzustellen, d.h. sie ist wegen (2.169) zu $Q_e = Q_i/(\theta - 1)$ zu wählen. Zusammenfassend gilt für den maximalen Wirkungsgrad

$$\eta_{\text{max}} = \frac{M_I}{2} \begin{cases} \theta/4 & : \theta \leq 2 \\ 1 - 1/\theta & : \theta \geq 2 \end{cases} \quad (2.173)$$

bei einer externen Belastung von

$$Q_{e,\text{opt}} = \begin{cases} Q_i & : \theta \leq 2 \\ Q_i/(\theta - 1) & : \theta \geq 2 \end{cases}. \quad (2.174)$$

³⁴ Mit $\delta = 1$ und $\eta_w \leq 1$ liefert (2.170) $M_I \leq 2$. Die Strommodulation kann also auch aus energetischen Gründen niemals größer als zwei sein, vgl. Anhang A.4.

³⁵ Damit beschreibt Gleichung (2.170), was bereits zuvor bei der qualitativen Diskussion des Sättigungseffektes festgestellt wurde: Daß dem Strahl seine gesamte Energie entzogen wird, ist zwar eine hinreichende, nicht jedoch eine notwendige Sättigungsbedingung.

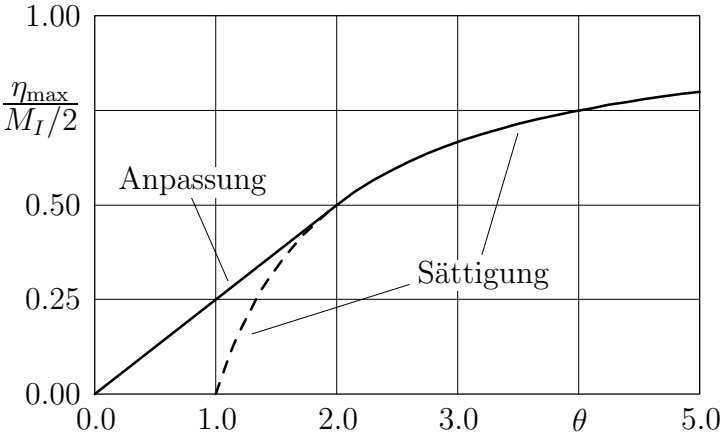


Abbildung 2.24: Maximaler Wirkungsgrad (bei optimaler externer Belastung) als Funktion des potentiellen Sättigungsgrades. Für $1 \leq \theta \leq 2$ ist zusätzlich der Wirkungsgrad bei Sättigungsbetrieb dargestellt (gestrichelte Linie).

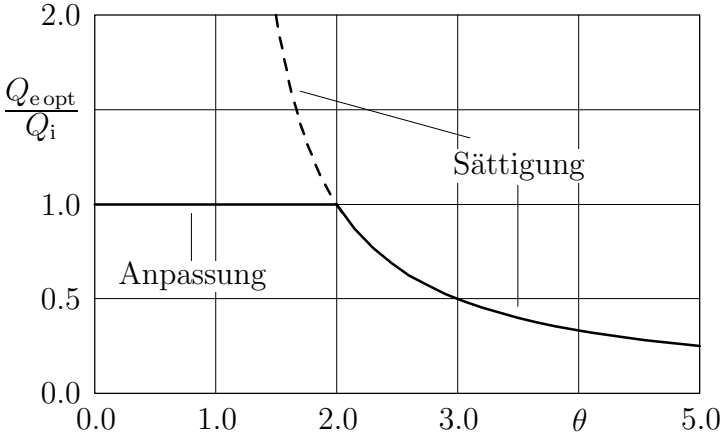


Abbildung 2.25: Für maximalen Wirkungsgrad einzustellende externe Last (optimale Last) als Funktion des potentiellen Sättigungsgrades. Für $1 \leq \theta \leq 2$ ist zusätzlich die für Sättigungsbetrieb einzustellende Last eingezeichnet (gestrichelte Linie).

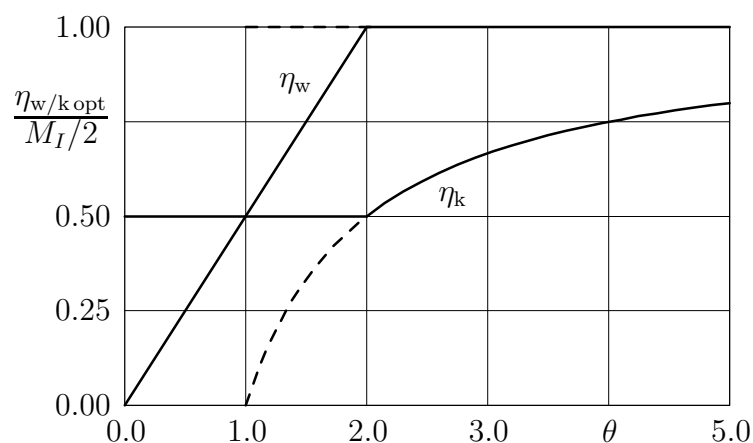


Abbildung 2.26: Für maximalen Wirkungsgrad einzustellende (optimale) Teilwirkungsgrade als Funktion des potentiellen Sättigungsgrades. Für $1 \leq \theta \leq 2$ sind zusätzlich beide Wirkungsgrade bei Sättigungsbetrieb dargestellt (gestrichelte Linien).

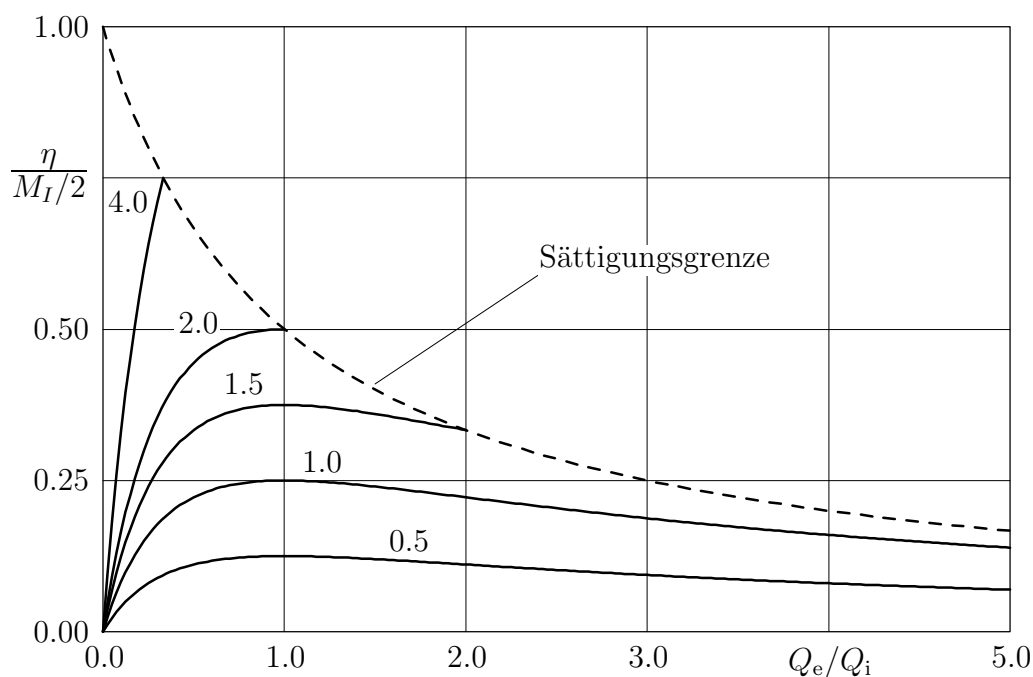


Abbildung 2.27: Hauptwirkungsgrad als Funktion der Belastung für exemplarische potentielle Sättigungsgrade.

Diese Zusammenhänge sind in den Abbildungen 2.24, 2.25 und 2.26 dargestellt. Man entnimmt ihnen, daß für potentielle Sättigungsgrade $1 \leq \theta \leq 2$ Sättigungsbetrieb zwar möglich, jedoch weniger effektiv als Anpassungsbetrieb ist. Im Hinblick auf die Gleichungen (2.170) und (2.171) wird man in diesem Falle eine geringere Wandlungseffektivität zugunsten einer größeren Keiseffektivität in Kauf nehmen.

Im praktischen Falle wird es nicht immer möglich sein, optimale Lastbedingungen zu schaffen, weshalb auch die allgemeine Abhängigkeit des Hauptwirkungsgrades von der Belastung angegeben werden soll. Zu dieser Darstellung gelangt man, indem gemäß (2.169) der Sättigungsgrad aus Gleichung (2.172) eliminiert wird

$$\eta = \frac{M_I}{2} \theta \frac{Q_e/Q_i}{(1 + Q_e/Q_i)^2}. \quad (2.175)$$

Diese Gleichung ist natürlich nur solange gültig, wie der sich ihrzufolge ergebende Wirkungsgrad nicht größer als der *Sättigungswirkungsgrad*

$$\eta_{\text{sat}} = \frac{M_I}{2} \frac{1}{1 + Q_e/Q_i} \quad (2.176)$$

wird. Diese Zusammenhänge sind für einige potentielle Sättigungsgrade in Abbildung 2.27 dargestellt.

Abschließend sei noch einmal darauf hingewiesen, daß die hier durchgeführte Analyse auf dem Modell des steifen Strahls, also auf der Annahme *konstanter Elektronengeschwindigkeiten* im Ausgangsresonator beruht. Bei einem Betrieb nahe der Sättigungsgrenze ist dies eine sehr grobe Näherung, und die vorgestellten Formeln werden daher zu optimistische Werte liefern. Für $R_0/(M_I R_{\text{sh}}) > 10$ sollten sie jedoch gute Näherungswerte bereitstellen.

2.2 Zweidimensionale Erweiterungen

Bislang wurde der Elektronenstrahl als eindimensionales Gebilde betrachtet, d.h. seine Dicke und seine Breite wurden als unendlich angenommen. Für den im Rahmen dieser Arbeit wesentlichen Bandstrahl stellt dies offenbar eine äußerst grobe Näherung dar, denn seine Dicke wird wesentlich geringer als seine Breite ausfallen – man lasse sich das Wort *Bandstrahl* auf der Zunge zergehen. Beläßt man es bei der unendlichen Breite, beachtet jedoch eine endliche (geringe) Dicke, so erhält man ein deutlich verbessertes Modell des Bandstrahls; ähnlich verhält es sich mit den Resonatoren, deren Gestalt an den Strahl anzupassen ist. Nun hat man es jedoch stets mit zweidimensionalen Problemen zu tun, wodurch die Analyse zum Teil erheblich erschwert wird. Nichtsdestotrotz lassen sich einige der im Abschnitt 2.1 vorgenommenen Untersuchungen auf zwei Dimensionen ausdehnen; insbesondere erlangt die Aufweitung des Strahls nebst ihrer Kompensation (Fokussierung) erst im Zweidimensionalen überhaupt einen Sinn.

2.2.1 Pierce-Kanone

Ausgehend von der im Abschnitt 2.1.1 besprochenen eindimensionalen Kanonengeometrie, Abbildung 2.2, gelangt man zu einer ersten zweidimensionalen, indem man schlicht den

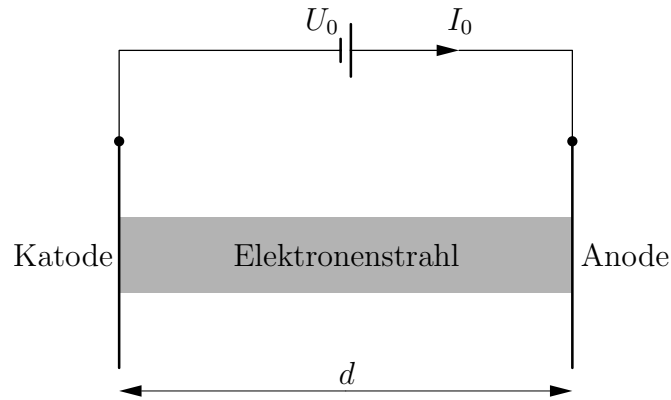


Abbildung 2.28: Erster zweidimensionaler Entwurf einer Bandstrahlkanone: eindimensionale Kanone mit begrenzter Emissionshöhe der Katode.

emittierenden Katodenbereich auf die gewünschte Strahldicke begrenzt, ansonsten jedoch die ebenen Elektrodenformen beibehält, Abbildung 2.28. Die in dieser Abbildung enthaltene Annahme, alle Elektronen würden gerade, zueinander parallele Bahnen beschreiben, so daß man eine konstante Strahldicke erhält, ist offenbar ungerechtfertigt: Ohne Strahl wären alle Äquipotentialflächen in der Tat parallel zu Katode und Anode; gemäß der Gleichung (A.38) aus Abschnitt A.1.3 (S. 127) wird das Potential bei Anwesenheit von Raumladungen jedoch überall abgesenkt (außer natürlich auf den Elektroden), so daß sich die ehemals ebenen Äquipotentialflächen vor allem im Bereich des Strahls und dort am stärksten vor der Katode in Strahlrichtung „ausbeulen“ werden. Nimmt man den Gradienten des Potentials, sieht man sofort, daß transversale Kräfte wirken müssen; der Strahl wird folglich divergieren. Ein sich bereits in der Kanone aufweitender Strahl ist natürlich unerwünscht, schließlich soll er ja noch einen langen Driftraum durchqueren, ohne dort auf Wände zu stoßen.

Trotz ihres zunächst negativen Ausgangs liefert diese Überlegung einen Ansatz zur Erzeugung eines parallelen Strahls: Neigt man die nicht emittierenden Katodenwände dem Strahl in passender Weise zu, sollten sich die Äquipotentialflächen im Strahl ebenen lassen; gegebenenfalls müssen sie und die entsprechenden Teile der Anode zusätzlich gekrümmt werden. Kann man derart Äquipotentialebenen im Strahl tatsächlich erreichen? Und wenn ja, wie müssen die Elektroden geformt sein?

Zur Analyse des Problems wird der Gesamttraum aufgeteilt in den Strahlbereich I und den ihn umgebenden ladungsfreien Bereich II, wobei letzterer aus Symmetriegründen mit dem Bereich oberhalb des Strahls identifiziert wird, Abbildung 2.29. Wegen der innerhalb des Strahls verlangten Ebenheit der Äquipotentialflächen und den gegebenen Potentialen auf den Elektroden hat man im Raum I den aus der eindimensionalen Analyse bekannten Potentialverlauf (A.38)

$$\phi^I(z) = U_0 \left(\frac{z}{d} \right)^{4/3}; \quad (2.177)$$

wie gewohnt bezeichnen U_0 die Anodenspannung und d den Abstand zwischen den Elektroden. Wegen $\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{grad}\phi^I = 0$ ist dieser Potentialverlauf verträglich mit der Annahme

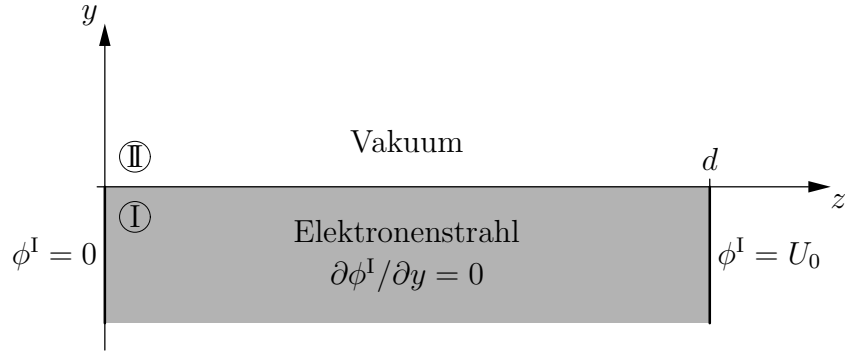


Abbildung 2.29: Raumdefinitionen für das zweidimensionale Bandstrahlproblem.

von sich allein in z -Richtung bewegenden Elektronen und damit einer ebenen Strahl- und Bereichsgrenze in $y = 0$. Im raumladungsfreien Bereich II hat man eine Lösung ϕ^{II} der LAPLACEgleichung³⁶ zu finden, welche die Stetigkeit des Potentials nebst Normalenableitung auf der Grenze $y = 0$, $0 \leq z \leq d$ gewährleistet; das Potentialproblem lautet folglich

$$\frac{\partial^2 \phi^{\text{II}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi^{\text{II}}}{\partial z^2} = 0, \quad (2.178)$$

$$\phi^{\text{II}} \Big|_{\substack{y=0 \\ 0 \leq z \leq d}} = U_0 \left(\frac{z}{d} \right)^{4/3}, \quad (2.179)$$

$$\frac{\partial \phi^{\text{II}}}{\partial y} \Big|_{\substack{y=0 \\ 0 \leq z \leq d}} = 0; \quad (2.180)$$

es wurde in Abbildung 2.30 veranschaulicht. Offenbar ist das Verhalten von ϕ^{II} sowohl außerhalb von $z \in [0, d]$ als auch für $y < 0$ für das Problem ohne Belang; man hat also eine harmonische Funktion zu finden, welche nebst ihrer Normalenableitung *auf einer Strecke* (nämlich $y = 0$, $0 \leq z \leq d$) gegeben ist. Die technische Frage nach der Erzeugbarkeit eines Bandstrahls konstanter Dicke läßt sich mit diesen Erkenntnissen daher wie folgt präzisieren:

1. Wie lautet die/eine Lösung des Potentialproblems (2.178) bis (2.180), Abbildung 2.30?
2. Wie läßt sich ein derartiges Feld erzeugen?

Punkt 1: Bekanntlich stellen sowohl Real- als auch Imaginärteil jeder analytischen Funktion einer komplexen Veränderlichen Lösungen der zweidimensionalen LAPLACEgleichung dar. Es ist also naheliegend, den auf der Strecke $y = 0$, $0 \leq z \leq d$ gegebenen Potentialverlauf in die Ebene auszudehnen, indem einfach die reelle Veränderliche z durch die komplexe Veränderliche $\zeta = z + jy$ ersetzt wird:

$$\phi^{\text{II}}(z, y) = \text{Re} \left\{ U_0 \left(\frac{z + jy}{d} \right)^{4/3} \right\}. \quad (2.181)$$

³⁶Laplace, Marquis Pierre Simon de (1749-1827), französischer Mathematiker und Astronom

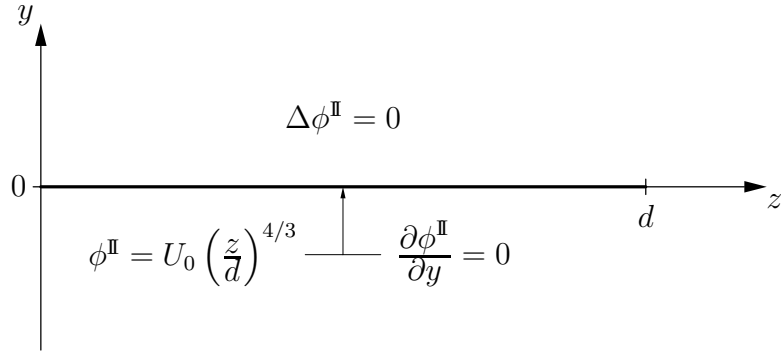


Abbildung 2.30: Illustration des aus der Bandstrahlproblematik abgeleiteten Potentialproblems.

Wegen der Mehrdeutigkeit der Wurzel im Komplexen sei $\zeta^{4/3}$ im Sinne des Hauptwertes interpretiert. Diese Funktion erfüllt also bereits die Bedingung (2.179). Für (2.178) genügt es zu zeigen, daß $f(\zeta) = \zeta^{4/3}$ (Hauptwert) analytisch ist, d.h. ihr Real- und ihr Imaginärteil stetig partiell differenzierbar sind und die CAUCHY³⁷-RIEMANNschen³⁸ Differentialgleichungen erfüllen. Setzt man $f = u + jv$ und schreibt $\zeta = r(\cos \psi + j \sin \psi)$, so hat man

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad (2.182)$$

$$\psi = \begin{cases} 0 & \text{wenn } z = 0 \wedge y = 0 \\ \arctan y/z & \text{wenn } z > 0 \\ \pi + \arctan y/z & \text{wenn } z < 0 \wedge y > 0 \\ -\pi + \arctan y/z & \text{wenn } z < 0 \wedge y \leq 0 \end{cases}, \quad (2.183)$$

$$u = r^{4/3} \cos \frac{4\psi}{3}, \quad (2.184)$$

$$v = r^{4/3} \sin \frac{4\psi}{3}, \quad (2.185)$$

und damit

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{4}{3} r^{-2/3} \left(z \cos \frac{4\psi}{3} + y \sin \frac{4\psi}{3} \right), \quad (2.186)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{4}{3} r^{-2/3} \left(y \cos \frac{4\psi}{3} - z \sin \frac{4\psi}{3} \right), \quad (2.187)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{4}{3} r^{-2/3} \left(z \sin \frac{4\psi}{3} - y \cos \frac{4\psi}{3} \right), \quad (2.188)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{4}{3} r^{-2/3} \left(y \sin \frac{4\psi}{3} + z \cos \frac{4\psi}{3} \right). \quad (2.189)$$

Offenbar gilt $\partial u/\partial z = \partial v/\partial y$ und $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial z$ in der gesamten z - y -Ebene, und die Ableitungen sind mit Ausnahme der nicht-positiven z -Achse stetig, weshalb f überall au-

³⁷Cauchy, Augustin Louis (1789-1857), französischer Mathematiker

³⁸Riemann, Bernhard (1826-1866), deutscher Mathematiker

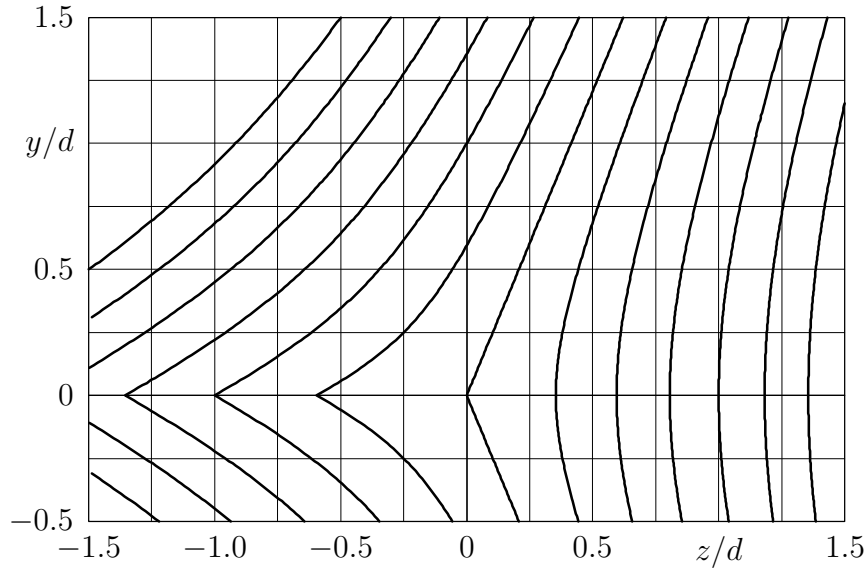


Abbildung 2.31: Äquipotentiallinien zu (2.181) und (2.190) für $\phi^{\text{II}}/U_0 \in [-1.5, 1.5]$ in Schritten von 0.25.

ber auf $y = 0$, $z \leq 0$ analytisch ist; mithin löst ϕ^{II} im selben Gebiet die LAPLACEgleichung. Schließlich bleibt zu zeigen, daß $\partial u/\partial y$ auf $y = 0$, $0 \leq z \leq d$ verschwindet. Das ist aber offenbar der Fall, denn dort gilt $\psi = 0$, womit beide Summanden in (2.187) verschwinden. Mithin ist eine Lösung des Potentialproblems (2.178) bis (2.180) durch (2.181) bzw.

$$\phi^{\text{II}}(r, \psi) = U_0 \left(\frac{r}{d}\right)^{4/3} \cos \frac{4\psi}{3} \quad (2.190)$$

gegeben, Abbildung 2.31. Diese Lösung besitzt allerdings die (bereits erwähnte) unschöne Eigenschaft einer auf der nicht-positiven z -Achse unstetigen y -Ableitung, weshalb die Äquipotentiallinien dort einen Knick aufweisen. Dieser Makel läßt sich zumindest für $\zeta \neq 0$ beheben, indem man im dritten Quadranten nicht den Haupt- sondern einen Nebenwert von $\zeta^{4/3}$ verwendet

$$\phi^{\text{II}}(r, \psi) = U_0 \left(\frac{r}{d}\right)^{4/3} \begin{cases} \cos \frac{4}{3}(\psi + 2\pi) & \text{wenn } \psi \in (-\pi/2, -7\pi/8) \\ \cos \frac{4}{3}\psi & \text{wenn } \psi \in [-3\pi/8, \pi] \end{cases}, \quad (2.191)$$

Abbildung 2.32. Im Segment $\psi \in [-7\pi/8, -3\pi/8]$ beläßt man das Potential undefiniert; anderenfalls erhielte man nicht-zusammenhängende Äquipotentiallinien.

Punkt 2: Legt man Elektroden entlang zweier Äquipotentialflächen und bringt diese auf das jeweilige Potential, so muß sich der in den Abbildungen 2.31 bzw. 2.32 dargestellte Potentialverlauf zwischen diesen Flächen einstellen. Begründen läßt sich dies mithilfe des Eindeutigkeitssatzes der Potentialtheorie, wozu man allerdings Werte des Potentials oder seiner Normalenableitung auf einer *geschlossenen* Berandung vorzugeben hat. Legt man Kathode und Anode (außerhalb des Strahls) entlang den Flächen $\phi = 0$ und $\phi = U_0$, hat man eine linke und rechte Berandung; außerdem ist das Potential auf $y = 0$ und somit eine untere Berandung gegeben. Da das Potential unabhängig von x (dritte Dimension)

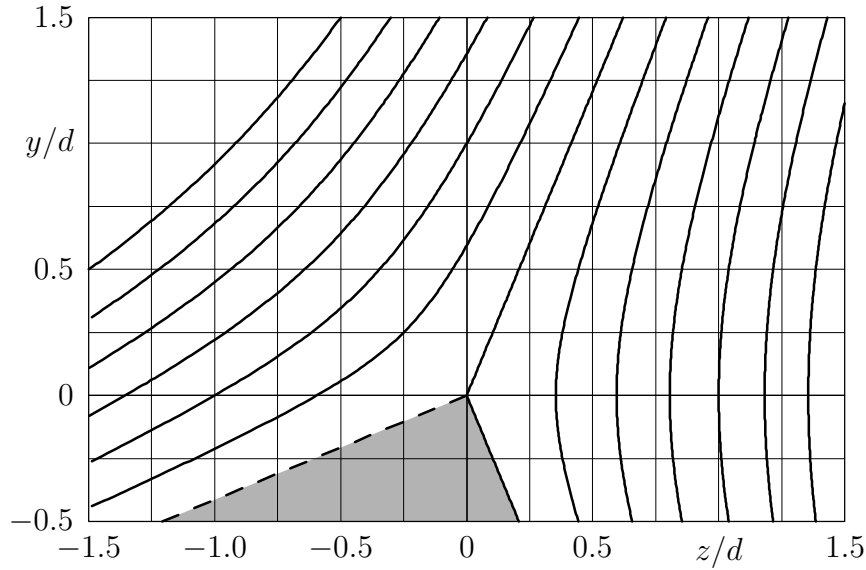


Abbildung 2.32: Äquipotentiallinien zu (2.191) für $\phi^{\text{II}}/U_0 \in [-1.5, 1.5]$ in Schritten von 0.25. Im grau gezeichneten Bereich bleibt das Potential undefiniert.

sein soll, was gleichbedeutend mit $\partial\phi/\partial x \equiv 0$ ist, muß die Normalenableitung des Potentials auf allen Ebenen $x = \text{const.}$ verschwinden, womit vordere und hintere Berandungen gegeben sind. Schließlich treffen sich die Flächen $\phi = 0$ und $\phi = U_0$ im Unendlichen,³⁹ womit man praktisch eine abgeschlossene Berandung des räumlichen Gebiets oberhalb vom Strahl hat, jedenfalls für unendlich ausgedehnte Elektroden bezüglich y . Mit endlichen Elektroden erhält man natürlich nur annähernd das gewünschte Feld. Damit sind beide Punkte abgearbeitet.

Eine geeignete Kanongeometrie mit der typischen um $3\pi/8 = 67.5^\circ$ (für $\phi^{\text{II}} = 0$) gegen die Strahlkante geneigten Katode ist in Abbildung 2.33 dargestellt. Aufgrund der bereits 1940 von PIERCE⁴¹ veröffentlichten Arbeit zur Bandstrahlkanone [33], welcher die Idee der vorgestellten Rechnung entnommen ist, nennt man die Kanone oft PIERCEkanone und die Fokussierungselektrode PIERCEelektrode. Auf dieser Arbeit basieren praktisch alle ausführlicheren Veröffentlichungen über Kanonenberechnung, [34], [43], [37], [25], [14].

In Anbetracht der Tatsache, daß die eben behandelte Problematik ohnehin nur von theoretischem Interesse ist – Anwendungen verlangen hohe Perveanzen und wegen der Begrenztheit der Katodenstromdichte konvergente Strahlen –, sei abschließend auf folgendes hingewiesen: Es wurde in der Tat gezeigt, daß die Herstellung eines Bandstrahls unter Verwendung der Anordnung 2.33 *möglich* ist, daß also die Gleichungen der Ma-

³⁹Der kleinste Abstand zwischen den Kurven $r^{4/3} \cos(4\psi/3) = 0$ und $r^{4/3} \cos(4\psi/3) = 1$ verschwindet für $r \rightarrow \infty$, was folgende Überlegung nahelegt: Man schlage einen Kreis vom Radius R um den Punkt $r = 0$; dieser scheidet die erste Kurve (Katode) unter dem Winkel $3\pi/8$ und bei $R \geq 1$ die zweite Kurve (Anode) unter dem Winkel $\phi = 3/4 \arccos R^{-4/3}$, so daß die Bogenlänge zwischen den Schnittpunkten $s = 3R/4(\pi/2 - \arccos R^{-4/3})$ beträgt. Aus der für $|x| < 1$ konvergenten TAYLORreihe⁴⁰ von $\arccos x$ ergibt sich mit $x = R^{-4/3}$ eine für $R > 1$ konvergente Reihe für s , welche nur Summanden mit negativen Exponenten enthält, weshalb s für $R \rightarrow \infty$ verschwinden muß.

⁴¹Pierce, John Robinson (1910-2002), amerikanischer Ingenieur

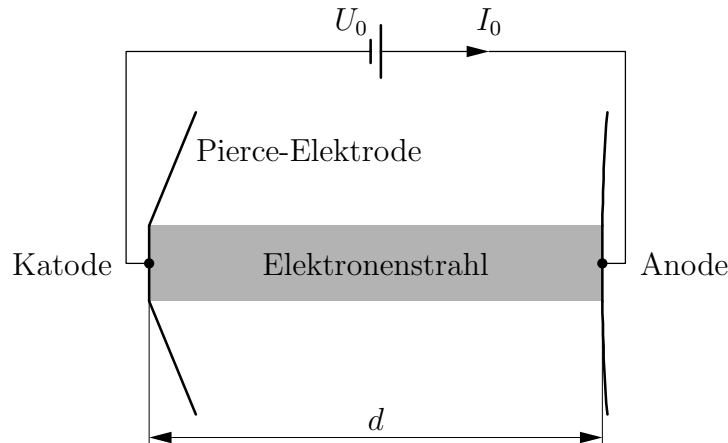


Abbildung 2.33: Prinzipdarstellung einer Kanone zur Erzeugung eines raumladungsbegrenzten planaren Elektronenstrahls (PIERCEkanone); typisch sind die um 67.5° gegen die Strahlkanten geneigten Fokussierungselektroden auf Katodenpotential (PIERCEelektroden).

gnetohydrodynamik *eine passende* Lösung besitzen. Nicht gezeigt wurde jedoch, daß bei Verwendung dieser Anordnung *notwendigerweise* ein Bandstrahl entsteht, daß also die Gleichungen der Magnetohydrodynamik vermöge der gegebenen Randbedingungen auf den Elektroden *genau eine* Lösung (nämlich die vorgestellte) besitzen. Die Eigenschaften des Strahls (Geometrie, Potentialverlauf) waren nicht Ergebnisse der Rechnung sondern eine ihrer Randbedingungen. Mithin bleibt ungeklärt, ob sich ein Bandstrahl konstanter Dicke überhaupt einstellt bzw. ob – sofern einmal eingestellt – dieser Strahlverlauf tatsächlich bestehenbleibt — ob die vorgestellte Lösung also *stabil* ist. Die Beantwortung dieser Frage nebst Beweis kann im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht erfolgen.

2.2.2 Resonatoren

Wegen der erforderlichen geringen Abmessungen im Millimeterwellenbereich wird man anstelle beschalteter Gitterpaare *Hohlraumresonatoren* einsetzen, Abbildung 2.34. Es darf als bekannt angesehen werden, daß nun die elektrische Feldstärke eine y -Abhängigkeit aufweisen wird, und man kann nicht mehr erwarten, daß alle Strahlelektronen unabhängig von ihrer transversalen Position beim Passieren des Resonators dieselbe Spannung durchlaufen. Diese Tatsache entspringt bekanntlich den neuen Randbedingungen in $y = b$ und nicht dem Fehlen der Gitter. Letzteres hat jedoch eine z -Abhängigkeit der Feldstärke zur Folge. Die Auswirkungen dieser gegenüber der eindimensionalen Betrachtung veränderten Geometrie auf die Resonatorspannung, den Shuntwiderstand und die vom Strahl durchlaufene Spannung sollen in diesem Abschnitt untersucht werden. Dabei wird weiterhin am Modell des steifen Strahls, also einer konstanten Elektronengeschwindigkeit beim Passieren des Resonators festgehalten.

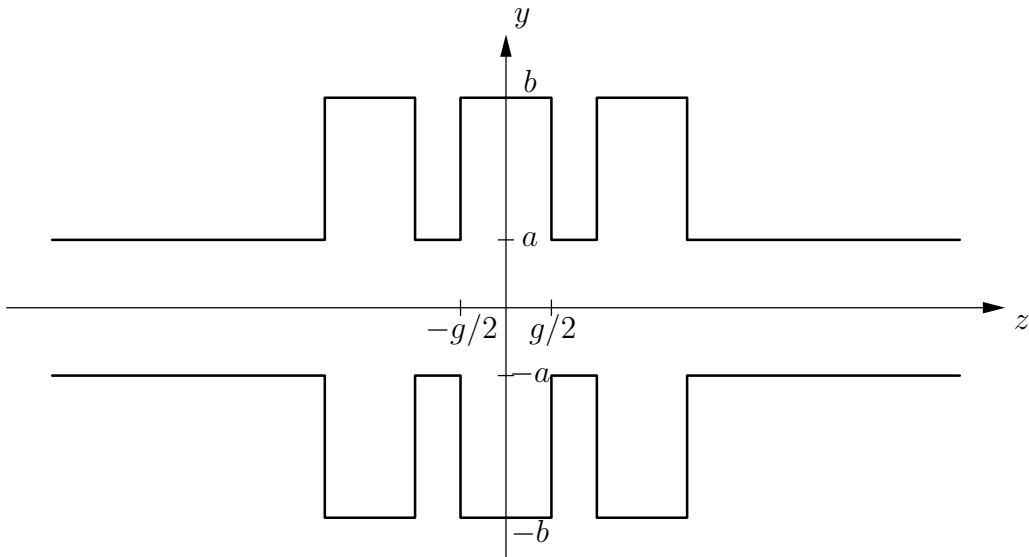


Abbildung 2.34: Zweidimensionale planare 3-zellige Resonatorstruktur.

Eigenschaften des Resonatorfeldes

Damit die Geometrie in Abbildung 2.34 ein gutes resonantes Verhalten aufweist, hat man das Strahlrohr (Apertur) unterhalb seiner Grenzfrequenz zu betreiben, weshalb die Feldstärke in der Apertur für $z \rightarrow \pm\infty$ verschwinden muß. Ferner wird sie dort stetig und beschränkt sein, weshalb E_z (Phasor, Zeitabhängigkeit $e^{j\omega t}$) durch sein Spektrum dargestellt werden kann:

$$E_z(y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(y, k_z) e^{-jk_z z} dk_z, \quad (2.192)$$

$$A(y, k_z) = \int_{-\infty}^{\infty} E_z(y, z) e^{jk_z z} dz. \quad (2.193)$$

Andererseits muß E_z die homogene skalare HELMHOLTZgleichung⁴² erfüllen

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k_0^2 E_z = 0 \quad (2.194)$$

⁴²Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdinand von (1821-1894), deutscher Naturforscher

mit $k_0 = \omega/c_0$, weshalb man für $|y| \leq a$, d.h. innerhalb des Strahlrohres mittels Differentiation von (2.192) erhält⁴³

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + (k_0^2 - k_z^2)A \right] e^{-jk_z z} dk_z. \quad (2.195)$$

Ein Vergleich mit (2.192) zeigt, daß der Term in den eckigen Klammer das Spektrum einer in dem betrachteten y - z -Streifen verschwindenden Funktion darstellt; dann muß aber das Spektrum dieser Funktion im zugehörigen y - k_z -Streifen verschwinden

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + (k_0^2 - k_z^2)A = 0. \quad (2.196)$$

Mittels Produktansatz $A(y, k_z) = Y(y)B(k_z)$ und der üblichen Abkürzung $K = (k_0^2 - k_z^2)^{1/2}$ läßt sich diese Gleichung in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + K^2 Y = 0 \quad (2.197)$$

überführen, welche bekanntlich das Fundamentalsystem $\{\cos Ky, \sin Ky\}$ besitzt. – Bei der weiteren Untersuchung wird nur die erste Funktion betrachtet; man überzeugt sich leicht davon, daß alle weiteren Ergebnisse auch für die zweite Funktion gültig sind. – Damit läßt sich das Spektrum der z -Komponente der elektrischen Feldstärke wie folgt schreiben

$$A(y, k_z) = B(k_z) \cos \sqrt{k_0^2 - k_z^2} y. \quad (2.198)$$

Die Funktion $B(k_z) = A(0, k_z)$, das Spektrum der Feldstärke in $y = 0$, bleibt dabei zunächst unbekannt. Das ist auch nicht verwunderlich, schließlich wurde bislang nur verwendet, daß die Feldstärke der HELMHOLTZgleichung genügen und gerade bezüglich y sein soll; ohne Randbedingungen ist damit die Feldlösung bei weitem nicht festgelegt.

Für eine *einzelne Resonatorzelle* läßt sich dieses Spektrum näherungsweise bestimmen, indem man sich der Tatsache bedient, daß die z -Komponente der Feldstärke entlang der Strahlrohrwand $|y| = a$ im Spaltbereich in erster Näherung konstant ist und sonst überall verschwindet

$$E_z(a, z) \approx \begin{cases} 0 & : |z| \geq g/2 \\ \hat{U}/g & : |z| < g/2 \end{cases}. \quad (2.199)$$

Entlang der Wand herrschen also eindimensionale Verhältnisse, wie ein Vergleich mit (2.144) zeigt. Die über dem Spalt der Breite g (Äquivalent zum Gitterabstand der eindimensionalen Analyse) abfallende Spannung $U = \hat{U}e^{i\omega t}$ wird oft als Spaltspannung

⁴³Für $|y| > a$ ist die Feldstärke an einigen Stellen nicht stetig differenzierbar, weshalb das nach z differenzierte Integral nicht einfach als Integral über den differenzierten Integranden geschrieben werden darf. In der Tat wäre das Ergebnis fehlerhaft, wie man sich am Beispiel eines geschlossenen Resonators mit z -unabhängiger Feldstärke klarmachen kann.

(Äquivalent zur Klemmenspannung der eindimensionalen Analyse) bezeichnet. Die Auswertung von Gleichung (2.193) für dieses Feld liefert

$$A(a, k_z) \approx \hat{U} \frac{\sin k_z g/2}{k_z g/2}, \quad (2.200)$$

weshalb sich mit (2.198) für $y = a$ die bislang unbekannte Funktion $B(k_z)$ bestimmen läßt:

$$A(0, k_z) = B(k_z) \approx \hat{U} \frac{\sin k_z g/2}{k_z g/2} \frac{1}{\cos \sqrt{k_0^2 - k_z^2} a}; \quad (2.201)$$

für das Spektrum im Strahlrohr gilt folglich

$$A(y, k_z) \approx \hat{U} \frac{\sin k_z g/2}{k_z g/2} \frac{\cos \sqrt{k_0^2 - k_z^2} y}{\cos \sqrt{k_0^2 - k_z^2} a}. \quad (2.202)$$

Mit dem Bekanntsein des Spektrums im gesamten Strahlrohr ist wegen (2.192) auch die z -Komponente der Feldstärke und wegen $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ sogar die Feldstärke selbst dort als bekannt anzusehen. Dies ist nicht verwunderlich, denn mit (2.199) und $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{0}$ für $|z| \rightarrow \infty$ ist sie praktisch auf einer geschlossenen Berandung gegeben.

Man bedenke bei der Verwendung vorstehender Formeln, daß (2.198) für *jede* planare zweidimensionale Resonatorstruktur für alle keine Berandung schneidenden y -Flächen gültig ist. Hingegen besitzt ein Gleichheitszeichen in (2.202) genau dann Gültigkeit, wenn die z -Komponente der Feldstärke im Spalt ($|y| = a$, $|z| \leq g/2$) konstant ist, was *nicht in jedem Falle* gegeben ist. In der Literatur wird diese Annahme meist durch geradlinige Feldlinien im Spalt illustriert; dies ist allerdings keine Notwendigkeit: Aus der Quellenfreiheit der Feldstärke und der Konstanz ihrer z -Komponente bezüglich z in $|y| = a$ folgt lediglich die Konstanz ihrer y -Komponente bezüglich y ; unter Annahme einer ungeraden Abhängigkeit bezüglich z erhält man aus der Wellengleichung $E_y \propto \sin k_0 z$. Die Feldlinien können sich also durchaus in das Strahlrohr „biegen“, obwohl die z -Komponente der Feldstärke in $|y| = a$ konstant ist. Daß bei der vorgestellten Näherung im Falle der rechteckigen Zelle nur ein geringer Fehler gemacht wird, kann man den Abbildungen A.15, A.18 und A.19 auf den Seiten 165 ff. entnehmen.

Resonatorspannung

In Analogie zur eindimensionalen Analyse wird die *Resonatorspannung* als diejenige Spannung definiert, die ein sich mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 entlang der Symmetrieachse (z -Achse) durch den gesamten Resonator gemäß $z = v_0(t - t_0)$ bewegender Punkt durchläuft

$$U_r = e^{j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} E_z(0, z) e^{jkz} dz, \quad (2.203)$$

mit $k = \omega/v_0$. Ein Vergleich mit (2.193) zeigt, daß es sich bei der Amplitude \hat{U}_r der Resonatorspannung gerade um das Spektrum der Feldstärke an der Stelle $y = 0$, $k_z = k$

handelt

$$\hat{U}_r = A(0, k) = B(k). \quad (2.204)$$

Unter Einbeziehung der konstanten Feldstärke im Spalt gilt daher mit (2.202)

$$\hat{U}_r \approx \frac{M\hat{U}}{\cosh \sqrt{k^2 - k_0^2} a}, \quad (2.205)$$

worin M den mit den Gleichungen (2.7) und (2.125) eingeführten (longitudinalen) Strahl-Resonator-Kopplungskoeffizienten bezeichnet.

Shuntwiderstand

Ausgehend von der Resonatorspannung wird der *Shuntwiderstand* wie bislang gemäß

$$R_{\text{sh}} = \frac{|\hat{U}_r|^2}{2P} \quad (2.206)$$

definiert, worin P die gesamte im Resonator umgesetzte Leistung (interne und externe) bezeichnet; es handelt sich also um einen *auf der z -Achse definierten* reellen Widerstandswert.

Der unbelastete (interne) Shuntwiderstand stellt bekanntlich ein Maß für das Wechselwirkungsvermögen des Resonators mit sich bewegenden Ladungsträgern dar, weshalb er maximiert werden sollte. Am Beispiel des im Abschnitt A.7 berechneten Grabenresonators (einzellige Struktur aus Abbildung 2.34) mit fundamentalem Feldtyp (Abbildung A.15) soll untersucht werden, wie dieser für maximalen Shuntwiderstand zu dimensionieren ist. Betrachtet man die Resonanzfrequenz ω und die Strahlgeschwindigkeit v_0 (=Integrationsgeschwindigkeit) als gegeben, so ist praktisch auch die Grabentiefe b bestimmt, denn in erster Näherung gilt $k_0 = \omega/c_0 = \pi/(2b)$, womit die halbe Apertur a und die Spaltbreite g zur Variation verbleiben. Es sei nun wieder angenommen, daß die z -Komponente der Feldstärke im Spalt konstant ist $E_z(a, z) = \hat{U}/g = E_0$. Gemäß Abbildung A.23 gilt dann für die Wandverlustleistung mit guter Näherung

$$P \propto E_0^2(g + b - a). \quad (2.207)$$

Für den Shuntwiderstand hat man daher mit (2.205)

$$R_{\text{sh}} \propto \left(\frac{\sin kg/2}{kg/2} \right)^2 \frac{g^2}{(g + b - a) \cosh^2 \sqrt{k^2 - k_0^2} a}. \quad (2.208)$$

Dieser Term nimmt sein Maximum bezüglich a in der Nähe von $a = 0$ an, weil üblicherweise $g + b$ wenigstens um den Faktor 3 größer als a ausfällt (die Verlustleistung also von a nahezu unabhängig ist) und das Argument des cosh in der Umgebung von 2 und damit im Bereich großer Anstiege liegt (die Resonatorspannung also stark von a abhängt). Die Apertur ist daher so klein wie möglich zu wählen; als praktische Grenze hat man natürlich

2 Analyse des Bandstrahlklystrons

die Dicke des Elektronenstrahls. Mithin verbleibt nur noch die Spalt- oder Grabenbreite g zur Variation:

$$R_{\text{sh}} \propto \left(\frac{\sin kg/2}{kg/2} \right)^2 \frac{g^2}{g+b-a}. \quad (2.209)$$

Um das Maximum bezüglich g der rechtsseitigen Funktion näherungsweise zu bestimmen, betrachtet man die beiden (technisch irrelevanten) Grenzfälle $b-a=0$ und $b-a \rightarrow \infty$. Im ersten Falle hat man

$$R_{\text{sh}} \propto \frac{\sin^2 kg/2}{kg/2}, \quad (2.210)$$

und das Maximum ergibt sich als Lösung von $kg = 2 \arctan kg$ zu $kg \approx 2.33$. Für realistische Werte von $b-a$ hat man allerdings $kg > 2.33$ zu erwarten, denn mit $b-a=0$ wurde der rechte Bruch in (2.209) zu groß geschätzt. Für $b-a \rightarrow \infty$ kann g gegenüber $b-a$ vernachlässigt werden, es gilt

$$R_{\text{sh}} \propto \sin^2 kg/2, \quad (2.211)$$

und die Maximalstelle lautet $kg = \pi$. Das Maximum ist daher in dem verhältnismäßig engen Bereich $kg \in (2.33, 3.14)$ anzutreffen. Zusammenfassend hat man zur Maximierung des Shuntwiderstands $a \approx 0$ und

$$g \approx \frac{2.8}{k} = \beta_0 \frac{2.8}{k_0} \quad (2.212)$$

zu wählen. Bei einer Betriebsfrequenz von $f = 91.392$ GHz hat man $k_0 \approx 2/\text{mm}$, so daß die optimale Spaltbreite in etwa $1.4\beta_0$ mm beträgt.

Durchlaufene Spannung

Die von einem Strahlelektron beim Passieren eines Resonators *durchlaufene Spannung* sei definiert als

$$U_d = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \dot{\mathbf{r}} dt, \quad (2.213)$$

wobei \mathbf{E} die elektrische Feldstärke im Resonator und $\mathbf{r}(t)$ die Trajektorie des Elektrons bezeichnen; diese Spannung ist vermöge des LORENTZschen Kraftgesetzes proportional zur aufgenommenen kinetischen Energie. Im folgenden wird – sofern nicht ausdrücklich anders statuiert – stets $\dot{\mathbf{r}} = v_0 \mathbf{e}_z = \mathbf{const.}$ vorausgesetzt und die Zeit des Passierens der Ebene $z=0$ mit t_0 bezeichnet. Wie ausführlicher im Abschnitt A.6 dargelegt, ist das Schwingen der durchlaufenen Spannung gemäß $e^{j\omega t_0}$ daher eine notwendige Folge des Schwingens des Feldes gemäß $e^{j\omega t}$, und für die Amplitude der Spannung gilt

$$\hat{U}_d(y) = \int_{-\infty}^{\infty} E_z(y, z) e^{jkz} dz. \quad (2.214)$$

Ein Vergleich mit (2.193) zeigt, daß es sich bei der durchlaufenen Spannung um das Spektrum der Feldstärke in $k_z = k$ handelt

$$\hat{U}_d(y) = A(y, k). \quad (2.215)$$

Dieser bereits bei der Resonatorspannung aufgetauchte Zusammenhang wird in der Literatur oft dadurch bildlich beschrieben, daß man sagt „das Elektron führt eine FOURIERtransformation aus“ [12], [14]. Genaugenommen „berechnet“ das Elektron nur den Wert des Spektrums an der Stelle $k_z = k = \omega/v_0$. Zum vollständigen Spektrum gelangt man also erst durch Einbeziehung *aller* Geschwindigkeiten aus $(-\infty, \infty)$, wohlbemerkt auch jener, die weit jenseits der Lichtgeschwindigkeit liegen. Dieser feine Unterschied wirft eine interessante Frage auf, wenn man bedenkt, daß aus theoretischer Sicht die Kenntnis des Spektrums gleichbedeutend mit der Kenntnis des Feldes ist: Warum genügt es, das Spektrum *an einer Stelle* zu kennen, um die durchlaufene Spannung zu erhalten, obwohl letztere aufgrund ihrer integralen Definition nur unter Kenntnis des *gesamten* Feldes berechnet werden kann? — Betrachtet man die Feldstärke in Abhängigkeit von z und t , multipliziert also (2.192) mit $e^{i\omega t}$, so hat man eine Darstellung der Feldstärke als Überlagerung unendlich vieler, sich in z -Richtung ausbreitender Wellen, auch *Raumharmonische* genannt, wobei jede dieser Wellen eine sich von allen anderen unterscheidende Phasengeschwindigkeit $v_{ph} = \omega/k_z$ besitzt. Das sich mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 bewegende Elektron kann daher nur mit einer einzigen Raumharmonischen *synchron* laufen; nur in dieser Welle „sieht“ die Ladung ein konstantes Feld; alle anderen Wellen erfährt sie als Schwingungen und kann mit diesen im Mittel keine Energie austauschen. Mithin findet eine Kopplung nur mit jener Raumharmonischen statt, für welche $v_{ph} = v_0$, also $k_z = k$ gilt. Es wird also in der Tat nur eine von den unendlich vielen im Feld enthaltenen Informationen benötigt, nämlich die Amplitude der synchronen Raumharmonischen, gewissermaßen eine Komponente (von unendlich vielen) des Resonatorfeldes; diese Information wird bei der Integration ausgefiltert.⁴⁴

Aus (2.215), (2.198) und (2.204) folgt für die durchlaufene Spannung

$$\hat{U}_d(y) = \hat{U}_r \cosh \sqrt{k^2 - k_0^2} y; \quad (2.216)$$

die stärkste Wechselwirkung zwischen Elektron und Resonatorfeld hat man also an der Strahlrohrwand, und für $v_0 \approx c_0$ wird diese Stärke unabhängig von der transversalen Position des Elektrons. Mit der Näherung für die Resonatorspannung (2.205) erhält man schließlich

$$\hat{U}_d(y) \approx M\hat{U} \frac{\cosh \sqrt{k^2 - k_0^2} y}{\cosh \sqrt{k^2 - k_0^2} a}. \quad (2.217)$$

Ebenso wie Gleichung (2.205) ist (2.217) als Näherung für eine einzelne Resonatorzelle zu verstehen.

⁴⁴Diese physikalische Erklärung der eindimensionalen FOURIERtransformation ist zwar intuitiv, vernachlässigt aber einen wesentlichen Punkt: Tatsächlich hat man keine Überlagerung (Addition) sondern eine Integration von Wellen. Die Amplituden der Raumharmonischen sind nicht von z abhängig, so daß das uneigentliche Integral dieser Wellen über z (die Spannung) nicht existieren kann. Um diese Lücke zu schließen, kann man zunächst eine FOURIERentwicklung auf einem Intervall $|z| < L$ durchführen und danach die Auswirkungen für $L \rightarrow \infty$ untersuchen.

2.2.3 Geschwindigkeitsmodulation

Gegenüber der eindimensionalen Rechnung aus Abschnitt 2.1.2 ist nun die y -Abhängigkeit der elektrischen Feldstärke $E(t) = E_z(y, z)e^{j\omega t}$ im Modulator zu beachten. Aus Gleichung (2.3) folgt mit den altbekannten Näherungen $v \approx v_0$, $\gamma \approx \gamma_0$

$$\Delta v = \frac{q e^{j\omega t_0}}{m_0 \gamma_0^3 v_0} \int_{-\infty}^{\infty} E_z(y, z) e^{jkz} dz, \quad (2.218)$$

und ein Vergleich mit (2.214) liefert unter Verwendung von $qU_0 = m_0(\gamma_0 - 1)c_0^2$ und $\gamma^2\beta^2 = \gamma^2 - 1$

$$\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{\hat{U}_d/U_0}{\gamma_0(\gamma_0 + 1)} e^{j\omega t_0}; \quad (2.219)$$

für die Geschwindigkeitsmodulation als Amplitude dieser Schwingung gilt daher

$$M_v = \frac{\hat{U}_d/U_0}{\gamma_0(\gamma_0 + 1)}. \quad (2.220)$$

Nimmt man eine konstante z -Komponente der Feldstärke im Spalt an, läßt sich die durchlaufene Spannung gemäß (2.217) ersetzen, und mit der relativen Modulationsspannung $\alpha = \hat{U}/U_0$ folgt

$$M_v \approx \frac{M\alpha}{\gamma_0(\gamma_0 + 1)} \frac{\cosh \sqrt{k^2 - k_0^2} y}{\cosh \sqrt{k^2 - k_0^2} a}, \quad (2.221)$$

wobei sich diese Gleichung auch als

$$M_v \approx \frac{M\alpha}{\gamma_0(\gamma_0 + 1)} \frac{\cosh \frac{k_0 y}{\beta_0 \gamma_0}}{\cosh \frac{k_0 a}{\beta_0 \gamma_0}} \quad (2.222)$$

schreiben läßt. Wie erwartet ist die Geschwindigkeitsmodulation von der Position des Strahls bzw. der Punktladung in der Apertur abhängig; an der Strahlrohrwand $y = \pm a$ hat man eindimensionale Verhältnisse, wie ein Vergleich mit (2.6) zeigt.

In der Praxis wird die Spalt- bzw. relative Modulationsspannung über die dem Modulator zugeführte *Eingangsleistung* P_{ein} gesteuert, weshalb diese in die Rechnung eingebracht werden soll. Ersetzt man in (2.220) die durchlaufene Spannung gemäß (2.216), so erhält man mit den Beziehungen $\hat{U}_r^2 = 2R_{\text{sh}}P_{\text{ein}}$ und $U_0^2 = R_0P_0$

$$M_v = \frac{\cosh \frac{k_0 y}{\beta_0 \gamma_0}}{\gamma_0(\gamma_0 + 1)} \sqrt{2 \frac{R_{\text{sh}} P_{\text{ein}}}{R_0 P_0}}; \quad (2.223)$$

dabei wurde eine verschwindende Modulationsleistung angenommen. Diese Gleichung – mit $y = 0$ auch im Eindimensionalen gültig – zeigt, daß ein im Verhältnis zum Strahlwiderstand großer (unbelasteter) Shuntwiderstand auch für den Modulator wünschenswert ist.

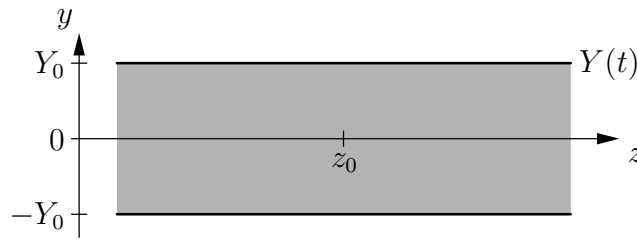


Abbildung 2.35: Langer unmodulierter Bandstrahl konstanter Dicke im feldfreien Raum.

2.2.4 Strahlfokussierung

Jede räumlich begrenzte Ladungswolke neigt aufgrund abstoßend wirkender COULOMB-Kräfte zur Expansion, was sowohl für anfänglich ruhende als auch für bewegte Ansammlungen gleichnamiger Ladungsträger gilt. Dieser Effekt ist von der Konzentration und der Geschwindigkeit der geladenen Teilchen abhängig. Da der Elektronenstrahl im Klystron durch eine enge Röhre geführt wird und Kollisionen von Elektronen mit der Strahlrohrwand um jeden Preis verhindert werden müssen, ist einer *Aufweitung* des Strahls – sofern sie nicht vernachlässigbar gering ausfällt – entgegenzuwirken: Der Strahl ist zu *fokussieren*. Zur Kompensation der Raumladungskräfte kommen prinzipiell elektrische und magnetische Felder in Frage, wobei letzteren aus zwei Gründen der Vorzug gegeben wird: Zum einen erzeugen sie bei schnellen Ladungsträgern erheblich stärkere Kräfte,⁴⁵ und zum anderen beeinflussen sie lediglich die Flugrichtung, nicht jedoch die Energie der Ladungsträger, vergleiche Abschnitt A.2. Im folgenden wird zunächst die Aufweitung unmodulierter Bandstrahlen und anschließend deren magnetische Fokussierung analysiert. Die Untersuchung geschwindigkeits- und/oder dichtemodulierter Strahlen bleibt der Simulation vorbehalten.

Raumladungsbedingte Aufweitung unmodulierter Bandstrahlen

Gegeben sei eine homogene Raumladungswolke der Dichte ρ_0 , welche sich zwischen den Ebenen $y = -Y_0$ und $y = Y_0$ befindet und deren Ladungen zum Zeitpunkt $t = t_0$ ruhen, d.h. ein unendlich langer und breiter ruhender Bandstrahl der Dicke $2Y_0$, Abbildung 2.35. Aufgrund der Symmetrien dieser Anordnung hat man es in $t = t_0$ mit dem eindimensionalen Potentialproblem

$$\frac{d^2\phi}{dy^2} = \begin{cases} -\rho_0/\epsilon_0 & : |y| \leq Y_0 \\ 0 & : |y| \geq Y_0 \end{cases} \quad (2.224)$$

mit $\phi(-y) = \phi(y)$ zu schaffen, wobei wegen fehlender Flächenladungen die Stetigkeit des Potentials nebst erster Ableitung in $|y| = Y_0$ zu fordern ist. Die frei wählbare additive

⁴⁵Mit modernen Permanentmagneten erreicht man ohne größere Probleme Induktionen in der Größenordnung von $B = 1$ T; die bezüglich der Kraftwirkung äquivalente elektrische Feldstärke lautet $E = \beta c_0 B$. Für eine sich mit $\beta = 0.3$ (≈ 25 kV für Elektronen) bewegende Ladung wären das ≈ 100 MV/m!

2 Analyse des Bandstrahlklystrons

Konstante wird gemäß $\phi(0) = 0$ festgelegt, womit sich die eindeutige Lösung für den repräsentativen oberen Halbraum zu

$$\phi(y) = \begin{cases} -\frac{\rho_0 y^2}{2\epsilon_0} & : y \leq Y_0 \\ \frac{\rho_0 Y_0}{\epsilon_0} \left(\frac{Y_0}{2} - y \right) & : y \geq Y_0 \end{cases} \quad (2.225)$$

und die zugehörige elektrische Feldstärke zu

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_y \begin{cases} \frac{\rho_0 y}{\epsilon_0} & : y \leq Y_0 \\ \frac{\rho_0 Y_0}{\epsilon_0} & : y \geq Y_0 \end{cases} \quad (2.226)$$

ergibt. Letztere wächst also innerhalb der Raumladung linear mit dem Abstand von der Strahlmitte und ist außerhalb des Strahls konstant. Wegen $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ ist damit die Kraft bekannt, die zum Zeitpunkt $t = t_0$ auf eine sich in $y(t_0) = y_0$ innerhalb des Strahls befindende Ladung einwirkt

$$\mathbf{F} = \frac{q\rho_0 y_0}{\epsilon_0} \mathbf{e}_y, \quad (2.227)$$

und wegen $F = \dot{p} = m_0 \dot{v}$ ($\gamma = 1$) kennt man auch ihre anfängliche Beschleunigung

$$\ddot{y} = \frac{q\rho_0 y_0}{m_0 \epsilon_0}. \quad (2.228)$$

Mit diesem Zusammenhang ist zunächst noch keine Differentialgleichung für die Trajektorien der Ladungen gegeben, denn Raumladungsdichte und Feldstärke sind bislang nur für den Anfangszustand der Ladungswolke bekannt. Man kann aber zeigen, daß die Feldstärke am Ort jeder Ladung konstant sein muß, weil sich unter der Voraussetzung verschwindender Anfangsgeschwindigkeiten Ladungen nicht überholen können; und dies ist unter gewissen Voraussetzungen selbst bei anfänglich inhomogener Verteilung der Fall.⁴⁶ Die

⁴⁶Für geringe Geschwindigkeiten gilt $\gamma \approx 1$, und das Anfangswertproblem für die Trajektorien lautet

$$\ddot{y}(y, t) = \frac{q}{m_0 \epsilon_0} \int_0^y \rho(\xi, t) d\xi, \quad (2.229)$$

$y(t_0) = y_0$, $\dot{y}(t_0) = 0$, sofern man von einer symmetrischen Raumladungsdichte $\rho(y, t) = \rho(-y, t)$ ausgeht. Fordert man ferner $\rho(y, t) > 0$ innerhalb der Wolke (nur positiv geladene Teilchen), ist das Integral – und damit die Beschleunigung – streng monoton wachsend bezüglich y . Dann erfährt eine „weiter innen“ gestartete Ladung stets eine geringere Beschleunigung als eine „weiter außen“ gestartete, so daß bei gleichen Anfangsgeschwindigkeiten letztere niemals eingeholt werden kann. Mithin muß die Reihenfolge der Ladungen bezüglich y über alle Zeiten hinweg erhalten bleiben; speziell müssen alle im Bereich $[0, y]$ enthaltenen Ladungen in diesem verbleiben. Dann stellt das sich als Verschiebungsflußdichte an der Stelle y entpuppende Integral aus (2.229) eine Konstante dar, weshalb auch die elektrische Feldstärke am Ort jeder Ladung konstant sein muß.

Trajektorien sind daher die Lösungen des Anfangswertproblems

$$\ddot{y}(t) = \frac{q\rho_0 y_0}{m_0 \epsilon_0}, \quad (2.230)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad (2.231)$$

$$\dot{y}(t_0) = 0 \quad (2.232)$$

und somit durch

$$y(t) = y_0 \left[1 + \frac{q\rho_0}{2m_0 \epsilon_0} (t - t_0)^2 \right] \quad (2.233)$$

gegeben.⁴⁷ Dies muß auch für die Randladungen gelten; die Gleichung der Berandung lautet folglich

$$Y(t) = Y_0 \left[1 + \frac{q\rho_0}{2m_0 \epsilon_0} (t - t_0)^2 \right]. \quad (2.235)$$

Geht man zu einem sich mit der Geschwindigkeit v_0 in z -Richtung bewegenden Bandstrahl über, ersetzt also die für alle Ladungen geltende Anfangsbedingung $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{0}$ durch $\mathbf{v}(t_0) = v_0 \mathbf{e}_z$, ergibt sich für das elektrische Feld keinerlei Änderung. Allerdings hat man nun zusätzlich die durch den Strahlstrom hervorgerufene Induktion zu beachten, welche sich durch Integration der 1. MAXWELLgleichung unter Berücksichtigung der Symmetrien zu

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_x \begin{cases} -\mu_0 \rho_0 v_0 y & : y \leq Y_0 \\ -\mu_0 \rho_0 v_0 Y_0 & : y \geq Y_0 \end{cases} \quad (2.236)$$

ergibt; sie weist also prinzipiell dieselbe örtliche Abhängigkeit auf wie das elektrische Feld. Auch beim sich bewegenden Bandstrahl ist die elektrische Feldstärke – und damit auch die Induktion – am Ort jeder Ladung konstant. Ist die Anfangsgeschwindigkeit groß genug, gilt $\mathbf{v}(t) \approx \mathbf{v}(t_0)$ über eine längere Zeit hinweg, so daß auch die auf eine Ladung wirkende Kraft $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ mit guter Näherung konstant ist; es gilt

$$\mathbf{F} = \frac{q\rho_0 y_0}{\epsilon_0 \gamma_0^2} \mathbf{e}_y. \quad (2.237)$$

Diese Kraft wirkt offenbar transversal zur Bewegungsrichtung der Ladung, weshalb beim Übergang zur Beschleunigung ihre *transversale Masse* zu verwenden ist, $\dot{\mathbf{p}} = m_0 \gamma_0 \dot{\mathbf{v}}$, siehe Abschnitt A.2. Mithin ist das Anfangswertproblem für die Trajektorien durch

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{q\rho_0 y_0}{m_0 \gamma_0^3 \epsilon_0} \mathbf{e}_y, \quad (2.238)$$

$$\mathbf{r}(t_0) = x_0 \mathbf{e}_x + y_0 \mathbf{e}_y + z_0 \mathbf{e}_z, \quad (2.239)$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0) = v_0 \mathbf{e}_z \quad (2.240)$$

⁴⁷Man kann weiterhin zeigen, daß eine anfänglich homogene Raumladung über alle Zeiten hinweg homogen bleiben muß. Für den hier behandelten Fall hat man daher

$$\rho(t) = \frac{\rho_0 y_0}{y(t)} = \frac{\rho_0}{1 + \frac{q\rho_0}{2m_0 \epsilon_0} (t - t_0)^2}. \quad (2.234)$$

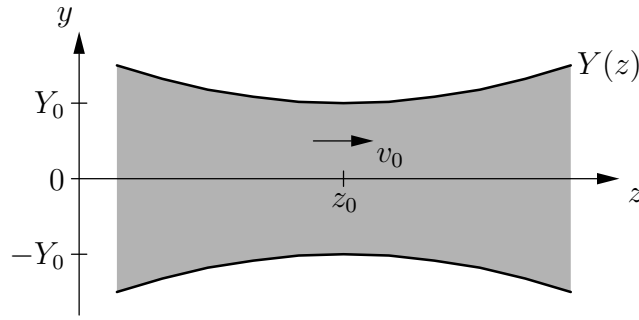


Abbildung 2.36: Aufweitung eines langen unmodulierten Bandstrahls im von äußeren Feldern freien Raum.

gegeben; seine Lösung lautet

$$\mathbf{r}(t) = x_0 \mathbf{e}_x + y_0 \left[1 + \frac{q\rho_0}{2m_0\gamma_0^3\epsilon_0} (t - t_0)^2 \right] \mathbf{e}_y + z_0(t - t_0) \mathbf{e}_z. \quad (2.241)$$

Um zu einer Kurvengleichung zu gelangen, macht man sich den einfachen Zusammenhang zwischen der z -Position und der Zeit zunutze. Offenbar gilt $t - t_0 = (z - z_0)/v_0$, so daß man mittels Substitution erhält

$$y(z) = y_0 \left[1 + \frac{q\rho_0}{2m_0\gamma_0^3v_0^2\epsilon_0} (z - z_0)^2 \right]. \quad (2.242)$$

Eine derartige Parabel beschreiben alle Ladungen im Strahl, also auch die Randladungen, weshalb die Gleichung der Randkurve lautet

$$Y(z) = Y_0 \left[1 + \frac{q\rho_0}{2m_0\gamma_0^3v_0^2\epsilon_0} (z - z_0)^2 \right], \quad (2.243)$$

siehe Abbildung 2.36, bzw. in normierter Form

$$\frac{\Delta Y}{Y_0} = \frac{q\rho_0(2Y_0)^2}{2m_0\gamma_0^3v_0^2\epsilon_0} \left(\frac{\Delta z}{2Y_0} \right)^2. \quad (2.244)$$

Eine handliche Formel sollte anstelle von Ladungsdichte und Geschwindigkeit Strom und Spannung enthalten. Als Stromwert bietet sich der Term

$$I_{\square} = \rho_0 v_0 (2Y_0)^2 \quad (2.245)$$

an, der sogenannte *Strom pro Quadrat*. Dabei handelt es sich um jenen Strom, welcher – an der dünnsten Stelle des Bandstrahls – durch eine quadratische Fläche fließt, deren Kantenlänge der Strahldicke entspricht. Dieser Wert ist offenbar unabhängig von der Breite des Bandstrahls. Unter Verwendung der im Abschnitt A.2 hergeleiteten Beziehung $\gamma_0^2 v_0^2 = (\gamma_0 + 1)qU_0/m_0$ läßt sich ferner der die Strahlgeschwindigkeit repräsentierende Term mithilfe der Strahlspannung schreiben, und man erhält

$$\frac{\Delta Y}{Y_0} = \frac{K_{\square}}{K_0} \left(\frac{2}{\gamma_0 + 1} \right)^{3/2} \left(\frac{\Delta z}{2Y_0} \right)^2. \quad (2.246)$$

Es bezeichnet K_{\square} die *Perveanz pro Quadrat* eines Bandstrahls

$$K_{\square} = \frac{I_{\square}}{U_0^{3/2}}, \quad (2.247)$$

und K_0 ist diejenige Perveanz (pro Quadrat), die einem Bandstrahl geringer Geschwindigkeit zugeordnet ist, welcher seine Dicke auf einer dieser Dicke entsprechenden Distanz verdoppelt:

$$K_0 = 4\epsilon_0\sqrt{2q/m_0}; \quad (2.248)$$

für Elektronenstrahlen gilt $K_0 = 21 \mu\text{P}$. Im Ergebnis der Rechnungen stellt sich also die Perveanz pro Quadrat als maßgeblicher Parameter zur Beschreibung der potentiellen Aufweitung eines Bandstrahls heraus, womit sich die Perveanz – ursprünglich als Kanonenparameter eingeführt – zum Strahlparameter qualifiziert. Gleichwohl besitzt die Perveanz pro Quadrat im Gegensatz zur Perveanz keine universelle Bedeutung, denn sie ist im selben Maße wie der Strom pro Quadrat von der Strahldicke abhängig.⁴⁸

Die Darstellung der Strahlaufweitung mittels der Perveanz ist die in der Literatur übliche, vgl. [34], [37] und [14]. Es stellt sich jedoch die Frage, ob der Bezug der Distanz auf die Dicke des Strahls von praktischem Wert ist. Beim Klystron ist die Aufweitung *im Driftbereich* zu verhindern, also im Bereich zwischen Modulator und Demodulator, weshalb es sinnvoller erscheint, die Driftlänge als Bezug zu verwenden. Prinzipiell ist auch diese Länge variabel, jedoch gibt es bei gegebenem Strahl eine optimale Driftlänge, wie aus Abschnitt 2.1.3 bekannt ist; sie beträgt ein Viertel der Plasmawellenlänge. Die Strahlaufweitung sollte also als Funktion von $\Delta z/(\lambda_p/4)$ geschrieben werden. Für die relativistische Plasmafrequenz an der dünnsten Stelle des Strahls gilt

$$\omega_p^2 = \frac{q\rho_0}{m_0\gamma_0^3\epsilon_0}, \quad (2.249)$$

so daß mit $\lambda_p = 2\pi v_0/\omega_p$ aus (2.244) folgt

$$\frac{\Delta Y}{Y_0} = \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{\Delta z}{\lambda_p/4} \right)^2. \quad (2.250)$$

⁴⁸Vermutlich wurde die Perveanz pro Quadrat ursprünglich aus Gründen der quantitativen Vergleichbarkeit mit Perveanzen runder Strahlen eingeführt: Grundsätzlich ist die Perveanz eine Kanonenkonstante, denn sie ist nur von der Geometrie der Kanone abhängig. Ferner ist der Strahlstrom und mithin der Quotient $I/U^{3/2}$ aufgrund der Stromkontinuität unabhängig von den Abmessungen des Strahls, womit sich die Perveanz auch als Strahlkonstante erweist. Beim Übergang auf zwei Dimensionen ergeben sich beim Rundstrahl keine Änderungen, denn dessen Berandung kann vollständig in r und z dargestellt werden. Beim Bandstrahl nimmt man hingegen eine unendliche Breite an, womit Gesamtstrom und damit Perveanz kein Sinn beigelegt werden kann; diese Größen können nur noch pro Breitereinheit sinnvoll gemessen werden. Hier stellen der *Strom pro Breite* $I' = dI/dx$ und die *Perveanz pro Breite* $K' = I'/U^{3/2}$ Konstanten von Kanone und Strahl dar. Zum Vergleich mit Rundstrahlen eignen sie sich freilich wenig, was sich schon in den unterschiedlichen Dimensionen manifestiert. Nun weist die Aufweitung bei Rundstrahlen dieselbe quadratische Abhängigkeit auf wie bei Bandstrahlen, weswegen prinzipiell eine Vergleichbarkeit der Perveanz K eines Rundstrahls und der Perveanz pro Quadrat K_{\square} eines Bandstrahls gegeben ist. – Dies ist in der Tat erstaunlich, denn bei Rundstrahlen hat man $E \propto 1/r \neq \text{const.}$; in der Nähe des Dickenminimums scheint diese Tatsache jedoch keine nennenswerte Auswirkung zu besitzen. – Es zeigt sich, daß bei $K_{\square}/2 = K/\pi$ vergleichbare Aufweitungen bezüglich der Strahldicke bzw. des Strahldurchmessers vorliegen.

Das erstaunliche Ergebnis zeigt, daß die relative Aufweitung aller Bandstrahlen über ihre optimalen Driftlänge dieselbe ist und $\pi^2/8$ beträgt (für Rundstrahlen erhält man $\pi^2/16$). Mithin kann kein Klystron ohne Strahlfokussierung auskommen – es sei denn, man gibt sich mit geringen Strommodulationen zufrieden (oder arbeitet in einem Parameterbereich, in welchem die ballistische Analyse die realistischeren Ergebnisse liefert).

Prinzip der magnetischen Strahlfokussierung

Einen Bandstrahl konstanter Dicke erhält man genau dann, wenn nirgends im Strahl vertikale Kräfte auftreten, d.h. bei der vorgelegten Koordinatenwahl $F_y = 0$ für alle Ladungsträger gilt. Mithin besteht die Aufgabe der magnetischen Fokussierung darin, die mit Gleichung (2.237) bereits quantitativ erfaßte defokussierende Kraft durch eine gleichgroße fokussierende Kraft zu kompensieren. Soll dies aus den eingangs genannten Gründen allein mithilfe eines Magnetfeldes geschehen, lehrt das LORENTZsche Kraftgesetz grundsätzlich zwei Möglichkeiten: Entweder verwendet man ein x -gerichtetes Magnetfeld und macht sich die z -Komponente der Teilchengeschwindigkeit zunutze oder man verwendet ein z -gerichtetes Magnetfeld und nutzt die x -Komponente der Teilchengeschwindigkeit. Dabei ist zu beachten, daß das Produkt aus Geschwindigkeit und Induktion genau wie die defokussierende Kraft eine lineare Funktion von y sein muß.

Da die Strahlgeschwindigkeit von y unabhängig ist und dies zum Funktionieren der Röhre auch so bleiben muß, hat man im ersten Falle eine Induktion $B_x \propto y$ zu erzeugen – es ist also das Eigenfeld des Strahls zu verstärken. Die Generierung eines derartigen Feldes ist im Zweidimensionalen unmöglich und im Dreidimensionalen wegen der großen Breite des Strahls unwirtschaftlich,⁴⁹ weshalb diese Methode der Fokussierung nicht weiter untersucht wird.

Im zweiten Falle ist man vom Zwang zur linearen Abhängigkeit der Induktion von y befreit; man kann sich beispielsweise mit einem Feld $B_z = \text{const.}$ begnügen, was verhältnismäßig einfach – zum Beispiel mittels einer Zylinderspule – zu generieren ist. Allerdings hat man nun eine von Hause aus im Strahl nicht vorhandene transversale Geschwindigkeitskomponente $v_x \propto y$ zu erzeugen. Es zeigt sich, daß diese Komponente – gewissermaßen als angenehmer Nebeneffekt – durch die jedem homogenen Magnetfeld endlicher Länge zugehörigen Randfelder automatisch hervorgerufen wird. Diese Methode der Fokussierung wird im folgenden eingehend analysiert.

Um bei der verhältnismäßig komplizierten quantitativen Untersuchung der magnetischen Fokussierung den Überblick zu behalten, ist es von kaum zu unterschätzendem Wert, die fokussierende Wirkung einer breiten Zylinderspule auf einen in ihre Mittelebene injizierten Bandstrahl zu verstehen, Abbildung 2.37. Dieses Prinzip liegt allen weiteren Untersuchungen zugrunde und soll daher etwas ausführlicher erläutert werden. Dazu be-

⁴⁹Um dies einzusehen, setzt man $B_x = cy$. Im Zweidimensionalen hat man $\partial/\partial x \equiv 0$, woraus folgt $J_z = \mathbf{e}_z \cdot \text{rot} \mathbf{B} = -\partial B_x/\partial y = -c \neq 0$. Es wäre also eine konstante Stromdichte im Strahlbereich herzustellen, was sicherlich nicht möglich ist, ohne den Strahl zu stören. Im Dreidimensionalen folgt aus dem Verschwinden von J_z im Strahlbereich $\partial B_x/\partial y = \partial B_y/\partial x = c$ und mithin (bis auf eine zu vernachlässigende Konstante) $B_y = cx$. Ein derartiges Feld findet man näherungsweise im Zentrum eines Quadrupols. Aufgrund des großen Verhältnisses zwischen Strahlbreite und -dicke müßten die Pole sehr weit voneinander entfernt sein, um die Linearität über der gesamten Strahlbreite sicherzustellen. Es bedürfte daher ausgesprochen starker Magnete.

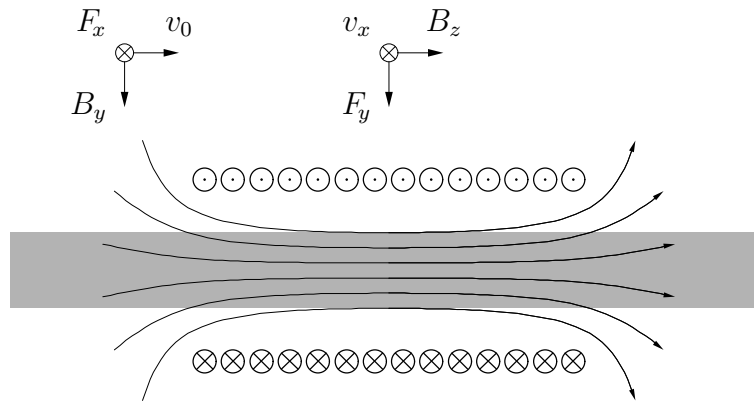


Abbildung 2.37: Prinzip der Bandstrahlfokussierung mittels breiter Zylinderspule.

trachte man eine am oberen Strahlrand befindliche, als positiv angenommene Ladung, welche außerhalb des Magnetfeldes nur eine longitudinale Geschwindigkeitskomponente v_0 besitzt. Am Eingang der Spule (links) wirkt auf diese Ladung eine Kraft F_x , welche durch die z -gerichtete Strahlgeschwindigkeit v_0 und die starke vertikale Komponente der Induktion B_y zustandekommt. Dadurch wird der Ladung eine transversale Geschwindigkeitskomponente v_x zuteil. Zusammen mit dem longitudinalen Hauptfeld B_z der Spule ergibt sich eine zur Mittelebene des Strahls gerichtete Kraft F_y , welche also der defokussierenden Kraft entgegentritt. Je weiter sich die Ladung der Spulenmitte nähert, desto geringer wird die vertikale Komponente des Magnetfeldes B_y und mithin die transversale Beschleunigung der Ladung; in der Mitte verschwinden beide gänzlich. D.h. im Bereich des näherungsweise *homogenen* Feldes gilt $v_x = \text{const.}$ und daher $F_y = \text{const.}$. Im rechten Teil der Spule kehren sich die Verhältnisse um; die Ladung erfährt eine transversale Bremsung und besitzt am Ausgang der Spule dieselbe vektorielle Geschwindigkeit wie an ihrem Eingang. Die Feldstärke wird man derart einstellen, daß in der Spulenmitte eine vollständige Kompensation der vertikalen Kräfte eintritt. Bedenkt man, daß eine Verstärkung des Mittelfeldes eine gleichgroße Verstärkung des Randfeldes nachsichzieht, stellt sich die Frage, ob eine Gleichgewichtsfeldstärke überhaupt existiert. Man sieht aber schnell ein, daß sowohl das Mitten- als auch das Randfeld fokussierend wirkt (letzteres vermittelt durch die transversale Geschwindigkeit), weshalb ein Gleichgewicht einstellbar sein muß. Bislang ist nicht klar, ob dies auch für *alle* Ladungsträger unabhängig von ihrer vertikalen Position y im Strahl möglich ist. Gesichert ist jedoch die Symmetrie $f(-y) = -f(y)$ für B_y , v_x und somit auch für F_y , weshalb in der Nähe von $y = 0$ in der Tat $f \propto y$ für diese Größen gelten sollte. Prinzipiell sollte sich ein Bandstrahl also mittels Zylinderspule fokussieren lassen.

Das Theorem von BUSCH

Die quantitative Untersuchung der magnetischen Fokussierung hat die Frage zu beantworten, welche Induktion B_0 in der Spulenmitte einzustellen ist, um das Strahlgleichgewicht an dieser Stelle herzustellen, d.h. die transversalen Kräfte vollständig zu kompensieren.

2 Analyse des Bandstrahlklystrons

Den vorangestellten Überlegungen zufolge ist dazu ein Wissen um die transversalen Geschwindigkeiten v_x der Ladungsträger in der Spulenmitte vonnöten, welches – ebenfalls diesen Überlegungen zufolge – ein Wissen um die Vorgeschichte dieser Ladungen voraussetzt, nämlich die Kenntnis ihrer Bewegungen in dem transversalen Kraftfeld, welches durch die Bewegung selbst erst hervorgerufen wird. Dieser Tatbestand scheint eine analytische Lösung des Problems auf den ersten Blick unmöglich zu machen. Glücklicherweise handelt es sich bei dem angesprochenen Kraftfeld jedoch um ein *konservatives* Feld, womit neben den Anfangsbedingungen allein die Aufenthaltsorte der Ladungen bekannt sein müssen, um auf deren transversale Geschwindigkeiten schließen zu können. Für axialsymmetrische Magnetfelder wurde dieser Zusammenhang 1926 von BUSCH⁵⁰ publiziert [10], weshalb er später als *Theorem von BUSCH* in die Literatur einging. Wegen der großen Bedeutung dieses Gesetzes nicht nur für die magnetische Strahlfokussierung wird es hier in einer sehr allgemeingültigen Form hergeleitet.

Durch ein elektromagnetisches Feld mit den Eigenschaften

$$E_x = 0, \quad (2.251)$$

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = \mathbf{0}, \quad (2.252)$$

$$\partial \mathbf{B} / \partial x = \mathbf{0} \quad (2.253)$$

bewege sich eine Punktladung q , deren Position $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$ und Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}}(t_1)$ zu einem Zeitpunkt $t = t_1$ bekannt seien. Auf diese Ladung wirkt die LORENTZkraft, weshalb die Differentialgleichung ihrer Trajektorie $\mathbf{r}(t)$ durch

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_0 \dot{\mathbf{r}}) = q[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] \quad (2.254)$$

gegeben ist; ihre eindeutige Lösbarkeit ist aufgrund der Anfangsbedingungen sichergestellt. Mittels Integration über die Zeit und anschließender skalarer Multiplikation mit \mathbf{e}_x erhält man daraus

$$\gamma \dot{x} - \gamma_1 \dot{x}_1 = \frac{q}{m_0} \int_{t_1}^t (\mathbf{B} \times \mathbf{e}_x) \cdot \dot{\mathbf{r}} dt. \quad (2.255)$$

Da der in den Klammern stehende Term nur implizit von der Zeit abhängig ist, hat man es mit der Parameterform des Kurvenintegrals

$$\gamma \dot{x} - \gamma_1 \dot{x}_1 = \frac{q}{m_0} \int_c (\mathbf{B} \times \mathbf{e}_x) \cdot d\mathbf{r} \quad (2.256)$$

zu schaffen, wobei der Integrationsweg \mathcal{C} zunächst gleich der (bisher unbekannt) Trajektorie der Ladung zu wählen ist. Allerdings handelt es sich beim Integranden wegen

$$\text{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{e}_x) \equiv \partial \mathbf{B} / \partial x - \mathbf{e}_x \text{div} \mathbf{B} \equiv \mathbf{0} \quad (2.257)$$

⁵⁰Busch, Hans Walter Hugo (27.2.1884-16.12.1973), deutscher Physiker, 1922-1927 Professur am Physikalischen Institut der Universität Jena, später Professur am Lehrstuhl für Elektrotechnik der Technischen Hochschule Darmstadt.

um ein Potentialfeld, weshalb das Kurvenintegral aus (2.256) *wegunabhängig* ist und gemäß

$$\dot{x} = \frac{\gamma_1}{\gamma} \dot{x}_1 + \frac{q}{\gamma m_0} \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}} (\mathbf{B} \times \mathbf{e}_x) \cdot d\mathbf{r} \quad (2.258)$$

geschrieben werden kann; den Integrationsweg wird man im Sinne einer möglichst einfachen Auswertung des Integrals wählen. Dies ist die verallgemeinerte BUSCHgleichung für *ebene* Felder. Ihre große Bedeutung besteht darin, daß mit ihrer Hilfe die Geschwindigkeitskomponente \dot{x} einer Punktladung allein aus dem Magnetfeld (und damit überhaupt analytisch) bestimmt werden kann. Dies ist ein wesentlicher Schritt auf dem Wege zur vollständigen Trajektorienberechnung. Wesentlich ist weiterhin, daß die getätigten Voraussetzungen (2.251) bis (2.253) für die Eigenfelder eines Bandstrahls i.allg. erfüllt sind. Mithin genügt jede Ladung eines Bandstrahls der BUSCHgleichung (2.258), sofern das Feld der Fokussierungseinrichtung unabhängig von x und t ist.

Zum Zwecke besserer Anschaulichkeit wird dem Kurvenintegral aus (2.258) gern eine physikalische bzw. geometrische Interpretation verliehen. Heftet man der betrachteten Punktladung einen konstanten Vektor $w\mathbf{e}_x$ an, so überstreicht dieser eine gewisse Fläche, und der magnetische Fluß durch diese Fläche beträgt

$$\Psi = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}} \mathbf{B} \cdot (w\mathbf{e}_x \times d\mathbf{r}) = w \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}} (\mathbf{B} \times \mathbf{e}_x) \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.259)$$

Daß es sich hierbei um *wegunabhängige* Kurvenintegrale handelt, folgt wieder aus (2.257), ist aber auch anschaulich klar: Wegen der Unabhängigkeit der Induktion von x ist der Fluß unabhängig von der x -Position der Ladung entlang ihres Pfades. Man kann also anstelle der räumlichen Trajektorie ihre Projektion in die Ebene $x = x_1$ betrachten. Zwei (ebene) Integrationspfade erzeugen dann vermöge des Vektors $w\mathbf{e}_x$ einen Zylindermantel. Wegen $\partial B_x / \partial x \equiv 0$ verschwindet zunächst der Gesamtfluß durch dessen Deckflächen. Dann muß wegen der Quellenfreiheit der Induktion aber auch der Fluß durch den Mantel verschwinden, woraus die *Wegunabhängigkeit* der beiden Integrale aus (2.259) folgt. Das in der BUSCHgleichung enthaltene Integral läßt sich daher als Fluß pro Tiefe interpretieren, und mit

$$\Psi' = \frac{\Psi}{w} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}} (\mathbf{B} \times \mathbf{e}_x) \cdot d\mathbf{r} \quad (2.260)$$

gelangt man zu ihrer übersichtlicheren Form

$$\dot{x} = \frac{\gamma_1}{\gamma} \dot{x}_1 + \frac{q}{\gamma m_0} \Psi'. \quad (2.261)$$

Abschließend sei eine alternative Vorgehensweise für den Fall einer zusätzlich verschwindenden x -Komponente der Induktion aufgezeigt (bislang wurde lediglich ihre Unabhängigkeit von x gefordert). Dann existiert ein elektrodynamisches Vektorpotential, das

lediglich eine x -Komponente besitzt [38] und überdies unabhängig von x ist, sofern \mathbf{B} als hinreichend oft differenzierbar vorausgesetzt wird

$$\mathbf{B} = \text{rot}[A(y, z)\mathbf{e}_x]. \quad (2.262)$$

Wegen $\mathbf{B} \times \mathbf{e}_x = -\text{grad}A$ hat man in (2.258) ein vollständiges Differential zu integrieren, was bekanntlich eine leichte Aufgabe darstellt und zu dem entsprechend übersichtlichen Ergebnis

$$\dot{x} = \frac{\gamma_1}{\gamma} \dot{x}_1 - \frac{q}{\gamma m_0} [A(y, z) - A(y_1, z_1)] \quad (2.263)$$

führt. Dieser Weg entspricht dem seinerzeit von BUSCH eingeschlagenen. Es gilt dabei zu bedenken, daß das Eigenfeld eines Strahls eine i.allg. nicht unbeträchtliche x -Komponente der Induktion besitzt, weshalb diese Ableitung ihrer bestehenden Einfachheit zum Trotz für die Strahlfokussierung nur bedingt von Wert ist.

Nichtperiodische Fokussierung

Strahlfokussierung mittels nicht-periodischer Magnetfelder wird kurz als *nichtperiodische Fokussierung* bezeichnet; als Beispiel sei jene mittels Zylinderspule angeführt. Wie bereits erwähnt, ist man praktisch auf homogene, parallel zum Strahl ausgerichtete Magnetfelder (nebst ihrer Randfelder) festgelegt, weshalb diese Art der Fokussierung in der angelsächsischen Literatur als *uniform-field focusing* bezeichnet wird. Mit Hilfe der BUSCHgleichung kann nun die für einen stabilen Strahltransport benötigte Induktion B_0 einer nichtperiodischen Fokussierungsanordnung bestimmt werden.

Dazu betrachte man die Trajektorie $\mathbf{r}(t)$ einer für den gesamten Strahl repräsentativen Punktladung q , welche zum Zeitpunkt t_1 von der Katode emittiert wurde, zum Zeitpunkt t_0 die Anode bereits passiert und somit die volle (im wesentlichen z -gerichtete) Strahlgeschwindigkeit v_0 erreicht hat. Zur selben Zeit befinde sich die Ladung bereits im näherungsweise homogenen Bereich des externen Magnetfeldes. Ferner sei die gesamte Anordnung inklusive der externen Felder spiegelsymmetrisch bezüglich $y = 0$. Für $t \geq t_0$ gilt dann $\gamma(t) \approx \gamma(t_0) = \gamma_0$, und die Differentialgleichung für die y -Position der Ladung lautet

$$\ddot{y} = \frac{q}{\gamma_0 m_0} (E_y + v_0 B_x - \dot{x} B_z). \quad (2.264)$$

Dabei mögen die Feldkomponenten E_y, B_x allein vom Strahl und $B_z = B_0$ allein von der Fokussierung herrühren. Für den vom Strahl herrührenden Anteil gilt gemäß (2.237) und (2.249)

$$\frac{q}{\gamma_0 m_0} (E_y + v_0 B_x) = \omega_p^2 y_0 \quad (2.265)$$

mit $y_0 = y(t_0)$. Hierbei handelt es sich bekanntlich um ein Konstante; die Plasmafrequenz ist an der Stelle $z_0 = z(t_0)$ zu nehmen. Unter der Annahme einer verschwindenden x -Komponente des externen Magnetfeldes wird die transversale Geschwindigkeitskomponente \dot{x} der Ladung nun mit Hilfe des Theorems von BUSCH (2.258) bestimmt. Ausgehend

von ihrer Startposition \mathbf{r}_1 wird der Integrationspfad über die Katodenoberfläche, die Symmetrieebene $y = 0$ und die Ebene $z = \text{const.}$ bis hin zur aktuellen Position der Ladung \mathbf{r} geführt. Da die Symmetrieebene fluffrei sein muß, verschwindet das Kurvenintegral in dieser Ebene. Gleiches gilt für die Katodenoberfläche, sofern diese als fluffrei vorausgesetzt wird. Vernachlässigt man die Emissionsgeschwindigkeit, gilt außerdem $\dot{x}_1 = \dot{x}(t_1) = 0$ und mithin

$$\dot{x} = \frac{q}{\gamma_0 m_0} \int_0^y B_z \, dy = \frac{q}{\gamma_0 m_0} y B_0 = \omega_z y. \quad (2.266)$$

Für den von der Fokussierung herrührenden Anteil aus Gleichung (2.264) hat man daher

$$\frac{q}{\gamma_0 m_0} \dot{x} B_z = \omega_z^2 y \quad (2.267)$$

mit der lediglich als Maß für die Stärke des Fokussierungsfeldes eingeführten *Zyklotronfrequenz*

$$\omega_z = \frac{q B_0}{\gamma_0 m_0}, \quad (2.268)$$

womit (2.264) schließlich als

$$\ddot{y} + \omega_z^2 y - \omega_p^2 y_0 = 0 \quad (2.269)$$

geschrieben werden kann. Da keine weiteren Voraussetzungen bezüglich der betrachteten Ladung getätigt wurden, außer daß sie sich innerhalb des Strahls befinden möge, ist diese Gleichung für *jede* Ladung des Strahls und daher speziell für seine Randladungen gültig. Die Gleichung für die Randladungen wird auch als *Strahlgleichung* (beam equation) bezeichnet. Für die nichtperiodische Fokussierung lautet sie folglich

$$\ddot{Y} + \omega_z^2 Y - \omega_p^2 Y_0 = 0. \quad (2.270)$$

Mit den Anfangswerten $Y(t_0) = Y_0$ und $\dot{Y}(t_0) = \dot{Y}_0$ erhält man die allgemeine Form der Einhüllenden über der Zeit zu

$$Y = Y_0 \left[\frac{\omega_p^2}{\omega_z^2} + \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_z^2} \right) \cos \omega_z(t - t_0) \right] + \frac{\dot{Y}_0}{\omega_z} \sin \omega_z(t - t_0) \quad (2.271)$$

und für einen parallelen Strahl in $t = t_0$ daher

$$\frac{Y}{Y_0} = \frac{\omega_p^2}{\omega_z^2} + \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_z^2} \right) \cos \omega_z(t - t_0). \quad (2.272)$$

Wegen $z \approx z_0 + v_0(t - t_0)$ kann man bei Bedarf einfach zur Raumkurve übergehen. Offenbar bleibt ein in $z = z_0$ paralleler Bandstrahl genau dann über die gesamte Länge des homogenen Magnetfeldes parallel, wenn

$$\omega_z = \omega_p \quad (2.273)$$

gilt, wenn also die dem Magnetfeld zugeordnete Zyklotronfrequenz gleich der Plasmafrequenz des Strahls in $z = z_0$ gewählt wird.⁵¹ Ist dies nicht der Fall, wird der Strahl mit der Zyklotronfrequenz schwingen; die zugehörige Wellenlänge beträgt v_0/f_z .

Abschließend ist anzumerken, daß eine nichtperiodische Fokussierung für Bandstrahlen in der Praxis nicht angewendet werden kann; die vorgestellte Analyse dient lediglich dem Zweck der Referenz. Der Grund dafür ist in Gleichung (2.266) zu suchen, welche besagt, daß die transversalen Geschwindigkeiten der Ladungen proportional zu ihren Abständen von der Symmetrieebene ausfallen, was bei endlich breiten Bandstrahlen zu einer erheblichen Verformung ihrer Ränder führt. Geht man beispielsweise von einem optimal fokussierten Bandstrahl aus, so ergibt sich für zwei sich ursprünglich auf gleicher Tiefe befindenden Randladungen ein Versatz von $\Delta x \approx \pi Y_0$ nach einem zurückgelegten Weg von einem Viertel der Plasmawellenlänge. Dieser Effekt tritt natürlich auch bei Rundstrahlen auf, jedoch handelt es sich dort lediglich um eine Torsion des ansonsten steifen Strahls; seine Hüllfläche bleibt davon unberührt.

Periodische Fokussierung, Typ 1

Da die Induktion über die Zyklotronfrequenz quadratisch in die Strahlgleichung (2.270) eingeht, ist es unerheblich, ob die Richtung des homogenen Magnetfeldes mit jener des Strahls zusammen- oder entgegengesetzt zu ihr ausfällt. Verwendet man daher anstelle eines langen Magneten mehrere kürzere und polt diese jeweils gegenseitig, sollte einerseits weiterhin eine Fokussierung des Strahls möglich sein und andererseits die durch einen Magneten hervorgerufene Strahlverformung vom nächsten wieder aufgehoben werden. Das Versatzproblem wäre damit zwar nicht vollständig beseitigt, wohl aber deutlich gelindert. Diese Art der Fokussierung wird aufgrund des entlang des Strahls periodischen Magnetfeldes als *periodische Fokussierung* bezeichnet. Beim Typ 1 ist die Symmetrieebene $y = 0$ flußfrei, wie es auch bei der nichtperiodischen Fokussierung der Fall war. Soll das Feld mit Hilfe von Permanentmagneten erzeugt werden, bietet sich die in Abbildung 2.38 dargestellte Struktur an. Aufgrund ihrer Periodizität läßt sich das zugehörige Skalarpotential innerhalb der Apertur in eine FOURIERreihe entwickeln, deren Glieder sämtlich als Lösungen der LAPLACEgleichung zu bestimmen sind. Unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung erhält man

$$B_y = B_0 \sinh\left(2\pi \frac{y}{\lambda_f}\right) \sin\left(2\pi \frac{z - z_0}{\lambda_f}\right), \quad (2.274)$$

$$B_z = B_0 \cosh\left(2\pi \frac{y}{\lambda_f}\right) \cos\left(2\pi \frac{z - z_0}{\lambda_f}\right), \quad (2.275)$$

$$B_0 = \frac{4\mu_0 M}{\pi} \sin\left(\pi \frac{d_f}{\lambda_f}\right) \exp\left(-2\pi \frac{a_f}{\lambda_f}\right). \quad (2.276)$$

Die letzte Gleichung entstammt der exakten Feldberechnung unter Voraussetzung unendlich langer Magnete. Um den Einfluß der Harmonischen auf den Feldverlauf abschätzen

⁵¹Zum Vergleich: Bei Rundstrahlen ist $\omega_z = \sqrt{2}\omega_p$ zu wählen.

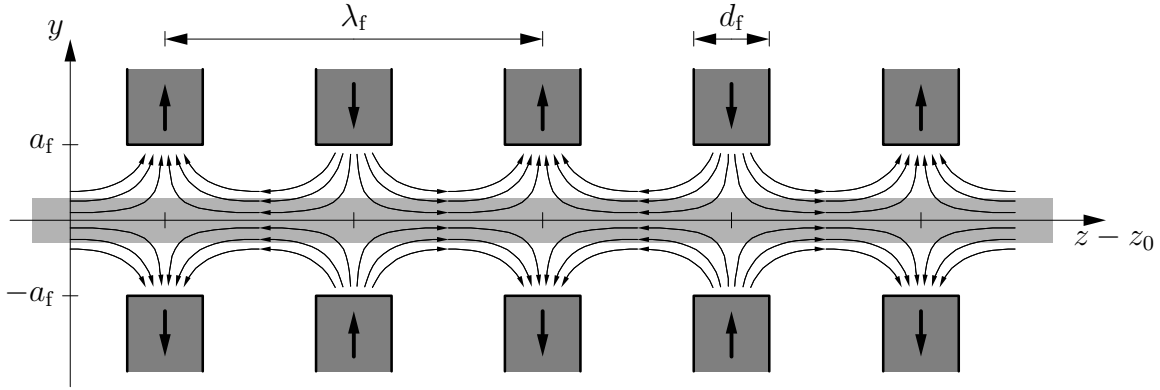


Abbildung 2.38: Bandstrahlfokussierung mittels periodischer Permanentmagnetstruktur (PPM) vom Typ 1.

zu können, sei zusätzlich die allgemeine Gleichung für die Feldamplituden angegeben

$$B_{0,i} = \frac{4\mu_0 M}{i\pi} \sin\left(i\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(i\pi\frac{d_f}{\lambda_f}\right) \exp\left(-i2\pi\frac{a_f}{\lambda_f}\right). \quad (2.277)$$

Aufgrund der speziellen Erregung verschwinden also die Amplituden geradzahlgiger Ordnung, und für $i = 1$ geht (2.277) in (2.276) über. Um die Amplitude der ersten auftretenden Harmonischen auf 1% von jener des Elementarfeldes zu drücken, hat man folglich $a_f > \lambda_f/4$ zu wählen. Es bezeichnen a_f die halbe Apertur und λ_f die Periodenlänge der Struktur, d_f die Dicke der Magnete und M den Betrag ihrer homogenen Magnetisierung. Für dünne Bandstrahlen darf man

$$|y| \ll \lambda_f/2\pi \quad (2.278)$$

erwarten, so daß sich die Feldkomponenten gemäß

$$B_y = B_0 \frac{2\pi y}{\lambda_f} \sin\left(2\pi\frac{z-z_0}{\lambda_f}\right), \quad (2.279)$$

$$B_z = B_0 \cos\left(2\pi\frac{z-z_0}{\lambda_f}\right) \quad (2.280)$$

schreiben lassen.

Die Analyse der Fokussierung wird unter denselben Voraussetzungen wie im letzten Abschnitt (Seite 74) durchgeführt. Zusätzlich wird angenommen, daß die Struktur, wie in Abbildung 2.38 angedeutet, linksseitig begrenzt ist, ihr Feld aber trotzdem für $z \geq z_0$ durch (2.279) und (2.280) gegeben ist. Dann gelten weiterhin die Gleichungen (2.264) und (2.265). Aufgrund des veränderten Magnetfeldes ergibt sich jedoch anstelle von (2.266) nun

$$\dot{x} = \frac{q}{\gamma_0 m_0} \int_0^y B_z dy = y\omega_z \cos\left(2\pi\frac{z-z_0}{\lambda_f}\right), \quad (2.281)$$

2 Analyse des Bandstrahlklystrons

und für den von der Fokussierung herrührenden Anteil aus Gleichung (2.264) gilt

$$\frac{q}{\gamma_0 m_0} \dot{x} B_z = y \omega_z^2 \cos^2 \left(2\pi \frac{z - z_0}{\lambda_f} \right). \quad (2.282)$$

Der sich gemäß $z = z_0 + v_0(t - t_0)$ bewegenden Ladung erscheint das statische Fokussierungsfeld als zeitlich veränderlich, genauer als harmonische Schwingung mit der *Magnetfrequenz*

$$\omega_m = 2\pi \frac{v_0}{\lambda_f}. \quad (2.283)$$

Für die Differentialgleichung der y -Position hat man daher

$$\ddot{y} + \omega_z^2 \cos^2[\omega_m(t - t_0)]y - \omega_p^2 y_0 = 0, \quad (2.284)$$

und mit der Abkürzung

$$\omega_y = \omega_z / \sqrt{2} \quad (2.285)$$

erhält man daraus schließlich die Strahlgleichung

$$\ddot{Y} + \omega_y^2 \left(1 + \cos[2\omega_m(t - t_0)] \right) Y - \omega_p^2 Y_0 = 0. \quad (2.286)$$

Glücklicherweise läßt sich eine gute Näherungslösung für das zugehörige Anfangswertproblem dieser MATHIEUGleichung⁵² angeben: Wäre der Kosinusterm in (2.286) nicht vorhanden, so wäre die Lösung eine zeitlich harmonische Funktion der Frequenz ω_y . Wenn nun der zeitabhängige Koeffizient der Differentialgleichung mit einer wesentlich höheren Frequenz schwingt, wenn also

$$\omega_m \gg \omega_y \quad (2.287)$$

gilt, dann ist nur noch sein Mittelwert von Bedeutung, und anstelle der nichtlinearen MATHIEUGleichung (2.286) hat man es mit der einfachen Schwingungsgleichung

$$\ddot{Y} + \omega_y^2 \left(Y - \frac{\omega_p^2}{\omega_y^2} Y_0 \right) = 0 \quad (2.288)$$

zu tun. Unter der Voraussetzung (2.287) lautet die Lösung von (2.286) für einen in $z = z_0$ parallelen Strahl daher (näherungsweise)

$$\frac{Y}{Y_0} = \frac{\omega_p^2}{\omega_y^2} + \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_y^2} \right) \cos \omega_y(t - t_0), \quad (2.289)$$

so daß dieser genau dann parallel bleibt, wenn die Amplitude der Induktion B_0 gemäß $\omega_y = \omega_p$ beziehungsweise

$$\omega_z = \sqrt{2} \omega_p \quad (2.290)$$

⁵²Mathieu, Emile Léonard (1835-1890), französischer Mathematiker

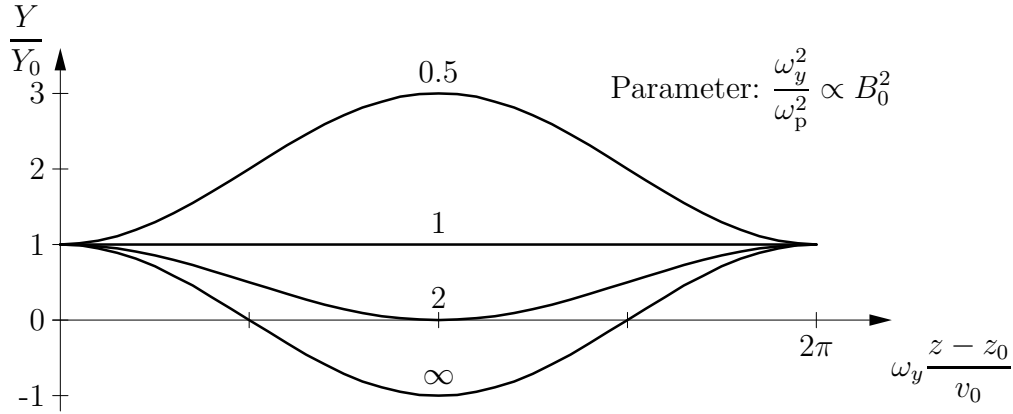


Abbildung 2.39: Trajektorien der Randladungen eines Bandstrahls bei periodischer Fokussierung (Typ 1 und 2) mit verschiedenen Feldstärken. Die zugehörigen Strahlprofile ergeben sich durch Spiegelung der Kurven an der z -Achse.

gewählt wird. Diese Gleichgewichtsbedingung weicht offenbar von jener für den nichtperiodischen Fall (2.273) ab, was insofern unbefriedigend ist, als die nichtperiodische Fokussierung einen Spezialfall der periodischen Fokussierung vom Typ 1 darstellt. Es sollte sich daher ein für alle Fälle einheitlicher Feldparameter finden lassen, dessen Wert über das Gleichgewicht bestimmt. Ein solcher Parameter findet sich in Form des *Effektivwerts* der z -Komponente der Induktion; die allgemeine Gleichgewichtsbedingung lautet

$$B_{z,\text{eff}} = \frac{\omega_p}{q/(\gamma_0 m_0)}. \quad (2.291)$$

Damit hat man praktisch dieselbe Strahlgleichung und dieselben Strahlformen wie bei der nichtperiodischen Fokussierung. In Abbildung 2.39 sind die Trajektorien der Randladungen für unterschiedlich starke Magnetfelder dargestellt. Erwartungsgemäß wird der Strahl bei zu großen Feldstärken eingeschnürt. Im Extremfall durchstoßen die Randladungen sogar die Symmetrieebene $y = 0$ – eine bereits bekannte Spezialität von Bandstrahlen. Neu ist allerdings, daß ein Bandstrahl selbst bei unendlich starkem Magnetfeld stabil bleibt: Für $\omega_y \geq \omega_p$ gilt stets $|Y| \leq Y_0$; in der Grenze $\omega_y \rightarrow \infty$ hat man einen einfachen Kosinus der Amplitude Y_0 . Bei verschwindendem Magnetfeld wird die Strahldicke beliebig groß und es treten longitudinale elektrische Felder auf, so daß die Analyse nur in der Nähe von $z = z_0$ brauchbare Ergebnisse liefern kann. Mit der Näherung $\cos \phi \approx 1 - \phi^2/2$ erhält man aus (2.289) für $\omega_y \rightarrow 0$

$$\frac{Y}{Y_0} = 2\pi^2 \left(\frac{z - z_0}{\lambda_p} \right)^2. \quad (2.292)$$

Zu selbigem Ergebnis gelangt man durch Lösen der Strahlgleichung nach vollzogenem Grenzübergang. Wie es sein muß, erhält man also die durch Gleichung (2.250) vorausgesagte Strahlform.

Abschließend sein eine im Vergleich zu (2.287) eingängigere Bedingung für einen geordneten Strahltransport hergeleitet. In der Praxis ist ein paralleler Strahl wünschenswert,

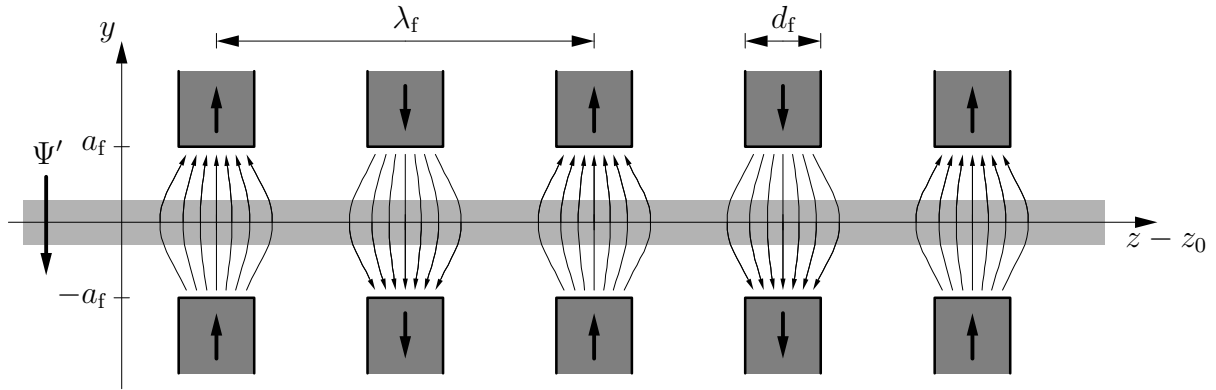


Abbildung 2.40: Bandstrahlfokussierung mittels periodischer Permanentmagnetstruktur (PPM) vom Typ 2 (Wiggler-Fokussierung).

weshalb man vermöge $\omega_y = \omega_p$ das Gleichgewicht einstellen wird. Dann läßt sich die angesprochene Bedingung aber auch als $\omega_m \gg \omega_p$ bzw.

$$\lambda_f \ll \lambda_p \quad (2.293)$$

schreiben. Entlang der Driftstrecke, deren Länge meist $\lambda_p/4$ betragen wird, sollten daher wenigstens zwei Magnetperioden untergebracht werden – eine offenbar sehr gutmütige Forderung.

Periodische Fokussierung, Typ 2

Nach wie vor bewegen sich die Ladungsträger oberhalb der Symmetrieebene ($y > 0$) entgegengesetzt zu jenen unterhalb dieser, Gleichung (2.281), was allein daraus folgt, daß $B_y(y, z)$ eine ungerade Funktion von y darstellt. Verschiebt man die obere Hälfte der Magnetstruktur gegenüber der unteren um eine halbe Periodenlänge, ist B_y gerade bezüglich y , und man gelangt zur periodischen Struktur vom Typ 2, Abbildung 2.40. Es ist nicht auf den ersten Blick ersichtlich, daß eine derartige Struktur überhaupt fokussierend auf einen Bandstrahl wirkt. Dennoch tut sie es und zwar aus folgendem Grunde: Vermöge des starken vertikalen Magnetfeldes werden große transversale Teilchengeschwindigkeiten erzwungen,⁵³ welche zusammen mit der verhältnismäßig schwachen longitudinalen Komponente des Magnetfeldes die gewünschten fokussierenden Kräfte erzeugen. Da im Bereich des Strahls näherungsweise $\partial B_y / \partial y \approx 0$ und $B_z \propto y$ gilt, folgt auch für die fokussierende Kraft $F_y \propto y$, wie es grundsätzlich gefordert ist.

Zur Analyse der Fokussierung vom Typ 2 geht man analog zu jener vom Typ 1 vor. Mittels Orthogonalentwicklung erhält man für $a_f > \lambda_f/4$ und $|y| \ll \lambda_f/2\pi$ folgende (gute)

⁵³Dieser Effekt wird beim sogenannten *Wiggler* zur Erzeugung kohärenter Strahlung ausgenutzt, weshalb die periodische Fokussierung vom Typ 2 vor allem in der angelsächsischen Literatur auch *Wiggler-Fokussierung* genannt wird. Währenddessen es bei der Fokussierung allein auf eine große transversale Teilchengeschwindigkeit ankommt, verlangt ein Wiggler nach einer starken transversalen *Beschleunigung*. Aufgrund der nahezu sinusförmigen Bahnform gibt es jedoch das eine nicht ohne das andere, denn den Variationen von Magnetperiode und Teilchengeschwindigkeit sind verhältnismäßig enge Grenzen gesetzt.

Näherung für das Magnetfeld, wobei die Amplitude B_0 weiterhin durch (2.276) gegeben ist:

$$B_y = B_0 \sin\left(2\pi \frac{z - z_0}{\lambda_f}\right), \quad (2.294)$$

$$B_z = B_0 \frac{2\pi y}{\lambda_f} \cos\left(2\pi \frac{z - z_0}{\lambda_f}\right). \quad (2.295)$$

Verschwanden weiterhin die transversale Geschwindigkeit der Ladung auf und der Fluß durch die Katode, ergibt sich nun mit Hilfe der BUSCHgleichung bei Zugrundelegung des bekannten Integrationspfades unter Einbeziehung von $|y| \ll \lambda_f/2\pi$

$$\dot{x} = \frac{q}{\gamma_0 m_0} \left(\int_0^y B_z dy - \int_{z_1}^z B_y dz \right) = \frac{\lambda_f}{2\pi} \omega_z \cos\left(2\pi \frac{z - z_0}{\lambda_f}\right), \quad (2.296)$$

wenn man den der eigentlichen Struktur vorangestellten Fluß gemäß

$$\Psi' = - \int_{z_1}^{z_0} B_y dz = B_0 \frac{\lambda_f}{2\pi} \quad (2.297)$$

wählt. Anderenfalls verschwände der Mittelwert der Geschwindigkeit (2.296) nicht, und der gesamte Strahl erfähre eine transversale Drift. Überraschenderweise ergibt sich nun der bekannte Zusammenhang

$$\frac{q}{\gamma_0 m_0} \dot{x} B_z = y \omega_z^2 \cos^2\left(2\pi \frac{z - z_0}{\lambda_f}\right), \quad (2.298)$$

vgl. (2.282), weshalb alles weitere mit der Rechnung zum Typ 1 bereits gesagt ist. Allein in zwei Punkten unterscheiden sich die beiden Fokussierungsarten:

1. Die transversalen Geschwindigkeiten der Ladungen beim Typ 2 sind um ein Vielfaches höher als die der Randladungen beim Typ 1, und zwar in jenem Maße, wie die mehrfach verwendete Bedingung $Y_0 \ll \lambda_f/2\pi$ erfüllt ist, denn es gilt $\dot{x}_{\text{Typ2}}/\dot{x}_{\text{Typ1}} = \lambda_f/(2\pi Y_0)$.
2. Währenddessen die Fokussierung vom Typ 1 ohne Vormagnetisierung auskommt, wird diese beim Typ 2 dringend benötigt, um das Abdriften des Strahls zu vermeiden. Anderenfalls hätte man über einen Weg von $\lambda_p/4$ die ganz beträchtliche Drift von $\Delta x \approx 2Y_0 \lambda_f/(2\pi Y_0)$ hinzunehmen. Da der von einem Magnetpaar erzeugte Fluß gerade das Doppelte des vorzuschaltenden beträgt, ergibt sich eine verhältnismäßig einfache Lösung des Problems: Man stellt ein Magnetpaar voran mit zwar derselben Magnetisierung aber nur der halben Dicke der restlichen Magnetpaare.

3 Entwurf des Bandstrahlklystrons

Auf die Ergebnisse der Analyse aufbauend dokumentiert dieses Kapitel den Entwurf des Klystrons bezüglich bislang nicht festgelegter elektrischer Parameter und der Geometrie der einzelnen Bestandteile. Die einfacheren Parameter wie Strahlstromstärke, Strahldicke und Strahlbreite werden dabei durch Überschlagsrechnungen und Grenzbetrachtungen gewonnen. Die meisten Parameter müssen jedoch auf numerischem Wege erarbeitet und optimiert werden. Dies betrifft vor allem die Geometriedaten der Kanone, der Resonatoren und der Koppler.

Sowohl der Analyse als auch dem reinen Entwurf liegen sehr einfache Modelle sämtlicher Klystronkomponenten zugrunde; das entscheidendste ist jenes vom steifen Elektronenstrahl, siehe Seiten 28 und 33. Auch wenn diese Vereinfachungen dadurch gerechtfertigt sind, daß sie zunächst auf analytischem und später auch numerischem Wege wertvolle Erkenntnisse geliefert haben, sollten sie doch einer genaueren Untersuchung unterworfen werden. Im Rahmen dieser Arbeit bestand die naheliegende Möglichkeit der experimentellen Überprüfung nicht, sodaß die Methode der Wahl eine eingehendere computergestützte Untersuchung darstellt.

Aus diesem Grunde wird das dynamische Verhalten der einzelnen Bestandteile des Bandstrahlklystrons zusätzlich mithilfe eines sogenannten particle-in-cell- oder auch PIC-Programmes untersucht.¹ Dabei geht es nicht mehr darum, geometrische und elektrische Parameter des Klystrons zu optimieren, sondern lediglich die Analyse- und Entwurfsergebnisse zu verifizieren.

3.1 Festlegung der fehlenden Parameter

Die elementarsten zu treffenden Festlegungen betreffen den Elektronenstrahl. Begonnen sei mit der erforderlichen **Stromstärke**. Ein Klystron sollte wenigsten einen Wirkungsgrad von 30% aufweisen; praktisch existieren – zumindest für geringere Frequenzen – Mikrowellenverstärker mit einem Wirkungsgrad von bis zu 60%. Um bei der gegebenen Strahlspannung von $U_0 = 25 \text{ kV}$ und einem Wirkungsgrad von $\eta = 0.3$ die geforderte Ausgangsleistung von $P_e = 10 \text{ kW}$ (siehe Einleitung) erreichen zu können, ist folglich ein Strahlstrom von $I_0 = P_e/(\eta U_0) = 1.3 \text{ A}$ erforderlich. Beim Entwurf der Elektronenkanone wird sich zeigen, ob dieser Wert erreicht werden kann; ein größerer Strom gereicht

¹Bei dieser Methode werden die Gleichungen der Elektrohydrodynamik numerisch gelöst, wobei die Raumladung als eine Vielzahl geladener frei beweglicher Makropartikel behandelt wird. Ein Makropartikel repräsentiert dabei größenordnungsmäßig eine Millionen Elektronen; mit erhöhtem Rechenaufwand läßt sich diese Zahl natürlich weiter verringern. Das PIC-Verfahren stellt derzeit die naturgetreueste Simulationsmethode im Bereich der Elektrodynamik dar.

jedenfalls nicht zu einem Nachteil. Er sei daher auf

$$I_0 = 2 \text{ A} \quad (3.1)$$

festgelegt. Als nächstes sei die **Strahldicke** betrachtet. Diese ist im wesentlichen durch die Höhe des Driftraumes bestimmt, welcher wegen der großen Breite des Bandstrahls im Verhältnis zu seiner Dicke als Parallelplattenleitung betrachtet werden kann. Sieht man von dem stets ausbreitungsfähigen TEM-Wellentyp ab, der in der Tat gefährlich werden kann, aber bei genauer Symmetrie der Resonatorhälften nicht angeregt wird, hat man als ersten Wellentyp TM_{01} . Seine Grenzfrequenz beträgt

$$f_c = \frac{c_0}{2h_d}, \quad (3.2)$$

worin h_d die Höhe des Driftraumes bezeichnet. Mit der Arbeitsfrequenz $f = 91.392 \text{ GHz}$ ist sie folglich kleiner als 1.6 mm zu wählen. Allerdings ist dies auch die Höhe eines (zweidimensionalen) Rechteckresonators mit der Resonanzfrequenz 91.392 GHz , welche mit gewissen Modifikationen als Eingangs- und Ausgangsresonatoren eingesetzt werden sollen. Damit die Stehwellen der Resonatoren nicht zu weit in den Driftraum eindringen, muß dessen Höhe also wesentlich kleiner als die der Resonatoren sein. Daher sei sie schließlich als

$$h_d = 0.6 \text{ mm} \quad (3.3)$$

festgelegt. Dem Bandstrahl muß nun noch etwas Raum zugestanden werden, da er nach der Modulation gewisse Schwankungen in seiner Dicke aufweisen wird. Sie sei daher mit

$$h_s = 0.4 \text{ mm} \quad (3.4)$$

festgelegt, obwohl diese Wahl bereits kritisch betrachtet werden muß. Um die **Strahlbreite** festlegen zu können, ist die erreichbare Strahlstromdichte abzuschätzen, was in der Tat ohne konkrete Simulationsrechnungen möglich ist. Einerseits sind mit modernen Materialien Katodenstromdichten von $J_k = 5 \text{ A/cm}^2$ realistisch, und andererseits existieren Elektronenkanonen mit einer eindimensionalen Strahlkompression von $h_k/h_s = 10$. Mithin sollte die zu entwerfende Kanone in der Lage sein, einen komprimierten Bandstrahl der Stromdichte $J_s = I_0/(h_s w_s) = 50 \text{ A/cm}^2$ zu liefern, weshalb die Strahlbreite gemäß

$$w_s = 10 \text{ mm} \quad (3.5)$$

festgelegt wird; das Seitenverhältnis beträgt damit $25 : 1$.

3.2 Elektronenkanone

Zur Strahlerzeugung ist eine gewöhnliche raumladungsbegrenzte PIERCE-Diode vorgesehen, Abbildung 3.1. Diese Technik ist bewährt und ausgereift und sollte daher kostengünstig umgesetzt werden können. Da der Strahl niederfrequent gepulst werden soll,

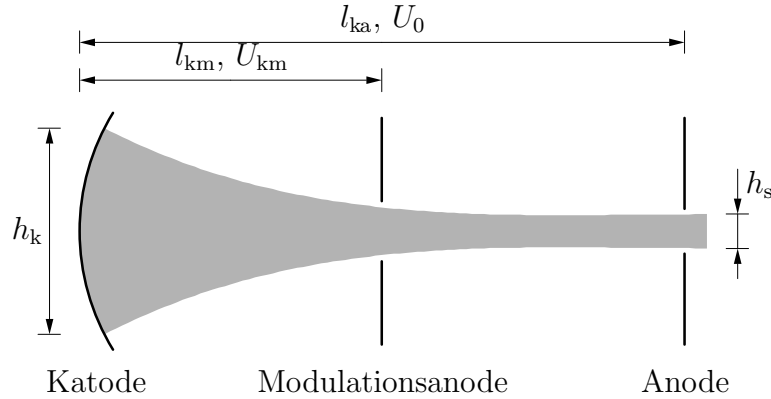


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung der Elektronenkanone.

die Anodenbatterie jedoch durch den gesamten Strahlstrom belastet ist, wird eine Modulationsanode verwendet. Somit kann der Strahl analog zur gewöhnlichen Triode nahezu leistungslos geschaltet werden.

Bis auf die Strahlspannung U_0 und die Strahldicke h_s sind die in Abbildung 3.1 eingezeichneten Parameter bislang unbekannt und sollen nun näherungsweise bestimmt werden. Die **Katodenhöhe** ergibt sich aus der angestrebten Kompression von 10 sofort zu

$$h_k = 4.0 \text{ mm.} \quad (3.6)$$

Die verbleibenden Parameter lassen sich mit Hilfe der eindimensionalen Theorie abschätzen, Abschnitt A.1.3. Der **Abstand zwischen Katode und Anode** l_{ka} , dort mit d bezeichnet, ergibt sich aus Gleichung (A.35) zu 1.36 bzw. 0.43 cm, je nachdem, ob man der Rechnung die Katodenstromdichte von 5 A/cm^2 oder die angestrebte Strahlstromdichte von 50 A/cm^2 zugrundelegt. Da die das Gleichgewicht empfindlich beeinflussenden Vorgänge im Bereich der Katode angesiedelt sind und dort die geringere Stromdichte anzutreffen ist, wird der reale Wert in der Nähe von

$$l_{ka} = 1.0 \text{ cm} \quad (3.7)$$

zu suchen sein. **Position und Potential der Modulationsanode** sind bekanntlich direkt miteinander verknüpft, Gleichung (A.38). Um den Strahl mit einer möglichst geringen Spannung abschnüren zu können, ist folglich ein geringer Abstand zwischen Katode und Modulationsanode zu fordern. Dem sind allerdings konstruktive Grenzen gesetzt, so daß

$$l_{km} = 0.5 \text{ cm,} \quad (3.8)$$

$$U_{km} = 10 \text{ kV} \quad (3.9)$$

gewählt wird.²

²Zur Abschätzung der Kanonendaten wurden die Gleichungen der planaren Diode und nicht jene der Zylinderdiode verwendet. Dies hat im wesentlichen zwei Gründe: Zum einen sind die verwendeten Gleichungen wegen des wegfallenden Korrekturfaktors β deutlich einfacher zu handhaben, und zum anderen entspricht der zu erwartende Strahlverlauf zwischen Katode und Anode weder jenem der planaren noch jenem der zylindrischen Diode. Mithin bietet die Verwendung der komplizierteren Gleichungen keinen ersichtlichen Vorteil. Und schließlich wird der Entwurf letztendlich ohnehin auf numerischem Wege erfolgen.

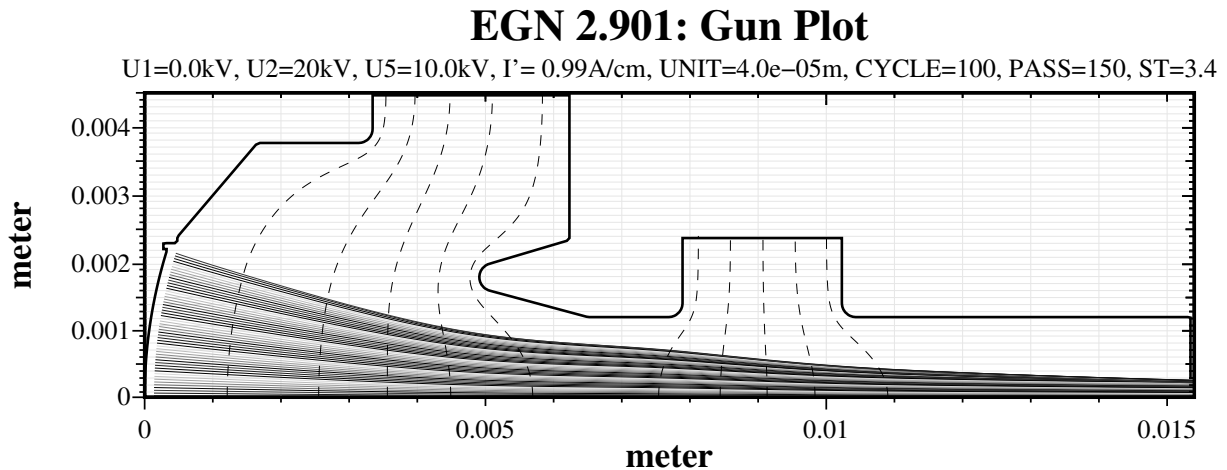


Abbildung 3.2: EGUN-Darstellung der von TRUE entworfenen Bandstrahl-Elektronenkanone. Elektrische Parameter: $U_0 = 20 \text{ kV}$, $U_m = 10 \text{ kV}$, $I'_0 = 2 \text{ A/cm}$, $J_k = 4.9 \text{ A/cm}^2$. Geometrische Parameter: $h_k = 4.2 \text{ mm}$, $h_s = 0.5 \text{ mm}$, $l_{km} = 4.9 \text{ mm}$, $l_{ka} = 10.2 \text{ mm}$.

Diese Schätzungen dienen nun als Startwerte für den iterativen zweidimensionalen Entwurf mit Hilfe des Elektronenoptik-Simulationsprogramms EGUN [23]. Ausgangspunkt bildet eine von TRUE entworfene Bandstrahlkanone [44], welche zunächst mit EGUN simuliert wurde, Abbildung 3.2.³ Wie es der Bildunterschrift zu entnehmen ist, liegen die Parameter dieser Kanone bereits in der Nähe der für das Klystron geforderten; Änderungen sind jedoch bei der Anodenspannung und der Strahldicke vorzunehmen. Begonnen sei mit den **Spannungen**. Der allgemeinen Theorie, Abschnitt A.1.1, zufolge ist die Perveanz einer Kanone nur von deren Geometrie abhängig. Eine Skalierung aller Potentiale mit x muß daher eine Skalierung des Stroms mit $x^{3/2}$ zur Folge haben; der Strahlverlauf sollte davon weitestgehend unbeeinflusst sein. Dies bestätigt das Simulationsergebnis für $U_0 = 25 \text{ kV}$ und $U_m = 12.5 \text{ kV}$, Abbildung 3.3. Um zu einer Strategie zur Reduzierung der **Strahldicke** zu gelangen, betrachte man Strahl- und Äquipotentiallinienverlauf im Bereich A zwischen Katode und Modulationsanode einerseits und im Bereich B zwischen Modulationsanode und Anode andererseits. Man erkennt, daß der Bereich A im Prinzip wie eine einfache Kanone arbeitet, der Bereich B hingegen eine elektrostatische Linse darstellt. Die Strahldicke ist im wesentlichen durch die Stärke dieser Linse festgelegt, so daß eine Erhöhung der „Linsenspannung“ $U_0 - U_m$ eine Verringerung der Strahldicke bewirken sollte. Wegen der festliegenden Anodenspannung U_0 ist dies nur durch eine Absenkung von U_m und somit der Feldstärke im Bereich A zu bewerkstelligen. Da die Feldverteilung dort im wesentlichen durch die Berandung festgelegt ist, sollte dies keinen negativen Einfluß auf den Strahlverlauf haben. In der Tat läßt sich eine Strahldicke von $h_s = 0.4 \text{ mm}$ erreichen, wenn man die Spannung der Modulationsanode zu $U_m = 11.5 \text{ kV}$ wählt, Abbildung 3.4. Die sich einstellende Stromstärke skaliert mit $0.88 = (11.5/12.5)^{3/2}$, wie es der

³Die gestaffelten Grauwerte für die einzelnen Trajektorien dienen allein dem Verfolgen von Elektronenbahnen, zur Abschätzung der Strahlordnung also; sie kodieren nicht etwa Raumladungs- oder Stromdichte!

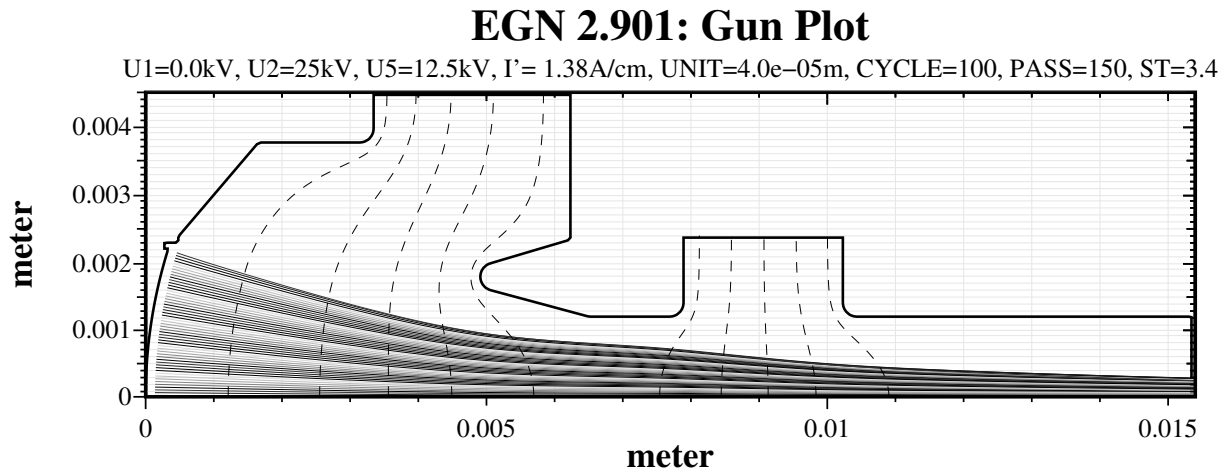


Abbildung 3.3: EGUN-Darstellung der TRUE-Kanone mit um den Faktor 1.25 erhöhten Potentialen. Elektrische Parameter: $U_0 = 25$ kV, $U_m = 12.5$ kV, $I'_0 = 2.8$ A/cm, $J_k = 6.5$ A/cm². Geometrische Parameter: $h_k = 4.2$ mm, $h_s = 0.56$ mm, $l_{km} = 4.9$ mm, $l_{ka} = 10.2$ mm.

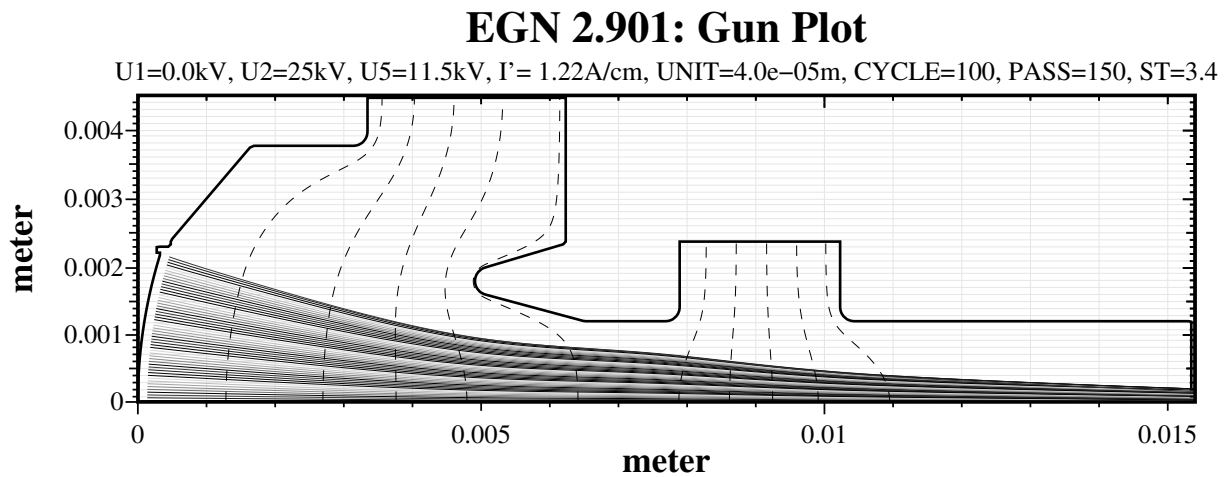


Abbildung 3.4: EGUN-Darstellung TRUE-Kanone mit abgesenktem Potential der Modulationsanode. Elektrische Parameter: $U_0 = 25$ kV, $U_m = 11.5$ kV, $I'_0 = 2.4$ A/cm, $J_k = 5.7$ A/cm². Geometrische Parameter: $h_k = 4.2$ mm, $h_s = 0.39$ mm, $l_{km} = 4.9$ mm, $l_{ka} = 10.2$ mm.

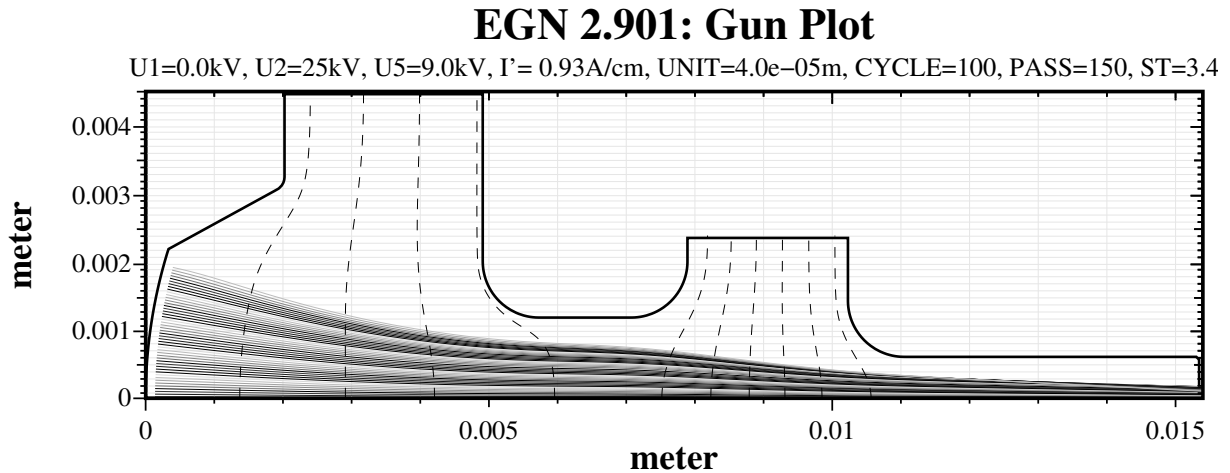


Abbildung 3.5: Vereinfachte Version der mit EGUN entworfene Bandstrahl-Elektronenkanone. Elektrische Parameter: $U_0 = 25 \text{ kV}$, $U_m = 9 \text{ kV}$, $I'_0 = 1.9 \text{ A/cm}$, $J_k = 4.7 \text{ A/cm}^2$. Geometrische Parameter: $h_k = 4 \text{ mm}$, $h_s = 0.34 \text{ mm}$, $l_{km} = 4.9 \text{ mm}$, $l_{ka} = 10.2 \text{ mm}$.

Theorie entspricht. Damit darf das Entwurfsziel bezüglich der elektrischen Parameter der Bandstrahlkanone als erreicht bezeichnet werden.

Wie in der Einleitung geschildert, ist ein globales Entwurfsziel jedoch die mechanische Einfachheit aller Komponenten. Demzufolge soll untersucht werden, ob auch mit einer vereinfachten Kanonengeometrie brauchbare elektrische Parameter zu erreichen sind. Ansatzpunkte bilden naturgemäß Oberflächenbereiche starker Krümmung, welche gleichzeitig potentielle Orte parasitärer Entladung darstellen. Eine entsprechend modifizierte Kanone ist in Abbildung 3.5 dargestellt. Anscheinend lassen sich die elektrischen Eckdaten auch mit einer derart vereinfachten Anordnung erreichen, jedoch hat man einen ungeordneteren Strahlverlauf und eine ungleichmäßig über den Strahlquerschnitt verteilte Stromdichte in Kauf zu nehmen. Wie es der Abbildung zu entnehmen ist, wurde die Katodenhöhe bereits etwas verringert, um den Einfluß der Nichtlinearität der Elektronenoptik gering zu halten.

Das Elektronenoptikprogramm EGUN basiert auf einem verhältnismäßig einfachen Strahlmodell, welches nur den eingeschwungenen Zustand zu erfassen in der Lage ist. Daher wurde die entworfene Kanone zusätzlich mit dem PIC-Modul des Simulationsprogramms MAFIA untersucht. Dabei konnten die von EGUN vorhergesagten elektrischen Daten bestätigt werden. Abbildung 3.6 zeigt die vereinfachte Bandstrahlkanone mit den bekannten Abmessungen und Spannungen (siehe Abbildung 3.5) nebst dem durch Makropartikel modellierten Elektronenstrahl.

Auch wenn im Rahmen dieser Arbeit über die praktische Realisierbarkeit der vorgestellten Kanonenentwürfe nicht entschieden werden kann, ist durch die Rechnungen belegt, daß sich die angestrebten Strahldaten

$$U_0 = 25 \text{ kV}, \quad (3.10)$$

$$I'_0 = 2 \text{ A/cm}, \quad (3.11)$$

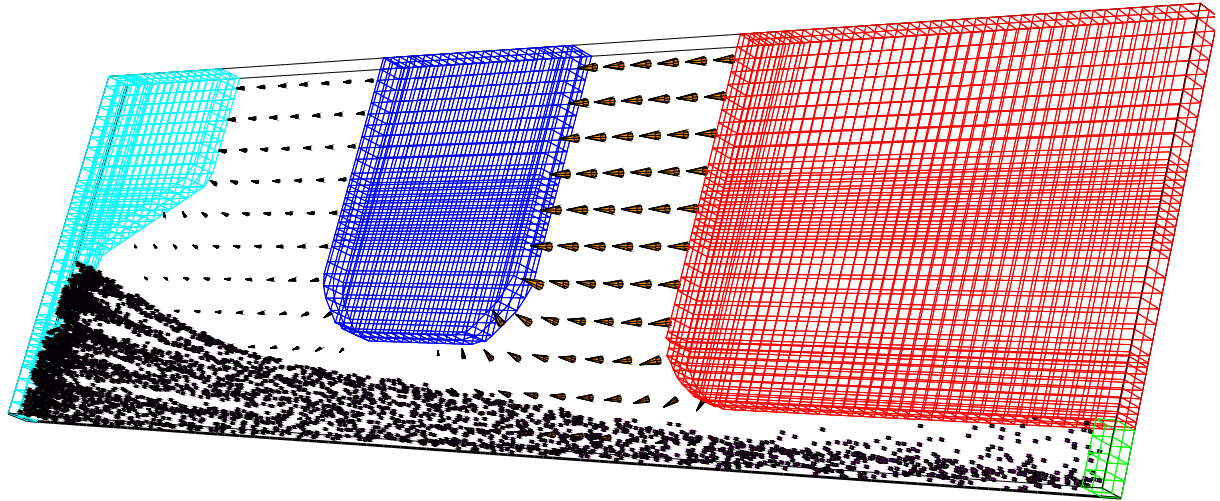


Abbildung 3.6: MAFIA-PIC-Simulation der Bandstrahlkanone aus Abbildung 3.5 mit denselben Eingangsdaten. Die PIC-Simulation ergibt einen geringfügig größeren Strahlstrom von $I'_0 = 2 \text{ A/cm}$; der Strahl verläuft etwas weniger geordnet. Insgesamt bestätigt diese Simulation die mit EGUN berechneten Ergebnisse.

$$h_s = 0.4 \text{ mm} \quad (3.12)$$

in einem durchaus realistischen Bereich befinden; für den breitenbezogenen Strahlwiderstand, die Perveanz pro Breite bzw. pro Quadrat ergeben sich daher die Werte⁴

$$R'_0 = 12.5 \text{ k}\Omega\text{cm}, \quad (3.13)$$

$$K' = 0.5 \text{ }\mu\text{P/cm}, \quad (3.14)$$

$$K_{\square} = 0.02 \text{ }\mu\text{P}. \quad (3.15)$$

Ferner gilt

$$J_0 = 50 \text{ A/cm}^2, \quad (3.16)$$

$$v_0 = 90.49 \times 10^6 \text{ m/s}, \quad (3.17)$$

$$\rho_0 = -5.526 \times 10^{-3} \text{ As/m}^{-3}, \quad (3.18)$$

$$\omega_p = 9.752 \text{ GHz}, \quad (3.19)$$

$$\lambda_p = 5.830 \text{ cm}, \quad (3.20)$$

$$k_p = 107.8 \text{ m}^{-1}. \quad (3.21)$$

Die Entwürfe zeigen ferner, daß höhere Ströme unter Beibehaltung von Strahlspannung und -dicke nicht ohne weiteres erzeugbar sind; Limitierungen sind durch Maximalwerte von Katodenbelastung (Stromdichte), Kompression und elektrischer Feldstärke gegeben – letztere beträgt bei den vorgestellten Entwürfen bereits etwa 5 MV/m. Gegebenenfalls ließe sich eine höhere Katode verwenden, was jedoch eine zusätzliche elektrostatische Linse erforderte.

⁴1 $\mu\text{P} = 10^{-6} \text{ A/V}^{3/2}$

3.3 Resonatoren

Sowohl für den Eingangs- und Ausgangsresonator als auch für gegebenenfalls einzusetzende leerlaufende Resonatoren zum Zwecke der Modulationsverstärkung bestehen folgende Entwurfsziele

- einfacher mechanischer Aufbau,
- konstantes Feld über die gesamte Strahlbreite und
- hoher Shuntwiderstand.

Die Forderung nach einem **einfachen Aufbau** der Resonatoren, welche sich aus jener nach geringen Produktionskosten ergibt, ist unmittelbar mit den in Frage kommenden Fertigungsverfahren verknüpft. Beschränkt man sich auf das LIGA-Verfahren (siehe Einleitung), so hat man die Forderung nach *wenigen verschiedenen Tiefen* (in y) und *rechteckigen Kanten* (in $x = \text{const.}$), um die Anzahl der notwendigen Masken (Zyklen) so gering wie möglich zu halten. Die Forderung nach einem **flachen Feldverlauf** über die gesamte Strahlbreite entspringt nicht nur dem Wunsch, alle wesentlichen Effekte im Zweidimensionalen behandeln zu können, sondern vor allem der Forderung nach einer optimalen Strahlauslastung. Zerlegt man den breiten Bandstrahl gedanklich in schmale Teilstrahlen, so sollen im Eingangsresonator alle diese Strahlen optimal moduliert werden, was nur dann der Fall sein kann, wenn auch alle dieselbe Spannung durchlaufen. Eine analoge Überlegung läßt sich für die Sättigung der Teilstrahlen im Ausgangsresonator anstellen. Der **Shuntwiderstand** ist bekanntlich ein Maß für die Wechselwirkung zwischen Resonatorfeld und Elektronenstrahl, welche selbstverständlich stark ausfallen soll. Genaugenommen ist gemäß (2.168) und (2.223) das Verhältnis zwischen Shuntwiderstand und Strahlwiderstand zu maximieren; letzterer liegt jedoch mit dem Kanonentwurf bereits fest, Gleichung (3.13).

3.3.1 Resonatoren mit flachem Feldverlauf

Bekanntlich existieren in dreidimensionalen Resonatoren mit vollständig konvexer Berandung (von außen betrachtet) keine Bereiche, in denen eine Richtungsableitung der Feldgröße über eine längere Strecke verschwindet. Wie also hat man die Berandung zu gestalten, um in einem weiten Bereich einen flachen Feldverlauf zu erhalten?

Ein naheliegender Lösungsansatz bietet die FOURIERSYNTHESE, denn eine (stückweise konstante) Rechteckfunktion läßt sich durch Überlagerung passender Sinus- bzw. Kosinusfunktionen erzeugen. Man könnte also versuchen, den Grundmodus eines gegebenen Resonators durch passende höhere Modi zu überlagern, um die Richtungsableitung der Feldfunktion in einem gewissen Bereich zum Verschwinden zu bringen. Leider kann diese Vorgehensweise im allgemeinen nicht zum Erfolg führen, denn die im Sinne der Synthese passenden höheren Modi weisen zwangsläufig auch eine höhere Eigenfrequenz auf.

Zu einer verblüffend einfachen Lösung gelangt man jedoch durch eine mathematische Herangehensweise: Die Feldfunktion f muß die dreidimensionale skalare HEMHOLTZglei-

chung erfüllen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + k_0^2 f = 0 \quad (3.22)$$

mit $k_0 = \omega/c_0$. Ist f auf einer geschlossenen Randfläche vorgegeben, hat man es mit diskreten Eigenwerten k_0 zu tun. Dann ist jede Lösung des Randwertproblems (Eigenfunktion) als Überlagerung von Elementarfunktionen der Gestalt

$$g(x, y, z) = \hat{g}e^{j(k_x x + k_y y + k_z z)} \quad (3.23)$$

darstellbar, welche sämtlich ebenfalls der HEMHOLTZ- und mithin der Separationsgleichung

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_0^2 \quad (3.24)$$

genügen. Die Randwerte legen sowohl die Verhältnisse zwischen den Amplituden \hat{g} als auch die Wellenzahlen k_x , k_y und k_z für jede Funktion g und somit schließlich die Resonanzwellenzahl k_0 fest. Die Wellenzahlen k_x , k_y und k_z nehmen ebenfalls nur diskrete Werte an. Vor diesem Hintergrund ist sofort einzusehen, daß man ein flaches Feld bezüglich x sicherlich dann erhält, wenn für alle Elementarfunktionen $\partial g/\partial x \equiv jk_x g \equiv 0$, d.h. $k_x = 0$ gilt. Die wohl einfachste Anordnung mit einer verschwindenden Wellenzahl stellt ein auf seiner Grenzfrequenz betriebener Wellenleiter beliebiger Länge dar. Um ihn zum Resonator zu vervollständigen, wäre er beidseitig derart zu terminieren, daß sein Feldverlauf nicht gestört wird. Dies leistet wiederum ein (oberhalb der Grenzfrequenz betriebener) Wellenleiter der Länge $\lambda_x/4$, welcher einseitig kurzgeschlossen ist. Die praktische Vorgehensweise wäre also folgende:

1. Man entwerfe einen TE-Wellenleiter, dessen Grenzfrequenz mit der Arbeitsfrequenz des Klystrons zusammenfällt und der einen Strahltransport in Richtung des elektrischen Feldes zuläßt. Von diesem Leiter verwende man ein der Strahlbreite entsprechendes Stück.
2. Man entwerfe einen $\lambda/4$ -Transformator, indem die Grenzfrequenz des unter Punkt 1 gefundenen Leiters durch Geometrieänderung verringert wird. Von diesem Leiter verwende man ein Stück der Länge $\lambda/4$, das einseitig kurzgeschlossen wird.

Der einfachste in Frage kommende Wellenleitertyp wäre der aus zwei identischen Hälften bestehende Grabenhohlleiter, Abbildung 3.7, welcher eine Strahlausbreitung in z -Richtung zwischen seiner oberen und unteren Hälfte gestattet und sich gleichzeitig hervorragend zur Herstellung mittels LIGA eignet. Seine Eigenschaften sind ausführlich im Anhang A.7 beschrieben, weshalb sie an dieser Stelle nicht weiter diskutiert werden sollen. Die Apertur $2a$ ist gerade die bereits mit Gleichung (3.3) festgelegte Driftraumhöhe h_d , woraus

$$a = 0.3 \text{ mm} \quad (3.25)$$

folgt. Mittels der Grabtiefe b und der Spaltbreite g wird die Grenzfrequenz des TE₀₁-ähnliches Grundmodus' eingestellt, wobei die Spaltbreite später für einen hohen Shuntwiderstand optimiert wird. Für diese läßt sich aufgrund der im Abschnitt 2.2.2 angestellten

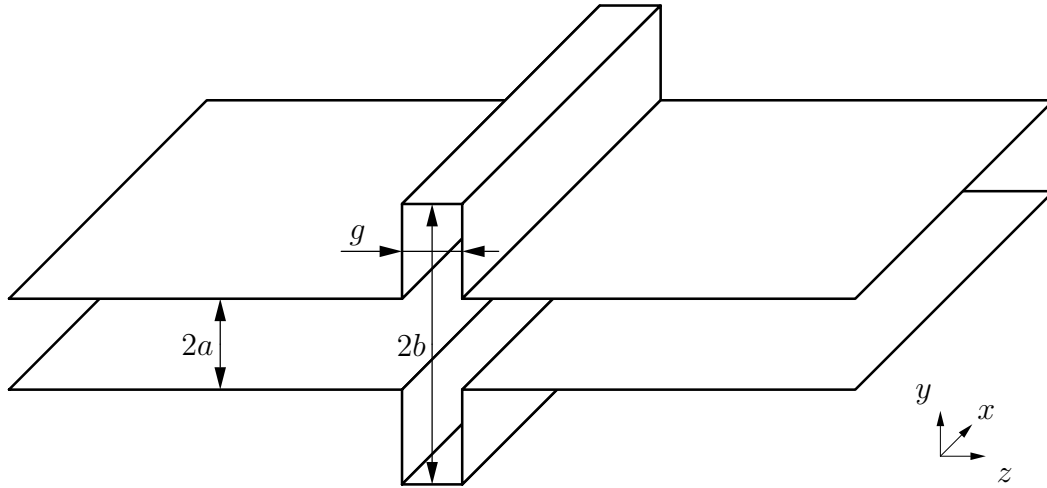


Abbildung 3.7: Der Grabenhohlleiter. Sein mittlerer Bereich entspricht einem gewöhnlichen Rechteckhohlleiter und sein äußerer Bereich einer unterhalb der kritischen Frequenz betriebenen Parallelplattenleitung.

Überlegungen ein sinnvoller Wert bereits jetzt angeben: Bei einer Strahlspannung von $U_0 = 25 \text{ kV}$ gemäß Gleichung (3.10) erhält man für die Elektronen die relativistischen Faktoren

$$\gamma_0 = 1.048923356, \quad (3.26)$$

$$\beta_0 = 0.30184; \quad (3.27)$$

die Arbeitsfrequenz und die zugehörige Resonanz- bzw. Grenzwellenzahl betragen

$$f = 91.392 \text{ GHz}, \quad (3.28)$$

$$k_0 = 1915.5 \text{ m}^{-1}. \quad (3.29)$$

Gemäß der Abschätzung (2.212) ergibt sich daher eine Spaltbreite von

$$g = 0.42 \text{ mm}. \quad (3.30)$$

Zum Entwurf der $\lambda/4$ -Transformatoren ist die Grenzfrequenz des Grabenwellenleiters abzusenken; dabei bestehen prinzipiell drei verschiedene Möglichkeiten, welche auch kombiniert werden können, siehe Abbildung 3.8:

1. Vergrößerung der Grabentiefe $b_t > b$.
2. Vergrößerung der Spaltbreite $g_t > g$.
3. Verringerung der Apertur $a_t < a$.

Im ersten Fall gelangt man zum sogenannten *Barbell-Resonator*, welcher bereits 1993 von WILSON vorgeschlagen wurde [49]; Abbildung 3.9 zeigt Geometrie und elektrisches Feld

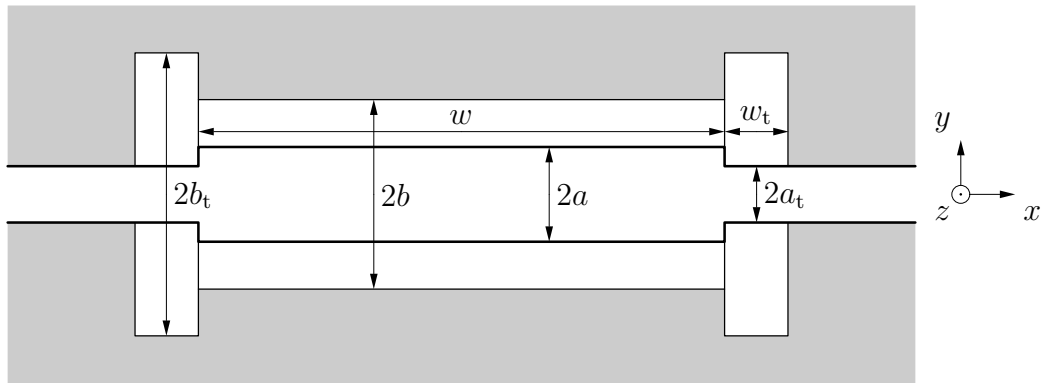


Abbildung 3.8: x - y -Schnitt des allgemeinen planaren Resonators für flachen Feldverlauf über x . Er besteht aus einem bei seiner Grenzfrequenz betriebenen Grabenhohlleiter der Länge w , dessen Enden mit $\lambda/4$ -Transformatoren der Länge w_t terminiert sind.

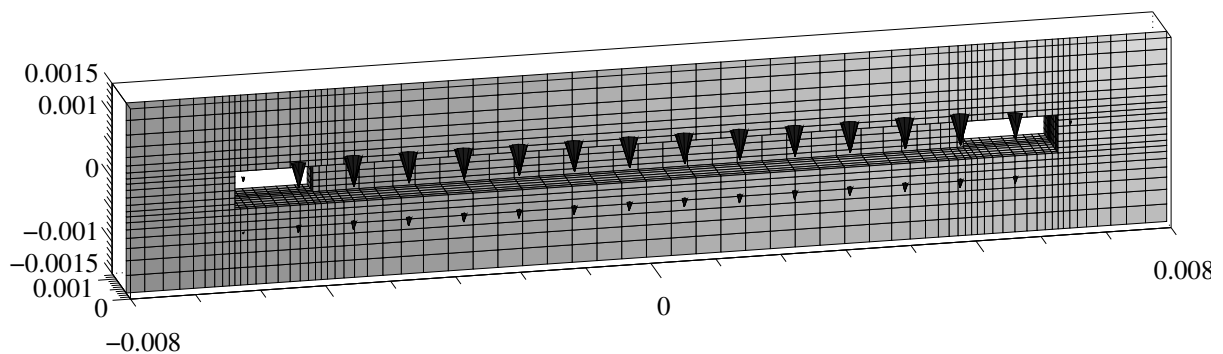


Abbildung 3.9: x - z -Schnitt des Barbell-Resonators.

eines derartigen, mit GdfidL simulierten Resonators, [9]. Da die Grabentiefe den größten Einfluß auf die Grenzfrequenz des Wellenleiters besitzt, ist dies auch die naheliegendste Variante. Vorteilhaft dabei ist, daß die Spaltbreite über die gesamte Resonatorbreite konstant ist, womit sich eine Barbell-Zelle sehr gut zum Aufbau mehrzelliger Strukturen eignet. Als nachteilig für die Fertigung mittels LIGA mag sich erweisen, daß zwei verschiedene Strukturturen (b , b_t) erforderlich sind. Diesen Nachteil vermeidet man im zweiten Falle und gelangt zum sogenannten *H-Block-Resonator* [39], Abbildung 3.10, wobei nun aufgrund der unterschiedlichen Spaltbreite der Aufbau mehrzelliger Strukturen erschwert wird. Die dritte Variante, mittels abgesenkter Apertur eine geringere Grenzfrequenz zu erreichen, ist allein der Vollständigkeit halber untersucht worden, Abbildung 3.11. Man kann der Abbildung bereits entnehmen, daß die Feldstärke zur Terminierung hin zunimmt, also gerade dort, wo keine Wechselwirkung mit dem Strahl stattfinden kann, was sich in einem geringeren Shuntwiderstand niederschlägt.

Damit ist das Problem, einen bezüglich x flachen Verlauf der Feldkomponente E_z zu erreichen, prinzipiell gelöst: Zur Diskussion stehen die Barbell- und die H-Block-Zelle.

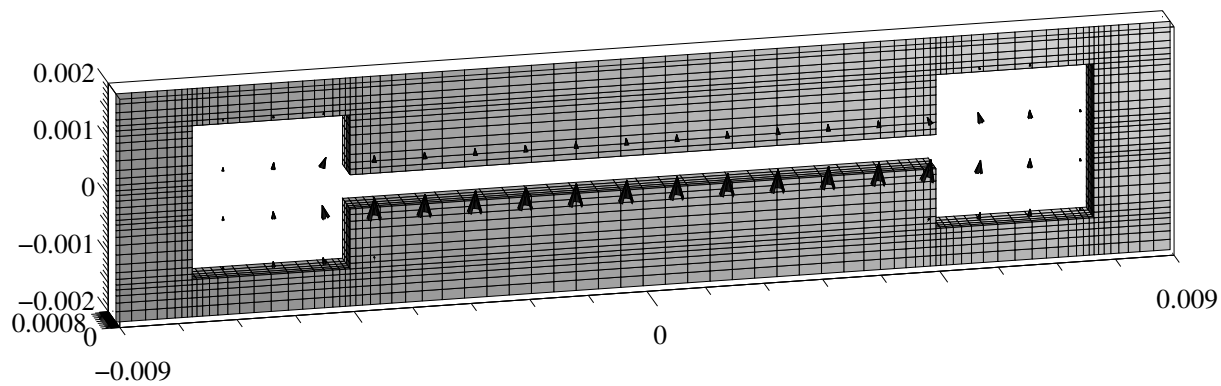


Abbildung 3.10: x - z -Schnitt des H-Block-Resonators.

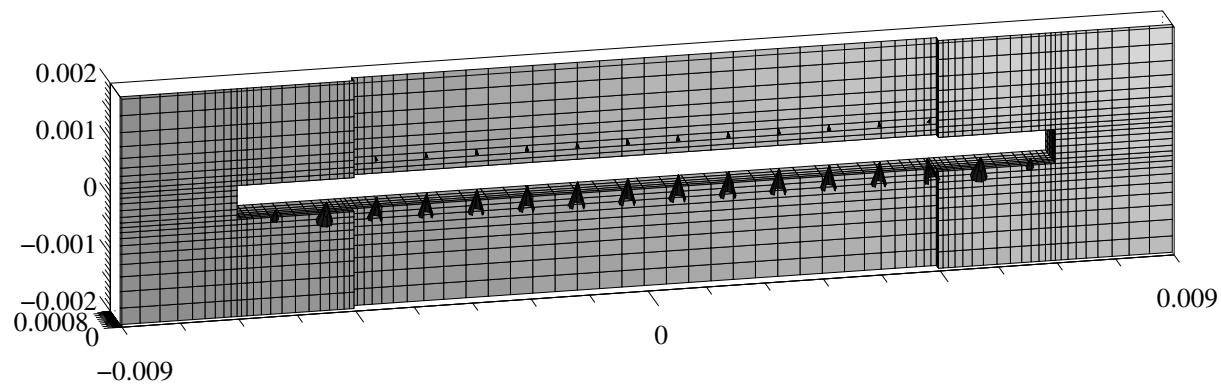


Abbildung 3.11: x - z -Schnitt des Resonators mit abgesenkter Apertur.

Welcher von beiden der Vorzug zu geben ist, hängt im wesentlichen von dem mit einer einzelnen Zelle erreichbaren Shuntwiderstand ab. Sollte er kleiner als der Strahlwiderstand (3.13) ausfallen, wird eine mehrzellige Struktur unvermeidbar und die Verwendung der Barbell-Zelle vorteilhaft.

3.3.2 Untersuchungen zum Shuntwiderstand

Wie bereits erwähnt, gilt für die vorgestellten Zellen im Bereich des flachen Feldes $\partial/\partial x \approx 0$ für alle Feldkomponenten. Da einerseits in diesem Bereich gerade die Wechselwirkung mit dem Elektronenstrahl stattfindet und andererseits aufgrund der geometrischen Verhältnisse die Wandverlustleistung in den Abschlußleitungen gegenüber jenen im Wellenleiter vernachlässigt werden können, hat man es in erster Linie mit einem zweidimensionalen Resonanzproblem zu tun. Es sollte also genügen, den längenbezogenen Shuntwiderstand des zweidimensionalen Grabenresonators zu optimieren. Durch Multiplikation mit der Grabenlänge, welche in etwa der Strahlbreite entspricht, kann man jederzeit zum gewöhnlichen Shuntwiderstand übergehen. Die folgenden Berechnungen sind damit unabhängig von der Auslegung der Abschlußleitungen, d.h. vom Zellentyp (Barbell- oder H-Block-Zelle).

Aufbauend auf die im Abschnitt A.7.9 dargelegte Theorie seien zunächst die Abhängigkeit der wichtigsten Resonatorparameter von der Spaltbreite g untersucht, wobei die Halbapertur gemäß den einführenden Überlegungen mit $a = 0.3 \text{ mm}$ festgehalten wird, Gleichung (3.25). Für jeden Wert von g wird die Grabentiefe b derart angepaßt, daß die Resonanzfrequenz stets der Arbeitsfrequenz (3.28) entspricht. Die „Integrationsgeschwindigkeit“ bei der Berechnung der Resonatorspannung wird gleich der Strahlgeschwindigkeit $v_0 = \beta_0 c_0$ gewählt. Abbildung 3.12 entnimmt man, daß der Shuntwiderstand für eine Spaltbreite von

$$g = 0.41 \text{ mm} \quad (3.31)$$

maximal wird; die abhängigen Resonatorparameter betragen an dieser Stelle

$$b = 0.925 \text{ mm}, \quad (3.32)$$

$$R'_{\text{sh}} = 511 \Omega\text{cm}, \quad (3.33)$$

$$Q = 1291, \quad (3.34)$$

$$R'_{\text{sh}}/Q = 0.396 \Omega\text{cm}. \quad (3.35)$$

Der maximal erreichbare Shuntwiderstand beträgt also lediglich ein Zwanzigstel des Strahlwiderstandes (3.13), weshalb die Verwendung eines aus mehreren Barbell-Zellen bestehenden Resonators geboten ist.

Bekanntlich beträgt der Shuntwiderstand eines aus mehreren gekoppelten Zellen bestehenden Resonators gerade die Summe der einzelnen Shuntwiderstände, sofern die Phasengeschwindigkeit der interessierenden Vorwärtswelle in der Struktur mit der Integrationsgeschwindigkeit (Strahlgeschwindigkeit) v_0 übereinstimmt. Anstelle der Phasengeschwindigkeit verwendet man zur Charakterisierung des Schwingungstyps i.allg. den *Phasenvorschub pro Zelle* $\Delta\phi$, welcher bei Strukturen mit endlicher Zellenzahl nur diskrete Werte im Bereich $[0, \pi]$ annehmen kann. Mit der Periodenlänge L der Struktur (Abstand zwischen

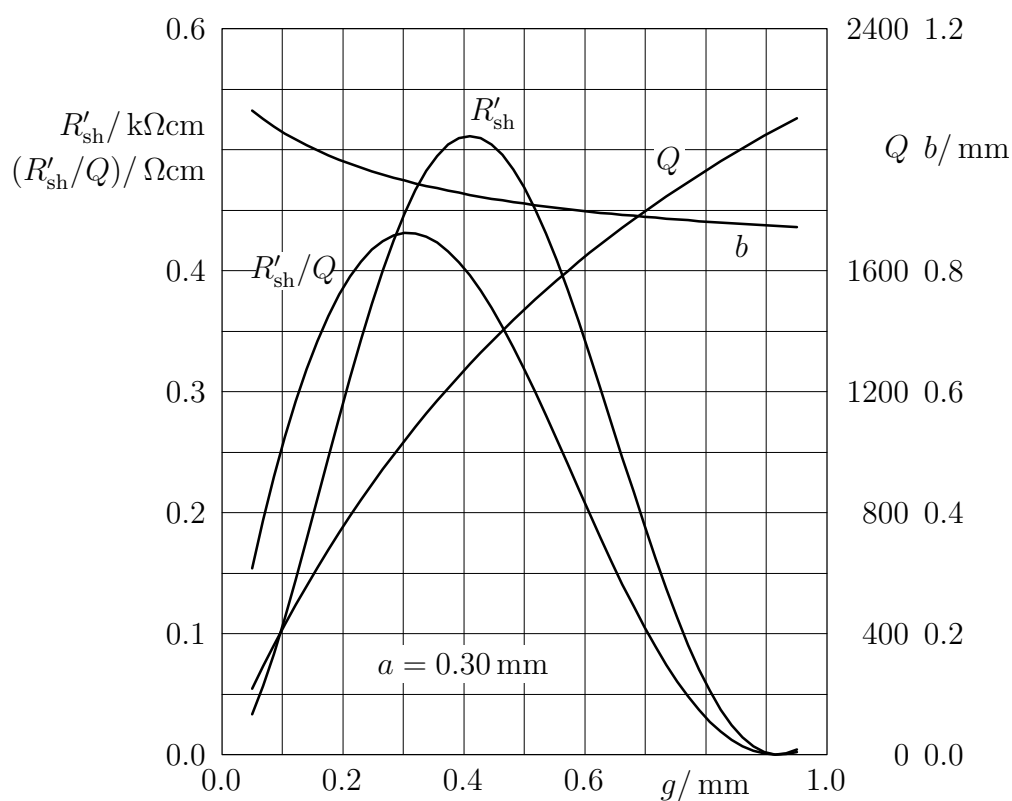


Abbildung 3.12: Längenbezogener Shuntwiderstand R'_{sh} , Güte Q , R'_{sh}/Q und Grabentiefe b des zweidimensionalen Grabenresonators (vgl. Abbildung 3.7) in Abhängigkeit von der Spaltbreite g für eine Resonanzfrequenz von $f = 91.392$ GHz und eine Halbapertur von $a = 0.3$ mm. Die der Shuntwiderstandsberechnung zugrunde gelegte relative „Integrationsgeschwindigkeit“ beträgt $v_0/c_0 = \beta_0 = 0.302$.

den Mittelebenen benachbarter Zellen) gilt für die Phasengeschwindigkeit der elementaren Raumharmonischen

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega L}{\Delta\phi}, \quad (3.36)$$

und die Synchronbedingung liefert

$$L = \Delta\phi \frac{\beta_0}{k_0}. \quad (3.37)$$

Bei maximalem Phasenvorschub $\Delta\phi = \pi$, d.h. bei Betrieb der Struktur im π -Modus, beträgt die einzustellende Periodenlänge $L = \pi\beta_0/k_0 = 0.495$ mm. Aus mechanischen Gründen muß die Wandstärke zwischen den Zellen mindestens 0.2 mm betragen; andererseits soll die Spaltbreite gemäß (3.31) zu 0.4 mm gewählt werden. Eine im π -Modus betriebene Struktur ist daher bereits nur unter Inkaufnahme eines suboptimalen Shuntwiderstandes pro Zelle verwendbar, und geringere Phasenvorschübe scheinen auf den ersten Blick überhaupt nicht nutzbar zu sein, weil dies Spaltbreiten kleiner als 0.3 mm erfordern würde. Am Beispiel des 0-Modus, welcher gemäß (3.37) nach einer verschwindenden Periodenlänge verlangt, läßt sich jedoch zeigen, daß bei einer im $\Delta\phi$ -Modus betriebenen Struktur auch Raumharmonische mit einem von $\Delta\phi$ abweichenden Phasenvorschub genutzt werden können: Der 0-Modus zeichnet sich durch ein zeitgleiches Feldmaximum in allen Zellen aus. Wenn also eine sich mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 bewegende Probeladung in einer Zelle ein Feldmaximum erfährt, so erfährt sie in allen Zellen das Feldmaximum, wenn ihre Laufzeit L/v_0 ein ganzzahliges Vielfaches der zeitlichen Feldperiode $2\pi/\omega$ beträgt, wenn also $L = 2m\pi\beta_0/k_0$ gilt. Im allgemeinen Falle hat man die Periodenlänge gemäß

$$L = (2m\pi \pm \Delta\phi) \frac{\beta_0}{k_0} \quad (3.38)$$

mit ganzzahligem und möglichst niedrigem m zu wählen.⁵ Für den π , $\pi/2$ und 0-Modus wäre es daher sinnvoll, m zu 0, 1 und 1 zu wählen, womit man die folgenden Periodenlängen einzustellen hat:

$$L_\pi = 0.495 \text{ mm}, \quad (3.39)$$

$$L_{\pi/2} = 0.743 \text{ mm}, \quad (3.40)$$

$$L_0 = 0.991 \text{ mm}. \quad (3.41)$$

⁵Dieser Zusammenhang kann im Rahmen dieser Arbeit aus Platzgründen nicht hergeleitet werden. Mit den Begriffen aus Abschnitt 2.2.2 läßt sich das Problem aber folgendermaßen beschreiben: Das Spektrum der z -Komponente des elektrischen Feldes ist für jeden Resonator symmetrisch um $k_z = 0$ und weist bei mehrzelligen Strukturen periodisch auftretende Maxima auf, welche in etwa bei $k_z = (2m\pi \pm \Delta\phi)/L$ liegen, wobei diese lokalen Maxima mit wachsendem $|k_z|$ i.allg. abnehmen. Die Maximalwerte (nicht jedoch die Maximalstellen) sind von der Spaltbreite abhängig. L und $\Delta\phi$ sind im Sinne eines maximalen Shuntwiderstandes derart zu wählen, daß die Stelle des absoluten Maximums mit der Wellenzahl des Strahls $k = \beta_0/k_0$ zusammenfällt. Ist dies aus praktischen Gründen nicht möglich, kann man sich mit einem Nebenmaximum zufriedengeben. Mit steigender Zellenanzahl geht das „wellige“ Spektrum in ein Linienspektrum über; bei unendlich vielen Zellen (periodische Struktur) hat man dann nur noch die diskreten Wellenzahlen $k_z = (2m\pi \pm \Delta\phi)/L$, [7].

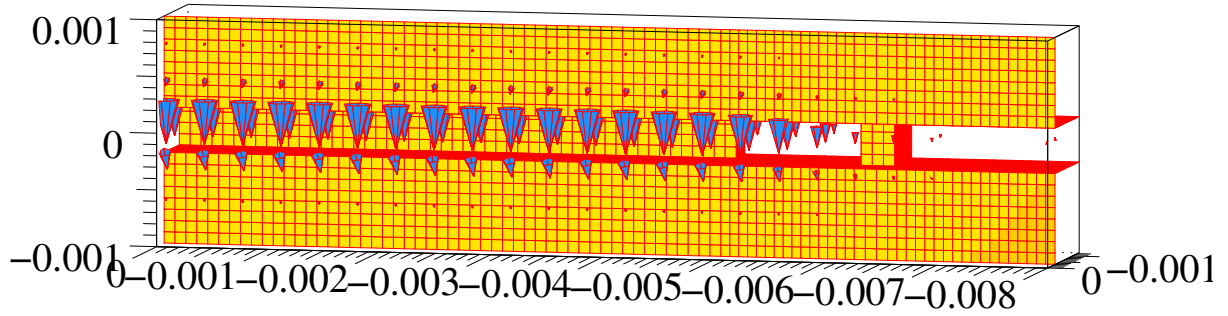


Abbildung 3.13: Einzelliger Barbell-Resonator mit beidseitiger Ankopplung des Grabenwellenleiters: x - z -Schnitt einer Hälfte der Anordnung.

Theoretisch ließen sich bei freier Wahl der Zellenanzahl beliebig hohe Shuntwiderstände erzielen. Alle bisherigen Rechnungen zur Modulation und Demodulation des Elektronenstrahls basieren allerdings auf der Annahme einer im Verhältnis zur Driftlänge kurzen Wechselwirkungslänge, weshalb die gesamte Resonatorlänge deutlich kleiner als $\lambda_p/4 = 14.6$ mm ausfallen sollte. Als halbwegs realistisch erscheint daher eine Resonatorlänge von 5 mm, auf welcher sich – je nach Modus – 9, 7 und 5 Zellen unterbringen lassen. Offenbar erzielt man mit 9 im π -Modus betriebenen Zellen den größten Shuntwiderstand; gemäß den Daten aus Abbildung 3.12 gilt für einen derartigen Resonator

$$g = 0.3 \text{ mm}, \quad (3.42)$$

$$R'_{\text{shi}} \approx 4 \text{ k}\Omega\text{cm}, \quad (3.43)$$

$$Q_i \approx 1000. \quad (3.44)$$

3.4 Kopplung

Zum Zwecke der Zuführung (Eingangsresonator) und Abführung (Ausgangsresonator) von Mikrowellenleistung sind die entworfenen Resonatoren an einen Grabenwellenleiter zu koppeln. Die naheliegendste Variante der Kopplung besteht in der seitlichen Heranführung des Wellenleiters, Abbildung 3.13. Trotz der Belastung der Zelle durch den Wellenleiter bleibt die Flachheit des elektrischen Feldes erhalten, Abbildung 3.14. Um die Anzahl der Strukturiefen gering zu halten (LIGA-Prozeß), ist die Grabentiefe des Wellenleiters gleich der Tiefe b_t der Terminierung gewählt. Die Kopplung zwischen Zelle und Leiter und damit die externe Güte wird mit Hilfe der Irisabmessungen eingestellt, wobei aus mechanischen Gründen wieder eine minimale Dicke von 0.2 mm angenommen wird, die Tiefe jedoch im Bereich $[a, b_t]$ frei wählbar ist. Die mittels GdfidL im Zeitbereich durchgeführte Simulation der beschriebenen Anordnung sagt eine minimale externe Güte von $Q_e \approx 1000$ voraus. Eine einzelne Zelle läßt sich demzufolge bei Anpassung betreiben; eine 9-zellige Struktur läßt sich bei Kopplung an eine einzige Zelle jedoch nur unwesentlich belasten, denn der internen Güte von $Q_i \approx 1000$ steht eine externe Güte von $Q_e \approx 9000$ gegenüber. Bei Kopplung an alle Zellen wäre zwar Anpassung wieder möglich, aber das Problem bestünde dann in der reflexionsfreien Zusammenführung der neun Wellenleiter – man hätte den Teufel mit dem Belzebug ausgetrieben.

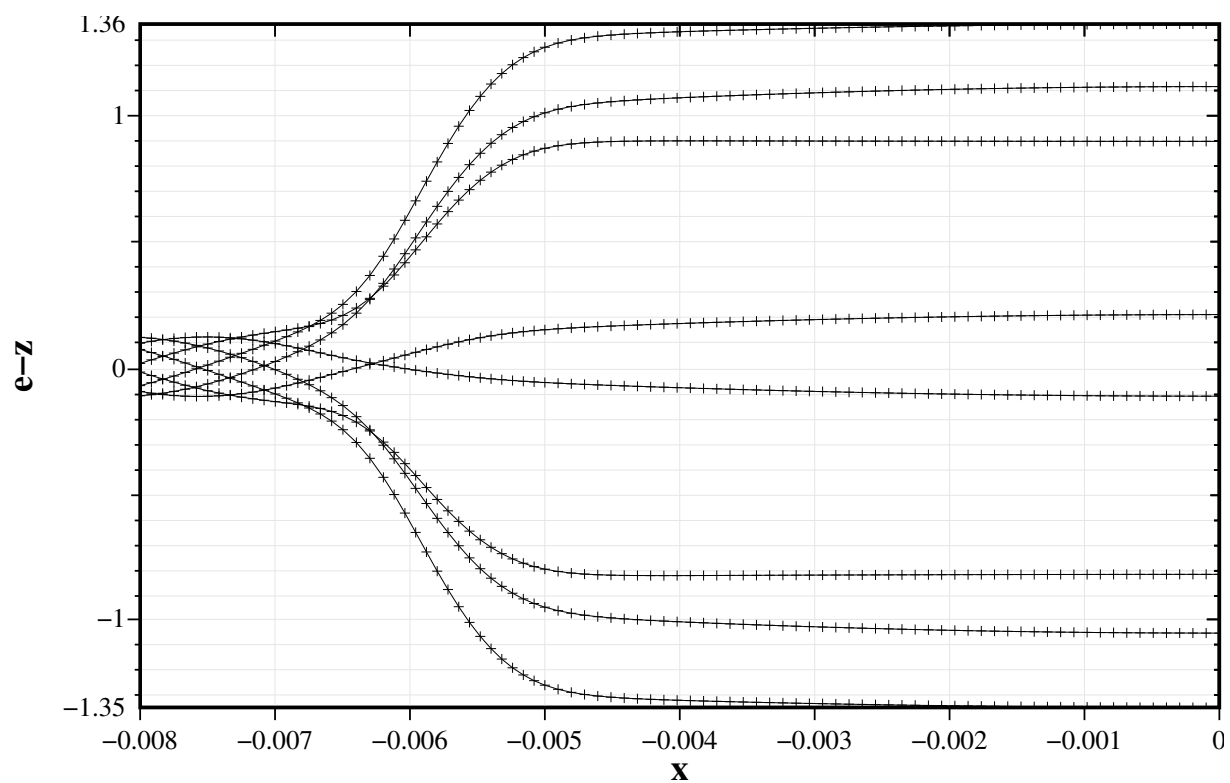


Abbildung 3.14: Einzelliger Barbell-Resonator mit einfacher seitlicher Ankopplung: E_z (normiert) über x entlang der Symmetrieachse $y = 0$, $z = 0$ zu verschiedenen Zeitpunkten für die Geometrie aus Abbildung 3.13. Trotz Belastung durch den Hohlleiter stellt sich ein flaches elektrisches Feld ein.

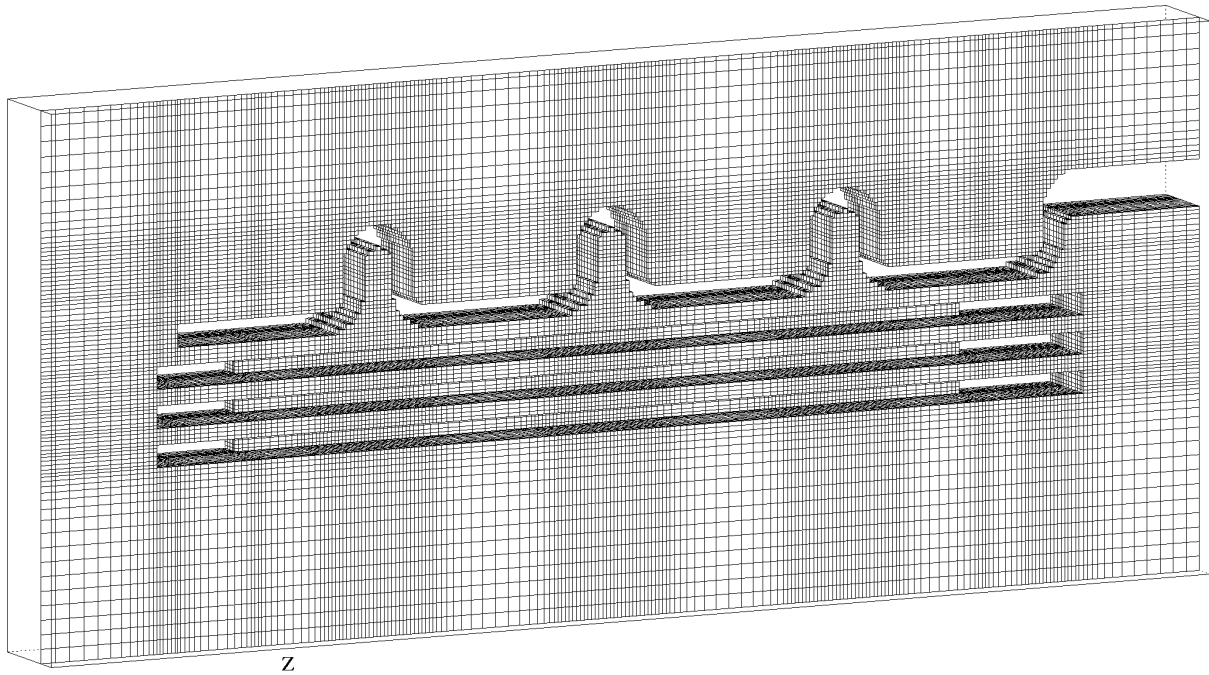


Abbildung 3.15: Dreizelliger Barbell-Resonator mit Schlangenkoppler: x - z -Schnitt der Anordnung.

Als Alternative bietet sich eine Kopplung über die gesamte Resonatorbreite an, welche im Gegensatz zur zuvor besprochenen Seitenkopplung als Rückenkopplung bezeichnet sei. Daß man mit einem einfach parallel zur Zelle verlaufenden Grabenleiter keine befriedigende Kopplung erreichen kann, läßt sich leicht einsehen: Währenddessen im Resonator $k_x = 0$ aufgrund des flachen Feldes gilt, hat man im Wellenleiter $k_x \gg 0$, denn es soll Leistung in x -Richtung transportiert werden. Man hätte daher im Leiter mehrere Phasenwechsel über x , währenddessen die Phase im Resonator bezüglich x konstant ist, so daß der Leiter als Kurzschluß wirken würde. Fügt man jedoch an passenden Stellen Verzögerungsleitungen ein, gelingt eine phasenrichtige Ankopplung. Die mit dem in Abbildung 3.15 dargestellten Schlangenkoppler erreichbare externe Güte beträgt in etwa 300 für eine einzelne Zelle und somit $Q_e \approx 2700$ für eine 9-zellige Struktur. Damit fällt die Kopplung zwar noch immer recht gering, aber schon deutlich größer als bei Verwendung des Seitenkopplers aus. Durch Modifikation der Verzögerungsleitungen lassen sich verschiedene Rückenkoppler aufbauen, welchen jedoch stets dasselbe Kopplungsprinzip zu Grunde liegt. Mit dem in Abbildung 3.16 dargestellten Baumkoppler wurde bislang eine externe Güte von 600 für eine einzelne Zelle erreicht. Die gegenüber dem Schlangenkoppler geringere Kopplung ist wahrscheinlich auf einen Phasenfehler zurückzuführen; aufgrund des komplizierten Aufbaus der Verzögerungsleitungen ist eine Abstimmung nur mit sehr großem Aufwand möglich.

Der Vorteil der Rücken- gegenüber der Seitenkopplung besteht offenbar in einer um den Faktor 3 geringeren erreichbaren externen Güte. Es mag sich jedoch als Nachteil erweisen, daß der Elektronenstrahl nun auch mit dem Feld im Wellenleiter interagieren kann. Allerdings ist die Stärke dieses Feldes wesentlich geringer als jene des Resonatorfeldes,

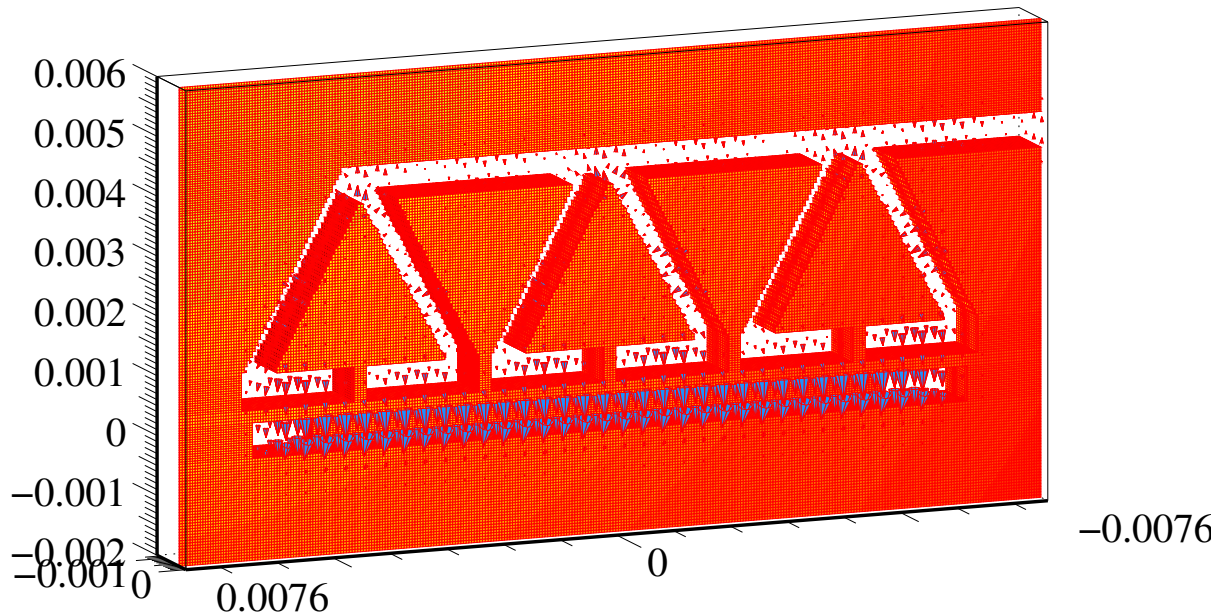


Abbildung 3.16: Einzelliger Barbell-Resonator mit Baumkoppler: x - z -Schnitt der Anordnung.

weshalb auch die Wechselwirkung von geringer Stärke sein sollte.

3.5 Fokussierung

Zur Fokussierung des Bandstrahls im Driftbereich wird eine periodische Permanentmagnetstruktur (PPM) verwendet, welche aus Gründen eines einfachen Aufbaus ohne ferromagnetische Materialien auskommen soll, d.h. die Magnete werden direkt in das Kupfer des Strahlrohrs eingebettet. Gemäß der Theorie aus Abschnitt 2.2.4 hat man bei Strukturen vom Typ 1 variierende Transversalgeschwindigkeiten der Elektronen, weshalb die Entscheidung zugunsten des Typs 2 ausfällt. Es verbleibt damit, die in Abbildung 2.40 dargestellte Struktur zu dimensionieren.⁶

Begonnen sei mit den geometrischen Parametern. Gemäß Gleichung (2.293) ist die Periodenlänge λ_f der Struktur wesentlich kleiner als die Plasmawellenlänge $\lambda_p = 58.3$ mm zu wählen, welche beim Entwurf der Elektronenkanone festgelegt wurde, (3.20).

$$\lambda_f = 10.0 \text{ mm} \quad (3.45)$$

erfüllt diese Forderung sicherlich. Um eine große Feldamplitude B_0 zu erhalten, sollte gemäß (2.276) die Periodenlänge das Doppelte der Magnetdicke betragen. Dies bedeutete allerdings einen verschwindenden Magnetabstand, weshalb die Magnetdicke stattdessen zu

$$d_f = 2.5 \text{ mm} \quad (3.46)$$

⁶Bei der Dimensionierung spielt die Typenwahl keine Rolle, vgl. Theorie Seite 77 ff. Gegen den Typ 2 sprechen die großen transversalen Elektronengeschwindigkeiten, welche einen Einfluß auf das HF-Verhalten des Strahls befürchten lassen.

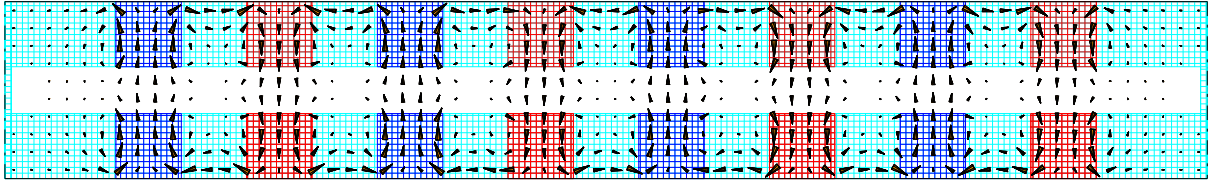


Abbildung 3.17: Zweidimensionale periodische Permanentmagnetstruktur (PPM) vom Typ 2: y - z -Schnitt der Anordnung mit überlagertem Feldbild der Induktion.

gewählt wird. Derselben Gleichung zufolge ist eine geringe Magnetapertur a_f für ein starkes Feld wünschenswert, andererseits sollen die höheren Harmonischen nicht zu stark ausfallen, (2.277). Da außerdem genügend Kupfer zwischen den Magneten und der Strahlrohrwand liegen soll, wird als Kompromiß die halbe Magnetapertur mit

$$a_f = 0.9 \text{ mm} \quad (3.47)$$

festgelegt. Mit der Bestimmung der Feldamplitude B_0 und der Magnetisierung M wird die Dimensionierung der PPM-Struktur nun abgeschlossen. Gemäß (2.290) und der Definition der (relativistischen) Zyklotronfrequenz (2.268) ist für einen in der Dicke konstanten Bandstrahl die Induktion zu

$$B_0 = \frac{\sqrt{2}\omega_p}{e/(\gamma_0 m_0)} \quad (3.48)$$

zu wählen. Einsetzen der Strahlparameter gemäß (3.19) und (3.26) liefert

$$B_0 = 82.25 \text{ mT}, \quad (3.49)$$

und Gleichung (2.276) liefert die zugehörige Magnetisierung

$$M = 128.0 \text{ kA/m}. \quad (3.50)$$

Zur Überprüfung der Ergebnisse wurde das Magnetfeld der vorgestellten Struktur mit Hilfe des Statikmoduls von MAFIA berechnet, wobei das Strahlrohr aufgrund der diamagnetischen Eigenschaft von Kupfer unberücksichtigt blieb und die Strukturlänge mit vier Perioden bereits deutlich größer als die optimale Driftlänge gewählt wurde, Abbildung 3.17. Der zugehörige Verlauf der transversalen Feldkomponente, Abbildung 3.18, steht in guter Übereinstimmung mit der Theorie: Im mittleren Bereich weist er die erwarteten periodischen Eigenschaften auf, und es treten nur ungradzahlige Harmonische auf, wobei die der Grundwelle am nächsten liegende tatsächlich von Bedeutung ist. Gemäß Gleichung (2.277) sollten die auf die Grundwelle bezogenen Amplituden der nächsten beiden Harmonischen 10.8% und 2.1% betragen, so daß auch hier Übereinstimmung herrscht. Eine Diskrepanz besteht jedoch beim absoluten Wert der Induktion: Berücksichtigt man die beiden angesprochenen Harmonischen samt ihren Phasen, so ergibt sich bei der gemäß (3.50) gegebenen Magnetisierung ein theoretischer Spitzenwert der Induktion von $100\% - 10.8\% + 2.1\% \approx 91\%$ der Grundwelle, d.h. $\approx 75 \text{ mT}$; der von MAFIA berechnete Wert

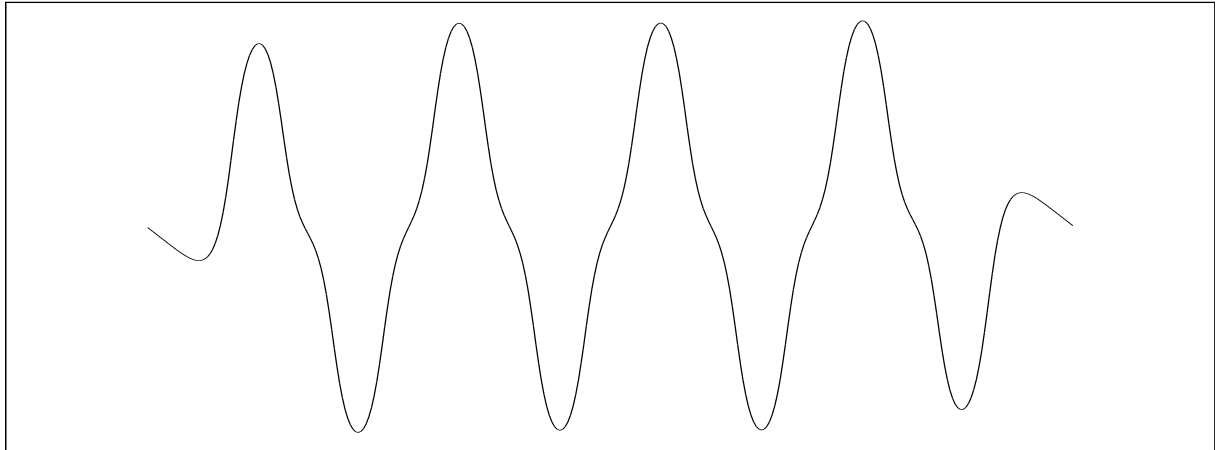


Abbildung 3.18: Zweidimensionale periodische Permanentmagnetstruktur (PPM) vom Typ 2: Verlauf der transversalen Komponente der Induktion B_y über der longitudinalen Koordinate z entlang $y = 0$ für die Anordnung aus Abbildung 3.17. Der Maximalwert beträgt 58 mT bei einer Magnetisierung von $M = 128$ kA/m.

beträgt jedoch lediglich 58 mT. Das reale Verhältnis zwischen Magnetisierung und Induktion ist daher noch einmal gründlich zu untersuchen. Im Rahmen dieser Arbeit sind die absoluten Werte der Induktion allerdings nur von untergeordneter Bedeutung. Entscheidend hingegen ist, daß die gewünschten Felder mittels derzeit verfügbaren Materialien erzeugbar sind. Und das ist in der Tat der Fall, denn das benötigte Polfeld $\hat{B} = \mu_0 M$ (pole-tip-field) liegt mit 160 mT in einem unkritischen Bereich, [14]. Die verhältnismäßig geringe Magnetapertur ließe sich folglich durchaus erhöhen, um die Stabilität der Struktur zu verbessern.

Interessanter als die Verifikation der Orthogonalentwicklung des Magnetfeldes ist die numerische Überprüfung der Fokussierungsanalyse. Dazu wurde das mittels MAFIA berechnete Magnetfeld in das PIC-Modul von MAFIA geladen und die Ausbreitung des

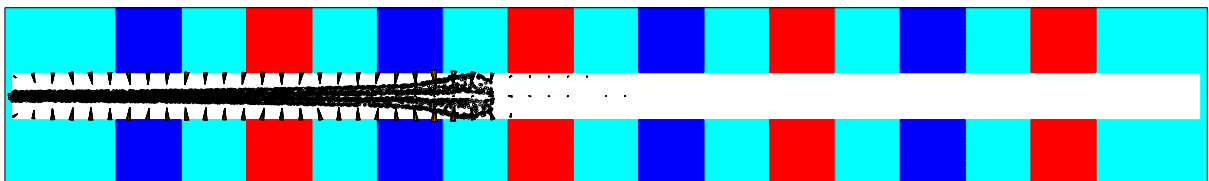


Abbildung 3.19: Zweidimensionale periodische Permanentmagnetstruktur (PPM) vom Typ2: x - y -Schnitt der Anordnung mit unmoduliertem Strahl und dessen elektrischem Feld. Bei verschwindender Magnetisierung der Permanentmagnete verdoppelt sich nach ca. 15 mm die Dicke des Bandstrahls; der theoretische Wert gemäß Abschnitt 2.2.4 beträgt 13.2 mm.

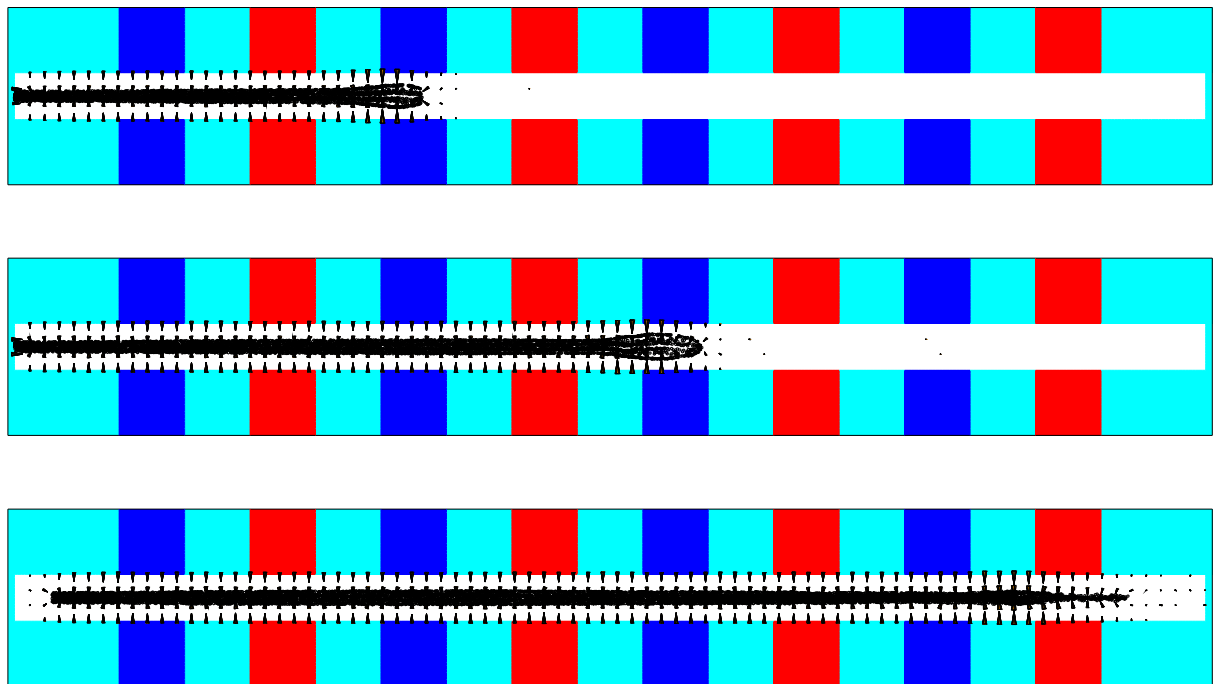


Abbildung 3.20: Zweidimensionale periodische Permanentmagnetstruktur (PPM) vom Typ2: Verlauf des unmodulierten Bandstrahls zu verschiedenen Zeitpunkten bei einer Magnetisierung von $M = 201 \text{ kA/m}$. Der zugehörige Spitzenwert der Induktion beträgt 91 mT .

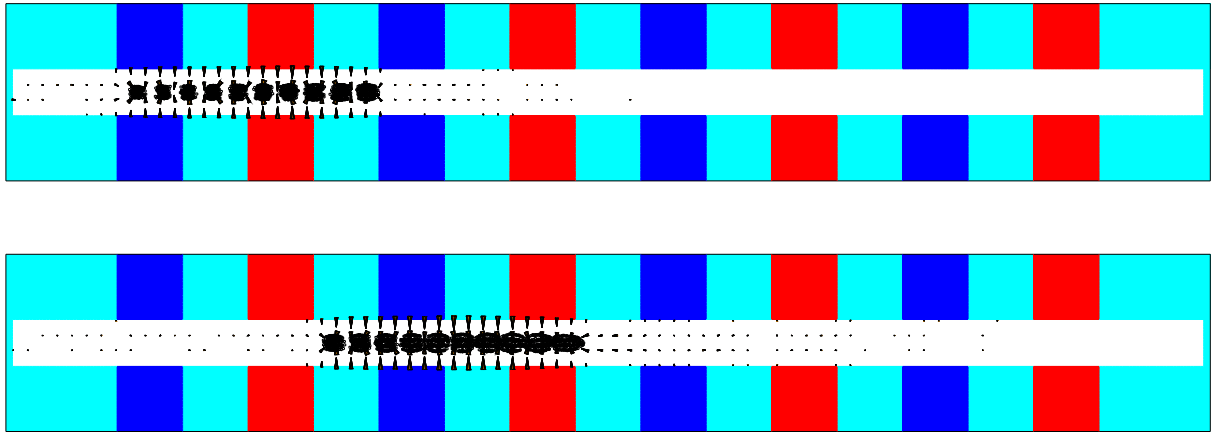


Abbildung 3.21: Zweidimensionale periodische Permanentmagnetstruktur (PPM) vom Typ2: Verlauf eines Paketzuges zu verschiedenen Zeitpunkten. Die anfängliche Ladungsverteilung im Paketzug entspricht einer Strommodulation von $M_I = 1.6$. Auch für einen modulierten Strahl ist eine Magnetisierung von $M = 201$ kA/m offenbar ausreichend groß. Die longitudinale Defokussierung des Strahls läßt sich mit statischen Magnetfeldern natürlich nicht verhindern.

unmodulierten Elektronenstrahls mit den Daten gemäß (3.10) bis (3.20) simuliert. Im ersten Lauf wurde ein verschwindendes Magnetfeld verwendet, um die Aufweitungsrechnung aus Abschnitt 2.2.4 zu überprüfen. Wie es der Abbildung 3.19 entnommen werden kann, verdoppelt sich die Strahldicke entlang eines Weges von $\Delta z \approx 15$ mm. Dies entspricht in etwa der Theorie; Gleichung (2.246) sagt einen Weg von $\Delta z = 13.2$ mm voraus. In den folgenden Läufen wurde das in Abbildung 3.17 gezeigte Magnetfeld geladen und die Magnetisierung solange erhöht, bis sich ein flacher Strahlverlauf ergab, Abbildung 3.20. Dabei zeigte sich, daß eine mit $M = 201$ kA/m deutlich größere Magnetisierung benötigt wird, als es die Theorie voraussagt; der Spitzenwert der auf der Achse erzeugten zugehörigen Induktion beträgt 91 mT.

Da die im Abschnitt 2.2.4 vorgestellte Theorie keine Aussagen über das Verhalten eines modulierten Bandstrahls in der Fokussierungsstruktur macht, wurde abschließend die Ausbreitung eines Paketzuges simuliert, Abbildung 3.21. Die Raumladungsdichte jedes Elektronenpakets entspricht einer GAUSSschen⁷ Glockenkurve, deren Streuung σ für eine Strom- und Dichtemodulation von $M_I = M_\rho = 1.6$ angepaßt wurde; alle Elektronen starten mit derselben Geschwindigkeit. Es zeigt sich, daß eine für die Fokussierung eines unmodulierten Strahls angepaßte Struktur auch modulierten Strahlen zu einer hinreichend guten Ausbreitung verhelfen sollte. Auch der Effekt der longitudinalen Demodulation bzw. Defokussierung⁸ des Elektronenstrahls – der feldtheoretischen Analyse der Dichtemodu-

⁷Gauß, Carl Friedrich (1777-1855), deutscher Astronom, Mathematiker und Physiker

⁸ Wie bereits erwähnt, wird die Dichtemodulation vor allem in der deutschsprachigen Literatur auch als Phasenfokussierung bezeichnet, weil sich die Ladungsträger aufgrund der Geschwindigkeitsmodulation

lation implizit – findet in den Abbildungen Ausdruck. Gemäß der Theorie, Abbildung 2.12 Seite 27, sollte ein unmodulierter Strahl nach einem Driftweg von $\lambda_p/4$ seine maximale Dichtemodulation annehmen und weitere $\lambda_p/4$ später wieder in den unmodulierten Zustand übergehen. Dem unteren Bild kann man eine vollständige Demodulation nach ungefähr zwei Magnetperioden entnehmen, d.h. nach 20 mm zurückgelegtem Weg. Mit der der Simulation zugrunde liegenden Plasmawellenlänge von $\lambda_p = 58.3$ mm fällt dieser also etwas größer aus, als es die eindimensionale Theorie voraussagt. Der Grund für diese Abweichung ist sicherlich in der Vernachlässigung der gemäß Abbildung 3.21 nicht unwesentlichen transversalen elektrischen Felder zu suchen: Bei der eindimensionalen Theorie existieren nur z -gerichtete Felder, so daß örtliche Schwankungen der Raumladungsdichte ausschließlich z -gerichtete (demodulierende) Kräfte zur Folge haben. Im Zweidimensionalen treten jedoch auch y -gerichtete (nicht demodulierend wirkende) Kräfte auf, welche sich mit den z -gerichteten dieselben Quellen zu teilen haben. Die eindimensionale Theorie überschätzt folglich die Stärke von Modulation und Demodulation; die optimale Driftlänge, welche weiterhin die für den Übergang des Strahls vom unmodulierten zum optimal modulierten und vom (optimal) modulierten zum vollständig demodulierten Zustand zurückzulegende Weglänge angibt, muß in der Praxis größer ausfallen, als es die eindimensionale Theorie voraussagt.⁹

3.6 Abschätzung der resultierenden Parameter

Mit der abgeschlossenen Dimensionierung der Klystronkomponenten lassen sich nun unter Verwendung der im Kapitel 2 hergeleiteten Beziehungen auch die zu erwartenden kombinierten elektrischen Daten wie Modulationen und Wirkungsgrade abschätzen.

Eine zentrale Stellung nimmt die **Strommodulation** M_I ein, deren Wert der Theorie zur Energieauskopplung zufolge maximal werden sollte, Abschnitt 2.1.4, andererseits dem Wert 2 aber prinzipiell nicht übersteigen kann, Abschnitt A.4. Er sei daher mit

$$M_I = 1.6 \quad (3.51)$$

festgelegt. Aus diesem Wert läßt sich mittels Gleichung (2.96) der linearen Theorie zur Dichtemodulation¹⁰ die erforderliche **Geschwindigkeitsmodulation** berechnen

$$M_v = 0.027, \quad (3.52)$$

wobei die einzustellende **Driftlänge** zwecks Minimierung der erforderlichen Geschwindigkeitsmodulation zu einem Viertel der Plasmawellenlänge (3.20) gewählt wird

$$l = 14.6 \text{ mm}. \quad (3.53)$$

in der Phase bündeln, d.h. sich relativ zur gedachten Welle $\omega t - kz$ vorrangig bei bestimmten Phasen einfinden. Analog wird daher Demodulation auch als (Phasen-) Defokussierung bezeichnet.

⁹Die im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelte Theorie bewegter modulierter Raumladungen in Hohl- bzw. Wellenleitern führt die sogenannte *reduzierte Plasmafrequenz* $\omega_q < \omega_p$ ein, um die handlichen Ergebnisse der eindimensionalen Theorie zu korrigieren, siehe u.a. [14], [6], [4], [5], [13].

¹⁰Genaugenommen gilt die verwendete Formel lediglich für $M_I \leq 1$; zur Abschätzung des erforderlichen Wertes für die Geschwindigkeitsmodulation sollte sie dessen ungeachtet jedoch genügen.

Aufgrund der im Verhältnis zur Arbeitsfrequenz sehr niedrigen Plasmafrequenz ist also nur eine sehr geringe Geschwindigkeitsmodulation vonnöten. Der **Strahl-Resonator-Kopplungskoeffizient** beträgt bei Zugrundelegung der Spaltbreite $g = 0.3 \text{ mm}$, siehe (3.42),

$$M = 0.856, \quad (3.54)$$

so daß die nach (2.6) berechnete **relative Modulationsspannung**

$$\alpha = 0.068 \quad (3.55)$$

beträgt. Gemäß den Untersuchungen aus Abschnitt A.3.3 kann daher die dafür aufzubringende Modulationsleistung P_{mod} vernachlässigt werden, d.h. im Eingangsresonator wird mit guter Näherung Hochfrequenzenergie nur durch dessen Wände aufgenommen, und die **Eingangsleistung** (die dem Eingangsresonator zuzuführende Leistung) ist durch Gleichung (2.223) bestimmt. Verwendet man nur eine einzelne Zelle, beträgt das Verhältnis zwischen Shunt- und Strahlwiderstand $R_{\text{sh}}/R_0 = R'_{\text{sh}}/R'_0 \approx 0.041$. Bei einer Strahlleistung von $P_0 = 50 \text{ kW}$ benötigte man daher eine Eingangsleistung von $P_{\text{ein}} = 2.06 \text{ kW}$, d.h. bereits 4% der Strahlleistung, um in der Strahlmittelebene die vorgesehene Geschwindigkeitsmodulation zu erreichen. Da sich diese Leistung umgekehrt proportional zum Shuntwiderstand des Modulators verhält, reduzierte sie sich bei Verwendung eines aus neun Zellen konstruierten Resonators auf 0.5% der Strahlleistung, d.h.

$$P_{\text{ein}} = 0.23 \text{ kW}. \quad (3.56)$$

Dies ist noch immer ein unverhältnismäßig großer Wert; er ist allein auf das viel zu geringe Verhältnis zwischen längenbezogenem Shunt- und Strahlwiderstand zurückzuführen.

Aus demselben Grund fallen auch die erreichbaren Wirkungsgrade gering aus, vgl. Abschnitt 2.1.5: Bei Verwendung des besprochenen 9-zelligen Ausgangsresonators ergibt sich gemäß Gleichung (2.168) ein **potentieller Sättigungsgrad** von lediglich

$$\theta = 0.59, \quad (3.57)$$

so daß – unabhängig von jeglicher Belastung – Strahlsättigung nicht erreichbar ist. Aufgrund der ebenfalls als unzureichend zu bezeichnenden Kopplung zwischen Ausgangsresonator und abführendem Wellenleiter läßt sich das Verhältnis zwischen interner und externer Güte selbst bei Verwendung eines Rückenkopplers nicht über einen Wert von $Q_i/Q_e = 0.37$ bringen, und der tatsächlich erreichbare **Sättigungsgrad** beträgt somit gemäß Gleichung (2.169) maximal

$$\delta = 0.43. \quad (3.58)$$

Wegen des geringen Sättigungsgrades fällt die **Wandlungseffektivität** mit

$$\eta_w = 0.344 \quad (3.59)$$

gering aus, und gleiches gilt – allein aufgrund der geringen Kopplung – auch für die **Kreiseffektivität**

$$\eta_k = 0.27. \quad (3.60)$$

Die **Haupteffektivität** beträgt damit lediglich

$$\eta = 0.093, \quad (3.61)$$

woraus schließlich für die Ausgangsleistung folgt

$$P_e = 4.65 \text{ kW}. \quad (3.62)$$

Abgesehen davon, daß weniger als ein Zehntel der zu investierenden Leistung das Klystron in Form von Mikrowellenleistung wieder verläßt, bedeuten die geringen Wirkungsgrade einen erhöhten Kühlaufwand: Von den dem Strahl verliehenen 50 kW (P_0) werden ihm nur etwas mehr als 17 kW ($\eta_w P_0$) in Form von Hochfrequenzleistung wieder entnommen; die Differenz – fast 33 kW – hat der Kollektor aufzunehmen. Ferner fallen im filigranen Ausgangsresonator $(1 - \eta_k)\eta_w P_0 \approx 13 \text{ kW}$ an Wärme an, so daß zusätzlich ein leistungsstarkes Kühlsystem vorzusehen ist. Bei einer Resonatorfläche (Projektion in die x - z -Ebene) von 50 mm^2 beträgt die mittlere Flußdichte in jeder Strukturhälfte nahezu 13 kW/cm^2 – durchaus kein moderater Wert.

3.7 Weitere PIC-Simulationen

Abgesehen von wenigen Festlegungen basieren alle in diesem Kapitel vorgestellten Klystrondaten auf der im Kapitel 2 dargelegten Theorie und damit auf den für Analyse und Entwurf angepaßten, einfachen Modellen – vor allem auf dem Modell vom steifen Elektronenstrahl. Mittels PIC-Simulationen der Vorgänge im Bereich des Eingangs- und des Ausgangsresonators soll daher untersucht werden, in wieweit diese Daten – und damit die Modelle – tatsächlich der Realität entsprechen.

3.7.1 Modulation und Fokussierung

Aufgrund der bereits untersuchten starken Strahlaufweitung bei Abwesenheit einer Fokussierungseinrichtung, Abbildung 3.19, lassen sich Geschwindigkeits- und vor allem Dichtemodulation nicht ohne Anbringung eines fokussierenden Magnetfeldes sinnvoll simulieren. Aus diesem Grunde wurde das im Abschnitt 3.5 berechnete Magnetfeld der Struktur vom Typ 2 verwendet, Abbildung 3.17, und nach Bedarf skaliert. Zur Erzeugung der Geschwindigkeitsmodulation dient ein Grabenresonator mit der Spaltbreite $g = 0.4 \text{ mm}$, dessen Eigenfeld zunächst mit MAFIAs Eigenwert-Modul berechnet, entsprechend der gewünschten Modulation skaliert und anschließend in das PIC-Modul geladen wurde. Die Strahldaten wurden wie bislang entsprechend (3.10) bis (3.20) gewählt und die Apertur des Driftrohres beträgt $2a = 0.6 \text{ mm}$. Die für die Simulation verwendete Weglänge entspricht mit 1.5 Magnetstrukturperioden (15 mm) in etwa der optimalen Driftlänge.

Bereits bei den Testläufen stellte sich die bislang verwendete Magnetisierung der Permanentmagnete von $M = 201 \text{ kA/m}$ als viel zu gering heraus, so daß diese bereits im ersten regulären Simulationsdurchlauf auf $M = 301 \text{ kA/m}$ erhöht wurde, Abbildung 3.22. Von einer geordneten Strahlausbreitung kann bei weitem nicht die Rede sein, so daß sich die Auswertung der Dichtemodulation erübrigt. Da diese Simulationen in erster Linie

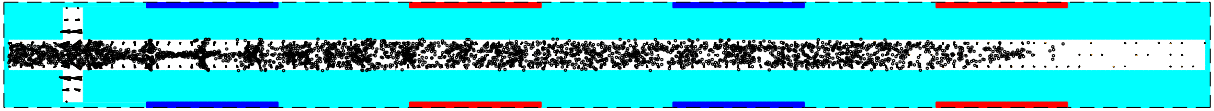


Abbildung 3.22: Zweidimensionale PIC-Simulation von Geschwindigkeits-, Dichtemodulation und magnetischer Fokussierung. Erster Lauf: $h_s = 0.4$ mm, $M = 301$ kA/m, $\hat{U} = 5.58$ kV.



Abbildung 3.23: Zweidimensionale PIC-Simulation von Geschwindigkeits-, Dichtemodulation und magnetischer Fokussierung. Zweiter Lauf: $h_s = 0.2$ mm, $M = 301$ kA/m, $\hat{U} = 5.58$ kV.

nicht zum Zwecke des Entwurfs sondern zur Verifizierung der Theorie durchgeführt werden, wurde für den zweiten Durchlauf kurzerhand die Strahldicke auf die Hälfte reduziert, alle anderen Parameter (bis auf den Strom pro Breite, welcher sich ebenfalls halbiert) jedoch unberührt gelassen, Abbildung 3.23. Noch immer kollidieren jedoch unzulässig viele Elektronen mit der Strahlrohrwand. Für den dritten Durchlauf wurde nun die Spaltspannung des Modulators um 30% reduziert, Abbildung 3.24. Sofern man dieser Änderung überhaupt einen Effekt zuschreiben kann, hat sich die Dichtemodulation im Bereich des ersten Magnetpaares geringfügig verringert. Dies entspräche auch der eindimensionalen Theorie. Noch immer ist der Strahltransport jedoch als unbefriedigend zu bezeichnen, was insofern verwundert, als die Simulationsergebnisse der Fokussierung von unmoduliertem Strahl und Paketzug (vgl. Seite 104 ff.) durchaus befriedigend ausgefallen sind. Den Glauben an die Deterministik der Vorgänge nicht verlierend wurde im vierten Durchlauf die Magnetisierung auf das Doppelte des Ausgangswertes erhöht, Abbildung 3.25. In der Tat gereicht dieser Wert nun zu einer vernünftigen Strahlausbreitung.

Zur Auswertung der vorgestellten Simulationsläufe sei zunächst die **Fokussierung** diskutiert. Offensichtlich wird mit $M = 402$ kA/m ein im Vergleich zum unmodulierten Fall (Abbildung 3.20) doppelt so starkes Magnetfeld benötigt. Daß diese Abweichung nicht auf einen Fehler bei der Simulation zurückzuführen ist, zeigt das Strahlverhalten im hinteren Bereich der Struktur, in welchem der Strahl nahezu vollständig demoduliert ist. Bei

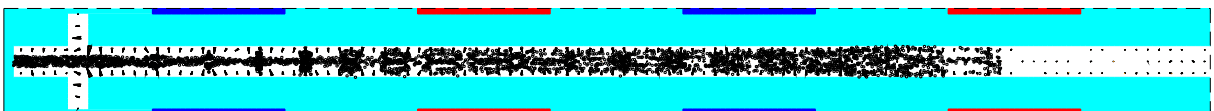


Abbildung 3.24: Zweidimensionale PIC-Simulation von Geschwindigkeits-, Dichtemodulation und magnetischer Fokussierung. Dritter Lauf: $h_s = 0.2$ mm, $M = 301$ kA/m, $\hat{U} = 3.91$ kV.

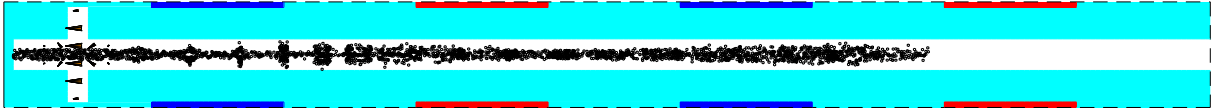


Abbildung 3.25: Zweidimensionale PIC-Simulation von Geschwindigkeits-, Dichtemodulation und magnetischer Fokussierung. Vierter Lauf: $h_s = 0.2 \text{ mm}$, $M = 402 \text{ kA/m}$, $\hat{U} = 3.91 \text{ kV}$.

genauer Betrachtung kann man Abbildung 3.25 eine Schwingung der Strahldicke entnehmen, deren halbe Wellenlänge in etwa der Länge einer Magnetperiode entspricht, d.h. die Wellenlänge der Schwingung beträgt $\lambda \approx \lambda_p/3$. Gemäß der Theorie, Gleichung (2.289), ist diese Wellenlänge durch $\lambda = 2\pi v_0/\omega_y = \lambda_p \omega_p/\omega_y$ gegeben, so daß man auf ein gegenüber dem Gleichgewichtsfall um den Faktor 3 erhöhtes Magnetfeld schließen kann. Im Hinblick auf die beim Entwurf berechnete Magnetisierung, Gleichung (3.50), ist dies in der Tat der Fall. Bedenkt man, daß zur Fokussierung eines bezüglich die Dichtemodulation äquivalenten Paketzuges ein deutlich geringeres Feld genügt, läßt sich die Notwendigkeit eines derart starken Feldes nur noch auf die Geschwindigkeitsmodulation zurückführen.

Desweiteren seien die Simulationsergebnisse bezüglich der **Dichtemodulation** diskutiert. Der Abstand zwischen den sich bildenden Elektronenpaketen beträgt bei allen Läufen in etwa 1 mm. Dies steht in erstaunlicher Übereinstimmung mit der eindimensionalen Theorie, Gleichung (2.91), welcher zufolge dieser Abstand durch $\lambda = 2\pi v_0/\omega \approx 1 \text{ mm}$ gegeben ist. Es stellt sich die Frage, ob denn das bei der Auswertung der Fokussierungssimulation eines Paketzuges angebrachte Argument, die transversalen elektrischen Felder würden den Modulationsvorgang deutlich beeinflussen, nicht auch hier greifen, die Simulation also einen größeren Paketabstand liefern müßte. Dies ist ganz klar zu verneinen: Die zeitliche Periodizität des Modulatorfeldes hat dieselbe zeitliche Periodizität aller Vorgänge im Klystron zur Folge. Trifft ein Paket zu einer gewissen Zeit in der Ebene $z = \text{const.}$ ein, so muß auch eine Periodendauer später ein äquivalentes Paket in dieser Ebene eintreffen. Das erste Paket befindet sich zu diesem Zeitpunkt in der Ebene $z = \text{const.} + \lambda$ und sollte sich, sofern die Geschwindigkeitsmodulation gering ausfällt, nur geringfügig verformt haben. Mithin besitzen die demodulierend und/bzw. defokussierend wirkenden Kräfte keinerlei Einfluß auf den Paketabstand. Allerdings beeinflussen sie den Ort der größten Dichtemodulation, welcher sich gemäß der linearen Feldtheorie unabhängig von der Geschwindigkeitsmodulation im Abstand $\lambda_p/4 \approx 14.6 \text{ mm}$ von der Mittelebene des Modulators, d.h. kurz hinter dem dritten Magnetpaar befinden sollte. Offenkundig wird dieser Wert von der Simulation nicht bestätigt. Diese Diskrepanz läßt sich nicht durch transversale elektrische Felder erklären, denn diese sollten die optimale Driftlänge erhöhen. Eine mögliche Erklärung bietet jedoch die ballistische Theorie der Dichtemodulation: Die Geschwindigkeitsmodulation entlang der Strahlrohrwand beträgt bei den ersten beiden Simulationsläufen $M_v \approx 0.078$ und bei den letzten beiden $M_v \approx 0.055$, fällt also verhältnismäßig groß aus, wobei gleichzeitig das Verhältnis zwischen Plasma- und Betriebsfrequenz mit $\omega_p/\omega \approx 0.017$ recht gering ausfällt. Mithin erscheint das ballistische Modell realistisch, welches eine optimale Driftlänge von $l \approx 3.7 \text{ mm}$ im ersten und $l \approx 5.3 \text{ mm}$ im zweiten Falle voraussagt, Werte also, die wesentlich besser

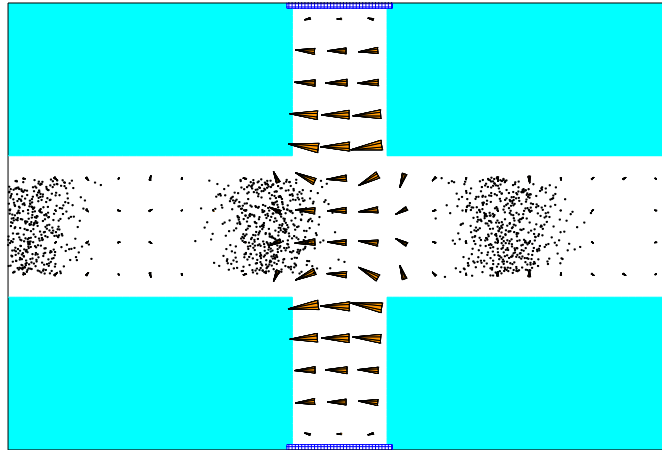


Abbildung 3.26: Zweidimensionale PIC-Simulation der Energieabgabe des modulierten Bandstrahls im einzelligen Resonator. Die anfängliche Ladungsverteilung im Paketzug entspricht einer Strommodulation von $M_I = 1.6$. Aufgrund der geringen Shuntimpedanz einer einzelnen Zelle ist kaum eine Verformung der Elektronenpakete festzustellen.

mit den Simulationsergebnissen in Übereinklang zu bringen sind. Allerdings fällt die Geschwindigkeitsmodulation in der Strahlmitte um den Faktor 3 geringer aus als an der Strahlrohrwand, wodurch sich die zugehörigen Driftlängen um denselben Faktor erhöhen. Die eindimensionale Theorie scheint daher nur bedingt dazu in der Lage zu sein, den Ort der größten Dichtemodulation vorherzusagen.

3.7.2 Energieauskopplung

Die in dieser Arbeit vorgestellte Theorie setzt fast ausnahmslos den eingeschwungenen Zustand des Klystrons voraus, welcher für den Betrieb – und damit auch für die Simulation – den tatsächlich interessanten darstellt. Währenddessen dieser Zustand bei der vorigen Simulation mit dem Resonatorfeld eingepreßt wurde, ist dies bei der Demodulation des Strahls nicht so einfach möglich, denn das durch den Strahl erzeugte Resonatorfeld stellt gerade einen wesentlichen Untersuchungsgegenstand dar. Es stellt sich also die Frage, welcher Anfangszustand für die Simulation angenommen werden sollte. Bezüglich des Strahls stellt der bereits bei der Simulation der periodischen Fokussierung verwendete GAUSSförmige Paketzug eine akzeptable Möglichkeit dar. Offen hingegen bleibt die Frage nach dem anfänglichen Resonatorfeld.

Die naheliegendste Möglichkeit besteht in der Verwendung des (theoretisch gesicherten) feldfreien Zustands. Diese Wahl birgt jedoch einige Probleme in sich: Bei einer belasteten Güte von $Q \approx 500$ (Anpassung, $Q_i = 1000$) hätte man größenordnungsmäßig 500 Perioden zu simulieren, um den eingeschwungenen Zustand zu erreichen. Mit derzeitig verfügbaren Rechnern hätte dies bei akzeptabler Auflösung in Raum, Zeit und Ladung unvermeidbar hohe Simulationszeiten zur Folge. Erschwerend käme hinzu, daß sich geringfügige Anpassungsfehler bei der Frequenz von Strahl und Resonator nach 500 Perioden stark bemerkbar

und damit die gesamte Simulation zunichte machen. Diese Überlegungen zeigen, daß es praktisch unvermeidbar ist, ein Resonatorfeld als Startwert vorzugeben. Zwar verliert die Simulation damit geringfügig an Wert, jedoch läßt sich trotzdem sowohl die Energieabgabe als auch die eventuell wesentliche Verformung der Elektronenpakete studieren. Damit lautet die nächste Frage, wie ein passendes anfängliches Resonatorfeld zu berechnen wäre.

Da die Modenseparation im Zweidimensionalen selbst bei mehrzelligen Strukturen recht stark ausfällt, wird im eingeschwungenen Zustand mit guter Näherung nur ein einziger Modus vorzufinden sein. Dessen Feldverteilung darf als bekannt angesehen werden, da sie sich ohne großen Aufwand (ohne PIC-Simulation) berechnen läßt. Allein die von der Erregung abhängige absolute Stärke E_{end} dieses Feldes bleibt damit unbekannt. Sie ist jedoch näherungsweise durch

$$E_{\text{end}} \approx \frac{Q}{\pi} E_0 \quad (3.63)$$

gegeben, wobei E_0 das von einem einzelnen Paket erzeugte Feld und Q die belastete Güte bezeichnen.¹¹ Der Wert von E_0 wird durch eine vorangestellte PIC-Simulation mit einem einzelnen Paket bestimmt.

Zur Simulation der Verluste wird der Resonatorboden mit verlustbehaftetem Material belegt, dessen Parameter derart bemessen wird, daß die Güte des Resonators in etwa $Q = 625$ entspricht. Dazu wird sein Eigenfeld in das PIC-Modul geladen und der Feldverlauf über der Zeit ausgewertet. Die Güte läßt sich aus der allgemeinen Formel für die Amplitude einer gedämpften Schwingung $E = E_0 \exp(-\pi ft/Q)$ bestimmen.

Die Abbildungen 3.26 bis 3.28 zeigen die Ergebnisse der eigentlichen PIC-Simulationen für ein-, zwei- und dreizellige Resonatoren, wobei letztere im 0-Modus betrieben wurden (Abstand zwischen den Mittelebenen der Zellen $2\pi\nu_0/\omega \approx 1$ mm). Aufgrund des höheren Shuntwiderstands der zwei- und dreizelligen Struktur ist die Verformung der Elektronenpakete bei diesen besonders gut zu beobachten. Ferner findet die zweidimensionale Resonatortheorie, Abschnitt 2.2.2, Bestätigung, derzufolge der von den Elektronen erfahrene Widerstand an der Strahlrohrwand deutlich größer (Faktor $\cosh^2(k_0 a)/(\beta_0 \gamma_0) \approx 10$) als in der Strahlmitte ausfällt: Die äußeren Elektronen werden wesentlich stärker abgebremst, so daß sie im Paket zurückfallen. Die Simulationen machen deutlich, daß eine Fokussierung des Strahls auch im Bereich des Ausgangsresonators geboten ist, denn bereits bei drei Zellen (der Entwurf wurde für neun Zellen ausgelegt!) kollidieren Elektronen mit der Strahlrohrwand.

Eine qualitative Auswertung erfuhren die Simulationen bezüglich des Energieaustausches zwischen Strahl und Resonator. Dazu wurden die kinetischen Energien der Makropartikel des ersten Elektronenpakets ausgewertet kurz nachdem dieses alle Zellen passiert hat, d.h. in etwa zu den in den Abbildungen 3.26 bis 3.28 dargestellten Zeitpunkten. Für den zweizelligen Resonator ist die Energieverteilung der Abbildung 3.29 zu entnehmen; dabei korrespondiert jeder Punkt mit einem Makropartikel.

¹¹Diese Formel gilt für nicht zu geringe Güten und beruht auf der Annahme, daß jedes Paket unabhängig vom aktuellen Resonatorfeld dieses stets um denselben Wert E_0 erhöht (Superposition), vernachlässigt also Rückwirkungen des Feldes auf das Paket (steifer Strahl). Der eingeschwungene Zustand ist dadurch charakterisiert, daß die Feldreduktion pro Periode aufgrund beschränkter Güte gerade der durch ein Paket bewirkten Felderhöhung E_0 entspricht, d.h. $E_{\text{end}}[1 - \exp(-\pi/Q)] = E_0$, woraus (3.63) folgt.

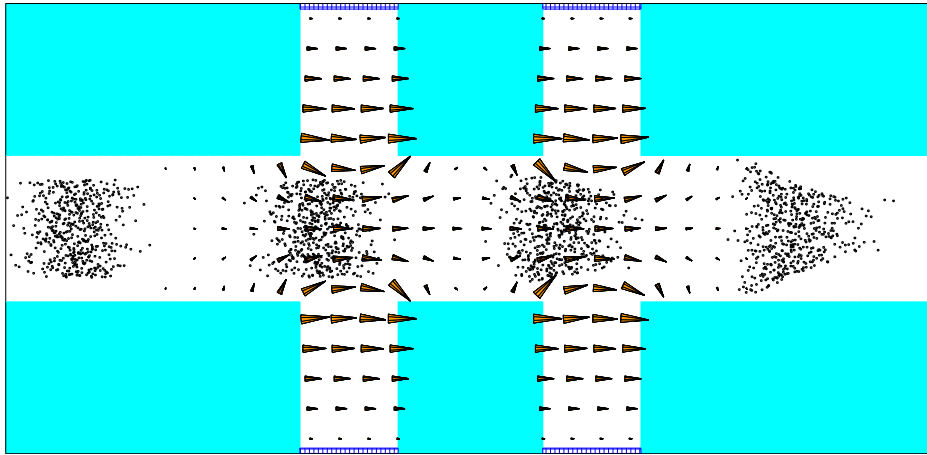


Abbildung 3.27: Zweidimensionale PIC-Simulation der Energieabgabe des modulierten Bandstrahls im zweizelligen Resonator (0-Modus). Die anfängliche Ladungsverteilung im Paketzug entspricht einer Strommodulation von $M_I = 1.6$. Nach dem Verlassen der zweiten Zelle sind die Pakete bereits deutlich verformt.

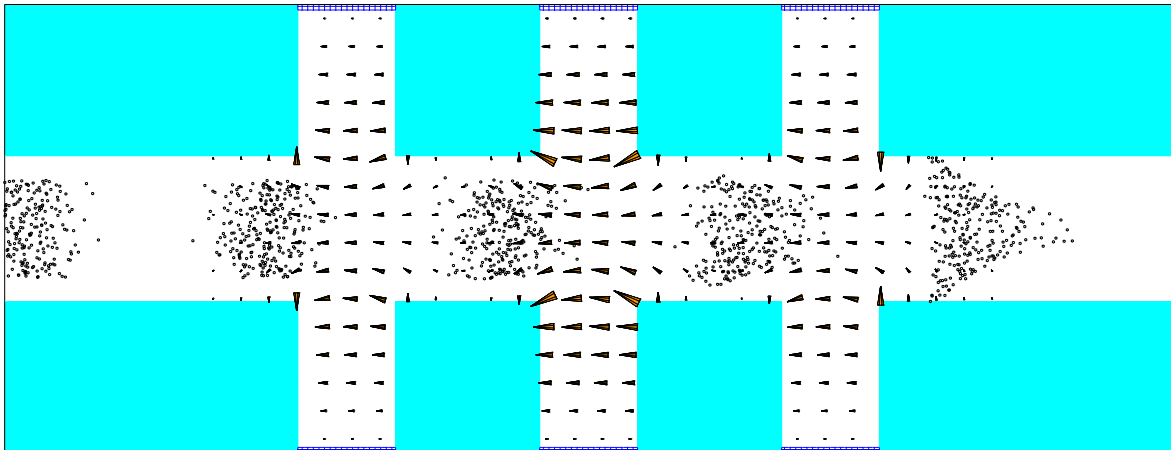


Abbildung 3.28: Zweidimensionale PIC-Simulation der Energieabgabe des modulierten Bandstrahls im dreizelligen Resonator (0-Modus). Die anfängliche Ladungsverteilung im Paketzug entspricht einer Strommodulation von $M_I = 1.6$. Aufgrund der mit y zunehmenden Shuntimpedanz der Zellen (siehe Abschnitt 2.2.2) geben die dicht an der Wand fliegenden Elektronen deutlich mehr Energie ab als jene sich entlang der Symmetrieachse bewegenden. Die starke transversale Defokussierung des Strahls läßt eine Erhöhung der Zellenanzahl ohne zusätzliche magnetische Fokussierung nicht zu.

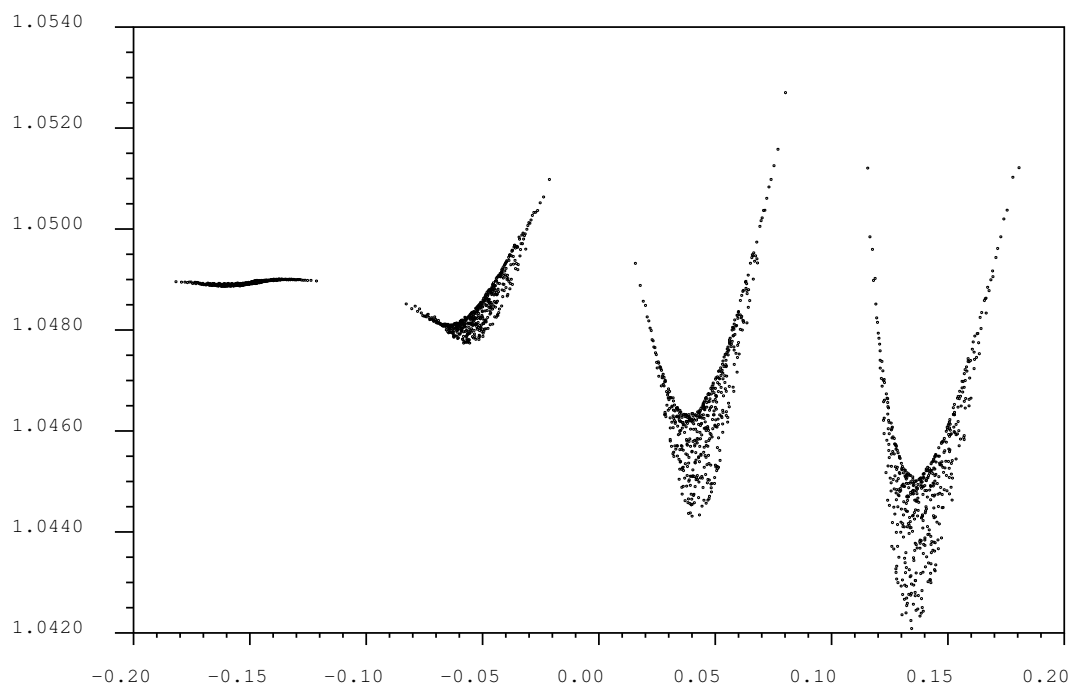


Abbildung 3.29: Zweidimensionale PIC-Simulation der Energieabgabe des modulierten Bandstrahls im zweizelligen Resonator (0-Modus): Schnappschuß der normierten kinetischen Energie γ der Partikel über z für vier Pakete, siehe Abbildung 3.27. Die mittlere kinetische Energie des ersten Elektronenpakets beträgt $\bar{\gamma} = 1.0454$; dies entspricht einer Paketspannung von 1.8 kV. Der theoretische Wert beträgt 1.33 kV.

Da im eingeschwungenen Zustand absolute zeitliche Periodizität herrscht, genügt es, den Energieverlust ΔK eines einzigen Paketes zu einem Zeitpunkt auszuwerten, zu dem es den Resonator verlassen hat, um auf die mittlere umgesetzte Mikrowellenleistung P schließen zu können; es gilt $P = \Delta K/T$. Der Energieverlust eines Paketes ergibt sich wiederum aus der Summe der Verluste aller Makropartikel. Da letztere alle sowohl dieselbe Ladung als auch dieselbe Anfangsenergie besitzen, wird allein die über alle Makropartikel des Pakets gemittelte normierte Energie $\bar{\gamma}$ benötigt, und es gilt

$$\Delta K = \frac{I_0 T}{e} m_0 c_0^2 (\gamma_0 - \bar{\gamma}), \quad (3.64)$$

$$P = \frac{I_0}{e} m_0 c_0^2 (\gamma_0 - \bar{\gamma}). \quad (3.65)$$

Einen für die Beschreibung des Leistungsumsatzes praktischen Parameter findet man in Form der *Paketspannung*

$$U_p = \frac{P}{I_0}. \quad (3.66)$$

Gemäß dieser Definition handelt es sich um eine Art Bremsspannung, denn die umgesetzte Mikrowellenleistung ergibt sich zu $U_p I_0$. Andererseits gilt wegen (3.65)

$$U_p = \frac{m_0 c_0^2}{e} (\gamma_0 - \bar{\gamma}), \quad (3.67)$$

also $eU_p = m_0 c_0^2 (\gamma_0 - \bar{\gamma})$, d.h. es handelt sich bei der Paketspannung um die über alle Elektronen des Pakets gemittelte, von diesen im Resonator durchlaufene Spannung. Da sich $\bar{\gamma}$ aus der PIC-Simulation ergibt, kann mittels (3.67) ein für den simulierten Energieumsatz repräsentativer Wert berechnet werden. Um zu einem der linearen Theorie aus Abschnitt 2.1.4 entsprechenden Wert zu gelangen, wird Gleichung (2.150) durch I_0 dividiert:

$$U_p = \frac{R_{sh}}{2} M_I^2 I_0. \quad (3.68)$$

Diese Gleichung liefert den theoretischen Vergleichswert.¹²

In Tabelle 3.1 sind die theoretischen und die den Simulationen entnommenen Werte für die ein- bis dreizellige Struktur zusammengestellt; die zugrundegelegten Strahlparameter sind $U_0 = 25$ kV ($\beta_0 = 0.302$), $I_0 = 2$ A, $M_I = 1.6$ und die Resonatorparameter $R_{sh,i} = 520 \Omega$ (pro Zelle), $Q_i = 1250$ und $Q = 625$, woraus $R_{sh} = 260 \Omega$ (pro Zelle) folgt.

¹²Offenbar handelt es sich bei der Paketspannung nicht um die (bereits laufzeitreduzierte) Resonatorspannung, denn letztere kann i.allg. nur von einigen Elektronen des Pakets durchlaufen werden, nämlich von jenen, die sich am Ort maximaler Raumladungsdichte befinden. Gemäß (2.149) gilt für die Resonatorspannung $\hat{U}_r = R_{sh} M_I I_0$, woraus folgt

$$U_p = \frac{M_I}{2} \hat{U}_r. \quad (3.69)$$

Dies ist ein einleuchtender Zusammenhang: Ein unmodulierter Strahl ($M_I = 0$) liefert keine Mikrowellenleistung, und nur bei einem optimal gebündelten Strahl ($M_I = 2$) durchlaufen alle Elektronen tatsächlich auch die Resonatorspannung \hat{U}_r , weil sie sich alle bei derselben Phase aufhalten.

Zellenzahl	Theorie		Simulation	
	U_p/kV	$\gamma_0 - \bar{\gamma}$	U_p/kV	$\gamma_0 - \bar{\gamma}$
1	0.67	0.0013	1.2	0.0023
2	1.33	0.0026	1.8	0.0036
3	2.00	0.0039	2.6	0.0050

Tabelle 3.1: Theoretische und simulierte Leistungsumsätze zu den Resonatoren aus den Abbildungen 3.26 bis 3.28.

Erstaunlicherweise liegen die simulierte Leistungsumsätze deutlich über den theoretischen Werten. Eine Erklärung bietet die Tatsache, daß der den Elektronen vom Resonator entgegengesetzte Widerstand am Strahlrand wesentlich höher ist als in der Strahlmitte, letzterer jedoch in Form des Shuntwiderstandes R_{sh} in den theoretischen Wert der Paketspannung eingeht, Gleichung (3.68). Der effektive Resonatorwiderstand sollte also größer als der Shuntwiderstand ausfallen. Eine andere Erklärung wäre eine mit Gleichung (3.63) zu hoch angesetzte Resonatorfeldstärke. Man bedenke, daß diese Gleichung eine für jedes Paket gleichgroße Zunahme der Feldstärke voraussetzt, was sicherlich bei einer Verformung der Pakete nicht mehr der Fall sein wird, Abbildung 3.28. Eine abschließende Klärung dieser Frage wird nur durch eine Simulation des Einschwingvorganges möglich sein.

3.8 Perspektiven für das Bandstrahlklystron

Die prognostizierten Daten zeigen, daß ein Bandstrahlklystron mit einer Arbeitsfrequenz von 91 GHz und einer Strahlspannung von 25 kV ineffizient arbeitet; die in der Einleitung gestellten Forderungen können also leider nicht erfüllt werden. Der Grund dafür besteht im wesentlichen in der unzureichenden Kopplung zwischen Resonatorfeld und Elektronenstrahl, d.h. in dem zu gering ausfallenden Shuntwiderstand. Wie ließe sich dieser trotz festliegender Frequenz und Strahlspannung erhöhen?

1. Die naheliegendste Variante wäre eine **Vergrößerung der Zellenzahl**. Die im vorigen Abschnitt vorgestellten Daten beziehen sich jedoch bereits auf einen neunzelligen Resonator mit einer Geamtlänge von ca. 4.5 mm, bereits fast ein Viertel der Plasmawellenlänge. Bei noch größerer Zellenzahl lassen sich die Dichteänderungen des Strahls innerhalb des Resonators nicht mehr vernachlässigen, womit die vorgestellte Theorie versagt. Man hat dann eine Röhre mit erweitertem Wechselwirkungsbereich (englisch: *extended interaction tube, EIT*), für welche eine neue Theorie zu entwerfen wäre, was im Rahmen dieser Arbeit nicht vorgesehen war. Eine Extrapolation der dargelegten Theorie auf den Bereich erweiterter Wechselwirkung zeigt, daß mit einer Zellenzahl von ca. 25 zu rechnen ist, um den Shuntwiderstand in den Bereich des Strahlwiderstandes zu bringen. Sinnvoller wäre es also, den Shuntwiderstand der einzelnen Zelle zu erhöhen.
2. Behält man die bisher stets zugrundegelegte Zellengeometrie bei, ließe sich gemäß

(2.208) der Shuntwiderstand der einzelnen Zelle durch eine **Verringerung der Apertur** erhöhen, welche bislang auf 0.6 mm festgelegt war, (3.25). Da die Strahldicke bislang 0.4 mm beträgt, müßte auch diese verringert werden, um Kollisionen der Elektronen mit den Zellenwänden weiterhin gering halten zu können. Wie es im Abschnitt 3.2 gezeigt wurde, ist dies jedoch nur durch einen deutlichen Mehraufwand für die Elektronenkanone (zusätzliche Linse) zu erreichen, was der Forderung nach geringen Fertigungskosten widerspricht. Ferner bleibt fraglich, ob ein Bandstrahl mit noch extremerem Seitenverhältnis problemlos durch eine lange Struktur transportiert werden kann.

3. Der Shuntwiderstand ließe sich eventuell auch durch eine **Geometrieänderung** der einzelnen Zelle erhöhen. Nach dem Vorbild längerwelliger Klystrons könnte man den Spalt in der unmittelbaren Nähe des Strahls verringern, ohne jedoch die Grabenbreite zu verändern (Anbringung von „Nasen“), um den transversalen Kopplungskoeffizienten und die Feldkonzentration in Strahlnähe zu erhöhen. Ungeachtet der technologischen Schwierigkeiten bei der Herstellung einer derartigen Zelle würde diese noch filigraner ausfallen als schon bislang. Ferner ergaben Simulationsrechnungen keinen erhöhten Shuntwiderstand, was anscheinend auf die erhöhte Verlustleistung zurückzuführen ist.

Es zeigt sich also, daß eine Vergrößerung des Shuntwiderstandes durch einfache Modifikationen nicht zu erreichen ist. Um ein effektives Millimeterwellenklystron zu bauen, ist man folglich dazu gezwungen, einige der in der Einleitung genannten Forderungen fallenzulassen. Hält man an der Arbeitsfrequenz fest, verbleibt praktisch nur noch eine **Anhebung der Strahlspannung**. Daß sich eine derartige Maßnahme gravierend auf den Shuntwiderstand auswirkt, läßt sich Gleichung (2.208) entnehmen: Eine erhöhte Strahlspannung U_0 hätte eine größere Strahlgeschwindigkeit v_0 und damit eine geringere Strahlwellenzahl $k = \omega/v_0$ zur Folge.¹³ Aus diesem Grunde erhöhte sich sowohl der longitudinale als auch der transversale Kopplungskoeffizient. Außerdem wäre man bei einem mehrzelligen Resonator nicht mehr zu einer suboptimalen Spaltbreite gezwungen, denn währenddessen die optimale Spaltbreite und der Zellenabstand (Mitte-Mitte) mit v_0 skaliert, kann die Wandstärke zwischen den Zellen beibehalten werden. Abbildung 3.30 zeigt die Verläufe der Daten einer einzelnen Zelle in Abhängigkeit von der Spaltbreite für eine Strahlspannung von $U_0 = 100$ kV. Gegenüber dem 25 kV-Strahl, Abbildung 3.12, gewänne man mehr als eine Größenordnung beim Shuntwiderstand und damit auch deutlich beim Wirkungsgrad.

Genauer betrachtet ergäbe sich für einen 100 kV-Strahl folgendes Bild: Bei konstanter Feldstärke in der Elektronenkanone ($U_0/d = \text{const.}$) gilt $I'_0 \propto U_0^{-1/2}$, was sich aus (2.1) und (2.2) ergibt. Unter Inkaufnahme geringfügig höherer Feldstärken sollte ein Strahlstrom von $I'_0 = 2$ A/cm weiterhin erreichbar sein [40]; der Strahlwiderstand betrüge dann $R'_0 = 50$ k Ω cm. Gemäß Abbildung 3.12 hätte man einen Shuntwiderstand pro Zelle von $R'_{\text{shi}} = 6.5$ k Ω cm und eine Güte von $Q_i = 1800$ zu erwarten bei einer Spaltbreite von $g = 0.7$ mm. Die Periodenlänge einer im π -Modus betriebenen Resonator-kette betrüge

¹³Eine abgesenkte Arbeitsfrequenz hätte daher einen ähnlichen Effekt; neben $k = \omega/v_0$ verringerte sich aber auch $k_0 = \omega/c_0$.

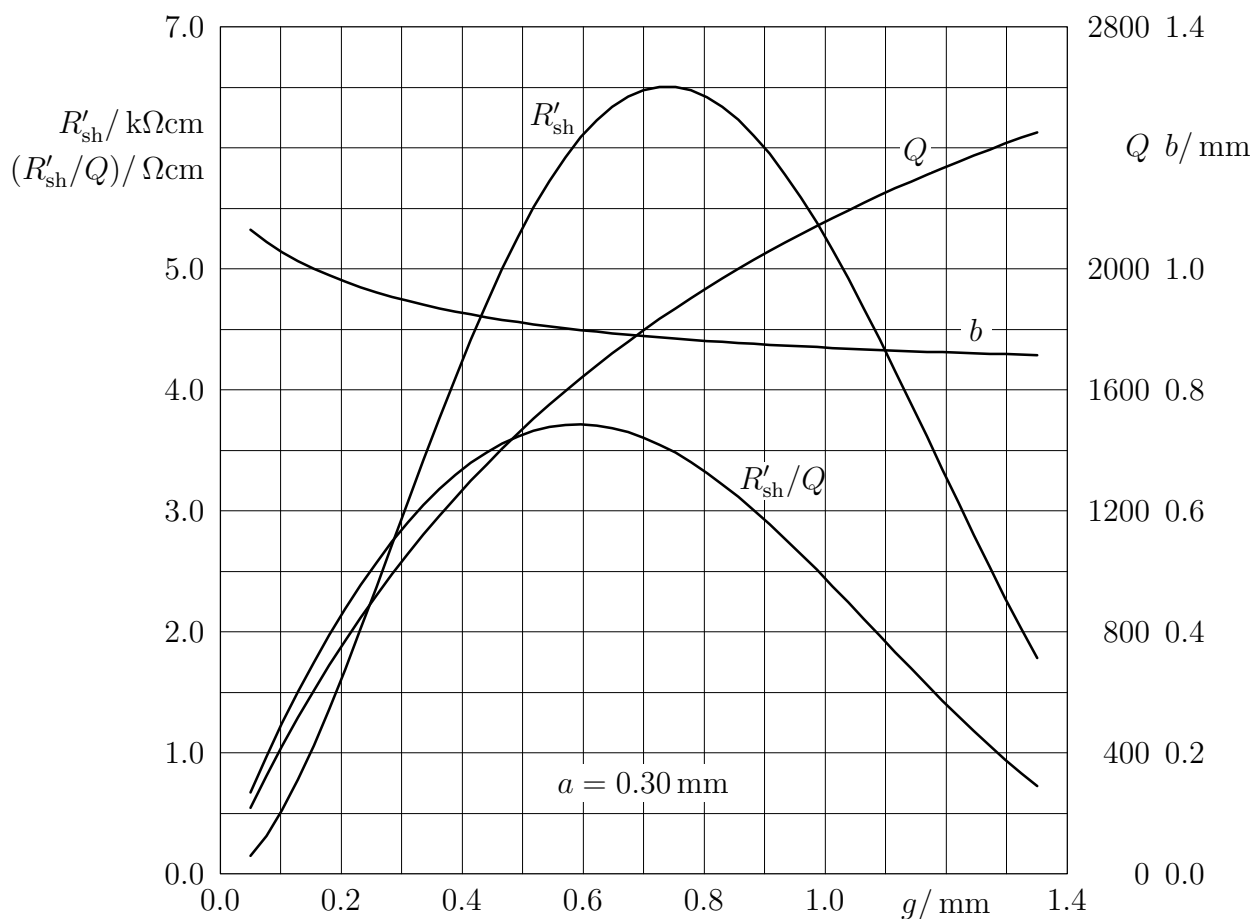


Abbildung 3.30: Längenbezogener Shuntwiderstand R'_{sh} , Güte Q , R'_{sh}/Q und Grabentiefe b des zweidimensionalen Grabenresonators (vgl. Abbildung 3.7) in Abhängigkeit von der Spaltbreite g für eine Resonanzfrequenz von $f = 91.392 \text{ GHz}$ und eine Halbapertur von $a = 0.3 \text{ mm}$. Die der Shuntwiderstandsberechnung zugrunde gelegte relative „Integrationsgeschwindigkeit“ beträgt $v_0/c_0 = \beta_0 = 0.548$.

$L_\pi = 0.9$ mm, so daß wegen $\lambda_p/4 \approx 43$ mm auf einer Gesamtlänge von 13.5 mm 15 Zellen untergebracht werden könnten. Eine derartige Struktur könnte jedoch aufgrund der mäßigen Kopplung zwischen Resonator und Hohlleiter nicht stark genug belastet werden, weshalb die Zellenzahl auf 8 begrenzt werden müßte; für den internen Shuntwiderstand der Struktur ergäbe sich daher $R'_{\text{shi}} = 52 \text{ k}\Omega\text{cm}$. Mit der bekannten Strommodulation $M_I = 1.6$ betrüge der potentielle Sättigungsgrad $\theta = 1.66$ und der tatsächlich erreichbare $\delta = 0.95$. Dabei wurde die Verwendung des Schlangenkopplers angenommen, $Q_i/Q_e = 0.75$. Damit hätte man eine Wandlungseffektivität von $\eta_w = 0.76$, eine Kreiseffektivität von $\eta_k = 0.43$ und eine Haupteffektivität von $\eta = 0.33$.

Eine alternative Vorgehensweise zur Erhöhung der Haupteffektivität sei abschließend noch angesprochen: Die **Verwendung eines vorgespannten Kollektors** (englisch: depressed collector). Währenddessen die von den Resonatorwänden aufgenommene mittlere Leistung $(1 - \eta_k)\eta_w P_0$ unwiederbringlich verloren ist, ist dies mit der mittleren im Strahl verbliebenen kinetischen Leistung $(1 - \eta_w)P_0$ nicht zwingenderweise der Fall. Bremst man die Elektronen im Kollektor mit Hilfe eines statischen Gegenfeldes ab, stehen ihre Energien in Form einer Gleichspannungsquelle wieder zur Verfügung. Dies geschieht zweckmäßigerweise in mehreren Spannungsstufen, denn keinesfalls sollten Elektronen am Kollektor reflektiert werden. Im Idealfall könnte die gesamte im Strahl verbliebene kinetische Leistung wiedergewonnen werden. Dementsprechend veränderte sich die Strategie bei der Dimensionierung des Ausgangsresonators: Da die Haupteffektivität jetzt praktisch durch die Kreiseffektivität gegeben ist (Verluste treten nur noch im Resonator auf), ist nun in erster Linie Q_i/Q_e , d.h. die Kopplung zu maximieren. Im Extremfall könnte man zu einer einzelnen Zelle zurückkehren und erhielte mit $Q_i/Q_e = 3 \dots 5$ eine Haupteffektivität im Bereich um 0.8. Die Entwicklung eines effektiven mehrstufigen vorgespannten Kollektors bietet daher eine aussichtsreiche Chance, das Wirkungsgradproblem beim Millimeterwellenklystron zu lösen.

A Ausführlichere Betrachtungen

A.1 Das Raumladungsgesetz

A.1.1 Herleitung

Man betrachte zwei beliebig geformte kalte Elektroden im Vakuum, von denen die eine auf das Potential $\phi = 0$ (Katode) und die andere auf das Potential $\phi = U$ (Anode) gelegt wurde, Abbildung A.1, links. Auf der Oberfläche der Katode wird daher ein gewisses elektrisches Feld ausgebildet sein, bereit dazu, ein eventuell emittiertes Elektron zur Anode hinüberzuziehen. Es sei jedoch gering genug, um keine Feldemission auftreten zu lassen. Es findet also zunächst kein Stromfluß statt.

Wird nun die Katode erwärmt, so daß eine thermische Emission auftritt, werden Elektronen zur Anode fliegen; es fließt ein gewisser Strom, Abbildung A.1, rechts. Es stellt sich sofort die Frage, wodurch die sich einstellende Stromstärke eigentlich begrenzt ist. Prinzipiell kommen zwei Möglichkeiten in Betracht:

1. Alle von der Katode emittierten Elektronen fliegen zur Anode; der Strom ist nur von der Katodentemperatur abhängig und durch diese begrenzt; eine Spannungsänderung bewirkt keine Änderung des Anodenstromes. Man nennt dies *temperaturbegrenzten* Betrieb der Diode.
2. Es befinden sich so viele freie Elektronen vor der Katode, daß diese gegen die Anode abgeschirmt wird. Nimmt man an, daß die emittierten Elektronen nach dem Austritt aus der Katode zunächst ruhen, dann muß die Feldstärke auf der Katode verschwinden. Wäre sie positiv, so würden alle emittierten Elektronen zur Katode zurückkehren; wäre sie negativ, würden alle Elektronen sofort zur Anode fliegen, und wir hätten genau den ersten Fall. Bildlich gesprochen enden also alle von der Anode kommenden Feldlinien auf der Raumladung; der Strom ist nur von der Spannung abhängig und durch diese begrenzt: eine Änderung der Katodentemperatur bewirkt keine Änderung des Anodenstromes. Diesen Betrieb der Diode nennt man *raumladungsbegrenzt*.

Im allgemeinen vertragen gute Thermoemitter den gesättigten (temperaturbegrenzten) Betrieb nicht, so daß gewöhnlicherweise durch eine genügend hohe Katodentemperatur der raumladungsbegrenzte Betrieb sichergestellt wird.

Die nächste Frage betrifft daher den qualitativen Zusammenhang zwischen Stromstärke und Spannung im raumladungsbegrenzten Bereich. Betrachten wir dazu noch einmal Abbildung A.1 und tätigen die einleuchtende Annahme, daß das gegebene Entladungsproblem (Bestimmung der Felder $\phi(\mathbf{r})$, $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, $\rho(\mathbf{r})$ und $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ aus der Geometrie und der Spannung) bei unbegrenzter Ergiebigkeit der Katode eindeutig lösbar ist. Es sei nun ϕ_0 die

A Ausführlichere Betrachtungen

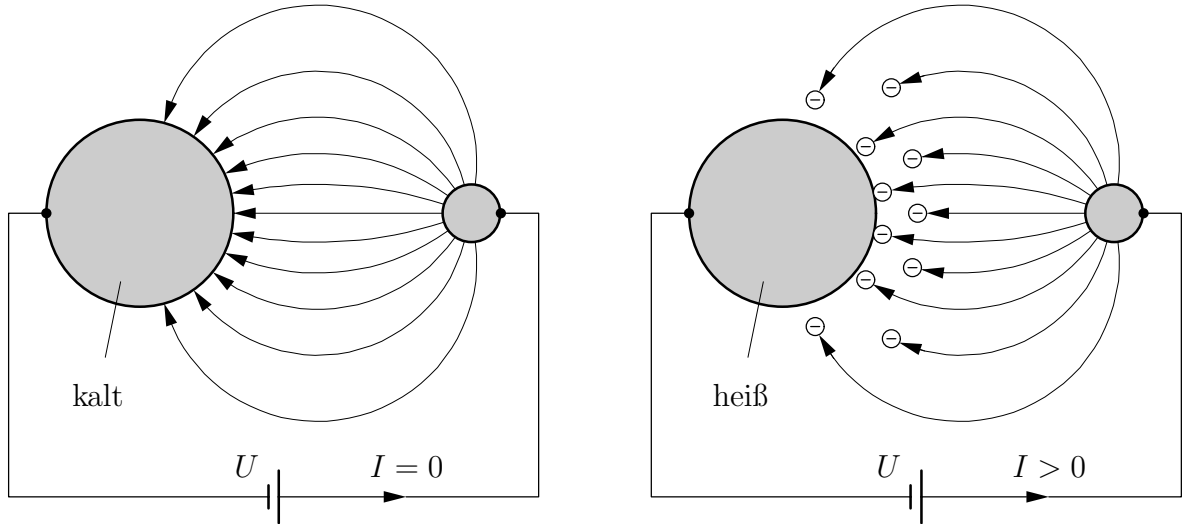


Abbildung A.1: Verallgemeinerte Vakuumdiode. Links: Bei kalter Katode fließt kein Anodenstrom; die Diode stellt einen einfachen geladenen Kondensator dar. Rechts: Emittiert die Katode Elektronen, bildet sich ein Anodenstrom und eine Raumladung aus, letztere vor allem in Katodennähe.

Lösung für $U = U_0$, und für die restlichen Felder gilt bei Vernachlässigung der relativistischen Massenzunahme der Elektronen¹

$$v_0 = \sqrt{2\eta_0\phi_0} \quad (\text{A.1})$$

$$\rho_0 = -\epsilon_0\Delta\phi_0 \quad (\text{A.2})$$

$$J_0 = -\rho_0v_0 \quad (\text{A.3})$$

$$I_0 = \int J_0 dA. \quad (\text{A.4})$$

Offenbar ist nun $\phi = a\phi_0$ eine Lösung für $U = aU_0$, und für die Felder gilt

$$v = \sqrt{2\eta_0\phi} = \sqrt{a}v_0 \quad (\text{A.5})$$

$$\rho = -\epsilon_0\Delta\phi = a\rho_0 \quad (\text{A.6})$$

$$J = -\rho v = a^{3/2}J_0 \quad (\text{A.7})$$

$$I = a^{3/2}I_0 = \left(\frac{U}{U_0}\right)^{3/2} I_0 = \frac{I_0}{U_0^{3/2}} U^{3/2}. \quad (\text{A.8})$$

Da eindeutige Lösbarkeit vorausgesetzt war, ist mit $\phi = a\phi_0$ nicht nur eine, sondern *die* Lösung des Problems $U = aU_0$ gegeben. Man erkennt sofort, daß (A.8) für jede beliebige Spannung U gilt, d.h. es gilt $I/U^{3/2} = K = \text{const.}$, und damit haben wir das Raumladungsgesetz

$$I = KU^{3/2}. \quad (\text{A.9})$$

¹Herleitung der Gleichungen erfolgt im Abschnitt A.1.2.

Den lediglich von der Geometrie der Anordnung abhängigen Parameter K nennt man Raumladungskonstante oder *Perveanz* der Diode und des Elektronenstrahls. Das Raumladungsgesetz wurde erstmals von CHILD im Jahre 1911 veröffentlicht [11], und LANGMUIR hat sich in den Jahren 1913-1924 ausgiebig mit verschiedenen Diodengeometrien beschäftigt [27, 28, 29, 30], so daß es oft LANGMUIR-CHILD-Gesetz genannt wird.

In der jüngeren Vergangenheit wird hin und wieder behauptet, daß Gleichung (A.9) nur eine spezielle Form des allgemeinen Raumladungsgesetzes $I = KU^\gamma$ sei; nur unter gewissen Bedingungen nehme γ den Wert 1.5 an. In [32] wird beispielsweise behauptet, das 3/2-Gesetz besitze zwar für die Stromdichte, nicht jedoch für die Stromstärke Gültigkeit; dieses sei nur gültig, wenn der Strahlquerschnitt überall derselbe ist. Dabei beruft man sich auf Messungen, die einen von 3/2 abweichenden Wert für γ liefern. — Das Raumladungsgesetz (A.9) ist gültig für *jede beliebige* Vakuumdiode unabhängig von ihrer Geometrie, solange

- die MAXWELLSchen Gleichungen gelten,
- ein Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ existiert,
- Ionisationseffekte vernachlässigt werden können,
- die Anfangsgeschwindigkeit der Elektronen vernachlässigbar gering ist,
- sich die relativistische Massenzunahme der Elektronen nicht bemerkbar macht und
- die Katode an keiner Stelle an ihre Sättigungsgrenze gebracht wird.

Wenn eine praktische Diode/Elektronenkanone ein vom 3/2-Gesetz abweichendes Verhalten aufweist, dann wird lediglich eine der angeführten Bedingungen nicht erfüllt sein.

A.1.2 Berechnung der Perveanz

Will man für eine bestimmte Geometrie den sich bei einer gegebenen Spannung einstellenden Strom bestimmen, hilft einem das Raumladungsgesetz allein wenig; was man zusätzlich benötigt, ist die zur Geometrie gehörige Perveanz. Analog zur Bestimmung der Kapazität einer gegebenen Anordnung hat man also zunächst das stationäre Feldproblem zu lösen. Wiederum liege die Katode auf dem Potentialniveau $\phi_{\text{Katode}} = 0$, die Anode auf dem Potentialniveau $\phi_{\text{Anode}} = U$ und die Anfangsgeschwindigkeit der Elektronen möge verschwinden, $v_{\text{Katode}} = 0$. Die gesuchte Stromdichte $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ ergibt sich aus der Raumladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ und das für elektrohydrodynamische Probleme typische Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ zu

$$\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}. \quad (\text{A.10})$$

Offenbar besitzen Geschwindigkeit und Stromdichte – bis auf das Vorzeichen – überall dieselbe Richtung, so daß man durch Abspaltung des – bislang unbekanntes – normierten Richtungsfeldes $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ vermöge $\mathbf{v} = v\mathbf{e}$, $\mathbf{J} = -J\mathbf{e}$ zu einer skalaren Gleichung gelangt. Die

A Ausführlichere Betrachtungen

Wahl der Vorzeichen stellt sicher, daß die skalaren Funktionen nicht negativ werden; die Feldlinien des Richtungsfeldes beginnen auf der Katode und enden auf der Anode

$$J = -\rho v. \quad (\text{A.11})$$

Beide Felder werden nun durch das gemäß $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\phi$ definierte elektrostatische Potential ausgedrückt. Für die Raumladungsdichte leistet dies die POISSON²-Gleichung

$$\rho = -\epsilon_0 \Delta\phi. \quad (\text{A.12})$$

Das Geschwindigkeitsfeld bestimmt man aus der im elektrischen Feld aufgenommenen Energie der Elektronen. Da sowohl das Potential als auch die Geschwindigkeit auf der Katodenoberfläche verschwinden, beträgt diese $m_0 c^2 (\gamma - 1) = e\phi$. Um die Zusammenhänge nicht zu kompliziert zu gestalten, verwenden wir die aus der TAYLOR³-Entwicklung des relativistischen Faktors γ hervorgehende Näherung⁴ für $v \ll c_0$, und erhalten

$$v = \sqrt{2\eta_0\phi}. \quad (\text{A.13})$$

Damit folgt für die Stromdichte

$$\sqrt{\phi} \Delta\phi = \frac{J}{\epsilon_0 \sqrt{2\eta_0}}. \quad (\text{A.14})$$

Dies ist noch immer keine Bestimmungsgleichung für das Potential, weil die rechte Seite unbekannt ist. Wenn man jedoch die Trajektorien der Elektronen vorhersagen kann, läßt sich die Stromdichte – bis auf eine Konstante J_0 – aus der Kontinuitätsgleichung bestimmen. Mit dem Ansatz $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = J_0 j(\mathbf{r}) \mathbf{e}(\mathbf{r})$ erhält man aus der Quellenfreiheit der Stromdichte im stationären Zustand bei gegebenem Richtungsfeld \mathbf{e} eine Gleichung für j , und das Feldproblem wird mit der Abkürzung $k = 1/(\epsilon_0 \sqrt{2\eta_0})$ beschrieben durch

$$j \operatorname{div} \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{grad} j = 0, \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\sqrt{\phi}}{j} \Delta\phi = k J_0, \quad (\text{A.16})$$

$$\phi_{\text{Katode}} = 0, \quad (\text{A.17})$$

$$\phi_{\text{Anode}} = U, \quad (\text{A.18})$$

$$\partial\phi/\partial n_{\text{Katode}} = E_K. \quad (\text{A.19})$$

Ob das Problem für eine gegebene Geometrie analytisch lösbar ist, hängt also zunächst einmal davon ab, ob das Richtungsfeld von vornherein bekannt ist und die Gleichung (A.15) gelöst werden kann. Drei derartige Fälle liegen auf der Hand: Die Plattendiode, die Zylinderdiode und die Kugeldiode. Im ersten Fall setzt man $\mathbf{e} = \mathbf{e}_z$, in den letzten beiden Fällen $\mathbf{e} = \mathbf{e}_r$ und erhält die bis auf einen konstanten Faktor eindeutigen Lösungen

$$j_{\text{planar}} = 1, \quad (\text{A.20})$$

$$j_{\text{zylindrisch}} = r_0/r, \quad (\text{A.21})$$

$$j_{\text{sphärisch}} = r_0^2/r^2. \quad (\text{A.22})$$

²Poisson, Siméon-Denis (1781-1840), französischer Mathematiker

³Taylor, Brook (1685-1731), englischer Mathematiker

⁴TAYLOR-Entwicklung um $\beta = 0$ liefert $\eta_0\phi/c_0^2 = \gamma - 1 = 1/\sqrt{1 - \beta^2} - 1 \approx \beta^2/2$ und mithin $\eta_0\phi = v^2/2$.

Im folgenden wird die Funktion j als bekannt vorausgesetzt.

Bislang wurde in der Rechnung keine die Betriebsart der Diode betreffende Information verwendet, weshalb alles gesagte sowohl für den raumladungs- als auch den temperaturbegrenzten Betrieb gültig ist. Betrachten wir zunächst den temperaturbegrenzten Betrieb. Hier ist die Konstante J_0 durch die Strombegrenzung der Katode gegeben. Zur eindeutigen Lösung der Differentialgleichung (A.16) werden also genau zwei Randwerte benötigt. Es ist offensichtlich, daß mit den drei Bedingungen (A.17) bis (A.19) das Problem überbestimmt wäre. Hier wird man also die Potentiale auf den Elektroden vorgeben und der Rechnung die Feldstärke auf der Katode entnehmen. Im raumladungsbegrenzten Fall hingegen ist J_0 unbekannt. Dann benötigt man aber alle drei Randbedingungen, um zu einer eindeutigen Lösung für das Potential zu gelangen. Es stellt sich also die Frage, woher man den Wert der Konstanten⁵ E_K nehmen soll. Man könnte versuchen, über Gleichung (A.13) zu einer Aussage zu kommen, denn es gilt

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{v}{\eta_0} \frac{\partial v}{\partial n}. \quad (\text{A.23})$$

Man sieht allerdings schnell ein, daß dieses Vorgehen nicht von Erfolg gekrönt sein kann, denn die Gleichung ist auch für temperaturbegrenzten Betrieb gültig, in dessen Extremfall – bei verschwindend geringer Emission der Katode hat man einen normalen Kondensator – die Feldstärke auf der Katode natürlich nicht verschwinden kann. Dies führt nebenbei zu der Erkenntnis, daß die Normalenableitung der Geschwindigkeit auf der Katode bei temperaturbegrenztem Betrieb unbeschränkt ist. Belassen wir es also bei der Plausibilitätserklärung aus dem vorigen Abschnitt und vermerken hier noch einmal, daß bei raumladungsbegrenztem Betrieb $E_K = 0$ und bei temperaturbegrenztem Betrieb $E_K > 0$ gilt; da gemäß Gleichung (A.13) sowohl Geschwindigkeit als auch Potential nirgendwo negativ werden können, kann auch der Fall $E_K < 0$ niemals eintreten.

Zur Berechnung der Perveanz einer gegebenen Anordnung verbleibt nun, das Potentialproblem (A.16) bis (A.19) wenigstens für $E_K = 0$ zu lösen. Für den planaren und den zylindrischen Fall wird diese Rechnung im folgenden vorgestellt.

A.1.3 Die planare Diode

Im planaren Falle, Abbildung A.2, hat man $j = 1$, J_0 erhält die Bedeutung *der* (von z unabhängigen) Stromdichte in der Diode, und das Potentialproblem lautet

$$\sqrt{\phi} \frac{d^2 \phi}{dz^2} = kJ_0, \quad (\text{A.24})$$

$$\phi(0) = 0, \quad (\text{A.25})$$

$$\phi'(0) = E_K, \quad (\text{A.26})$$

$$\phi(d) = U. \quad (\text{A.27})$$

⁵Genaugenommen handelt es sich bei E_K natürlich um eine auf der Katode definierte skalare Funktion. In den drei angeführten Fällen muß diese jedoch aus Symmetriegründen konstant sein, weshalb E_K hier als Konstante gehandelt wird. In anderen Fällen bedarf dies einer eingehenden Untersuchung.

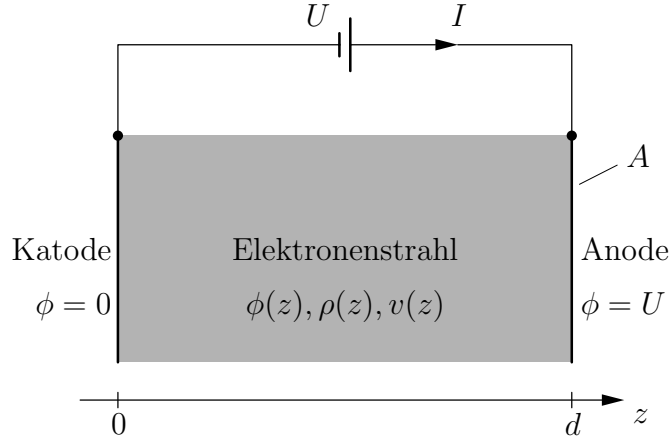


Abbildung A.2: Eindimensionales Entladungsproblem: Die Plattendiode.

Offenbar – und dies stellt eine Besonderheit der planaren Anordnung dar – läßt sich (A.24) unter Einbeziehung der *Anfangswerte* (A.25) und (A.26) in zwei Stufen integrieren: Formt man sie gemäß

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 = 2 \frac{d\phi}{dz} \frac{d^2\phi}{dz^2} = 2 \frac{d\phi}{dz} \frac{kJ_0}{\sqrt{\phi}} = \frac{d}{dz} \left(4kJ_0\sqrt{\phi} \right) \quad (\text{A.28})$$

um, so läßt sie sich zunächst einmal von $z = 0$ bis z integrieren

$$\left(\frac{d\phi}{dz} \right)_z^2 - \left(\frac{d\phi}{dz} \right)_{z=0}^2 = 4kJ_0\sqrt{\phi}, \quad (\text{A.29})$$

und man erhält unter Verwendung der Bedingung (A.26)

$$\frac{d\phi}{dz} = \sqrt{E_K^2 + 4kJ_0\sqrt{\phi}}. \quad (\text{A.30})$$

Diese Gleichung läßt sich unter Einbeziehung der Bedingung (A.25) offenbar mit Hilfe der Substitution $f = \sqrt{\phi}$ lösen

$$2f \frac{df}{dz} = \sqrt{E_K^2 + 4kJ_0f}, \quad (\text{A.31})$$

$$\int_0^z dz = \int_0^{\sqrt{\phi}} \frac{2f df}{\sqrt{E_K^2 + 4kJ_0f}}, \quad (\text{A.32})$$

$$z = \frac{(4kJ_0\sqrt{\phi} - 2E_K^2) \sqrt{E_K^2 + 4kJ_0\sqrt{\phi}} + 2E_K^3}{12k^2J_0^2}. \quad (\text{A.33})$$

Wie erwartet verschwinden beide Seiten für $z = 0$ unabhängig von der Katodenfeldstärke.

Gleichung (A.33) stellt die – wenn auch in impliziter Form vorliegende – Lösung des *Anfangswertproblems* (A.24) bis (A.26) dar. Da die Größen J_0 und E_K bislang nicht als gegeben betrachtet wurden, darf sie als allgemeine Lösung des Problems (A.24) bis (A.27) gelten.

Raumladungsbegrenzter Betrieb

Im raumladungsbegrenzten Betrieb muß, wie besprochen, die Feldstärke auf der Katode verschwinden, $E_K = 0$, und Gleichung (A.33) vereinfacht sich zu

$$z^2 = \frac{4}{9} \frac{\phi^{3/2}}{k J_0}. \quad (\text{A.34})$$

Mit $z = d$ und $\phi = U$, dient sie zunächst zur Berechnung der Stromdichte, des Stromes und damit der Perveanz der Plattendiode

$$J_0 = \frac{4}{9} \frac{\epsilon_0 \sqrt{2\eta_0}}{d^2} U^{3/2}, \quad (\text{A.35})$$

$$I = \frac{4}{9} \frac{A}{d^2} \epsilon_0 \sqrt{2\eta_0} U^{3/2}, \quad (\text{A.36})$$

$$K = \frac{4}{9} \frac{A}{d^2} \epsilon_0 \sqrt{2\eta_0} \quad (\text{A.37})$$

und anschließend zur Bestimmung des Potentialverlaufs und der restlichen Felder

$$\phi = U \left(\frac{z}{d} \right)^{4/3}, \quad (\text{A.38})$$

$$E = -\frac{4}{3} \frac{U}{d} \left(\frac{z}{d} \right)^{1/3}, \quad (\text{A.39})$$

$$\rho = -\frac{4}{9} \frac{\epsilon_0 U}{d^2} \left(\frac{z}{d} \right)^{-2/3}, \quad (\text{A.40})$$

$$v = \sqrt{2\eta_0 U} \left(\frac{z}{d} \right)^{2/3}. \quad (\text{A.41})$$

Die normierten Verläufe der Felder sind in Abbildung A.3 dargestellt. Es sei noch auf einen interessanten Sachverhalt hingewiesen: Im raumladungsbegrenzten Fall beträgt die Feldstärke und damit auch die Oberflächenladung auf der Anode das 4/3-fache des statischen Falls. Mithin erhöht sich die Kapazität eines Plattenkondensators um 1/3, wenn eine raumladungsbegrenzte Entladung stattfindet. Dies läßt sich anschaulich dadurch erklären, daß die sich ursprünglich auf der Katode (also im Abstand d von der Anode entfernt) befindenden Elektronen nun dichter an die Anode herangerückt sind. Im Mittel hat sich ihr Abstand zur Anode auf $3/4d$ verringert. In der Tat liegt der Schwerpunkt der Raumladung in $z = d/4$, wie sich durch Integration von (A.40) leicht nachweisen läßt.

Temperaturbegrenzter Betrieb

Bei diesem Betrieb ist die Sättigungsstromdichte der Katode und damit die allgemeine Stromdichte J_0 vorzugeben. Er stellt den allgemeinen Entladungsfall dar, weil sowohl der statische Betrieb mit $J_0 = 0$ als auch der raumladungsbegrenzte Betrieb mit $J_0 = J_r$

$$J_r = \frac{4}{9} \frac{\epsilon_0 \sqrt{2\eta_0}}{d^2} U^{3/2} \quad (\text{A.42})$$

als Grenzfälle enthalten sind. Die allgemeine Lösung des Entladungsproblems (A.33) ist nun ohne weitere Voraussetzungen auszuwerten. Um zu übersichtlicheren Gleichungen zu

A Ausführlichere Betrachtungen

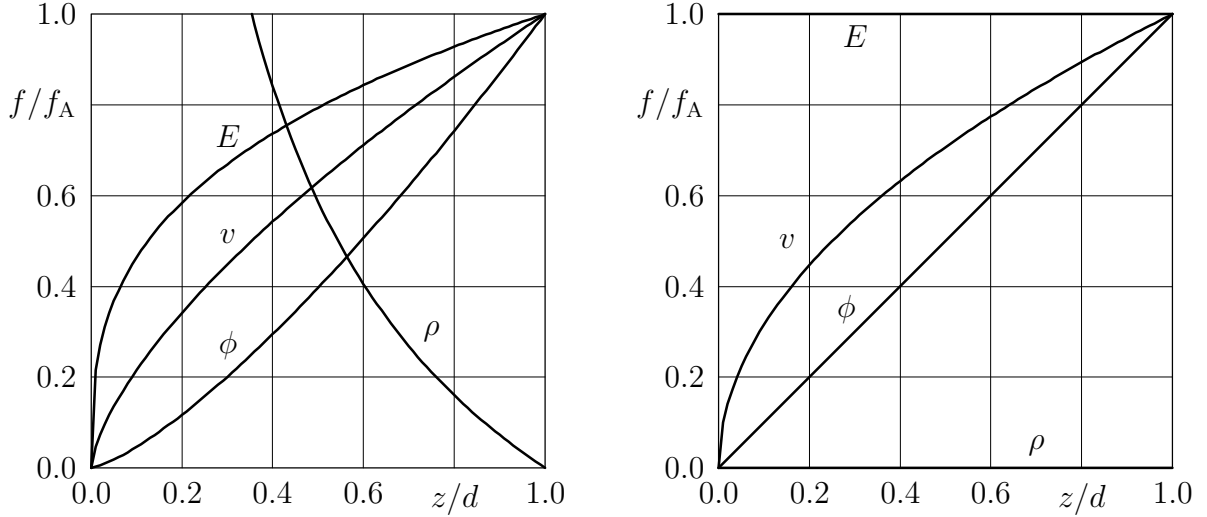


Abbildung A.3: Feldverläufe in der Plattendiode normiert mit den Werten auf der Anode. Links: Raumladungsbegrenzter Betrieb. Rechts: Statischer (kapazitiver) Betrieb. Eine Ausnahme betrifft die Raumladungsdichte: Im linken Diagramm ist dargestellt $\rho(z)/\rho(d) - 1$ und im rechten $\rho(z)$ ohne Normierung.

gelangen, werden folgende Normierungen vorgenommen:

$$j = J_0/J_r, \quad (\text{A.43})$$

$$e = E_K/E_0, \quad (\text{A.44})$$

$$u = \sqrt{\phi/U}, \quad (\text{A.45})$$

$$x = z/d, \quad (\text{A.46})$$

wobei $E_0 = U/d$ gesetzt wurde. Diese Größen haben den Wertebereich $[0, 1]$. Mit ihnen läßt sich (A.33) in die übersichtlichere Form

$$(2j)^2 x - \left(\frac{3e}{2}\right)^3 = \left(2ju - \left(\frac{3e}{2}\right)^2\right) \sqrt{4ju + \left(\frac{3e}{2}\right)^2} \quad (\text{A.47})$$

bringen, welche durch Quadrieren – und damit wahrscheinlich unter Hinzufügen von Lösungen – die leichter auszuwertende Gestalt

$$\left(\frac{3e}{2}\right)^2 \left(3u^2 - 2\left(\frac{3e}{2}\right)x\right) = 2j(2u^3 - 2jx^2) \quad (\text{A.48})$$

annimmt. Wie im Abschnitt A.1.2 bereits erläutert, werden diese Gleichungen nun dazu dienen, die Katodenfeldstärke aus der Stromdichte zu bestimmen. Da sie allgemein gültig sind, müssen sie speziell auf der Anode gültig sein, deren Ort und Potential bekannt und durch $x = 1$, $u = 1$ gegeben sind, womit man erhält

$$(2j)^2 - \left(\frac{3e}{2}\right)^3 = \left(2j - \left(\frac{3e}{2}\right)^2\right) \sqrt{4j + \left(\frac{3e}{2}\right)^2} \quad (\text{A.49})$$

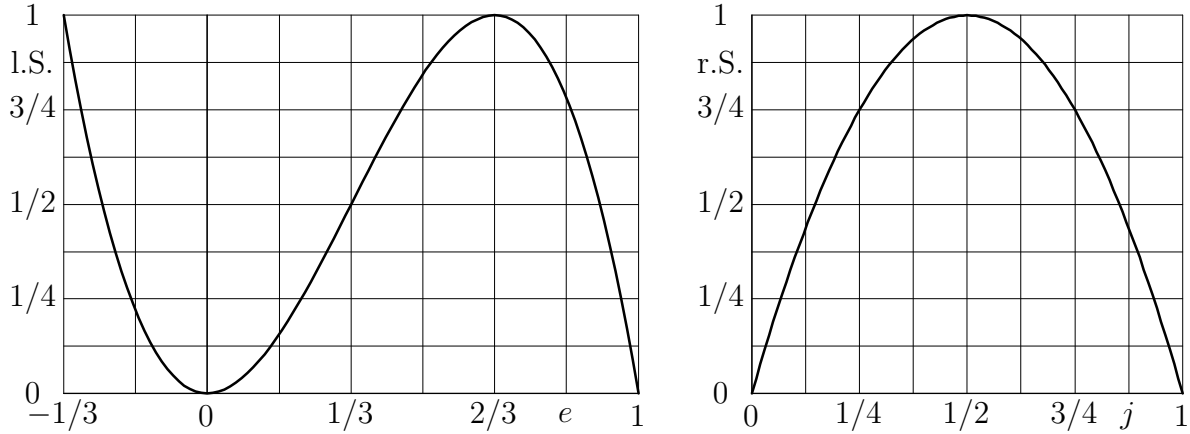


Abbildung A.4: Temperaturbegrenzte Plattendiode: Verlauf der rechten und linken Seite von Gleichung (A.50) für den Wertebereich $[0, 1]$.

$$\left(\frac{3e}{2}\right)^2 \left(3 - 2\left(\frac{3e}{2}\right)\right) = 2j(2 - 2j). \quad (\text{A.50})$$

Der Wertebereich der rechten – und damit zwangsläufig auch der linken – Seite der letzten Gleichung ist $[0, 1]$; beide Seiten sind für diesen Bereich in Abbildung A.4 dargestellt. Offenbar existieren für jedes j also zunächst drei Lösungen für e : Jeweils eine Lösung aus den Intervallen $[-1/3, 0]$, $[0, 2/3]$ und $[2/3, 1]$. Es zeigt sich jedoch schnell, daß nur eine Lösung von praktischer Relevanz ist. Zunächst einmal kann die Feldstärke auf der Katode nicht negativ werden, weil dies ein negatives Potential an irgendeiner Stelle im Raum (und damit eine imaginäre Geschwindigkeit) zur Folge hätte, womit bereits das erste Intervall ausscheidet. Weiterhin ist aus Stetigkeitsgründen anzunehmen, daß der Fall der verschwindenden Stromdichte gerade der statische und der Fall maximaler Stromdichte gerade der raumladungsbegrenzte ist, d.h. daß die Lösung zu $j = 0$ $e = 1$ und zu $j = 1$ $e = 0$ lauten sollte. Allgemeiner gefaßt bedeutet dies, daß für $j \in [0, 1/2]$ die Lösung auf $[2/3, 1]$ und für $j \in [1/2, 1]$ auf $[0, 2/3]$ liegen sollte. Dies ist in der Tat der Fall für die eigentliche Gleichung (A.49), was sich durch Einsetzen spezieller Lösungen von (A.50) nachweisen läßt. Beispielsweise nimmt nach Abbildung A.4 (A.50) beiderseitig den Wert $1/2$ an für $e = 1/3$ und $j = 1/2 - 1/\sqrt{8} \approx 0.146$; dies ist aber keine Lösung von (A.49). Unter Beachtung dieser Gedankengänge erhält man die gesuchte Funktion $e(j)$ aus der allgemeinen Lösung von (A.50) als

$$e = \frac{1 + 2 \cos(\psi/3)}{3} \quad (\text{A.51})$$

mit

$$\psi = \begin{cases} \arccos(1 - 8j(1 - j)) & : j \in [0, 1/2] \\ 4\pi + \arccos(1 - 8j(1 - j)) & : j \in [1/2, 1] \end{cases} \quad (\text{A.52})$$

Ihr Verlauf ist in Abbildung A.5 dargestellt.

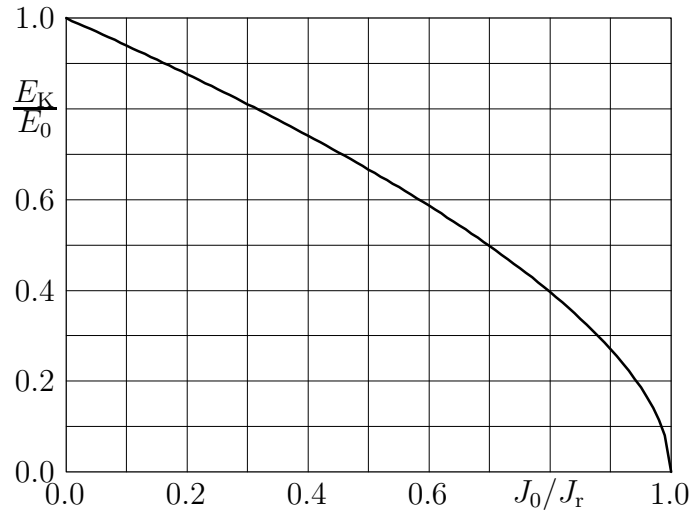


Abbildung A.5: Temperaturbegrenzte Plattendiode: Normierte Katodenfeldstärke in Abhängigkeit von der normierten Stromdichte.

Nachdem nun die Abhängigkeit der Katodenfeldstärke von der Stromdichte bekannt ist, könnte man – wie zuvor im raumladungsbegrenzten Fall geschehen – mittels Gleichung (A.47) die z -abhängigen Felder bestimmen. Wegen der verwickelten Zusammenhänge im allgemeinen Falle geschieht dies hier lediglich für drei einfachere Spezialfälle.

- $J_0 = J_r$. Für $j = 1$ hat man $e = 0$, und (A.47) nimmt die Gestalt

$$x = u^{3/2} \quad (\text{A.53})$$

an. Werden x und u durch die entsprechenden Feldgrößen ersetzt, erhält man Gleichung (A.38), wie es zu erwarten war.

- $J_0 = 0$. Für $j = 0$ hat man $e = 1$, und (A.47) geht für alle x und u in eine Identität über, so daß sich die gesuchte Funktion $u(x)$ derart nicht ermitteln läßt. Ob Gleichung (A.47) den Fall $j = 0$ wenigstens in der Grenze abdeckt, könnte man untersuchen, indem zunächst alle Terme außer x auf die rechte Seite gebracht werden und danach der Grenzwert der rechten Seite für $j \rightarrow 0$ berechnet wird; dieser sollte u^2 betragen. Dabei macht man sich zunutze, daß alle Ableitungen von $e(j)$ bekannt sind, weil mit (A.50) (und den Ergebnissen der Intervallbetrachtungen) die Funktion $j(e)$ in analytischer Form vorliegt, weshalb eine TAYLOR-Entwicklung von $e(j)$ mit beliebiger Genauigkeit erfolgen kann.
- $J_0 = J_r/2$. Für $j = 1/2$ ist $e = 2/3$, und Gleichung (A.47) lautet

$$x - 1 = (u - 1)\sqrt{2u + 1}, \quad (\text{A.54})$$

oder nach dem Quadrieren

$$u^2(3 - 2u) = x(2 - x). \quad (\text{A.55})$$

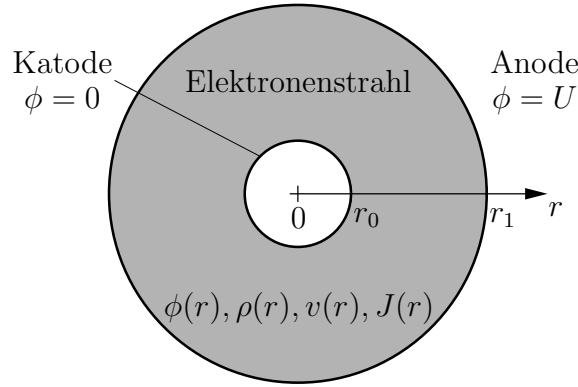


Abbildung A.6: Eindimensionales Entladungsproblem: Die Zylinderdiode.

Die Lösung $u(x)$ dieser Gleichung ist bereits ausführlich diskutiert worden: Mit $u \leftrightarrow 3e/2$ und $x \leftrightarrow 2j$ gehen (A.55) und (A.50) offenbar ineinander über. Betrachtet man noch einmal Abbildung A.4, so stellt man fest, daß die Lösung für die neuen Wertebereiche $u \in [0, 1]$ und $x \in [0, 1]$ nun eindeutig ist; sie lautet

$$u = \frac{1}{2} + \cos \frac{4\pi + \arccos(1 - 4x(1 - x/2))}{3}. \quad (\text{A.56})$$

A.1.4 Die zylindrische Diode

Im kreiszylindrischen Falle, Abbildung A.6, wird, wie bereits besprochen, die normierte Kontinuitätsgleichung (A.15) durch $j = r_0/r$ gelöst. Betrachtet man – wie im folgenden stets – r_0 als Katodenradius, so erhält die Konstante J_0 aus Gleichung (A.16) die Bedeutung der Katodenstromdichte. Bezeichnet man ferner den Anodenradius mit r_1 , wobei allein $r_1 \neq r_0$, nicht jedoch $r_1 > r_0$ gefordert wird, so lautet das Potentialproblem

$$\frac{r}{r_0} \sqrt{\phi} \left(\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \right) = kJ_0, \quad (\text{A.57})$$

$$\phi(r_0) = 0, \quad (\text{A.58})$$

$$\phi'(r_0) = E_K, \quad (\text{A.59})$$

$$\phi(r_1) = U. \quad (\text{A.60})$$

Die Gleichung (A.57) läßt sich nun leider nicht mehr wie im planaren Falle integrieren, so daß man zu einem Ansatz für das Potential gezwungen ist.

Die naheliegendste Variante besteht im Ansatz als Potenzreihe, wobei die Koeffizienten des konstanten und des linearen Gliedes durch die Anfangswerte gegeben und die Koeffizienten der höheren Glieder mit Hilfe der Differentialgleichung zu berechnen sind. Da die Anfangswerte (A.58) und (A.59) in r_0 gegeben sind, muß das Potential um $r = r_0$ entwickelt werden. Man sieht jedoch schnell, daß sich das Potential aufgrund der gegebenen Anfangswerte nicht in eine TAYLORreihe um $r = r_0$ entwickeln lassen kann: Der

A Ausführlichere Betrachtungen

Differentialgleichung zufolge muß $\sqrt{\phi}\phi''$ für $r \rightarrow r_0$ gegen einen konstanten Wert streben; da mit ϕ aber auch $\sqrt{\phi}$ gegen 0 strebt, muß ϕ'' gegen ∞ streben. Folglich existiert die zweite Ableitung des Potentials in r_0 nicht und mithin auch keine Entwicklung um diesen Punkt.

Betrachtet man die Differentialgleichung für die planare Anordnung, ist sofort klar, daß aus demselben Grund selbst in diesem einfacheren Falle keine TAYLOREntwicklung um die Katode möglich ist. Begraben wir also an dieser Stelle die Hoffnung, eine zu (A.33) äquivalente allgemeine Lösung des kreiszylindrischen Entladungsproblems zu finden und wenden uns den Spezialfällen zu.

Raumladungsbegrenzter Betrieb

Angesichts der Tatsache, daß sich das Potential im planaren raumladungsbegrenzten Falle als Potenz des Abstandes von der Katode ergab, kann man einen analogen Ansatz auch im zylindersymmetrischen Falle versuchen

$$\phi = c \left(\frac{r}{r_0} \right)^p, \quad (\text{A.61})$$

wobei die Konstanten c und p zunächst unbekannt sind. Begonnen sei mit der Bestimmung des Exponenten p . Offenbar gilt für jedes Potential der Form (A.61)

$$\frac{r}{r_0} \sqrt{\phi} \left(\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \right) = c^{3/2} \frac{p^2}{r_0^2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{3p/2-1}. \quad (\text{A.62})$$

Damit es zu einer partikulären Lösung der Gleichung (A.57) avancieren kann, darf zunächst einmal der links- und damit auch der rechtsseitige Term aus Gleichung (A.62) nicht von r abhängig sein, was allein bei einem verschwindenden Exponenten, also für $p = 2/3$ der Fall ist. Einen vielversprechenden neuen Ansatz für das Potential stellt folglich

$$\phi = c \left(\frac{r}{r_0} \right)^{2/3} \quad (\text{A.63})$$

dar. Der Faktor c wird nun derart gewählt, daß die Bedingung auf der Anode (A.60) erfüllt wird, was offenbar für $c = U/(r_1/r_0)^{2/3}$ der Fall ist, und das Potential nimmt die Gestalt

$$\phi = U \left(\frac{r}{r_1} \right)^{2/3} \quad (\text{A.64})$$

an. Für ein Potential dieser Form gilt nun

$$\frac{r}{r_0} \sqrt{\phi} \left(\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \right) = \frac{4}{9} \frac{U^{3/2}}{r_0 r_1}, \quad (\text{A.65})$$

weshalb die Differentialgleichung (A.57) wegen $k = 1/(\epsilon_0 \sqrt{2\eta_0})$ bei

$$J_0 = \frac{4}{9} \frac{\epsilon_0 \sqrt{2\eta_0}}{r_0 r_1} U^{3/2} \quad (\text{A.66})$$

gelöst wird. Leider verschwinden in r_0 weder das Potential noch dessen Ableitung, so daß es sicherlich nicht die exakte Lösung für den raumladungsbegrenzten Betrieb darstellt.

Um nun auch die Bedingungen auf der Katode erfüllen zu können und somit zur exakten Lösung des Problems zu gelangen, erweiterte LANGMUIR [27], [29] den Ansatz (A.63) um eine Funktion $\gamma = \gamma(x)$ mit $x = r/r_0$ zu

$$\phi = c (\gamma^2 x)^{2/3}. \quad (\text{A.67})$$

Zunächst einmal wird die Konstante c wieder zur Erfüllung der Anodenbedingung verwendet

$$\phi = U \left(\frac{\gamma^2 x}{\gamma_1^2 x_1} \right)^{2/3} = U \left(\frac{\gamma^2 r}{\gamma_1^2 r_1} \right)^{2/3}. \quad (\text{A.68})$$

– Alle Indizierungen entsprechen jener von r : 0 steht für Katode und 1 für Anode. – Für ein Potential dieser Gestalt gilt

$$\frac{r}{r_0} \sqrt{\phi} \left(\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \right) = \frac{4}{9} \frac{U^{3/2}}{r_0 r_1 \gamma_1^2} (3\gamma \ddot{\gamma} x^2 + \dot{\gamma}^2 x^2 + 7\gamma \dot{\gamma} x + \gamma^2), \quad (\text{A.69})$$

wobei Punktierungen Ableitungen bezüglich x bezeichnen. Damit es als Lösung der Differentialgleichung (A.57) in Frage kommt, muß der rechtsseitige Klammerterm aus (A.69) konstant bezüglich x sein und darf nicht verschwinden. Aufgrund der Forderung nach verschwindendem Katodenpotential besitzt diese Konstante den Wert $\dot{\gamma}_0^2$, was man durch Einsetzen von $\gamma = \gamma_0 = 0$ für $x = x_0 = 1$ leicht einsehen kann. Damit ist das Randwertproblem für das Potential in folgendes Anfangswertproblem für γ überführt

$$3\gamma \ddot{\gamma} x^2 + \dot{\gamma}^2 x^2 + 7\gamma \dot{\gamma} x + \gamma^2 = \dot{\gamma}_0^2, \quad (\text{A.70})$$

$$\gamma(x_0) = \gamma_0 = 0, \quad (\text{A.71})$$

$$\dot{\gamma}(x_0) = \dot{\gamma}_0. \quad (\text{A.72})$$

Die von Null verschiedene Konstante $\dot{\gamma}_0$ bleibt zunächst unbestimmt.⁶ Mittels der Substitution $x = e^y$ läßt sich die Differentialgleichung (A.70) noch etwas vereinfachen. Bezeichnet man Ableitungen nach $y = \ln x$ durch gestrichene Größen, so gilt

$$\dot{\gamma} x = \gamma', \quad (\text{A.73})$$

$$\ddot{\gamma} x^2 = \gamma'' - \gamma', \quad (\text{A.74})$$

und das Anfangswertproblem für $\gamma(y)$ lautet

$$3\gamma \gamma'' + \gamma'^2 + 4\gamma \gamma' + \gamma^2 = \dot{\gamma}_0^2, \quad (\text{A.75})$$

$$\gamma(y_0) = \gamma_0 = 0, \quad (\text{A.76})$$

$$\gamma'(y_0) = \gamma'_0 = \dot{\gamma}_0. \quad (\text{A.77})$$

⁶Die naheliegende Vermutung, daß sich die Katodenfeldstärke über $\dot{\gamma}_0$ „einstellen“ ließe, bewahrheitet sich nicht: Durch Differentiation von (A.68) sieht man schnell ein, daß $\phi'(r_0) = 0$ aufgrund des speziellen Ansatzes mit quadratischem γ bereits durch $\gamma(x_0) = 0$ befriedigt wird. Daher gilt in der Tat: Jede dem Anfangswertproblem (A.70) bis (A.72) mit *beliebigem* $\dot{\gamma}_0 \neq 0$ genügende Funktion γ „erzeugt“ vermöge (A.68) die Lösung des Potentialproblems (A.57) bis (A.60) mit $E_k = 0$. Diese Freiheit verwundert nicht, denn aufgrund des Ansatzes (A.68) kann γ höchstens bis auf einen Konstanten Faktor bestimmt sein.

A Ausführlichere Betrachtungen

Zur Lösung wird $\gamma(y)$ als TAYLORreihe um $y_0 = 0$ angesetzt

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma'_0 y + \frac{\gamma''_0}{2} y^2 + \dots \quad (\text{A.78})$$

Die Koeffizienten nullter und erster Ordnung sind bereits durch die Anfangswerte gegeben; jene höherer Ordnung werden im folgenden aus der Differentialgleichung bestimmt. Durch fortlaufende Differentiation von (A.75) erhält man

$$3\gamma\gamma''' + 4\gamma\gamma'' + 5\gamma'\gamma'' + 4\gamma'^2 + 2\gamma\gamma' = 0, (\text{A.79})$$

$$3\gamma\gamma^{IV} + 8\gamma'\gamma''' + 4\gamma\gamma''' + 5\gamma''^2 + 12\gamma'\gamma'' + 2\gamma\gamma'' + 2\gamma'^2 = 0, (\text{A.80})$$

$$3\gamma\gamma^V + 11\gamma'\gamma^{IV} + 4\gamma\gamma^{IV} + 18\gamma''\gamma''' + 16\gamma'\gamma''' + 2\gamma\gamma''' + 12\gamma''^2 + 6\gamma'\gamma'' = 0 (\text{A.81})$$

und damit an der Stelle $y = y_0 = 0$ wegen $\gamma_0 = 0$

$$\gamma''_0 = -\frac{4}{5}\gamma'_0 = -\frac{4}{5}\dot{\gamma}_0, \quad (\text{A.82})$$

$$\gamma'''_0 = -\frac{5}{8}\frac{\gamma''_0{}^2}{\gamma'_0} - \frac{3}{2}\gamma''_0 - \frac{1}{4}\gamma'_0 = \frac{11}{20}\dot{\gamma}_0, \quad (\text{A.83})$$

$$\gamma^{IV}_0 = -\frac{18}{11}\frac{\gamma''_0\gamma'''_0}{\gamma'_0} - \frac{16}{11}\gamma'''_0 - \frac{12}{11}\frac{\gamma''_0{}^2}{\gamma'_0} - \frac{6}{11}\gamma''_0 = -\frac{94}{275}\dot{\gamma}_0. \quad (\text{A.84})$$

Offenbar sind alle Koeffizienten und damit γ selbst proportional zu $\dot{\gamma}_0$ (siehe Fußnote S. 133), weshalb man diesen Term durch Einführung einer neuen Funktion $\beta = \gamma/\dot{\gamma}_0$ vollständig aus der Rechnung entfernen kann

$$\beta = \ln r/r_0 - \frac{2}{5}(\ln r/r_0)^2 + \frac{11}{120}(\ln r/r_0)^3 - \frac{47}{3300}(\ln r/r_0)^4 \pm \dots \quad (\text{A.85})$$

Das zugehörige Potential lautet folglich

$$\phi = U \left(\frac{\beta^2 r}{\beta_1^2 r_1} \right)^{2/3}, \quad (\text{A.86})$$

die Differentialgleichung (A.57) liefert mit $k = 1/(\epsilon_0\sqrt{2\eta_0})$

$$J_0 = \frac{4}{9} \frac{\epsilon_0\sqrt{2\eta_0}}{r_0 r_1 \beta_1^2} U^{3/2}, \quad (\text{A.87})$$

und für die Anodenstromdichte J_1 gilt wegen $J_0 r_0 = J_1 r_1$

$$J_1 = \frac{4}{9} \frac{\epsilon_0\sqrt{2\eta_0}}{r_1^2 \beta_1^2} U^{3/2}. \quad (\text{A.88})$$

In den Abbildungen A.7 und A.8 ist der Verlauf des Korrekturfaktors $\beta(r/r_0)$ dargestellt. Die Funktionswerte wurden entsprechend (A.85) unter Verwendung von vierzehn Gliedern berechnet, wobei die restlichen zehn Koeffizienten der Veröffentlichung von LANGMUIR und BLODGETT [29] entnommen sind. Außerdem ist in den Abbildungen der Verlauf der

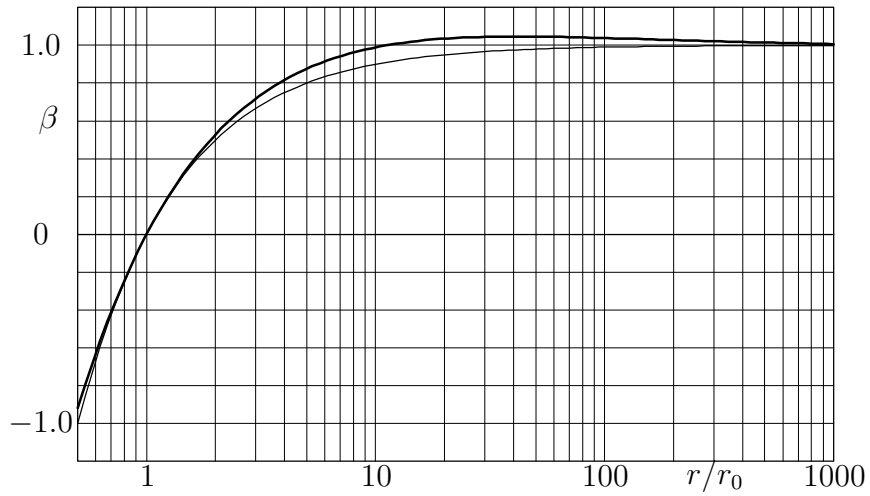


Abbildung A.7: Raumladungsbegrenzte Zylinderdiode: Korrekturfaktor β (dicke Kurve) und dessen Näherung $1 - r_0/r$ (dünne Kurve) in Abhängigkeit vom normierten Radius r/r_0 für große Radien (innenliegende Katode).

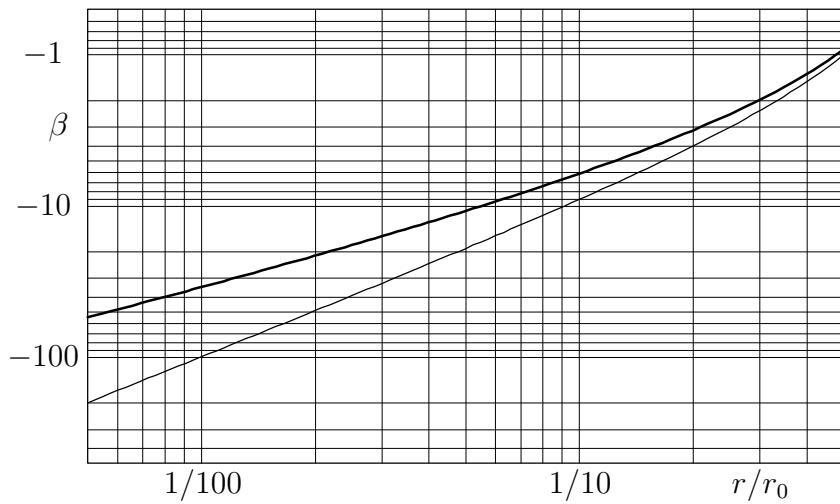


Abbildung A.8: Raumladungsbegrenzte Zylinderdiode: Korrekturfaktor β (dicke Kurve) und dessen Näherung $1 - r_0/r$ (dünne Kurve) in Abhängigkeit vom normierten Radius r/r_0 für kleine Radien (außenliegende Katode).

A Ausführlichere Betrachtungen

Funktion $1 - r_0/r$ dargestellt, welche offenbar für $r/r_0 \geq 0.5$ als akzeptable und in den Bereichen $r/r_0 \in [0.5, 2]$ und $r/r_0 > 200$ als gute Näherung für β gelten darf. Setzt man $\beta \approx 1 - r_0/r$, so folgt daraus

$$J_1 \approx \frac{4}{9} \frac{\epsilon_0 \sqrt{2\eta_0}}{(r_1 - r_0)^2} U^{3/2}. \quad (\text{A.89})$$

Bei gleichen Elektrodenspannungen und -abständen hat man folglich bei einer Zylinderdiode in etwa die gleiche Anodenstromdichte wie bei einer planaren Diode, vgl. (A.35). Mit der Anodenfläche A_1 erhält man für den Strom und die Perveanz der coaxialen Zylinderdiode

$$I = \frac{4}{9} \frac{A_1}{r_1^2 \beta_1^2} \epsilon_0 \sqrt{2\eta_0} U^{3/2} \approx \frac{4}{9} \frac{A_1}{(r_1 - r_0)^2} \epsilon_0 \sqrt{2\eta_0} U^{3/2}, \quad (\text{A.90})$$

$$K = \frac{4}{9} \frac{A_1}{r_1^2 \beta_1^2} \epsilon_0 \sqrt{2\eta_0} \approx \frac{4}{9} \frac{A_1}{(r_1 - r_0)^2} \epsilon_0 \sqrt{2\eta_0}. \quad (\text{A.91})$$

Sinnvoller jedoch ist der Bezug auf die Länge des Zylinders

$$I' = \frac{8}{9} \frac{\pi \epsilon_0 \sqrt{2\eta_0}}{r_1 \beta_1^2} U^{3/2} \approx \frac{8}{9} \frac{\pi r_1 \epsilon_0 \sqrt{2\eta_0}}{(r_1 - r_0)^2} U^{3/2}, \quad (\text{A.92})$$

$$K' = \frac{8}{9} \frac{\pi \epsilon_0 \sqrt{2\eta_0}}{r_1 \beta_1^2} \approx \frac{8}{9} \frac{\pi r_1 \epsilon_0 \sqrt{2\eta_0}}{(r_1 - r_0)^2}. \quad (\text{A.93})$$

Temperaturbegrenzter Betrieb

Wie bereits in der Fußnote auf Seite 133 erwähnt, ist der Ansatz (A.67) nur für den raumladungsbegrenzten Betrieb geeignet, weil bei diesem Ansatz die Bedingung $\phi(r_0) = 0$ sofort $\phi'(r_0) = 0$ nach sich zieht. Da sich die Untersuchung des temperaturbegrenzten Betriebs bereits in planaren Falle als äußerst kompliziert herausgestellt hat, soll dieser hier nicht weiter untersucht werden.

A.2 Zur relativistischen Dynamik der Punktladung

In dieser Arbeit werden an einigen Stellen Beziehungen aus der relativistischen Mechanik verwendet, die nicht in jedem Lehrbuch über theoretische Physik zu finden sind, weshalb sie in diesem Abschnitt in Kürze vorgestellt und – soweit möglich – hergeleitet werden. Für eine ausführlichere Behandlung dieser Thematik sei auf [41] und [42] verwiesen.

A.2.1 Grundgleichungen

Ausgangspunkt der Betrachtungen sind die *kinetische Energie* und der *Impuls* einer Punktmasse bzw. -ladung

$$K = m_0 c_0^2 (\gamma - 1), \quad (\text{A.94})$$

$$\mathbf{p} = m_0 \gamma \mathbf{v}. \quad (\text{A.95})$$

Hierin bedeuten m_0 die Ruhemasse und \mathbf{v} die Geschwindigkeit des Teilchens, c_0 ist die Lichtgeschwindigkeit (im Vakuum) und γ der gemäß

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (\text{A.96})$$

$$\beta = v/c_0 \quad (\text{A.97})$$

definierte relativistische Faktor; v und p sind die Beträge von Teilchengeschwindigkeit und Teilchenimpuls. Das zweite NEWTONsche⁷ Axiom in der Gestalt

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} \quad (\text{A.98})$$

sowie die Gleichung für die auf eine Ladung q aufgrund eines elektrischen Feldes \mathbf{E} und einer Induktion \mathbf{B} wirkende LORENTZkraft

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (\text{A.99})$$

gelten auch in der relativistischen Mechanik.

Bei Vektoren steht der punktierte Betrag für die zeitliche Ableitung des Betrages des jeweiligen Vektors, also $\dot{p} \equiv d|\mathbf{p}|/dt$. Dieser ist dann und nur dann identisch mit dem Betrag der Ableitung des Vektors $|\dot{\mathbf{p}}| = |d\mathbf{p}/dt|$, wenn \mathbf{p} und $\dot{\mathbf{p}}$ gleichgerichtet sind, wenn also gilt $\mathbf{p} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$: Für jede beliebige Vektorfunktion $\mathbf{p}(t)$ gilt – sofern die Ableitungen existieren –

$$\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} p^2 = p \dot{p}. \quad (\text{A.100})$$

Es ist p der Betrag von \mathbf{p} , nicht jedoch \dot{p} der Betrag von $\dot{\mathbf{p}}$. Sind \mathbf{p} und $\dot{\mathbf{p}}$ gleichgerichtet, dann ist ihr Skalarprodukt durch das Produkt ihrer Beträge gegeben, d.h. $\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{p}} = p|\dot{\mathbf{p}}|$, woraus mit (A.100) folgt $\dot{p} = |\dot{\mathbf{p}}|$. Umgekehrt folgt aus $\dot{p} = |\dot{\mathbf{p}}|$ mit (A.100) $\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{p}} = p|\dot{\mathbf{p}}|$, was nur dann der Fall sein kann, wenn \mathbf{p} und $\dot{\mathbf{p}}$ gleichgerichtet sind – q.e.d..

⁷Newton, Sir Isaac (1643-1727), englischer Mathematiker und Physiker

A.2.2 Abgeleitete Gleichungen

Man überzeuge sich von der Richtigkeit der folgenden Zusammenhänge:

$$\gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 - 1 = (\gamma + 1) \frac{K}{m_0 c_0^2}, \quad (\text{A.101})$$

$$\dot{\mathbf{p}} = m_0(\dot{\gamma} \mathbf{v} + \gamma \dot{\mathbf{v}}), \quad (\text{A.102})$$

$$\dot{\gamma} = \gamma^3 \frac{\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}}{c_0^2} = \gamma^3 \dot{\beta} \beta. \quad (\text{A.103})$$

Gemäß (A.94) stellt der relativistische Faktor γ ein dimensionsloses Maß für die Teilchenenergie dar. Die zeitliche Differentiation dieser Gleichung liefert unmittelbar

$$\dot{K} = m_0 c_0^2 \dot{\gamma}. \quad (\text{A.104})$$

Zu einer weniger leicht einzusehenden Identität gelangt man mittels Quadrieren von (A.95) unter Verwendung von (A.101)

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = m_0^2 c_0^2 (\gamma^2 - 1) \quad (\text{A.105})$$

und anschließender zeitlicher Differentiation

$$\dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v} = m_0 c_0^2 \dot{\gamma}. \quad (\text{A.106})$$

Ein Vergleich mit (A.104) liefert den oft verwendeten Zusammenhang

$$\dot{K} = \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v}. \quad (\text{A.107})$$

Ferner folgt aus (A.105)

$$\gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{p}{m_0 c_0}\right)^2}. \quad (\text{A.108})$$

A.2.3 Longitudinale und transversale Masse

Oftmals ist die Trajektorie eines Teilchens bei gegebener Kraft gesucht, so daß man eine Beziehung der Gestalt „Kraft = Masse \times Beschleunigung“ benötigt. Dazu geht man zweckmäßigerweise von Gleichung (A.102) in ausgeschriebender Form aus

$$\mathbf{F} = m_0 \gamma (\gamma^2 \beta \dot{\beta} \mathbf{v} + \dot{\mathbf{v}}). \quad (\text{A.109})$$

Es sei zunächst der Fall einer *longitudinal* zur Bewegungsrichtung angreifenden Kraft untersucht, wie er im Eindimensionalen anzutreffen ist; es möge also $\mathbf{F} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ und mithin $\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ gelten. Wenn aber \mathbf{v} und $\dot{\mathbf{v}}$ gleichgerichtet sind, läßt sich einerseits $\dot{\mathbf{v}}$ in Gleichung (A.109) ausklammern

$$\mathbf{F} = m_0 \gamma \dot{\mathbf{v}} (\gamma^2 \beta^2 + 1), \quad (\text{A.110})$$

und andererseits gilt $|\dot{\mathbf{v}}| = \dot{v}$, siehe Abschnitt A.2.1. Mit (A.101) folgen daraus die gesuchten Beziehungen

$$\mathbf{F} = m_0 \gamma^3 \dot{\mathbf{v}}, \quad (\text{A.111})$$

$$F = m_0 \gamma^3 \dot{v}. \quad (\text{A.112})$$

Den Term $m_0 \gamma^3$ nennt man auch *longitudinale Masse* des Teilchens.

Greift die Kraft *transversal* an, wie es bei einer Kreisbewegung konstanter Winkelgeschwindigkeit der Fall ist, hat man $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0$ und mithin $\dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v} = 0$. Wie ein Blick auf (A.106) zeigt, ist die kinetische Energie des Teilchens konstant, d.h. es gilt $\dot{\gamma} = 0$ und $|\dot{\mathbf{v}}| \neq \dot{v} = 0$, und die gesuchten Beziehungen lauten

$$\mathbf{F} = m_0 \gamma \dot{\mathbf{v}}, \quad (\text{A.113})$$

$$F = m_0 \gamma |\dot{\mathbf{v}}|. \quad (\text{A.114})$$

Den Term $m_0 \gamma$ nennt man *transversale Masse* des Teilchens.

Im allgemeinen Falle hat man die Kraft und damit die rechte Seite von (A.109) in einen longitudinalen und einen transversalen Anteil bezüglich \mathbf{v} zu zerlegen, was offenbar darauf hinausläuft, die vektorielle Beschleunigung $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$ zu zerlegen; nur dieser Term kann einen transversalen Anteil besitzen, wie man (A.109) unmittelbar entnimmt. Wegen (A.100) leisten

$$\mathbf{a}_{\text{long}} = \frac{\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} = \frac{\dot{v}}{v} \mathbf{v}, \quad (\text{A.115})$$

$$\mathbf{a}_{\text{trans}} = \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{a}_{\text{long}} = \dot{\mathbf{v}} - \frac{\dot{v}}{v} \mathbf{v} \quad (\text{A.116})$$

offenbar das gewünschte,⁸ und man erhält

$$\mathbf{F} = \underbrace{m_0 \gamma (\gamma^2 \beta \dot{\beta} \mathbf{v} + \dot{v}/v \mathbf{v})}_{\mathbf{F}_{\text{long}}} + \underbrace{m_0 \gamma (\dot{\mathbf{v}} - \dot{v}/v \mathbf{v})}_{\mathbf{F}_{\text{trans}}}. \quad (\text{A.117})$$

Durch Betragsbildung ergeben sich die Zusammenhänge

$$a_{\text{long}} = \dot{v}, \quad (\text{A.118})$$

$$a_{\text{trans}} = \sqrt{|\dot{\mathbf{v}}|^2 - \dot{v}^2}, \quad (\text{A.119})$$

$$F_{\text{long}} = m_0 \gamma^3 \dot{v}, \quad (\text{A.120})$$

$$F_{\text{trans}} = m_0 \gamma \sqrt{|\dot{\mathbf{v}}|^2 - \dot{v}^2}, \quad (\text{A.121})$$

und zusammen mit der Ausgangsgleichung (A.109) lassen sich alle interessierenden Beschleunigungen $\dot{\mathbf{v}}$, $|\dot{\mathbf{v}}|$ und \dot{v} aus der angreifenden Kraft bestimmen.

⁸Jeder Vektor \mathbf{a} läßt sich eindeutig in einen parallelen und einen senkrechten Anteil bezüglich eines beliebigen Vektors $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ additiv zerlegen, d.h. bei gegebenem \mathbf{a} ist die Aufgabe $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ mit $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b} = 0$ eindeutig lösbar. *Lösbarkeit:* Die Vektoren $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{b} / b^2$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{a}_1$ leisten das gewünschte, denn wegen $\mathbf{b} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ gilt $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, und es ist $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} / b^2 = 0$. *Eindeutigkeit:* Es seien zwei nach dem besprochenen Schema berechnete Zerlegungen \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 und \mathbf{c}_1 , \mathbf{c}_2 vorgelegt. Dann gilt $\mathbf{a}_1 - \mathbf{c}_1 = -(\mathbf{a}_2 - \mathbf{c}_2)$, $(\mathbf{a}_1 - \mathbf{c}_1) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ und $(\mathbf{a}_2 - \mathbf{c}_2) \cdot \mathbf{b} = 0$, woraus folgt $\mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_1$ und $\mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_2$.

A.2.4 Energie-Spannungs-Äquivalenz

Währenddessen in der experimentellen Physik die Spannung als Quotient von verrichteter Arbeit und Ladung eingeführt wird, so daß eine Äquivalenz zwischen Energie und Spannung von Hause aus besteht, ist dies in der theoretischen Physik nicht der Fall. Hier wird die Spannung als Kurvenintegral der elektrischen Feldstärke definiert; der Zusammenhang mit der kinetischen Energie eines geladenen Teilchens ist daher nicht offensichtlich. Er muß vielmehr aus den Beziehungen der vorangehenden Abschnitte hergeleitet werden. Dazu betrachte man ein beliebiges elektromagnetisches Feld \mathbf{E} , \mathbf{B} und eine Punktladung q mit der Momentangeschwindigkeit \mathbf{v} . Auf diese Ladung wirkt dann die LORENTZkraft $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Gemäß (A.107) und (A.98) gilt $\dot{K} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$; ein Magnetfeld besitzt keinerlei Einfluß auf die kinetische Energie der Ladung. Bei gegebener Trajektorie $\mathbf{r}(t)$ der Ladung wird eine Spannung – die von der Ladung im Zeitintervall $[t_0, t]$ durchlaufene Spannung – definiert als

$$U = \int_{\mathbf{r}(t_0)}^{\mathbf{r}(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_0}^t \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} d\tau. \quad (\text{A.122})$$

Diese Spannung ist offenbar vom Zeitpunkt t abhängig, und es gilt $\dot{U} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$ und daher

$$\dot{K} = q\dot{U}. \quad (\text{A.123})$$

Diese Zusammenhänge können auch kurz als

$$dK = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = q dU \quad (\text{A.124})$$

geschrieben werden. Mit der Übereinkunft, einer verschwindenden kinetischen Energie eine verschwindende Spannung zuzuordnen, hat man daher

$$K = qU. \quad (\text{A.125})$$

Dieser Äquivalenz entspringt auch die Energieeinheit *Elektronenvolt* eV, denn aus (A.125) folgt $eU = K/(q/e)$. Besonders praktisch ist diese Einheit für Elektronen, denn dann gilt $q/e = 1$.

Mittels Gleichung (A.125) läßt sich also jeder kinetischen Energie eindeutig eine Spannung zuordnen. Manchmal wird auch für andere Energien von dieser Möglichkeit Gebrauch gemacht, beispielsweise bei der Ruheenergie $K_0 = m_0c_0^2$ eines geladenen Teilchens: $U_0 = m_0c_0^2/q$; die so definierte „Ruhe-spannung“ beträgt für ein Elektron 511 kV.

Abschließend seien wegen ihrer mehrfachen Verwendung innerhalb dieser Arbeit zwei Beziehungen angegeben, welche sich ohne weiteres aus den vorliegenden Formel ableiten lassen:

$$qU = m_0c_0^2(\gamma - 1), \quad (\text{A.126})$$

$$\gamma^2v^2 = (\gamma + 1)\frac{qU}{m_0}. \quad (\text{A.127})$$

A.2.5 Punktladung im homogenen Magnetfeld

In Anwendung der vorgestellten relativistischen Zusammenhänge wird im folgenden die Bewegung einer Punktladung im zeitlich konstanten homogenen Magnetfeld unter Vernachlässigung von Strahlungsverlusten untersucht. Das Besondere an dieser Rechnung ist, daß außer dem Bekanntsein des Ortes \mathbf{r} und der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$ der Ladung zu einem gewissen Zeitpunkt $t = t_0$ keine weiteren Bedingungen in die Rechnung einfließen, wie es in der Literatur leider häufig der Fall ist, vgl. [34], [14].

Die auf die Punktladung q der Ruhemasse m_0 einwirkende LORENTZkraft beträgt $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Wegen $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0$ hat man es mit einer transversal angreifenden Kraft zu tun, weshalb die kinetische Energie der Ladung konstant ist. Mithin gilt Gleichung (A.113), und man erhält das folgende Anfangswertproblem

$$m_0\gamma\ddot{\mathbf{r}} = q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}, \quad (\text{A.128})$$

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad (\text{A.129})$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \dot{\mathbf{r}}_0. \quad (\text{A.130})$$

Allgemeine Lösung

Richtet man ein kartesischen System mit der z -Achse nach dem konstanten Magnetfeld aus, so gilt

$$\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z, \quad (\text{A.131})$$

und man kann (A.128) schreiben als

$$m_0\gamma\ddot{x} = q\dot{y}B_0, \quad (\text{A.132})$$

$$m_0\gamma\ddot{y} = -q\dot{x}B_0, \quad (\text{A.133})$$

$$m_0\gamma\ddot{z} = 0. \quad (\text{A.134})$$

Durch Differentiation von (A.132) und (A.133) erhält man als notwendige Bedingung für x und y

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 k_x, \quad (\text{A.135})$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \omega^2 k_y, \quad (\text{A.136})$$

worin k_x und k_y beliebige Konstanten sind und

$$\omega = \frac{qB_0}{m_0\gamma} \quad (\text{A.137})$$

gesetzt wurde. Weil $x = \sin \omega t + k_x$ eine partikuläre Lösung von (A.135) ist, besitzt die allgemeine Lösung des Systems (A.135), (A.136) die Gestalt

$$x = a \cos \omega t + (c' + 1) \sin \omega t + k_x, \quad (\text{A.138})$$

$$y = b \cos \omega t + (d' + 1) \sin \omega t + k_y. \quad (\text{A.139})$$

A Ausführlichere Betrachtungen

Durch Einsetzen in (A.132) und (A.133) reduzieren sich die Konstanten vermöge $d' + 1 = -a$ und $c' + 1 = b$, und unter Beachtung von (A.134) lautet die allgemeine Lösung des Systems (A.132) bis (A.134) schließlich

$$x = a \cos \omega t + b \sin \omega t + k_x, \quad (\text{A.140})$$

$$y = b \cos \omega t - a \sin \omega t + k_y, \quad (\text{A.141})$$

$$z = ct + k_z. \quad (\text{A.142})$$

Geometrische Deutung

Offenbar handelt es sich bei den Gleichungen (A.140), (A.141) um die Parameterdarstellung eines Kreises mit dem Mittelpunkt in (k_x, k_y) und einem Radius von $\sqrt{a^2 + b^2}$. Schreibt man sie nämlich zunächst einmal in der Form

$$x - k_x = a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad (\text{A.143})$$

$$y - k_y = b \cos \omega t - a \sin \omega t, \quad (\text{A.144})$$

so überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit von

$$(x - k_x)^2 + (y - k_y)^2 = a^2 + b^2, \quad (\text{A.145})$$

wobei es sich ganz offensichtlich um die Kurvengleichung des angesprochenen Kreises handelt. Da die z -Koordinate wegen (A.142) linear mit t wächst, ist die Bahnkurve folglich eine Schraubenlinie konstanter Steigung. Ist r der Radius der Schraubenlinie, und definiert man ihre Steigung durch $s = dz/d(\omega t)$, erhält man

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (\text{A.146})$$

$$s = c/\omega. \quad (\text{A.147})$$

Deutet man den Parameter t wieder als Zeit, so ist ω die Winkelgeschwindigkeit des Punktes und c seine Steigungsgeschwindigkeit – beides sind Konstanten. Aus (A.143), (A.144) gewinnt man außerdem durch Differentiation und Addition

$$x - k_x = -\dot{y}/\omega, \quad (\text{A.148})$$

$$y - k_y = \dot{x}/\omega, \quad (\text{A.149})$$

und durch Lösen des linearen Systems (A.143), (A.144)

$$a\omega = -\dot{y} \cos \omega t - \dot{x} \sin \omega t, \quad (\text{A.150})$$

$$b\omega = \dot{x} \cos \omega t - \dot{y} \sin \omega t, \quad (\text{A.151})$$

woraus sich wiederum

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \omega \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{A.152})$$

gewinnen läßt. Bezeichnet man die linke Seite dieser Gleichung als transversale Geschwindigkeit und schreibt dafür v_\perp , so hat man mit (A.146) den Zusammenhang

$$v_\perp = \omega r. \quad (\text{A.153})$$

Daß es sich bei v_\perp um eine Konstante handelt, ist im Prinzip seit der Gleichung (A.134) bekannt. Man erinnere sich an die Konstanz von Energie und Geschwindigkeit.

Lösung des Anfangswertproblems

Das Anfangswertproblem (A.128) bis (A.130) ist eindeutig lösbar, weshalb sich die sechs Konstanten in (A.140) bis (A.142) aus \mathbf{r}_0 und $\dot{\mathbf{r}}_0$ eindeutig bestimmen lassen müssen. Aus (A.150), (A.151) und (A.142) sowie (A.148), (A.149) und (A.142) erhält man

$$a\omega = -\dot{y}_0 \cos \omega t_0 - \dot{x}_0 \sin \omega t_0, \quad (\text{A.154})$$

$$b\omega = \dot{x}_0 \cos \omega t_0 - \dot{y}_0 \sin \omega t_0, \quad (\text{A.155})$$

$$c = \dot{z}_0, \quad (\text{A.156})$$

$$k_x = x_0 + \dot{y}_0/\omega, \quad (\text{A.157})$$

$$k_y = y_0 - \dot{x}_0/\omega, \quad (\text{A.158})$$

$$k_z = z_0 - \dot{z}_0 t_0, \quad (\text{A.159})$$

weshalb die Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$x = x_0 + \frac{\dot{y}_0}{\omega} [1 - \cos(\omega t - \omega t_0)] + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t - \omega t_0), \quad (\text{A.160})$$

$$y = y_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega} [\cos(\omega t - \omega t_0) - 1] + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin(\omega t - \omega t_0), \quad (\text{A.161})$$

$$z = z_0 + \dot{z}_0(t - t_0). \quad (\text{A.162})$$

Zusammenfassung

Eine Punktladung bewegt sich in einem homogenen Magnetfeld auf einer Schraubenbahn konstanten Radius' und konstanter Steigung. Energie, Impuls und damit auch Geschwindigkeit sind konstant. Zerlegt man den Geschwindigkeitsvektor bezüglich des Magnetfeldes in eine longitudinale und eine transversale Komponente, so sind deren Beträge ebenfalls konstant und durch die Anfangswerte gegeben. Die Gleichungen zur Berechnung der Winkelgeschwindigkeit – auch *Zyklotronfrequenz* genannt –, des Schraubenradius' und der Schraubensteigung aus den Startwerten lauten:

$$\omega_z = \frac{qB_0}{m_0\gamma}, \quad (\text{A.163})$$

$$r = \frac{v_\perp}{\omega_z}, \quad (\text{A.164})$$

$$s = \frac{v_\parallel}{\omega_z}, \quad (\text{A.165})$$

wobei eine positive Zyklotronfrequenz bedeutet, daß sich die Ladung im mathematisch positiven Sinne bewegt, wenn man dem Magnetfeld hinterherschaut. Die Parameter γ , v_\perp und v_\parallel sind durch die Anfangswerte gegeben.

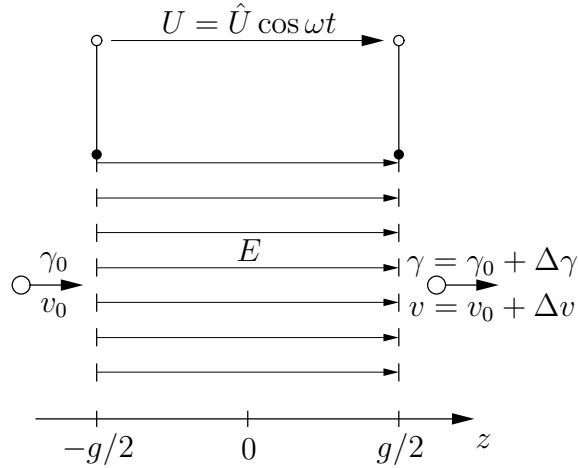


Abbildung A.9: Energie- und Geschwindigkeitsgewinn einer Punktladung beim Passieren eines eindimensionalen Resonators.

A.3 Nichtlineare Geschwindigkeitsmodulation

Bei den Untersuchungen zur Geschwindigkeitsmodulation in den Abschnitten 2.1.2 und 2.2.3 wurden im wesentlichen zwei Dinge angenommen: 1. eine konstante Geschwindigkeit der Punktladung während des Passierens des Resonators und 2. eine geringe relative Modulationsspannung $\alpha = \hat{U}/U_0 \ll 1$, wobei die erste Annahme nachträglich durch die zweite gerechtfertigt wurde. Dabei ergab sich, daß der relative Geschwindigkeitszuwachs der Ladung eine harmonische Schwingung bezüglich jener Zeit darstellt, zu welcher sie die Mittelebene des Resonators passiert. Aufgrund der linearen Beziehung zwischen der Amplitude dieser Schwingung – der Geschwindigkeitsmodulation M_v – und der relativen Modulationsspannung α spricht man auch von der *linearen Analyse* (oder Kleinsignalanalyse) der Geschwindigkeitsmodulation; sie liefert den Zusammenhang

$$M_v = \frac{M\alpha}{\gamma_0(\gamma_0 + 1)}, \quad (\text{A.166})$$

und somit Aussagen nur für den Bereich sehr geringer Modulationen $M_v < \alpha \ll 1$. In der Praxis kann man sich jedoch oft nicht mit geringen Geschwindigkeitsmodulationen zufriedengeben, weil sie zu großen Driftlängen (ballistische Analyse) bzw. zu geringen Strommodulationen (feldtheoretische Analyse) führen. Im folgenden werden die Auswirkungen großer Modulationsspannungen auf die Geschwindigkeitsmodulation anhand der eindimensionalen Anordnung untersucht, Abbildung A.9.

A.3.1 Modulationsgrenze

Die Bewegung der Punktladung läßt sich am besten durch ihren Impuls $p = m_0\gamma v$ beschreiben, denn die Integration der LORENTZschen Kraftgleichung $\dot{\mathbf{p}} = q\mathbf{E}$ liefert für das

Feld $E = \hat{U}/g \cos \omega t$

$$p(\omega t) = p_0 + \frac{q\hat{U}}{\omega g} (\sin \omega t - \sin \omega t_0), \quad (\text{A.167})$$

wobei t_0 den Eintrittszeitpunkt der Ladung in das Feld bezeichnet. Mit dem aus der Energie-Spannungs-Äquivalenz für den Anfangszustand

$$qU_0 = m_0(\gamma_0 - 1)c_0^2 \quad (\text{A.168})$$

abgeleiteten Zusammenhang

$$qU_0 = \frac{m_0\gamma_0^2 v_0^2}{\gamma_0 + 1} = \frac{p_0\gamma_0 v_0}{\gamma_0 + 1} \quad (\text{A.169})$$

läßt sich der Spannungsterm aus (A.167) eliminieren, und man erhält mit $\alpha = \hat{U}/U_0$

$$p(\omega t) = p_0 \left(1 + \frac{\alpha\gamma_0}{\gamma_0 + 1} \frac{\sin \omega t - \sin \omega t_0}{kg} \right). \quad (\text{A.170})$$

Da kein Strahlelektron am Modulator reflektiert werden soll, muß die Modulationsspannung so gering gewählt werden, daß die betrachtete Punktladung unabhängig vom Eintrittszeitpunkt den Resonator vollständig passiert. Dies ist sicherlich dann gewährleistet, wenn ihr Impuls nie verschwindet. Im ungünstigsten Falle nimmt die Differenz der Sinusterme den Wert -2 an, und man erhält als hinreichende Bedingung für das Passieren der Punktladung

$$\alpha < kg \frac{\gamma_0 + 1}{2\gamma_0}, \quad (\text{A.171})$$

was sich wegen $\gamma_0 > 1$ einfacher als

$$\alpha \leq kg \quad (\text{A.172})$$

schreiben läßt. Diese Bedingungen sind natürlich nicht notwendig für das Passieren der Ladung, und für kleine Laufwinkel $kg \leq 1$ gehen die Forderungen in der Tat zu weit, denn auch

$$\alpha \leq 1 \quad (\text{A.173})$$

ist eine hinreichende Bedingung für das Passieren der Punktladung: Diese kann nämlich in einem statischen Feld maximal gegen eine Feldstärke U_0/g anlaufen, wobei ihr Impuls dann am zweiten Gitter gerade verschwindet. Bewegt sie sich in einem Wechselfeld der Stärke $U_0/g \cos \omega t$ ($\alpha = 1$), so erfährt sie – bis auf punktuelle Ausnahmen – zu jedem Zeitpunkt eine geringere Impulsabnahme als im statischen Falle. Folglich muß sie das Wechselfeld durchqueren können. Wählt man also die relative Modulationsspannung gemäß

$$\alpha \leq \max(1, kg), \quad (\text{A.174})$$

so werden Reflexionen am Modulator sicher vermieden. Im folgenden werden Impuls und Geschwindigkeit stets als positive Größen betrachtet.

A.3.2 Geschwindigkeitsgewinn

Aufgrund des Zusammenhangs

$$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c_0^2} + \frac{1}{\gamma^2 v^2}}} \quad (\text{A.175})$$

und $\gamma v = p/m_0$ ist mit (A.170) auch die Geschwindigkeit der Punktladung während des Passierens des Feldes gegeben; es gilt

$$\frac{v(\omega t)}{v_0} = \frac{1}{\sqrt{\beta_0^2 + \frac{1 - \beta_0^2}{\left(1 + \frac{\alpha \gamma_0}{\gamma_0 + 1} \frac{\sin \omega t - \sin \omega t_0}{kg}\right)^2}}} \quad (\text{A.176})$$

Um die Geschwindigkeit $v_1 = v(\omega t_1)$ am zweiten Gitter zu erhalten, ist zunächst der Zeitpunkt t_1 des Eintreffens der Ladung an diesem Gitter zu bestimmen. Dazu hat man (A.176) zu integrieren und nach der oberen Grenze aufzulösen. Dies scheint auf analytischem Wege nicht möglich zu sein, so daß hier eine numerische Auswertung erfolgen soll. Dazu betrachte man den *relativen Geschwindigkeitsgewinn* der Punktladung nach Passieren des Modulators

$$w(\omega t_0) = \frac{\Delta v}{v_0} = \frac{v_1 - v_0}{v_0} \quad (\text{A.177})$$

Eine Ladung, die zum Phasenpunkt $\omega t_0 + 2\pi$ in das Feld eintritt, muß aufgrund des harmonisch schwingenden Feldes denselben Kräften unterliegen, wie eine zum Phasenpunkt ωt_0 eintretende; $w(\omega t_0)$ muß daher mit 2π periodisch sein und kann somit als FOURIERreihe der Gestalt

$$w(\omega t_0) = w_0 + \sum_{i=1}^{\infty} w_i \cos(i\omega t_0 + \phi_i) \quad (\text{A.178})$$

dargestellt werden. Im linearen Falle $\alpha \ll 1$ nehmen die FOURIERkoeffizienten w_i sehr einfache Gestalten an: Entwickelt man (A.176) in eine TAYLORreihe um $\alpha = 0$ und bricht diese nach dem linearen Glied ab, so erhält man zunächst die Näherung

$$\frac{v(\omega t)}{v_0} \approx 1 + \frac{\alpha}{\gamma_0(\gamma_0 + 1)} \frac{\sin \omega t - \sin \omega t_0}{kg} \quad (\text{A.179})$$

Da bei geringer Modulation mit $\omega t_1 \approx \omega t_0 + kg$ die Ankunftsphase praktisch bekannt ist, folgt

$$w(\omega t_0) \approx \frac{M\alpha}{\gamma_0(\gamma_0 + 1)} \cos(\omega t_0 + kg/2), \quad (\text{A.180})$$

d.h. es verschwinden alle FOURIERkoeffizienten bis auf w_1 . Für diesen gilt

$$w_1 \approx w_{1,\text{ref}} = \frac{M\alpha}{\gamma_0(\gamma_0 + 1)}, \quad (\text{A.181})$$

und man nennt ihn *Geschwindigkeitsmodulation* M_v , siehe Gleichung (2.6).⁹ Für große Modulationsspannungen sind das Abweichen von w_1 gegenüber $w_{1,\text{ref}}$ und die Größen der anderen FOURIERkoeffizienten daher ein Maß für die Nichtlinearität des Modulationsvorgangs. In der Abbildung A.10 sind die ersten drei FOURIERkoeffizienten – mit $w_{1,\text{ref}}$ normiert – für verschiedene mittlere Laufwinkel als Funktion von der relativen Modulationsspannung dargestellt. Man erkennt, daß die lineare Approximation (A.180) ausreichend genau ist, solange die relative Modulationsspannung nicht größer als eins wird; der mittlere Laufwinkel besitzt kaum einen Einfluß. Für höhere Anfangsgeschwindigkeiten wird die Näherung allerdings zunehmend ungenauer.

A.3.3 Energiegewinn

Wie aus Abschnitt A.2 bekannt, gilt für die kinetische Energie K der betrachteten Punktladung

$$\dot{K} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}, \quad (\text{A.182})$$

woraus sich unter Verwendung des Feldes aus dem vorigen Abschnitt mittels Integration

$$K(\omega t) = K_0 + \frac{q\hat{U}}{kg} \int_{\omega t_0}^{\omega t} \frac{v(\phi)}{v_0} \cos \phi \, d\phi \quad (\text{A.183})$$

ergibt. Für den gemäß

$$u = \frac{\Delta K}{K_0} = \frac{K_1 - K_0}{K_0} = \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{\gamma_0 - 1} = \frac{U_1 - U_0}{U_0} \quad (\text{A.184})$$

definierten *relativen Energiegewinn* bzw. *Spannungsgewinn*¹⁰ der Punktladung nach Passieren des Resonators erhält man daher

$$u(\omega t_0) = \frac{\alpha}{kg} \int_{\omega t_0}^{\omega t_1(\omega t_0)} \frac{v(\phi)}{v_0} \cos \phi \, d\phi, \quad (\text{A.185})$$

wobei die Funktion v/v_0 mit (A.176) bereits bekannt ist. Der verwickelten Zusammenhänge wegen wird (A.185) numerisch ausgewertet. Dazu bedient man sich ihrer Periodizität und schreibt

$$u(\omega t_0) = u_0 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i \cos(i\omega t_0 + \phi_i). \quad (\text{A.186})$$

Als Referenz dient wieder der lineare Fall $\alpha \ll 1$, in welchem wegen $v \approx v_0$ und $\omega t_1 \approx \omega t_0 + kg$ aus (A.185) folgt

$$u(\omega t_0) \approx M\alpha \cos(\omega t_0 + kg/2). \quad (\text{A.187})$$

⁹Der Begriff Modulation wird im Rahmen dieser Arbeit nur dann verwendet, wenn die betroffene physikalische Größe eine harmonische Schwingungen beschreibt.

¹⁰Wegen der Energie-Spannungs-Äquivalenz $K = qU$ siehe Abschnitt A.2.4.

A Ausführlichere Betrachtungen

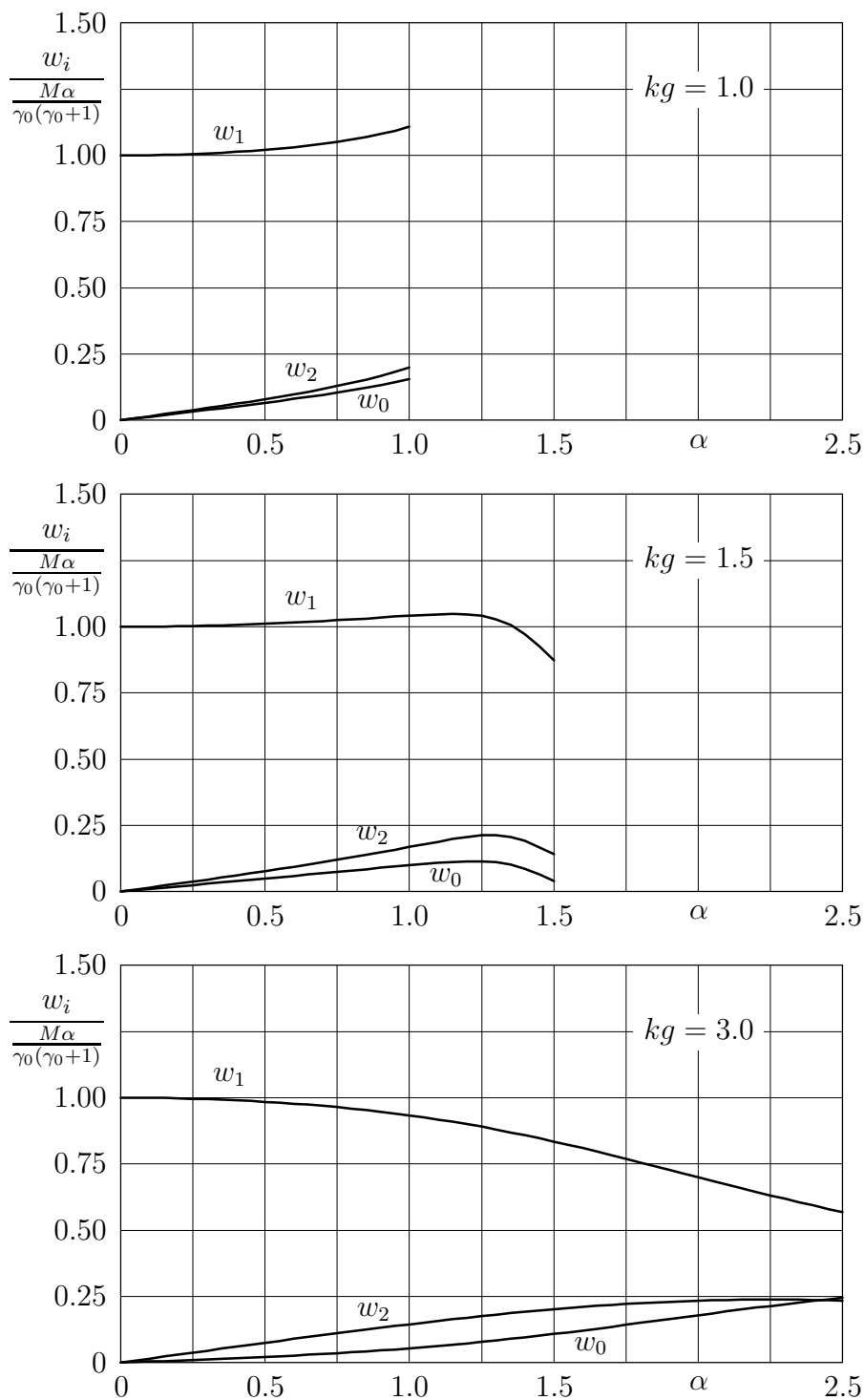


Abbildung A.10: FOURIERkoeffizienten des normierten relativen Geschwindigkeitsgewinns einer Punktladung beim Passieren eines eindimensionalen Modulators als Funktion der relativen Modulationsspannung α für verschiedene mittlere Laufwinkel kg . Die normierte Anfangsgeschwindigkeit beträgt $\beta_0 = 0.3$ ($U_0 = 24.7$ kV für Elektronen); für größere Werte fallen alle Kurven steiler aus.

– Die Amplitude dieser Schwingung nennt man *Energiemodulation* oder auch *Spannungsmodulation* M_U . – Bis auf

$$u_1 \approx u_{1,\text{ref}} = M\alpha \quad (\text{A.188})$$

verschwinden also alle FOURIERkoeffizienten. Bei größeren Modulationen wird dies sicherlich nicht der Fall sein, so daß die Nichtlinearität des Modulationsvorgangs mittels der Abweichung von u_1 gegenüber $u_{1,\text{ref}}$ und der Beträge der anderen Koeffizienten gemessen werden kann. Die mit $u_{1,\text{ref}}$ normierten FOURIERkoeffizienten des relativen Energiegewinns sind in Abbildung A.11 für verschiedene mittlere Laufwinkel und eine relative Anfangsgeschwindigkeit von $\beta_0 = 0.3$ als Funktion von der relativen Modulationsspannung dargestellt. Wie es auch beim Geschwindigkeitsgewinn der Fall war, ist die lineare Näherung (A.187) hinreichend genau, solange die relative Modulationsspannung den Wert eins nicht übersteigt.

Neben u_1 ist der Koeffizient u_0 von besonderer Bedeutung; als Mittelwert des Energieaustausches zwischen Feld und Ladung ist er ein Maß für die bei der Modulation eines Gleichstromstrahls aufzubringende Wirkleistung, denn beim unmodulierten Strahl sind alle Phasen gleichdicht besetzt: Gemäß (A.184) nimmt eine Ladung q die Energie $\Delta K = K_0 u$ auf; dann muß eine Ladung $dQ = I_0 dt$ die Energie

$$dW = \frac{dQ}{q} K_0 u = U_0 u dQ = P_0 u dt \quad (\text{A.189})$$

aufnehmen, wobei $P_0 = U_0 I_0$ die Kanonenleistung bezeichnet. Die dem Strahl im Modulator pro Periode zugeführte Energie beträgt aufgrund der Periodizität von u folglich

$$W = \frac{P_0}{\omega} \int_0^{2\pi} u d\omega t = \frac{P_0}{\omega} 2\pi u_0, \quad (\text{A.190})$$

woraus sich die *Modulationsleistung* $P_{\text{mod}} = W/T$ zu

$$P_{\text{mod}} = P_0 u_0 \quad (\text{A.191})$$

ergibt. Abbildung A.11 ist zu entnehmen, daß u_0 stets positiv und $u_0/u_1 = u_0/(M\alpha)$ annähernd linear ausfällt; mithin hat man bei der Geschwindigkeitsmodulation eine Modulationsleistung *aufzubringen*, welche – wie auch die Wandverlustleistung – quadratisch mit der Modulationsspannung zunimmt. Das Bestimmen einer Näherungsformel für diese Leistung sei einer weiteren Arbeit vorbehalten.¹¹

¹¹Dies erweist sich bei genauerer Betrachtung komplizierter, als es auf den ersten Blick aussehen mag: Ersetzt man in (A.185) den Term v/v_0 durch seine lineare Näherung (A.179) und setzt $\omega t_1 = \omega t_0 + kg$ (phasenunabhängige Laufzeit), so erhält man nach Ausführung beider Integrationen

$$u_0 \approx \frac{1}{4} \frac{M^2 \alpha^2}{\gamma_0 (\gamma_0 + 1)}. \quad (\text{A.192})$$

Bei konstanter Modulationsspannung müßte $u_0/(M\alpha)$ im Bereich $kg \in (0, 2\pi)$ mit zunehmendem mittleren Laufwinkel abnehmen (vgl. Abbildung 2.4), was aber gemäß Abbildung A.11 nicht der Fall ist. Offenbar ist gerade die Phasenabhängigkeit der Laufzeit entscheidend für den Leistungsumsatz.

A Ausführlichere Betrachtungen

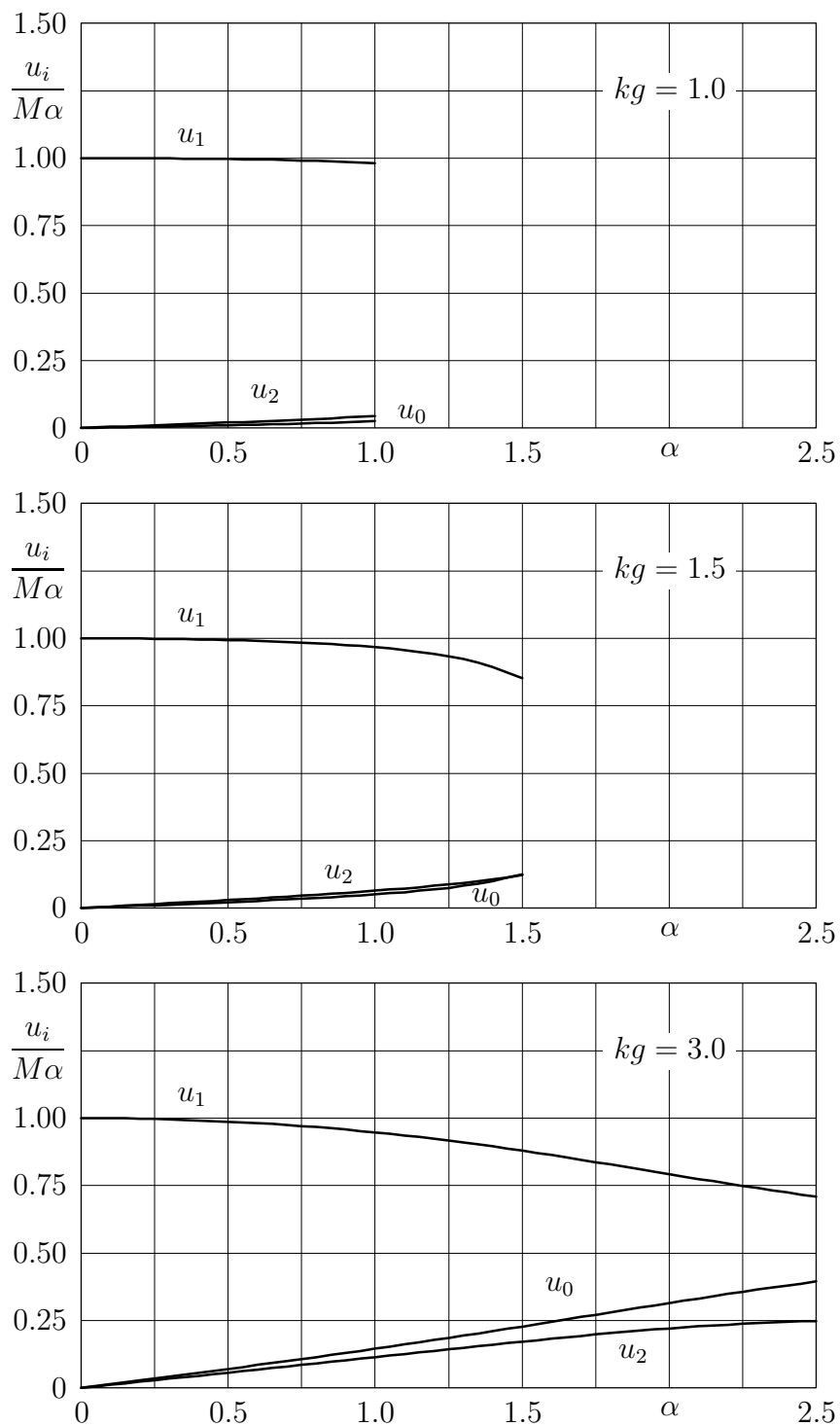


Abbildung A.11: FOURIERkoeffizienten des normierten relativen Energiegewinns einer Punktladung beim Passieren eines eindimensionalen Modulators als Funktion der relativen Modulationsspannung α für verschiedene mittlere Laufwinkel kg . Die normierte Anfangsgeschwindigkeit beträgt $\beta_0 = 0.3$ ($U_0 = 24.7$ kV für Elektronen). Die Indices im unteren Bild sind nicht vertauscht!

A.3.4 Zusammenhang zwischen den Gewinnen

Ein Vergleich zwischen den Abbildungen A.10 und A.11 zeigt, daß man – zumindest für kleine mittlere Laufwinkel und nicht zu große Modulationsspannungen – bei der Linearisierung des Energiegewinns (A.187) einen geringeren Fehler macht als bei der Linearisierung des Geschwindigkeitsgewinns (A.180). Dies legt die Auffassung nahe, daß die Wirkung des Modulators vorrangig in der Änderung der *Energie* der Ladungsträger besteht und ihre veränderte Geschwindigkeit lediglich eine Folge dieser Energieänderung ist; die Nichtlinearität des Geschwindigkeitsgewinns erscheint somit als Konsequenz aus der nichtlinearen Beziehung zwischen Energie- und Geschwindigkeitsgewinn, welche im folgenden hergeleitet werden soll.

Für die Anfangsgeschwindigkeit v_0 und die Endgeschwindigkeit v_1 gilt

$$\frac{v_0^2}{c_0^2} = 1 - \frac{1}{\gamma_0^2}, \quad (\text{A.193})$$

$$\frac{v_1^2}{c_0^2} = 1 - \frac{1}{\gamma_1^2}, \quad (\text{A.194})$$

weshalb sich mit dem Geschwindigkeitsgewinn $\Delta v = v_1 - v_0$ letztere Gleichung als

$$\frac{v_0^2}{c_0^2} \left(1 + \frac{\Delta v}{v_0}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{\gamma_0^2}\right) \left(1 + \frac{\Delta v}{v_0}\right)^2 = 1 - \frac{1}{\gamma_1^2} \quad (\text{A.195})$$

schreiben läßt; für den gemäß (A.177) definierten relativen Geschwindigkeitsgewinn erhält man daher zunächst einmal

$$w = \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \sqrt{\frac{\gamma_1^2 - 1}{\gamma_0^2 - 1}} - 1. \quad (\text{A.196})$$

Aus der Definition des relativen Energiegewinns (A.184) folgt $\gamma_1 = \gamma_0 + u(\gamma_0 - 1)$, woraus sich die folgenden Zusammenhänge ableiten lassen:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_0} = 1 + u \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0}, \quad (\text{A.197})$$

$$\gamma_1 + 1 = (\gamma_0 + 1) + u(\gamma_0 - 1), \quad (\text{A.198})$$

$$\gamma_1 - 1 = (\gamma_0 - 1)(u + 1). \quad (\text{A.199})$$

Eingesetzt in (A.196) ergibt sich schließlich

$$w = \frac{\gamma_0}{\gamma_0 + u(\gamma_0 - 1)} \sqrt{(1 + u) \left(1 + u \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0 + 1}\right)} - 1. \quad (\text{A.200})$$

Als lineare bzw. quadratische Näherung erhält man mittels TAYLOREntwicklung dieser Funktion

$$w \approx \frac{u}{\gamma_0(\gamma_0 + 1)}, \quad (\text{A.201})$$

$$w \approx \frac{u}{\gamma_0(\gamma_0 + 1)} \left(1 - \frac{3\gamma_0^2 - 2}{\gamma_0(\gamma_0 + 1)} \frac{u}{2}\right). \quad (\text{A.202})$$

Diese drei Gleichungen sind für $\beta_0 = 0.3$ in Abbildung A.12 dargestellt.

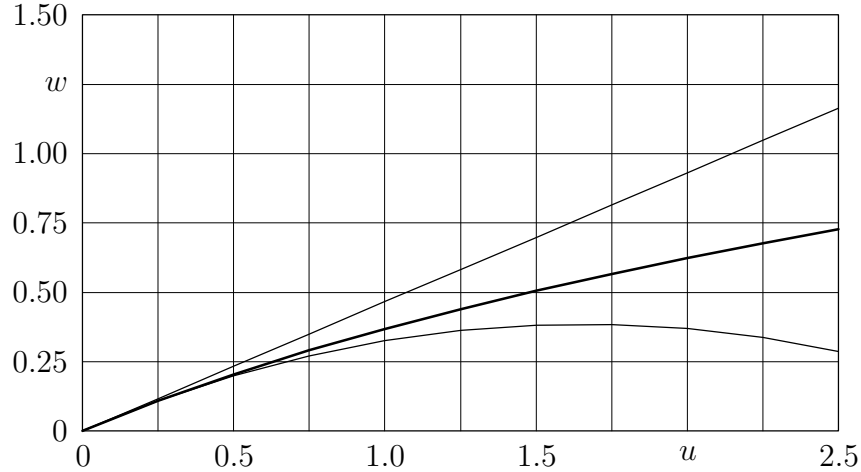


Abbildung A.12: Relativer Geschwindigkeitsgewinn einer Punktladung als Funktion ihres relativen Energiegewinns für eine normierte Anfangsgeschwindigkeit von $\beta_0 = 0.3$; exakter Zusammenhang (dicke Kurve) nebst linearer und quadratischer Approximation (dünne Kurven).

A.3.5 Nichtrelativistische Beziehungen

In der Literatur wird oft der nichtrelativistische Fall $\gamma_0 \approx 1$ behandelt [46], [14], [21], [19], [20], weshalb Gleichungen für diesen auch hier hergeleitet und mit den relativistischen verglichen werden sollen. Für die kinetische Energie hat man nun $K = m_0 v^2/2$, so daß sich wegen

$$u = \frac{K_1 - K_0}{K_0} = \frac{v_1^2}{v_0^2} - 1 = \left(1 + \frac{\Delta v}{v_0}\right)^2 - 1 \quad (\text{A.203})$$

anstelle von (A.200) nun der einfachere Zusammenhang

$$w = \sqrt{1 + u} - 1 \quad (\text{A.204})$$

mit den Näherungen

$$w \approx \frac{u}{2}, \quad (\text{A.205})$$

$$w \approx \frac{u}{2} \left(1 - \frac{u}{4}\right) \quad (\text{A.206})$$

ergibt. Offenbar ergeben sich diese drei Gleichungen aus (A.200) bis (A.202) durch einen Grenzübergang $\gamma_0 \rightarrow 1$, und dies gilt auch – bis auf wenige Ausnahmen – für alle anderen Gleichungen dieses Abschnitts: Anstelle von (A.168) bzw. (A.169) und (A.170), hat man bei nichtrelativistischer Betrachtung

$$qU_0 = \frac{m_0}{2} v_0^2, \quad (\text{A.207})$$

$$p(\omega t) = p_0 \left(1 + \frac{\alpha \sin \omega t - \sin \omega t_0}{2 kg}\right), \quad (\text{A.208})$$

woraus für die Geschwindigkeit sofort folgt

$$\frac{v(\omega t)}{v_0} = 1 + \frac{\alpha \sin \omega t - \sin \omega t_0}{2 kg}. \quad (\text{A.209})$$

Mithin gilt für Geschwindigkeits- und Energiemodulation

$$M_v = \frac{M\alpha}{2}, \quad (\text{A.210})$$

$$M_U = M\alpha. \quad (\text{A.211})$$

A.4 Theoretische Grenze der Strommodulation

Von der ballistischen Analyse der Dichtemodulation her ist bekannt, daß die Amplitude der Grundwelle I_1 des Strahlstromes seinen zeitlichen Mittelwert I_0 übersteigen kann. Das mag auf den ersten Blick verwundern, nimmt doch der Term $I_0 + I_1 \cos(\omega t)$ zeitweilig negative Werte an, obwohl nur Elektronen im Spiel sind und diese ihre Richtung nicht ändern. Tatsächlich wechselt der Strahlstrom sein Vorzeichen nicht; den Ausgleich schaffen die höheren Harmonischen, welche in dem vorstehenden Term vernachlässigt wurden. Es steht zu vermuten, daß bei gegebenem I_0 nicht für jeden beliebigen Wert von I_1 ein solcher Ausgleich bewerkstelligt werden kann, daß die Strommodulation $M_I = I_1/I_0$ also begrenzt ist.

Ein Indiz dafür, daß eine solche Grenze existiert und den Wert 2 besitzt, lieferte bereits die Leistungsbilanz des Auskopplungsvorgangs, siehe Fußnote auf Seite 48; bei $M_I > 2$ könnte man mehr Mikrowellenleistung aus dem Strahl auskoppeln, als ihm Gleichstromleistung in der Kanone verliehen wurde. Auf diesen Sachverhalt aufbauend könnte man unter Berufung auf den Energieerhaltungssatz einen Beweis wie folgt führen: Angenommen, die Strommodulation wäre größer als 2. Hat man außerdem einen Resonator mit sehr großem Shuntwiderstand, kann man den Sättigungsgrad δ zu eins machen. Gemäß Gleichung (2.170) wird dann die ausgekoppelte Mikrowellenleistung P größer als die Strahlgleichleistung $P_0 = U_0 I_0$. Bei einem Klystron wird dem Strahl aber nur in der Kanone Energie zugeführt; man hätte folglich ein perpetuum mobile konstruiert. Die anfängliche Annahme muß also falsch sein, und es gilt $M_I \leq 2$, q.e.d.. — Dieser Beweis ist jedoch in höchstem Maße unbefriedigend; er verwendet Eigenschaften des Klystrons, obwohl die Strommodulation eine reine Eigenschaft des Strahls ist. Schließlich wäre es doch denkbar, einen Modulator zu bauen, der unter Abgabe von Energie an den Strahl dessen Strommodulation größer als 2 macht; ein derartiges Modul wäre nicht nur von theoretischem Wert, es könnte sogar für das Klystron von Interesse sein. Und wie verhält es sich beispielsweise mit Klasse-C-Verstärkern? Ist es möglich, in einer Sendeendstufe die Amplitude der Grundwelle des Anodenstroms (bzw. Kollektorstroms) über das doppelte seines Mittelwertes zu bringen? Um die Frage ganz allgemein zu beantworten, stützt man sich sinnvollerweise allein auf die Eigenschaften des Stromes. Wie anfangs bereits angedeutet, bestehen sie darin, daß die Stromstärke periodisch ist und nie ihr Vorzeichen wechselt:

Satz: Gegeben sei eine mit $T > 0$ periodische Funktion $I(t)$, so daß sie mit $\omega = 2\pi/T$ durch die FOURIERreihe

$$I(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos(k\omega t + \phi_k), \quad (\text{A.212})$$

$$I_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(t) d\omega t, \quad (\text{A.213})$$

$$I_k = \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} I(t) e^{-jk\omega t} d\omega t \right| \quad (\text{A.214})$$

mit gewissen (hier nebensächlichen) Werten für die ϕ_k dargestellt werden kann. Gilt außerdem entweder $I(t) \geq 0$ oder $I(t) \leq 0$ für alle t , so folgt für die Koeffizienten

$$I_k \leq 2|I_0|. \quad (\text{A.215})$$

Beweis: Wegen $I(t) \geq 0$ gilt

$$I_k = \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} I(t) e^{-jk\omega t} d\omega t \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |I(t) e^{-jk\omega t}| d\omega t = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(t) d\omega t = 2I_0. \quad (\text{A.216})$$

Für $I(t) \leq 0$ erfolgt der Schluß analog; es ist dann $I_0 \leq 0$ und $I_k \leq -2I_0$, allgemein gilt folglich $I_k \leq 2|I_0|$, q.e.d..

Dieser Beweis beruht im wesentlichen auf der Eigenschaft

$$\left| \int f(z) dz \right| \leq \int |f(z)| |dz| \quad (\text{A.217})$$

des Integrals einer Funktion mit komplexem Definitions- und Wertebereich, welche in der Funktionentheorie bewiesen wird, siehe [31], Nr. 75, und (wie auch im Reellen) eine Folge der verallgemeinerten Dreiecksungleichung ist.

Damit ist der Beweis dafür erbracht, daß die Strommodulation eines Elektronenstrahls, der seine Richtung nie umkehrt, maximal den Wert 2 erreichen kann. Auch die Amplituden aller im Strahl enthaltenen Oberwellen können maximal des Doppelte des Strahlgleichstroms betragen. Wie sieht nun der Stromverlauf bei $M_I = 2$ aus?

Satz: Gegeben sei eine mit $T > 0$ periodische Funktion $I(t)$ mit $I(t) \geq 0$ für alle t und eine natürliche Zahl $k > 0$. Ferner sei $\omega = 2\pi/T$. Gilt

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} I(t) e^{-jk\omega t} d\omega t \right| = 2 \quad (\text{A.218})$$

für die bestimmte Zahl k , so gilt dies für *jede* natürliche Zahl $k > 0$.

Dieser Satz soll an dieser Stelle nicht bewiesen werden. Bedenkt man, daß $I_k = 2$ die Koeffizienten der periodischen δ -Distribution sind, wird schnell klar, auf welchem mathematisch komplexem Gebiet man sich hier befindet. Er gibt jedoch einen Anhaltspunkt dafür, welche Form der Strahlstrom für eine maximale Modulation besitzen sollte: Alle pro Periode eine senkrecht zum Strahl angeordnete Ebene durchquerenden Elektronen sollten dies in einer verschwindend kurzen Zeitspanne tun.

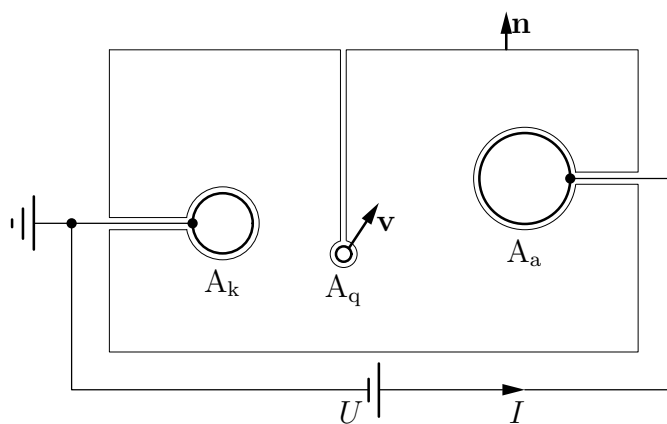


Abbildung A.13: Influenzstrom in einer kalten Zwei-Elektroden-Anordnung herrührend von einer sich bewegenden Punktladung (Schnittdarstellung). Die Berandung des betrachteten räumlichen Gebiets ist durch eine dünne Linie dargestellt; A_k , A_q und A_a repräsentieren die einhüllenden Flächen von Katode, Ladung und Anode.

A.5 Über Influenzströme

Bringt man einen geladenen Körper – oder eine Punktladung – in die Nähe eines Leiters, so werden auf letzterem Ladungen verschoben. Dieser als *Influenz* bezeichnete Effekt wird meist in der Elektrostatik behandelt, wobei alle Ladungen als ruhend betrachtet werden. Bei Elektronenröhren sind jedoch gerade die zwischen den Elektroden fließenden Ausgleichströme von Interesse, d.h. die durch den Elektronenstrahl hervorgerufenen *Influenzströme*. Aufbauend auf einer Arbeit von RAMO aus dem Jahre 1939, [35], wird in diesem Abschnitt das Problem der Bestimmung der Influenzströme bei gegebenen Elektrodenpotentialen auf das Problem der Bestimmung des elektrostatischen Feldes zurückgeführt; Ergebnis wird eine Formel von verblüffend einfacher Gestalt sein. Obgleich die folgende Untersuchung lediglich das Zwei-Elektroden-Problem behandelt, läßt sie sich ohne weiteres auf beliebig viele Elektroden ausdehnen.

Gegeben seien zwei beliebig geformte kalte Elektroden: Eine geerdete Katode und eine auf das Potential U gehobene Anode, Abbildung A.13. In der Nähe der Elektroden fliege eine freie Punktladung q mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} . Wie groß ist der zur Anode hin fließende Influenzstrom I ?

Sieht man zunächst einmal von der sich bewegenden Ladung ab, so hat man ein typisches elektrostatisches Problem. Seine Lösung sei durch das Potential ϕ_0 gegeben, so daß sich das zugehörige elektrische Feld gemäß

$$\mathbf{E}_0 = -\text{grad } \phi_0 \quad (\text{A.219})$$

berechnet. Wegen der Ladungsfreiheit im betrachteten Volumen gilt überall $\Delta\phi_0 = 0$, und die Anodenladung Q_0 berechnet sich bei Berücksichtigung des ins Innere der Anode

gerichteten Normalenvektors \mathbf{n} zu

$$Q_0 = - \oint_{A_a} \mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{n} \, dA = \epsilon_0 \oint_{A_a} \mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} \phi_0 \, dA = \epsilon_0 \oint_{A_a} \frac{\partial \phi_0}{\partial n} \, dA. \quad (\text{A.220})$$

Bei Hinzunahme der sich bewegenden Ladung möge die Feldlösung durch das (zeitabhängige) Potential ϕ_1 gegeben sein. Da sich die Ladung q nicht im betrachteten Volumen befindet, gilt auch jetzt überall $\Delta \phi_1 = 0$, und die Ladung auf der Anode berechnet sich zu

$$Q_1 = \epsilon_0 \oint_{A_a} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \, dA. \quad (\text{A.221})$$

Gemäß der zweiten GREENSchen Formel besteht nun zwischen den Potentialen ϕ_0 und ϕ_1 der Zusammenhang

$$\int_V (\phi_0 \Delta \phi_1 - \phi_1 \Delta \phi_0) \, dV = \oint_A \left(\phi_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \phi_1 \frac{\partial \phi_0}{\partial n} \right) \, dA. \quad (\text{A.222})$$

Da im gesamten Volumen $\Delta \phi_0 = \Delta \phi_1 = 0$ gilt, verschwindet die linke Seite dieser Gleichung. Wird die Berandung A so gewählt, daß die Potentiale oder/und ihre Normalenableitungen auf ihrem äußeren Teil (in Abbildung A.13 als Rechteck dargestellt) verschwinden, so gilt

$$0 = \oint_{A_k} \left(\phi_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \phi_1 \frac{\partial \phi_0}{\partial n} \right) \, dA + \oint_{A_q} \left(\phi_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \phi_1 \frac{\partial \phi_0}{\partial n} \right) \, dA + \oint_{A_a} \left(\phi_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \phi_1 \frac{\partial \phi_0}{\partial n} \right) \, dA. \quad (\text{A.223})$$

Zieht man nun die Integrationsflächen auf die Oberflächen der Elektroden bzw. der Punktladung zusammen, ergibt sich folgendes Bild: Das erste der drei Integrale muß aufgrund der Erdung der Katode verschwinden. Die Integrationsfläche des zweiten Integrals strebt gegen Null, so daß auf ihr die (stetigen weil differenzierbaren) Potentiale jeweils einem Grenzwert zustreben müssen; diese seien als $\phi_{0,q}$ bzw. $\phi_{1,q}$ bezeichnet. Dann gilt

$$\oint_{A_q} \left(\phi_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \phi_1 \frac{\partial \phi_0}{\partial n} \right) \, dA = \phi_{0,q} \oint_{A_q} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \, dA - \phi_{1,q} \oint_{A_q} \frac{\partial \phi_0}{\partial n} \, dA = \frac{\phi_{0,q} q}{\epsilon_0}, \quad (\text{A.224})$$

denn die rechtsseitigen Integrale evaluieren zu der von A_q eingeschlossenen (eigentlich ausgeschlossenen) Ladung (dividiert durch ϵ_0). Aufgrund des auf der Anode vorgegebenen Potentials erhält man für das dritte Integral aus (A.223) mit (A.220) und (A.221)

$$\oint_{A_a} \left(\phi_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \phi_1 \frac{\partial \phi_0}{\partial n} \right) \, dA = U \oint_{A_a} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \, dA - U \oint_{A_a} \frac{\partial \phi_0}{\partial n} \, dA = U \frac{Q_1 - Q_0}{\epsilon_0}; \quad (\text{A.225})$$

A Ausführlichere Betrachtungen

Gleichung (A.222) läßt sich daher als

$$Q_1 = Q_0 - q \frac{\phi_{0,q}}{U} \quad (\text{A.226})$$

schreiben. Offenbar stellt der Term ϕ_0/U – in (A.226) am Ort der Punktladung zu nehmen – ein normiertes, von U unabhängiges Feld dar: Da ϕ_0 die zu U gehörige Lösung des statischen Problems darstellt, ist $c\phi_0$ aufgrund der Eindeutigkeit des Potentialproblems die zu cU gehörige Lösung; der Quotient aus Potential und Elektrodenspannung ist also ein lediglich von der Geometrie der kalten Anordnung abhängiges Feld. Durch Integration dieses Feldes gemäß

$$C = \epsilon_0 \oint_{A_a} \frac{\partial \phi_0 / U}{\partial n} dA = \frac{Q_0}{U} \quad (\text{A.227})$$

erhält man folglich eine Konstante, die Kapazität der kalten Anordnung. Bezeichnet \mathbf{r}_q den Ort der Punktladung, so kann (A.226) auch als

$$Q_1 = CU - q \frac{\phi_0}{U}(\mathbf{r}_q) \quad (\text{A.228})$$

geschrieben werden. Der zur Anode hinfließende Konvektionsstrom I ergibt sich schließlich durch zeitliche Differentiation von (A.228); wegen

$$\frac{d}{dt} \frac{\phi_0}{U}(\mathbf{r}_q) = \dot{\mathbf{r}}_q \cdot \mathbf{grad} \frac{\phi_0}{U} = -\frac{\mathbf{E}_0}{U} \cdot \mathbf{v} \quad (\text{A.229})$$

gilt

$$I = C\dot{U} + q \frac{\mathbf{E}_0}{U} \cdot \mathbf{v}. \quad (\text{A.230})$$

Der Anodenstrom setzt sich also aus dem kapazitiven Ladestrom und dem durch die sich bewegende Punktladung hervorgerufenen Influenzstrom zusammen. Das normierte elektrische Feld der kalten Anordnung $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0/U$ bzw. sein Betrag f wird manchmal auch *Feldformfaktor* genannt. Dieser Name rührt von den analytisch lösbaren Problemen her, bei denen die Feldrichtung mit der Bewegungsrichtung der Punktladung zusammenfällt; der Influenzstrom ist dann durch qfv gegeben, worin f die Form des elektrischen Feldes repräsentiert. Für die einfachen Anordnungen Plattenkondensator, Zylinderkondensator und Kugelkondensator hat man

$$\mathbf{f}_{\text{planar}} = \frac{1}{z_1 - z_0} \mathbf{e}_z, \quad (\text{A.231})$$

$$\mathbf{f}_{\text{zylindrisch}} = \frac{1}{\rho} \ln \frac{\rho_1}{\rho_0} \mathbf{e}_\rho, \quad (\text{A.232})$$

$$\mathbf{f}_{\text{sphärisch}} = \frac{1}{r^2} \frac{r_1 r_0}{r_1 - r_0} \mathbf{e}_r. \quad (\text{A.233})$$

Die funktionale Abhängigkeit dieser Feldformfaktoren vom Ort ist bereits von der Perveanzberechnung her bekannt, Gleichungen (A.20) bis (A.22), Seite 124.

Bei mehreren sich bewegenden Punktladungen hat man die jeweiligen Influenzströme zu überlagern, was man wie folgt einsehen kann: Ausgehend von Gleichung (A.221) bezeichne nun Q_1 und ϕ_1 die Anodenladung und das Potential bei Anwesenheit von n sich bewegenden Ladungen; die Indices 0 mögen wie bislang den ladungsfreien Fall bezeichnen. Das mittlere Integral in (A.223) ist nun durch die *Summe* von n Integralen über die jeweiligen Ladungsoberflächen zu ersetzen, wobei alle denselben Integranden enthalten. Diese Summierung ist der Grund für die Zulässigkeit der Überlagerung der einzelnen Influenzströme.

A.6 Der Shuntwiderstand

Um die Stärke der Wechselwirkung zwischen einem Hohlraumresonator und einem modulierten Elektronenstrahl beschreiben zu können, genügen die Größen Resonanzfrequenz und Güte nicht. Man benötigt einen Widerstandswert, mit dessen Hilfe aus einem gegebenen Strahlstrom eine Resonatorspannung und damit die umgesetzte Leistung berechnet werden kann. Dabei soll das Produkt aus Strahlstrom und Resonatorspannung möglichst unmittelbar die umgesetzte Leistung ergeben, wie es bei einem konzentrierten ohmschen Widerstand der Fall ist. Dann muß die Resonatorspannung aber als jene Spannung definiert werden, die ein Strahlelektron während des Passierens des Resonators durchläuft. Um trotzdem weitgehend strahlunabhängig bleiben zu können, gibt man sich einen (potentiell als Elektronenpfad in Frage kommenden) geradlinigen Pfad durch den Resonator, einen Mittelpunkt auf diesem Pfad und eine konstante Geschwindigkeit fest vor, wodurch eine allgemeine Trajektorie der Form

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + v_0(t - t_0)\mathbf{e} \quad (\text{A.234})$$

definiert ist. Darin bedeuten \mathbf{r}_0 den zum Zeitpunkt $t = t_0$ durchquerten Pfadmittelpunkt, v_0 die gewählte konstante Geschwindigkeit und \mathbf{e} die Richtung des Pfades. Mit dem der Betrachtung zugrunde gelegten Eigenfeld des Resonator $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ist damit die *Resonatorspannung* definiert als

$$U_r = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}[\mathbf{r}(t), t] \cdot \mathbf{e} v_0 dt. \quad (\text{A.235})$$

Legt man ein Koordinatensystem mit seinem Ursprung nach \mathbf{r}_0 und richtet seine z -Achse nach \mathbf{e} aus, so gilt $x = y = 0$, und man erhält die einfachere Koordinatendarstellung

$$U_r = \int_{-\infty}^{\infty} E_z[z, t(z)] dz \quad (\text{A.236})$$

mit $t(z) = t_0 + z/v_0$. In jedem Falle ist die Resonatorspannung von t_0 , d.h. von der Phase des Feldes zu diesem Zeitpunkt abhängig. Da es sich um ein Feld bei Resonanz handelt, muß es harmonisch sein, $E_z(z, t) = E_0(z)e^{j\omega t}$, und diese Eigenschaft geht offenbar auf die Resonatorspannung über

$$U_r = e^{j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(z) e^{j\omega z/v_0} dz, \quad (\text{A.237})$$

denn das Integral stellt bei fest gewähltem Feld eine zeitunabhängige Spannung dar. Es ist die Amplitude der harmonischen Schwingung der Resonatorspannung, und es gilt

$$U_r = \hat{U}_r e^{j\omega t_0} \quad (\text{A.238})$$

$$\hat{U}_r = \int_{-\infty}^{\infty} E_0(z) e^{j\omega z/v_0} dz. \quad (\text{A.239})$$

Mit dieser Spannung läßt sich nun ohne Verwendung des Strahlstroms ein Resonatorwiderstand definieren: Da die von einer gewissen Erregung gelieferte mittlere Leistung P vollständig in den Wänden des Resonators umgesetzt wird, letztere jedoch mit der Berechnung des Feldes $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ bekannt ist, definiert man den Resonator- oder *Shuntwiderstand* des Resonators zu gegebenem Feldtyp und Integrationspfad über diese Leistung gemäß

$$R_{\text{sh}} = \frac{|\hat{U}_{\text{r}}|^2}{2P}. \quad (\text{A.240})$$

Wegen $|\hat{U}_{\text{r}}|^2 \propto E^2 \propto P$ muß es sich dabei um eine Konstante (bezüglich \hat{U}_{r}) handeln. Die 2 im Nenner ist eine Folge der Verwendung von Amplituden anstelle von Effektivwerten.¹²

Die Einführung von Koordinaten in die Rechnung basierend auf einer willkürlichen Trajektorie ist für die Definitionen von Resonatorspannung und Shuntwiderstand durchaus sinnvoll, denn sie liefert einfache Gleichungen. In der Praxis hat es sich jedoch eingebürgert, das Koordinatensystem derart zu wählen, daß die geometrischen Symmetrien eines Resonators durch Symmetrien in den Koordinaten seiner Berandung widerspiegelt werden. Bei axialsymmetrischen Strukturen wird folglich ein Kreiszyindersystem gewählt, die z -Achse entlang der axialen Symmetrieachse und die Ebene $z = 0$ in die Ebene der Spiegelsymmetrie (soweit vorhanden) gelegt. Bei plansymmetrischen Strukturen werden zweckmäßigerweise kartesische Koordinaten gewählt und die Schnittgeraden der Symmetrieebenen als Koordinatenachsen verwendet; diejenige Achse, die keine Berandung durchstößt, wird zur z -Achse erklärt. Es ist also zweckmäßiger, die Trajektorie in Koordinaten des Resonators zu schreiben und nicht umgekehrt das Feld in Koordinaten der Trajektorie. Da ein Teilchenstrahl aus physikalischen Gründen meist entlang z -Achse des Resonatorsystems bewegt wird, wählt man die Richtung der Trajektorie zu $\mathbf{e} = \mathbf{e}_z$ und legt ihren Mittelpunkt in den Koordinatenursprung $\mathbf{r}_0 = \mathbf{o}$. Man läßt die beiden Koordinatensysteme also zusammenfallen, womit die Gleichungen (A.236) bis (A.240) ihre Gültigkeit behalten. Resonatorspannung und Shuntwiderstand werden also *auf der Symmetrieachse des Resonators* (z -Achse) definiert; sie sind von keinen Koordinaten explizit abhängig.¹³

Bisher offen geblieben ist die Frage nach der Wahl der konstanten „Integrationsgeschwindigkeit“ v_0 , welche den Spannungs- und damit den Widerstandswert wesentlich beeinflußt. Legt man sie nicht allgemein eindeutig fest, so muß man zu jedem Widerstandswert auch die zugrunde gelegte Geschwindigkeit mit angeben. Es haben sich in der Vergangenheit zwei Vorgehensweisen etabliert:

1. Die Geschwindigkeit wird der interessierenden Strahlgeschwindigkeit angepaßt und somit zu $v_0 \in (0, c_0]$ gewählt. Dies hat den Vorteil, daß man keine Korrekturen anbringen muß, um von Strahlstrom und Shuntwiderstand zur umgesetzten Leistung

¹²Im Beschleunigerbereich wird der Faktor 1/2 aus Bequemlichkeit meist weggelassen. Den Gradienten eines Beschleunigers – praktisch der Energiegewinn der Teilchen pro Meter Beschleunigungslänge – möchte man einfach zu $r_{\text{sh}}P'$ berechnen, Widerstand und Wandverlustleistung jeweils auf einen Meter Beschleunigungslänge bezogen.

¹³Manchmal erweist es sich als vorteilhaft, den Integrationspfad entlang der Strahlwand zu legen, siehe [50]; man spricht dann auch von *Spaltspannung* (gap voltage) und *Spaltwiderstand* (gap resistance/impedance).

zu gelangen; für einen sich entlang der Symmetrieachse bewegenden Strahl gilt stets

$$P = \frac{R_{\text{sh}}}{2} \hat{I}_{\text{strahl}}^2. \quad (\text{A.241})$$

Diese aus der Beschleunigertechnik stammende Vorgehensweise ist immer dann sinnvoll, wenn die Strahlgeschwindigkeit nicht Gegenstand der Betrachtungen und somit implizit gegeben ist. Will man jedoch bereichsübergreifend kommunizieren, ist zu den Widerstandswerten auch die zugrunde gelegte Integrationsgeschwindigkeit mitzuteilen; bereichsübergreifende Vergleiche von Widerstandswerten werden ganz erheblich erschwert.

2. Die Geschwindigkeit wird zu $v_0 \rightarrow \infty$ gewählt. Der Nachteil der oben genannten Methode besteht in der verbliebenen Abhängigkeit der Resonatorspannung und damit des Shuntwiderstandes von der Integrationsgeschwindigkeit, welche offenbar für $v_0 \rightarrow \infty$ verschwindet. Dieser Grenzwert der Spannung muß existieren, denn er entspricht gemäß (A.239) dem *Spektrum* der Feldstärke an der Stelle $\omega/v_0 = 0$, siehe Abschnitt 2.2.2, Seite 57. Mit einer derartigen Spannung definiert ist es nicht mehr notwendig, zum Wert des Shuntwiderstands eine Geschwindigkeit mit anzugeben. Bei der Berechnung der umgesetzten Leistung müssen nun jedoch Korrekturfaktoren – sogenannte Strahl-Resonator-Kopplungskoeffizienten – angebracht werden, um der endlichen Strahlgeschwindigkeit Rechnung zu tragen. Für einen sich mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 entlang der Symmetrieachse bewegenden Strahl gilt nunmehr

$$P = \frac{R_{\text{sh}}}{2} (M_{\parallel} M_{\perp} \hat{I}_{\text{strahl}})^2, \quad (\text{A.242})$$

wobei sich die Kopplungskoeffizienten zu

$$M_{\parallel} = \frac{\sin kg/2}{kg/2}, \quad (\text{A.243})$$

$$M_{\perp} = \frac{\cos k_0 a}{\cos \sqrt{k_0^2 - k^2} a} \quad (\text{A.244})$$

ergeben mit $k = \omega/v_0$ und $k_0 = \omega/c_0$; a bezeichnet die halbe Apertur. Gleichung (A.244) gilt für zweidimensionale *planare* Resonatoren; für axialsymmetrische Strukturen hat man anstelle des \cos die BESSELfunktion J_0 zu verwenden.¹⁴ Dieser Methode liegt die Annahme zugrunde, daß die z -Komponente der elektrischen Feldstärke

¹⁴Das Auftauchen des Koeffizienten M_{\perp} in der Rechnung mag zunächst verwunderlich erscheinen, weil doch der Shuntwiderstand auf der z -Achse definiert ist und dort auch der Strahlstrom fließt. Es gilt jedoch zu bedenken, daß wegen der von der Strahlgeschwindigkeit abweichenden Integrationsgeschwindigkeit zunächst kein Zusammenhang zwischen der Resonatorspannung \hat{U}_r und der von den Strahlteilchen durchlaufenen Spannung \hat{U}_d besteht (Spektralwerte an verschiedenen Stellen). Erst mithilfe der Annahme einer konstanten Spaltfeldstärke läßt sich dieser über die Spaltspannung \hat{U} herstellen: Unter Beachtung der nunmehr unterschiedlichen Bedeutungen von v_0 und $k = \omega/v_0$ folgt mit $v_0 \rightarrow \infty$ aus (2.205) $\hat{U}_r \approx \hat{U} / \cos k_0 a$ ($> \hat{U}$!) und mit $y = 0$ und $M = M_{\parallel}$ aus (2.217) $\hat{U}_d \approx M_{\parallel} \hat{U} / \cos \sqrt{k_0^2 - k^2} a$. Für die zugehörigen Widerstände folgt unter Verwendung von (A.244) $R_d = R_{\text{sh}} M_{\parallel}^2 M_{\perp}^2$. Die umgesetzte Wirkleistung erhält man gemäß (2.150) als $P = R_d \hat{I}_{\text{strahl}}^2 / 2$ – man bedenke, daß jetzt R_d die Belastung repräsentiert –, womit sich (A.242) ergibt.

entlang $y = \pm a$ für $|z| \leq g/2$ konstant ist und für $|z| > g/2$ verschwindet, weshalb sie nur für eine einzelne Zelle anwendbar ist. Bei mehrzelligen Resonatoren erhält man eine gute Näherung für den Gesamtwiderstand durch Addition der einzelnen Widerstände unter Berücksichtigung der vom Strahl wahrgenommenen Phasendifferenzen zwischen den Zellen.

Für einen sich nicht entlang der Symmetrieachse des Resonators (z -Achse) bewegenden Strahl hat man in jedem Falle Korrekturfaktoren anzubringen; diese hängen dann von den transversalen Koordinaten x und y bzw. ρ und ϕ ab.

Bei der bisherigen Diskussion wurde stets davon ausgegangen, daß die Geschwindigkeit der Teilchen während des Passierens des Resonators annähernd konstant ist. Sollen gravierende Geschwindigkeitsänderungen untersucht werden, so ist diese Annahme sicherlich nicht mehr gerechtfertigt, und die Problemstellung erscheint in einem anderen Licht: Ist man der ersten Argumentationslinie gefolgt, geht der Vorteil, keine Kopplungskoeffizienten verwenden zu müssen, an dieser Stelle verloren; die strahlgeschwindigkeitsbezogenen Shuntwiderstände verlieren ihre praktische Relevanz. Dann ist es durchaus sinnvoll, der zweiten Argumentationslinie zu folgen und die völlig strahlunabhängigen Shuntwiderstände zu verwenden. Im Rahmen dieser Arbeit wird der nichtlineare Bereich von Modulation und Energieauskopplung jedoch nicht untersucht, so daß dem letzten Argument zugunsten der expliziten Kopplungskoeffizienten hier keine Bedeutung zukommt.

Die Begriffe *Shuntwiderstand* und *Shuntimpedanz* stammen aus der gewöhnlichen Zweipoltheorie und bezeichnen dort den Innenwiderstand eines aktiven Zweipols, weil dieser in der Stromquellenersatzschaltung als *Parallelwiderstand* auftaucht – shunt entstammt dem Angelsächsischen und bedeutet Weiche. Wie aus Abschnitt 2.1.4 Seite 43 bekannt, stellt der unbelastete strahlstromgetriebene Resonator einen leerlaufenden aktiven Zweipol dar, und sein Innenwiderstand ist gerade der interne Shuntwiderstand R_{shi} . Aus diesem Grunde wird der Begriff Shuntwiderstand in der Mikrowellentechnik als Synonym für den Resonatorwiderstand schlechthin verwendet.

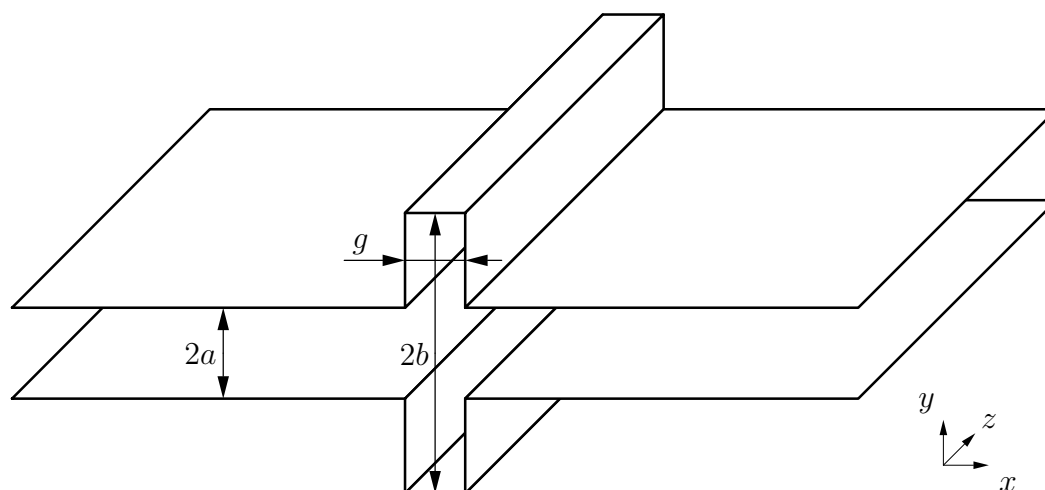


Abbildung A.14: Der Grabenhohlleiter. Sein mittlerer Bereich entspricht einem gewöhnlichen Rechteckhohlleiter und sein äußerer Bereich einer unterhalb der kritischen Frequenz betriebenen Parallelplattenleitung.

A.7 Grabenhohlleiter und ebener Grabenresonator

Zum Transport von Mikrowellenenergie in planaren Millimeterwellenkomponenten empfiehlt sich der Grabenhohlleiter, Abbildung A.14. Man kann ihn sich als einen in der Mitte aufgeschnittenen Rechteckhohlleiter vorstellen, wobei die erzeugten Öffnungen durch eine unterhalb ihrer kritischen Frequenz betriebene Parallelplattenleitung elektrisch geschlossen werden. Für ein Bandstrahlklystron ist der Grabenhohlleiter jedoch von ganz besonderer Bedeutung: Die in z -Richtung unendlich ausgedehnte Öffnung gestattet das Passieren eines sehr breiten sich in x -Richtung bewegendem Elektronenstrahl. Betreibt man den Hohlleiter nur knapp oberhalb der kritischen Frequenz seines Grundmodus¹⁵, so hat man erstens eine starke Wechselwirkung zwischen elektrischem Feld und Strahl aufgrund des Zusammenfallens ihrer Richtungen, und zweitens ist die Stärke der Wechselwirkung über die gesamte Strahlbreite konstant, weil die Wellenlänge im Hohlleiter sehr groß wird, siehe auch Abschnitt 3.3. Mittels Orthogonalentwicklung sollen daher in diesem Abschnitt die wesentlichen elektrischen Eigenschaften des Grabenhohlleiters und des ebenen Grabenresonators untersucht werden.

A.7.1 Feldgleichungen

Der felderfüllte Raum wird als ideal evakuiert angenommen, und es sind keine freien Ladungsträger vorhanden, so daß ein quellenfreies Vektorpotential allein zur Felddarstellung genügt:¹⁵

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} \quad (\text{A.245})$$

¹⁵Die Eigenschaften der gewöhnlichen und übergeordneten elektrodynamischen Potentiale wurden ausführlich in [38] behandelt.

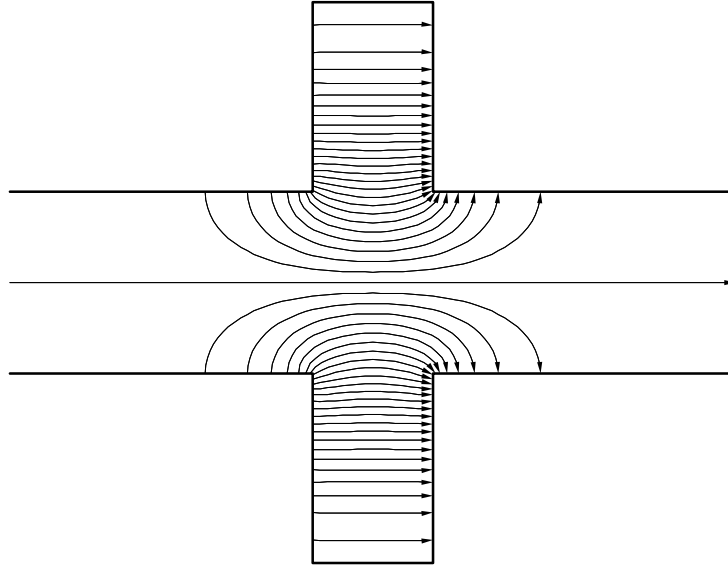


Abbildung A.15: Elektrische Feldlinien des $TE_{0,1}$ -ähnlichen Wellentyps im Grabenhohlleiter, welcher bei den zugrundegelegten Abmessungen ($a = 0.3 \text{ mm}$, $b = 0.927 \text{ mm}$, $g = 0.4 \text{ mm}$) den Typ mit der niedrigsten Grenzfrequenz ($f_c = 91.41 \text{ GHz}$) darstellt.

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (\text{A.246})$$

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (\text{A.247})$$

$$\text{div} \mathbf{A} = 0. \quad (\text{A.248})$$

Wegen (A.248) kann ein einfaches übergeordnetes Potential gemäß

$$\mathbf{rot} \mathbf{U} = \mathbf{A} \quad (\text{A.249})$$

verwendet werden, und dieses kann stets in die Form

$$\mathbf{U} = U_{TE} \mathbf{e}_z + \mathbf{rot}(U_{TM} \mathbf{e}_z) \quad (\text{A.250})$$

gebracht werden, wobei U_{TE} ein transversal-elektrisches ($\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_z = 0$) und U_{TM} ein transversal-magnetisches Feld ($\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_z = 0$) beschreibt. Offenbar wird (A.247) erfüllt, wenn beide skalaren Potentialfunktionen Lösungen der homogene Wellengleichung sind. Allerdings genügt es auch, sich auf derartige Lösungen zu beschränken.

Sowohl für den Wellenleiter als auch den Resonator ist vor allem der $TE_{0,1}$ -ähnliche Grundmodus von Interesse, siehe Abbildung A.15, so daß für U_{TM} die triviale Lösung 0 zu verwenden ist. Es verbleibt daher, die Lösungen der skalaren Gleichung

$$\Delta U_{TE} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 U_{TE}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.251})$$

A Ausführlichere Betrachtungen

zu bestimmen. Interessiert man sich nur für zeitlich und bezüglich z harmonische Felder, gilt

$$U_{\text{TE}}(x, y, z, t) = U(x, y) e^{j(\omega t - k_z z)}, \quad (\text{A.252})$$

und mit $k_0 = \omega/c_0$ ist schließlich die zweidimensionale skalare HELMHOLTZgleichung zu lösen

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + K^2 U = 0 \quad (\text{A.253})$$

mit

$$K = \sqrt{k_0^2 - k_z^2}. \quad (\text{A.254})$$

Die Feldkomponenten ergeben sich aus (A.246) und (A.245) zu

$$E_x = -j\omega \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (\text{A.255})$$

$$E_y = j\omega \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (\text{A.256})$$

$$E_z = 0, \quad (\text{A.257})$$

$$B_x = -jk_z \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{k_z}{\omega} E_y, \quad (\text{A.258})$$

$$B_y = -jk_z \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{k_z}{\omega} E_x, \quad (\text{A.259})$$

$$B_z = K^2 U. \quad (\text{A.260})$$

A.7.2 Randbedingungen

Beschränkt man sich auf die $\text{TE}_{0,2i-1}$ -ähnlichen Feldtypen, verringert sich das zu analysierende zweidimensional Gebiet auf ein Viertel, und man hat die in Abbildung A.16 eingezeichneten Randbedingungen für die elektrische Feldstärke zu erfüllen; es wurden ideal leitende Wände vorausgesetzt. Da die Berandung als Ganzes in keinem üblichen Koordinatensystem einfach dargestellt werden kann, zerlegt man sie zweckmäßigerweise in zwei rechteckige Bereiche (I) und (II) wie in Abbildung A.16 dargestellt. Auf der künstlichen Berandung hat man keine normalen Randbedingungen gegeben; es ist vielmehr die Stetigkeit der elektrischen Feldstärke zu fordern. In $x = g/2$ hat man also folgende Bedingungen zu erfüllen

$$E_x^{\text{I}}(g/2, y) = E_x^{\text{II}}(g/2, y) \quad : \quad 0 \leq y \leq a \quad (\text{A.261})$$

$$E_y^{\text{I}}(g/2, y) = \begin{cases} E_y^{\text{II}}(g/2, y) & : \quad 0 \leq y \leq a \\ 0 & : \quad a \leq y \leq b \end{cases} \quad (\text{A.262})$$

Dabei wurde – wie im folgenden stets – $a < b$ angenommen.

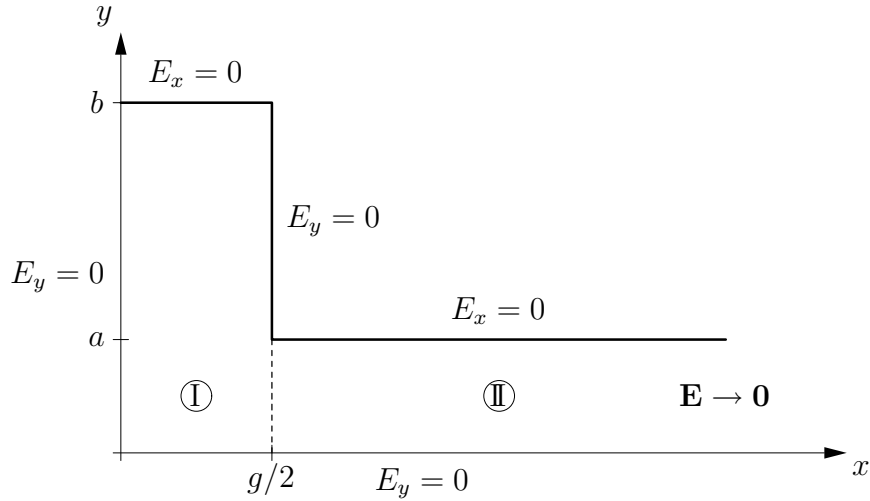


Abbildung A.16: Zu analysierender Bereich des Grabenhohlleiters mit Koordinatensystem und Randbedingungen. Auf der gestrichelten Linie müssen die allgemeinen Lösungen des linken (I) und des rechten Raumes (II) mittels Orthogonalentwicklung aneinander angepaßt werden.

A.7.3 Feldansatz

Ein für das bestehende Feldproblem vollständiges Orthogonalsystem ist durch je zwei Exponentialfunktionen in x und y mit diskreten Werten für die Wellenzahlen gegeben. Die die Randbedingungen bereits erfüllenden Ansätze für das Potential lauten

$$U^{\text{I}} = \sum_{i=1}^m U_i^{\text{I}} \cosh k_{x,i}^{\text{I}} x \sin k_{y,i}^{\text{I}} y, \quad (\text{A.263})$$

$$k_{y,i}^{\text{I}} = \frac{2i-1}{2} \frac{\pi}{b}, \quad (\text{A.264})$$

$$k_{x,i}^{\text{I}} = \sqrt{(k_{y,i}^{\text{I}})^2 - K^2}, \quad (\text{A.265})$$

$$U^{\text{II}} = \sum_{j=1}^n U_j^{\text{II}} e^{-k_{x,j}^{\text{II}}(x-g/2)} \sin k_{y,j}^{\text{II}} y, \quad (\text{A.266})$$

$$k_{y,j}^{\text{II}} = \frac{2j-1}{2} \frac{\pi}{a}, \quad (\text{A.267})$$

$$k_{x,j}^{\text{II}} = \sqrt{(k_{y,j}^{\text{II}})^2 - K^2}. \quad (\text{A.268})$$

Die Feldkomponenten ergeben sich zu

$$E_x^{\text{I}} = -j\omega \sum_{i=1}^m k_{y,i}^{\text{I}} U_i^{\text{I}} \cosh k_{x,i}^{\text{I}} x \cos k_{y,i}^{\text{I}} y, \quad (\text{A.269})$$

$$E_y^I = j\omega \sum_{i=1}^m k_{x,i}^I U_i^I \sinh k_{x,i}^I x \sin k_{y,i}^I y, \quad (\text{A.270})$$

$$B_x^I = -jk_z \sum_{i=1}^m k_{x,i}^I U_i^I \sinh k_{x,i}^I x \sin k_{y,i}^I y, \quad (\text{A.271})$$

$$B_y^I = -jk_z \sum_{i=1}^m k_{y,i}^I U_i^I \cosh k_{x,i}^I x \cos k_{y,i}^I y, \quad (\text{A.272})$$

$$B_z^I = K^2 \sum_{i=1}^m U_i^I \cosh k_{x,i}^I x \sin k_{y,i}^I y, \quad (\text{A.273})$$

$$E_x^{\text{II}} = -j\omega \sum_{j=1}^n k_{y,j}^{\text{II}} U_j^{\text{II}} e^{-k_{x,j}^{\text{II}}(x-g/2)} \cos k_{y,j}^{\text{II}} y, \quad (\text{A.274})$$

$$E_y^{\text{II}} = -j\omega \sum_{j=1}^n k_{x,j}^{\text{II}} U_j^{\text{II}} e^{-k_{x,j}^{\text{II}}(x-g/2)} \sin k_{y,j}^{\text{II}} y, \quad (\text{A.275})$$

$$B_x^{\text{II}} = jk_z \sum_{j=1}^n k_{x,j}^{\text{II}} U_j^{\text{II}} e^{-k_{x,j}^{\text{II}}(x-g/2)} \sin k_{y,j}^{\text{II}} y, \quad (\text{A.276})$$

$$B_y^{\text{II}} = -jk_z \sum_{j=1}^n k_{y,j}^{\text{II}} U_j^{\text{II}} e^{-k_{x,j}^{\text{II}}(x-g/2)} \cos k_{y,j}^{\text{II}} y, \quad (\text{A.277})$$

$$B_z^{\text{II}} = K^2 \sum_{j=1}^n U_j^{\text{II}} e^{-k_{x,j}^{\text{II}}(x-g/2)} \sin k_{y,j}^{\text{II}} y. \quad (\text{A.278})$$

A.7.4 Orthogonalentwicklung

Die unbekanntenen Amplituden U_i^I , U_j^{II} sind nun derart zu bestimmen, daß die Rand- bzw. Stetigkeitsbedingungen in $x = g/2$ (A.261) und (A.262) erfüllt werden. Die erste Bedingung lautet ausgeschrieben

$$\sum_{i=1}^m k_{y,i}^I U_i^I \cosh k_{x,i}^I g/2 \cos k_{y,i}^I y = \sum_{j=1}^n k_{y,j}^{\text{II}} U_j^{\text{II}} \cos k_{y,j}^{\text{II}} y, \quad (\text{A.279})$$

und sie ist auf $y \in [0, a]$ zu erfüllen. Dies ist aber der Orthogonalitätsbereich der $\cos k_{y,j}^{\text{II}} y$, weshalb sich die linke Seite von (A.279) nach diesen Funktionen entwickeln läßt. Multipliziert man die Gleichung mit $\cos k_{y,l}^{\text{II}} y$ und integriert über den Orthogonalitätsbereich, verschwindet die rechte Seite nur für $j = l$ nicht, und man erhält n Gleichungen für die U_i^I , U_j^{II} . Wegen $\int_0^a (\cos k_{y,j}^{\text{II}} y)^2 dy = a/2$ gilt

$$\sum_{i=1}^m c_{i,j}^I k_{y,i}^I U_i^I \cosh k_{x,i}^I g/2 = k_{y,j}^{\text{II}} U_j^{\text{II}} \quad (\text{A.280})$$

mit

$$c_{i,j}^I = \frac{\sin(k_{y,i}^I - k_{y,j}^{\text{II}})a}{(k_{y,i}^I - k_{y,j}^{\text{II}})a} + \frac{\sin(k_{y,i}^I + k_{y,j}^{\text{II}})a}{(k_{y,i}^I + k_{y,j}^{\text{II}})a} \quad (\text{A.281})$$

für $j = 1, 2, \dots, n$. Im Falle $k_{y,i}^I = k_{y,j}^{\text{II}}$ ist die rechte Seite von (A.281) durch 1 zu ersetzen (ihr Grenzwert für $k_{y,i}^I \rightarrow k_{y,j}^{\text{II}}$). Die Stetigkeitsbedingung (A.262) liefert die restlichen m Gleichungen. Auf $[0, b]$ ist zu erfüllen

$$\sum_{i=1}^m k_{x,i}^I U_i^I \sinh k_{x,i}^I g / 2 \sin k_{y,i}^I y = \begin{cases} -\sum_{j=1}^n k_{x,j}^{\text{II}} U_j^{\text{II}} \sin k_{y,j}^{\text{II}} y & : 0 \leq y \leq a \\ 0 & : a \leq y \leq b \end{cases} \quad (\text{A.282})$$

Multiplikation mit $\sin k_{y,i}^I y$ und Integration über $[0, b]$ liefert für $i = 1, 2, \dots, m$

$$k_{x,i}^I U_i^I \sinh k_{x,i}^I g / 2 = -\sum_{j=1}^n c_{i,j}^{\text{II}} k_{x,j}^{\text{II}} U_j^{\text{II}} \quad (\text{A.283})$$

mit

$$c_{i,j}^{\text{II}} = \frac{\sin(k_{y,i}^I - k_{y,j}^{\text{II}})a}{(k_{y,i}^I - k_{y,j}^{\text{II}})b} - \frac{\sin(k_{y,i}^I + k_{y,j}^{\text{II}})a}{(k_{y,i}^I + k_{y,j}^{\text{II}})b}, \quad (\text{A.284})$$

wobei im Falle $k_{y,i}^I = k_{y,j}^{\text{II}}$ die rechte Seite der Gleichung durch ihren Grenzwert a/b zu ersetzen ist. Mit (A.280) und (A.283) hat man das homogene lineare Gleichungssystem (A.286) zur Bestimmung der $m + n$ Potentialamplituden, welches genau dann eine nicht-triviale Lösung besitzt, wenn seine von K abhängige Koeffizientendeterminante verschwindet. Jede der diskret auftretenden Nullstellen k_c der Determinante nennt man *Grenzwellenzahl* (englisch: cut-off wavenumber) des zugehörigen *Wellentyps* (englisch: mode). Diese Bezeichnung entspringt der Eigenschaft eines jeden Wellentyps, der Beziehung

$$K = \sqrt{k_0^2 - k_z^2} = k_c = \text{const.} \quad (\text{A.285})$$

zu genügen: Bei gegebenem k_c ist k_z nur dann reell und der Wellentyp damit ausbreitungsfähig, wenn $k_0 > k_c$ erfüllt, die Frequenz also groß genug gewählt wird. In der Grenze hat man $k_0 = k_c$ und $k_z = 0$. Die Grenzwellenzahl k_c ist damit auch die *Resonanzwellenzahl* des zweidimensionalen Problems, für welches $\partial/\partial z = 0$ und damit $k_z = 0$ gilt.¹⁶

Zur Lösung des Feldproblems ist also zunächst eine Nullstelle $K = k_c$ der Determinante der Koeffizientenmatrix aus (A.286) zu bestimmen, womit alle Wellenzahlen festliegen. Der Rang der Koeffizientenmatrix für die derart bestimmte Grenzwellenzahl muß aus physikalischen Gründen $m + n - 1$ betragen, so daß nach Wahl einer beliebigen Amplitude (z.B. U_1^I) alle anderen eindeutig bestimmt sind. Die numerische Auswertung des Problems

¹⁶Aus theoretischer Sicht ist daher das zweidimensionale Resonanzproblem mit dem dreidimensionalen Leitungsproblem identisch.

$$\begin{bmatrix}
 k_{x,1}^I \sinh k_{x,1}^I \frac{g}{2} & 0 & \cdots & 0 \\
 0 & k_{x,2}^I \sinh k_{x,2}^I \frac{g}{2} & \cdots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & \cdots & k_{x,m}^I \sinh k_{x,m}^I \frac{g}{2} \\
 c_{1,1}^I k_{y,1}^I \cosh k_{x,1}^I \frac{g}{2} & c_{2,1}^I k_{y,2}^I \cosh k_{x,2}^I \frac{g}{2} & \cdots & c_{m,1}^I k_{y,m}^I \cosh k_{x,m}^I \frac{g}{2} \\
 c_{1,2}^I k_{y,1}^I \cosh k_{x,1}^I \frac{g}{2} & c_{2,2}^I k_{y,2}^I \cosh k_{x,2}^I \frac{g}{2} & \cdots & c_{m,2}^I k_{y,m}^I \cosh k_{x,m}^I \frac{g}{2} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 c_{1,n}^I k_{y,1}^I \cosh k_{x,1}^I \frac{g}{2} & c_{2,n}^I k_{y,2}^I \cosh k_{x,2}^I \frac{g}{2} & \cdots & c_{m,n}^I k_{y,m}^I \cosh k_{x,m}^I \frac{g}{2}
 \end{bmatrix}$$

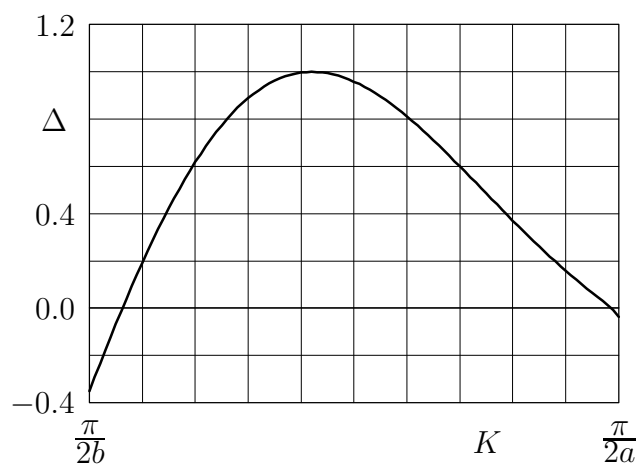


Abbildung A.17: Normalisierter Realteil der Koeffizientendeterminante aus (A.286) in Abhängigkeit von der Wellenzahl K für den Grabenwellenleiter aus Abbildung A.15. Der Imaginärteil der Determinante verschwindet überall.

$$\begin{bmatrix} c_{1,1}^{\text{II}} k_{x,1}^{\text{II}} & c_{1,2}^{\text{II}} k_{x,2}^{\text{II}} & \cdots & c_{1,n}^{\text{II}} k_{x,n}^{\text{II}} \\ c_{2,1}^{\text{II}} k_{x,1}^{\text{II}} & c_{2,2}^{\text{II}} k_{x,2}^{\text{II}} & \cdots & c_{2,n}^{\text{II}} k_{x,n}^{\text{II}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m,1}^{\text{II}} k_{x,1}^{\text{II}} & c_{m,2}^{\text{II}} k_{x,2}^{\text{II}} & \cdots & c_{m,n}^{\text{II}} k_{x,n}^{\text{II}} \\ -k_{y,1}^{\text{II}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_{y,2}^{\text{II}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -k_{y,n}^{\text{II}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1^{\text{I}} \\ U_2^{\text{I}} \\ \vdots \\ U_m^{\text{I}} \\ U_1^{\text{II}} \\ U_2^{\text{II}} \\ \vdots \\ U_n^{\text{II}} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{A.286})$$

ist mit der Hand am Arm praktisch unmöglich, denn selbst im einfachsten Falle $m = n = 1$ hat man zur Bestimmung der Grenzwellenzahl die transzendente Gleichung

$$\tanh \sqrt{(k_y^{\text{I}})^2 - k_c^2} \frac{g}{2} + c^{\text{I}} c^{\text{II}} \sqrt{\frac{1 - (k_c/k_y^{\text{II}})^2}{1 - (k_c/k_y^{\text{I}})^2}} = 0. \quad (\text{A.287})$$

zu lösen. Allerdings läßt sich eine untere und eine obere Grenze für die Grenzwellenzahl angeben: Einerseits muß sie größer sein als für einen Rechteckhohlleiter ($a = 0$) mit denselben Maßen, für welchen $k_c = \pi/2b$ gilt, und andererseits muß die Plattenleitung unterhalb ihrer kritischen Wellenzahl $k_c = \pi/2a$ betrieben werden, damit keine Wellenausbreitung in x -Richtung möglich ist. Mithin gilt

$$k_{y,1}^{\text{I}} = \frac{\pi}{2b} \leq k_c \leq \frac{\pi}{2a} = k_{y,1}^{\text{II}}. \quad (\text{A.288})$$

In Abbildung A.17 ist der Verlauf des Realteils der Koeffizientendeterminante aus Gleichung (A.286) dargestellt. Der Imaginärteil verschwindet für alle $K \leq \pi/2a$, weil alle Elemente der Matrix dann reellwertig sind: $k_{x,j}^{\text{II}}$ fällt wegen (A.268) reell aus, und $k_{x,i}^{\text{I}}$, die in der Tat für kleine i imaginär ausfällt, tritt nur in der Kombination mit \sinh und als Argument des \cosh auf.

Die Lösung des Gleichungssystems (A.286) liefert also – wie bereits besprochen – zu jedem Wellentyp alle Wellenzahlen, Potentialamplituden (bis auf einen konstanten Faktor) und damit vermöge (A.269) bis (A.278) das elektrische und magnetische Feld. In den Abbildungen A.18 und A.19 sind die Verläufe der x - und y -Komponente des elektrischen Feldes in der Ebene $z = 0$ für den Wellentyp mit der kleinsten Grenzwellenzahl dargestellt. Abbildung A.15 zeigt das zugehörige Feldbild in der Ebene $z = \text{const.}$; dort sind auch die zugrundegelegten Abmessungen des Grabenwellenleiters angegeben.

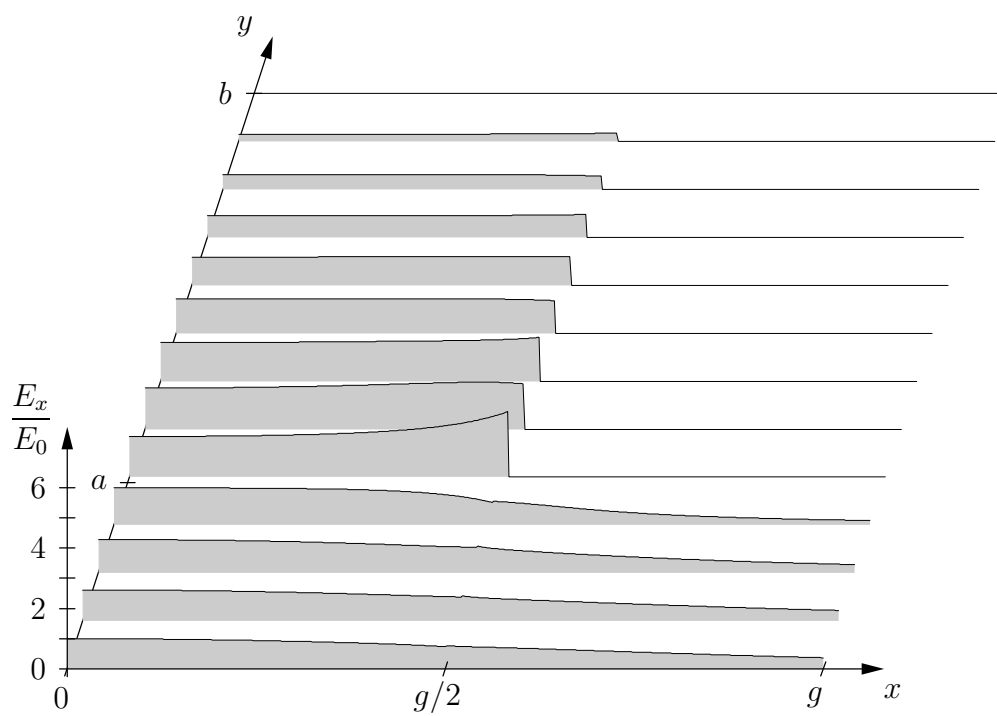


Abbildung A.18: Mit $E_0 = |\mathbf{E}|(0, 0)$ normierte Amplitude der x -Komponente der elektrischen Feldstärke im Grabenhohlleiter für den Wellentyp aus Abbildung A.15 für beliebiges k_z .

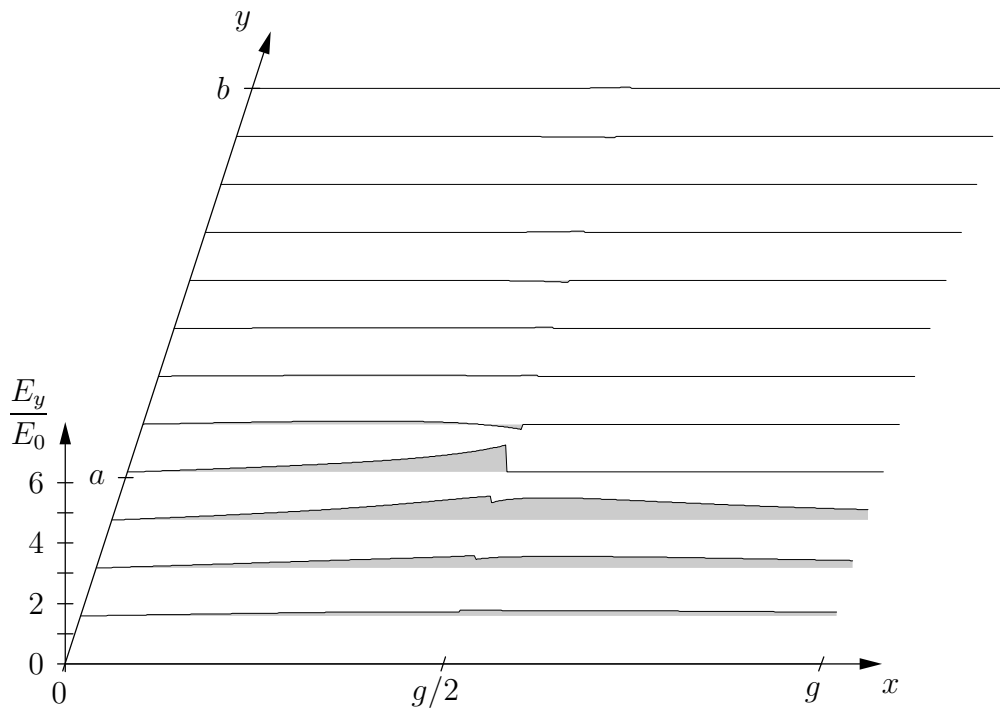


Abbildung A.19: Mit $E_0 = |\mathbf{E}|(0, 0)$ normierte Amplitude der y -Komponente der elektrischen Feldstärke im Grabenhohlleiter für den Wellentyp aus Abbildung A.15 für beliebiges k_z .

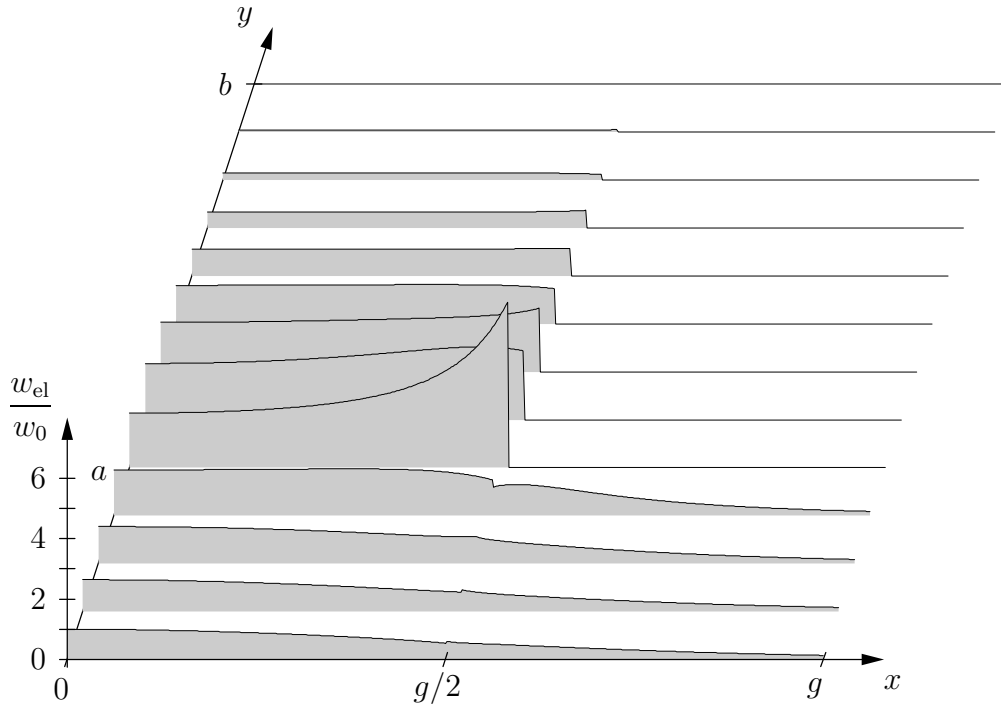


Abbildung A.20: Mittlere, mit $w_0 = w_{\text{el}}(0, 0)$ normierte elektrische Energiedichte für den Wellentyp aus Abbildung A.15 für beliebiges k_z . Wegen (A.301) ist dies gleichzeitig die Verteilung der Wirkleistungsdichte.

A.7.5 Mittlere Feldenergie

Die über t (und z) gemittelte Feldenergiedichte im Wellenleiter beträgt gemäß [22]

$$w = \frac{1}{4} (\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*), \quad (\text{A.289})$$

wobei der erste Summand die elektrische Energiedichte w_{el} und der zweite Summand die magnetische Energiedichte w_{mag} bezeichnet.¹⁷ Für den fundamentalen Wellentyp des Grabenhohlleiters aus Abbildung A.15 sind die normierten Energiedichten in den Abbildungen A.20 bis A.22 dargestellt. Währenddessen der Verlauf der elektrischen Energiedichte von k_z (und damit von der Betriebsfrequenz) unabhängig ist, hängt der Verlauf der magnetischen Energiedichte von k_z ab. Den Abbildungen A.21 und A.22 entnimmt man, daß die magnetische Energiedichte für $k_z = 0$ mit wachsendem y monoton zunimmt und die Gesamtenergiedichte für $y > a$ im wesentlichen konstant ist. Für große k_z entspricht die Verteilung der magnetischen Energiedichte jedoch ungefähr der der elektrischen.

Zur Definition von Geräteparametern benötigt man integrale Größen. Im Falle des Grabenhohlleiters eignet sich die pro Längeneinheit im Leiter gespeicherte Feldenergie;

¹⁷Zur Erinnerung: Seit der Einführung der speziellen t - und z -Abhängigkeit der Felder mit Gleichung (A.252) sind alle Felder durch ihre lediglich von x und y , nicht jedoch von t oder z abhängigen *Phasoren* repräsentiert.

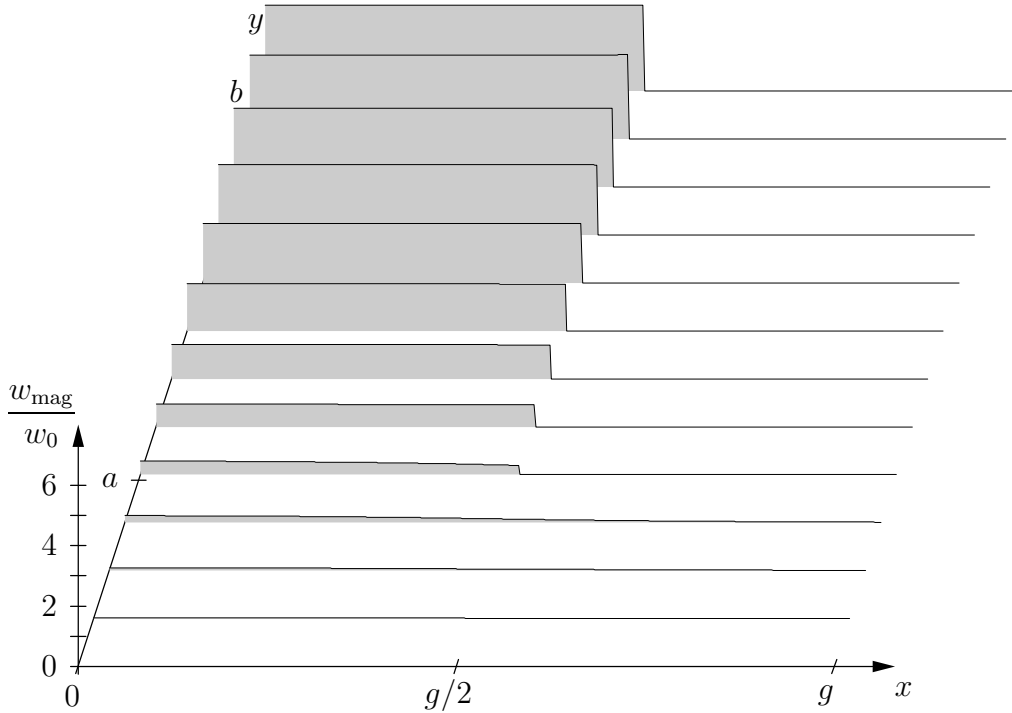


Abbildung A.21: Mittlere, mit $w_0 = w_{\text{el}}(0, 0)$ normierte magnetische Energiedichte für den Wellentyp aus Abbildung A.15 für $k_z = 0$.

sie ist gegeben durch $W' = W^{\text{I}} + W^{\text{II}} = W_{\text{el}}^{\text{I}} + W_{\text{mag}}^{\text{I}} + W_{\text{el}}^{\text{II}} + W_{\text{mag}}^{\text{II}}$ mit

$$W' = \frac{1}{4} \int (\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*) dA, \quad (\text{A.290})$$

$$W^{\text{I}} = \int_0^{g/2} \int_0^b (\epsilon_0 \mathbf{E}^{\text{I}} \cdot \mathbf{E}^{\text{I}*} + \mu_0 \mathbf{H}^{\text{I}} \cdot \mathbf{H}^{\text{I}*}) dy dx, \quad (\text{A.291})$$

$$W^{\text{II}} = \int_{g/2}^g \int_0^a (\epsilon_0 \mathbf{E}^{\text{II}} \cdot \mathbf{E}^{\text{II}*} + \mu_0 \mathbf{H}^{\text{II}} \cdot \mathbf{H}^{\text{II}*}) dy dx. \quad (\text{A.292})$$

Bei der Bildung der konjugiert-komplexen Feldstärken ist zu beachten, daß die $k_{x,i}^{\text{I}}$ für kleine i imaginär ausfallen können, und wegen (A.288) ist $k_{x,1}^{\text{I}}$ auf jeden Fall imaginär; das Produkt $k_{x,i}^{\text{I}} \sinh k_{x,i}^{\text{I}} x$ ist jedoch – wie auch alle $k_{x,j}^{\text{II}}$ – stets reell. Ferner wird in jedem Raum über den gesamten Orthogonalitätsbereich integriert, so daß die Doppelsummen in einfache Summen übergehen. Für die längenbezogene mittlere elektrische Energie im Raum I hat man mit (A.269) und (A.270)

$$W_{\text{el}}^{\text{I}} = \epsilon_0 \omega^2 \sum_{i=1}^m (k_{y,i}^{\text{I}})^2 (U_i^{\text{I}})^2 \int_0^{g/2} \cosh^2 k_{x,i}^{\text{I}} x \int_0^b \cos^2 k_{y,i}^{\text{I}} y dy dx +$$

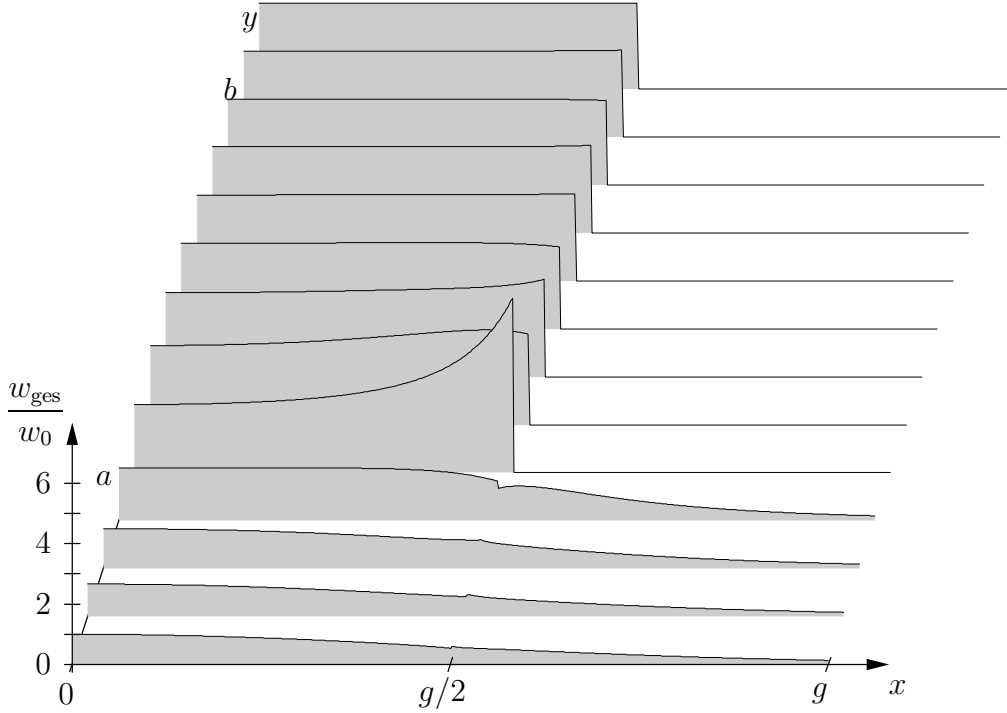


Abbildung A.22: Mittlere, mit $w_0 = w_{\text{el}}(0, 0)$ normierte Feldenergiedichte für den Wellentyp aus Abbildung A.15 für $k_z = 0$.

$$\epsilon_0 \omega^2 \sum_{i=1}^m (k_{x,i}^{\text{I}})^2 (U_i^{\text{I}})^2 \int_0^{g/2} \sinh^2 k_{x,i}^{\text{I}} x \int_0^b \sin^2 k_{y,i}^{\text{I}} y \, dy \, dx \quad (\text{A.293})$$

$$= \frac{k_0^2 b}{4\mu_0} \sum_{i=1}^m \frac{(U_i^{\text{I}})^2}{k_{x,i}^{\text{I}}} \left[((k_{x,i}^{\text{I}})^2 + (k_{y,i}^{\text{I}})^2) \sinh k_{x,i}^{\text{I}} \frac{g}{2} \cosh k_{x,i}^{\text{I}} \frac{g}{2} + k_c^2 k_{x,i}^{\text{I}} \frac{g}{2} \right]. \quad (\text{A.294})$$

Analog erhält man mit (A.271) bis (A.273) unter Beachtung von $K = k_c$ die längenbezogene mittlere magnetische Energie im Raum I

$$W_{\text{mag}}^{\text{I}} = \frac{k_0^2 b}{4\mu_0} \sum_{i=1}^m \frac{(U_i^{\text{I}})^2}{k_{x,i}^{\text{I}}} \cdot \left[\frac{k_z^2 ((k_{x,i}^{\text{I}})^2 + (k_{y,i}^{\text{I}})^2) + k_c^4}{k_0^2} \sinh k_{x,i}^{\text{I}} \frac{g}{2} \cosh k_{x,i}^{\text{I}} \frac{g}{2} + k_c^2 k_{x,i}^{\text{I}} \frac{g}{2} \right] \quad (\text{A.295})$$

und mit (A.274) bis (A.278) für den Raum II

$$W_{\text{el}}^{\text{II}} = \frac{k_0^2 a}{4\mu_0} \sum_{j=1}^n \frac{(U_j^{\text{II}})^2}{k_{x,j}^{\text{II}}} ((k_{x,j}^{\text{II}})^2 + (k_{y,j}^{\text{II}})^2), \quad (\text{A.296})$$

$$W_{\text{mag}}^{\text{II}} = \frac{k_0^2 a}{4\mu_0} \sum_{j=1}^n \frac{(U_j^{\text{II}})^2}{k_{x,j}^{\text{II}}} \frac{k_z^2 ((k_{x,j}^{\text{II}})^2 + (k_{y,j}^{\text{II}})^2) + k_c^4}{k_0^2}. \quad (\text{A.297})$$

Wie auch beim Rechteckhohlleiter gilt für alle $k_z \geq 0$ stets $W_{\text{el}}^{\text{I}} + W_{\text{el}}^{\text{II}} = W_{\text{mag}}^{\text{I}} + W_{\text{mag}}^{\text{II}}$; mittlere elektrische und magnetische Feldenergie betragen jeweils die Hälfte der Gesamtenergie. Zwar ist dieser Zusammenhang den vorangehenden Gleichungen schwerlich zu entnehmen, jedoch findet er bei deren numerischer Auswertung Bestätigung.

A.7.6 Mittlere transportierte Wirkleistung

Die mittlere Leistungsdichte (oder Energieflußdichte) eines Feldes ist gemäß [22] durch den komplexen POYNTINGSchen Vektor

$$\mathbf{S}_k = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \quad (\text{A.298})$$

gegeben. Da bei der Aufstellung der Randbedingungen für die elektrische Feldstärke im Abschnitt A.7.2 von ideal leitenden Wänden ausgegangen wurde, kann im betrachteten Falle ein Wirkleistungstransport nur in z -Richtung stattfinden. In der Tat fällt die x - und die y -Komponente des komplexen POYNTINGSchen Vektors imaginär aus, und für seine z -Komponente erhält man wegen (A.257) bis (A.259)

$$\mathbf{S}_k \cdot \mathbf{e}_z = \frac{1}{2}(E_x H_y^* - E_y H_x^*) = \frac{k_z}{2\omega\mu_0}(E_x E_x^* + E_y E_y^*) = \frac{k_z}{2\omega\mu_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*. \quad (\text{A.299})$$

Die z -gerichtete Wirkenergieflußdichte ist folglich durch

$$p = \text{Re}\{\mathbf{S}_k \cdot \mathbf{e}_z\} = \frac{k_z}{2\omega\mu_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \quad (\text{A.300})$$

gegeben. Ein Vergleich mit (A.289) liefert

$$p = 2w_{\text{el}}c_0 \frac{k_z}{k_0}, \quad (\text{A.301})$$

womit Abbildung A.20 auch die Verteilung der Wirkenergieflußdichte im verlustfreien Grabenhohlleiter für $k_z > 0$ darstellt.

Die in z -Richtung transportierte Wirkleistung ergibt sich aus (A.301) durch Integration über den gesamten Hohlleiterquerschnitt zu¹⁸

$$P = 2W'_{\text{el}}c_0 \frac{k_z}{k_0}. \quad (\text{A.302})$$

¹⁸Wegen $W'_{\text{el}} = W'_{\text{mag}} = W'/2$ kann man (A.302) auch als $P = W'c_0k_z/k_0$ schreiben, muß jedoch beachten, daß diese Gleichung nur für den Gesamt-, nicht aber für die Teilräume gilt. Allgemein ist die in einer Leitung transportierte Leistung gemäß $P = dW/dt$ definiert, worin $dW = W'dz$ die den Leitungsquerschnitt in der Zeit dt passierende Energie bezeichnet, $P = W'dz/dt$. Der Term dz/dt läßt sich daher als *Energiegeschwindigkeit* interpretieren, welche im besprochenen Falle den Wert c_0k_z/k_0 annimmt. Dies ist aber gerade die als $d\omega/dk_z$ definierte *Gruppengeschwindigkeit* im Hohlleiter, wie man mittels Differentiation von (A.285) leicht nachrechnet.

A Ausführlichere Betrachtungen

Bei Integration über die Räume I und II sind die jeweiligen Energien pro Länge einzusetzen; es gilt $P = P^I + P^II$ mit

$$P^I = \frac{\omega k_z}{2\mu_0} b \sum_{i=1}^m \frac{(U_i^I)^2}{k_{x,i}^I} \left[((k_{x,i}^I)^2 + (k_{y,i}^I)^2) \sinh k_{x,i}^I \frac{g}{2} \cosh k_{x,i}^I \frac{g}{2} + k_c^2 k_{x,i}^I \frac{g}{2} \right], \quad (\text{A.303})$$

$$P^{II} = \frac{\omega k_z}{2\mu_0} a \sum_{j=1}^n \frac{(U_j^{II})^2}{k_{x,j}^{II}} ((k_{x,j}^{II})^2 + (k_{y,j}^{II})^2). \quad (\text{A.304})$$

A.7.7 Mittlere Wandverlustleistung

Wie aus dem vorigen Abschnitt bekannt, findet gemäß der bisherigen Rechnung ein Energiefluß allein entlang der Leitung, nicht jedoch in die Bewandung statt; der komplexe POYNTINGvektor verschwindet mit der elektrischen Feldstärke auf der Wandoberfläche wegen des als ideal leitend angenommenen Wandmaterials. Strenggenommen ist die Rechnung daher nur für supraleitende Wandmaterialien gültig. Allerdings sollten die sich bei der Verwendung sehr gut leitender Materialien einstellenden Felder den berechneten mit guter Näherung entsprechen. Nimmt man dies an, so verbleibt lediglich das Problem des Auffindens einer Näherung für die tangentialen elektrischen Wandfeldstärken. Zu einer Lösung gelangt man mithilfe der komplexen *Oberflächenimpedanz*, welche bei der Analyse des *Skinneffekts* eingeführt wird. Für einfache Anregungen hat man dort den Zusammenhang

$$\mathbf{E}_t = -Z_o \mathbf{H}_t \times \mathbf{n}, \quad (\text{A.305})$$

$$Z_o = \frac{1 + j}{\kappa \delta_s}, \quad (\text{A.306})$$

worin Z_o die komplexe Oberflächenimpedanz, \mathbf{n} den ins Vakuum gerichteten Normalenvektor der Wandoberfläche, κ die elektrische Leitfähigkeit des Wandmaterials und

$$\delta_s = \sqrt{\frac{2}{\omega \kappa \mu}} \quad (\text{A.307})$$

die *Eindringtiefe* der Welle in die Wand – auch *äquivalente Leitschichtdicke* genannt – bezeichnet. Unter der Annahme, daß dieser Zusammenhang auch bei Anregung mit Mikrowellen besteht, gilt für den komplexen POYNTINGvektor auf der Oberfläche eines Wellenleiters

$$\mathbf{S}_k = \frac{1}{2} \mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^* = -\frac{Z_o}{2} \mathbf{H}_t \cdot \mathbf{H}_t^* \mathbf{n}, \quad (\text{A.308})$$

und mit dem als Realteil der Oberflächenimpedanz definierten *Oberflächenwiderstand*

$$R_o = \frac{1}{\kappa \delta_s} \quad (\text{A.309})$$

erhält man für den zeitlichen Mittelwert der in die Wand gestrahlten Wirkleistungsdichte

$$p_v = \frac{R_o}{2} \mathbf{H}_t \cdot \mathbf{H}_t^*, \quad (\text{A.310})$$

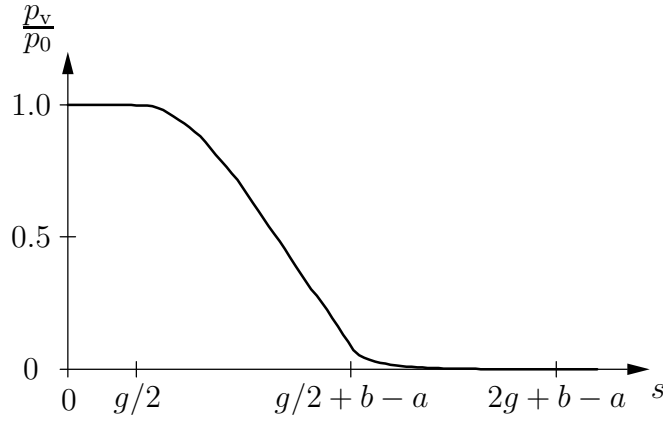


Abbildung A.23: Mit $p_0 = p_v(0, b)$ normierte Wandverlustleistungsdichte entlang der Berandung (Konturkurve mit $z = 0$, s ist die Weglänge) für den Wellentyp aus Abbildung A.15 bei $k_z = 0$. Für große k_z ergibt sich eine Spitze in $s = g/2 + b - a$ aufgrund der erhöhten magnetischen Feldstärke, siehe Abschnitt A.7.5.

welche für den bereits mehrfach zitierten $TE_{0,1}$ -ähnlichen Wellentyp in Abbildung A.23 aufgetragen ist. Für die mittlere, pro Leitungslänge in den Wänden in Wärme umgesetzte Leistung hat man daher

$$P'_v = \frac{R_o}{2} \oint_C \mathbf{H}_t \cdot \mathbf{H}_t^* ds, \quad (\text{A.311})$$

und für die Teilleistungen gilt

$$P'_v^{\text{I}} = 2R_o \int_0^{g/2} (H_x^{\text{I}} H_x^{\text{I}*} + H_z^{\text{I}} H_z^{\text{I}*})_{y=b} dx + 2R_o \int_a^b (H_y^{\text{I}} H_y^{\text{I}*} + H_z^{\text{I}} H_z^{\text{I}*})_{x=g/2} dy, \quad (\text{A.312})$$

$$P'_v^{\text{II}} = 2R_o \int_{g/2}^{\infty} (H_x^{\text{II}} H_x^{\text{II}*} + H_z^{\text{II}} H_z^{\text{II}*})_{y=a} dx. \quad (\text{A.313})$$

Einsetzen der Feldkomponenten gemäß (A.271) bis (A.273) bzw. (A.276) bis (A.278) liefert

$$P'_v^{\text{I}} = 2R_o \frac{k_z^2}{\mu_0^2} \sum_{i=1, j=1}^{m, m} k_{x,i}^{\text{I}} k_{x,j}^{\text{I}} U_i^{\text{I}} U_j^{\text{I}} \sin k_{y,i}^{\text{I}} b \sin k_{y,j}^{\text{I}} b \int_0^{g/2} \sinh k_{x,i}^{\text{I}} x \sinh k_{x,j}^{\text{I}} x dx + 2R_o \frac{k_c^4}{\mu_0^2} \sum_{i=1, j=1}^{m, m} U_i^{\text{I}} U_j^{\text{I}} \sin k_{y,i}^{\text{I}} b \sin k_{y,j}^{\text{I}} b \int_0^{g/2} \cosh k_{x,i}^{\text{I}} x \cosh k_{x,j}^{\text{I}} x dx +$$

A Ausführlichere Betrachtungen

$$2R_o \frac{k_z^2}{\mu_0^2} \sum_{i=1, j=1}^{m, m} k_{y,i}^I k_{y,j}^I U_i^I U_j^I \cosh k_{x,i}^I \frac{g}{2} \cosh k_{x,j}^I \frac{g}{2} \int_a^b \cos k_{y,i}^I y \cos k_{y,j}^I y dy +$$

$$2R_o \frac{k_c^4}{\mu_0^2} \sum_{i=1, j=1}^{m, m} U_i^I U_j^I \cosh k_{x,i}^I \frac{g}{2} \cosh k_{x,j}^I \frac{g}{2} \int_a^b \sin k_{y,i}^I y \sin k_{y,j}^I y dy, \quad (\text{A.314})$$

$$P_v^{\text{II}} = 2R_o \frac{k_z^2}{\mu_0^2} \sum_{i=1, j=1}^{n, n} k_{x,i}^{\text{II}} k_{x,j}^{\text{II}} U_i^{\text{II}} U_j^{\text{II}} \sin k_{y,i}^{\text{II}} a \sin k_{y,j}^{\text{II}} a \int_0^\infty e^{-k_{x,i}^{\text{II}} x} e^{-k_{x,j}^{\text{II}} x} dx +$$

$$2R_o \frac{k_c^4}{\mu_0^2} \sum_{i=1, j=1}^{n, n} U_i^{\text{II}} U_j^{\text{II}} \sin k_{y,i}^{\text{II}} a \sin k_{y,j}^{\text{II}} a \int_0^\infty e^{-k_{x,i}^{\text{II}} x} e^{-k_{x,j}^{\text{II}} x} dx. \quad (\text{A.315})$$

A.7.8 Dämpfung und Güte

Für den **Wellenleiter** ist die örtliche Dämpfung, d.h. die Abnahme der Feldstärke entlang der Leitung von Interesse. Geht man davon aus, daß das Feld allein aufgrund der Wandverluste entlang z abnimmt, hat man die einfache Leistungsbilanz

$$dP = -P' dz. \quad (\text{A.316})$$

Außerdem ist die längenbezogene mittlere Verlustleistung proportional zur transportierten mittleren Leistung, da beide Leistungen zum Quadrat der Feldstärken proportional sind. Setzt man $P'_v = 2\alpha P$, so erhält man

$$\frac{dP}{dz} = -2\alpha P \quad (\text{A.317})$$

mit der Lösung

$$P = P_0 e^{-2\alpha z}, \quad (\text{A.318})$$

die Feldstärken nehmen also exponentiell gemäß $e^{-\alpha z}$ über z ab. Für die Dämpfungskonstante des Wellenleiter gilt

$$\alpha = \frac{P'_v}{2P}. \quad (\text{A.319})$$

Beim **Resonator** interessiert hingegen die zeitliche Dämpfung. Analog zur örtlichen Dämpfung beim Wellenleiter erhält man aus der Leistungsbilanz

$$dW'_{k_z=0} = -P'_{v, k_z=0} dt \quad (\text{A.320})$$

mit $P'_{v, k_z=0} = 2\delta W'_{k_z=0}$ die Differentialgleichung

$$\frac{dW'_{k_z=0}}{dt} = -2\delta W'_{k_z=0} \quad (\text{A.321})$$

mit der Lösung

$$W'_{k_z=0} = W'_0 e^{-2\delta t}. \quad (\text{A.322})$$

Die Feldstärken nehmen also exponentiell gemäß $e^{-\delta t}$ mit der Zeit ab. Für die Dämpfungskonstante des Resonators gilt

$$\delta = \frac{P'_v}{2W'} \Big|_{k_z=0}. \quad (\text{A.323})$$

Anstelle der Dämpfung eines Resonators verwendet man oft seine *Güte*, welche gemäß

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} \quad (\text{A.324})$$

definiert ist. Hierbei bezeichnet ω_0 die/eine Eigenfrequenz des Resonators, welche – wie bereits früher angemerkt – im Falle des zweidimensionalen Hohlraumresonators mit der Grenzfrequenz ω_c des korrespondierenden Hohlleiters identisch ist. Für die Güte des Resonators hat man folglich

$$Q = \omega_0 \frac{W'}{P'_v} \Big|_{k_z=0}. \quad (\text{A.325})$$

Für nicht zu kleine Güten entspricht dieser Wert der Anzahl der Perioden, nach welcher die Resonatorfeldstärken auf den $e^{-\pi}$ -ten Teil ihrer Anfangswerte gefallen sind und auch der Phase, nach der die Resonatorenergie den $1/e$ -ten Teil ihres Anfangswertes beträgt.

A.7.9 Shuntwiderstand des Grabenresonators

Der Shuntwiderstand eines Resonators wurde im Abschnitt A.6 definiert. Entsprechend der bisherigen Koordinatenwahl ist eine sinnvolle Wechselwirkung des Resonatorfeldes nur mit einem sich in x -Richtung bewegenden Elektronenstrahl möglich. Man wählt daher $\mathbf{e} = \mathbf{e}_x$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ und – den Gepflogenheiten der Beschleunigertechnik entsprechend – v_0 als Strahlgeschwindigkeit. Dann erhält man für die Amplitude der Resonatorspannung

$$\hat{U}_r = \int_{-\infty}^{\infty} E_x(x, 0) \Big|_{k_z=0} e^{j\omega x/v_0} dx, \quad (\text{A.326})$$

worin ω die Eigenfrequenz des Resonators bezeichnet. Da E_x in keinem der beiden Räume explizit von k_z abhängt und gerade bezüglich x ist, kann die Spannung einfach als

$$\hat{U}_r = 2 \int_0^{g/2} E_x^{\text{I}}(x, 0) \cos kx dx + 2 \int_{g/2}^{\infty} E_x^{\text{II}}(x, 0) \cos kx dx \quad (\text{A.327})$$

A Ausführlichere Betrachtungen

geschrieben werden; $k = \omega/v_0$ steht wieder für die Wellenzahl des Elektronenstrahls. Einsetzen der Felder entsprechend (A.269) und (A.274) liefert

$$\begin{aligned} \hat{U}_r = & -2j\omega \sum_{i=1}^m k_{y,i}^I U_i^I \frac{k_{x,i}^I \sinh k_{x,i}^I \frac{g}{2} \cos k \frac{g}{2} + k \cosh k_{x,i}^I \frac{g}{2} \sin k \frac{g}{2}}{k^2 + (k_{x,i}^I)^2} - \\ & 2j\omega \sum_{j=1}^n k_{y,j}^{II} U_j^{II} \frac{k_{x,j}^{II} \cos k \frac{g}{2} - k \sin k \frac{g}{2}}{k^2 + (k_{x,j}^{II})^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.328})$$

Gemäß Gleichung (A.240) erhält man für den Shuntwiderstand eines Grabenresonators der Breite Δz

$$R_{\text{sh}} = \frac{|\hat{U}_r|^2}{2P'_v \Delta z}. \quad (\text{A.329})$$

Offenbar ist $R_{\text{sh}} \Delta z$, nicht aber der Shuntwiderstand selbst von der Resonatorbreite unabhängig, so daß man das Produkt aus Shuntwiderstand und Resonatorbreite als charakteristischen Widerstandswert des zweidimensionalen Resonators wählt:

$$R'_{\text{sh}} = \frac{|\hat{U}_r|^2}{2P'_v} = R_{\text{sh}} \Delta z. \quad (\text{A.330})$$

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde untersucht, ob und inwieweit ein Klystron als kompakter und preiswerter Leistungsverstärker für Millimeterwellen in Frage kommt. Dabei wurde von vornherein eine planare Geometrie und – dazu passend – ein bandförmiger Elektronenstrahl unterstellt, um einerseits von den modernen Methoden der Mikromechanik profitieren und andererseits trotz der hohen Frequenz Spitzenleistungen im Kilowattbereich erreichen zu können. Aus Gründen der Wirtschaftlichkeit sollte die Strahlspannung gering gehalten werden.

Bereits erste Simulationsrechnungen zeigten, daß der Entwurf eines derartigen Klystrons bei weitem nicht als Stand der Technik bezeichnet werden kann. Den Schwerpunkt dieser Arbeit bildete daher die Darstellung einer auf die speziellen Anforderungen zugeschnittenen Theorie.

Zunächst wurden alle wesentlichen Klystronkomponenten im Eindimensionalen analysiert, wodurch sich elementare Leistungsparameter herauskristallisierten. Dazu zählen vor allem die Strommodulation und das Verhältnis zwischen Resonator- und Strahlwiderstand. Die sich anschließende zweidimensionale Analyse behandelte in erster Linie die Strahlfokussierung mittels periodischer Magnetstrukturen und die Wechselwirkung zwischen Strahl und Resonatoren. Zwecks Linearisierung der Zusammenhänge wurde mit nur wenigen Ausnahmen vom Modell des steifen Elektronenstrahls Gebrauch gemacht, dessen weitreichende Gültigkeit mehrfach begründet wurde.

Dank der ausführlichen theoretischen Untersuchungen wurde der Aufwand für den Entwurf des Bandstrahlklystrons stark reduziert; viele Parameter waren lediglich zu dimensionieren. Simulationsrechnungen waren jedoch notwendig für den Entwurf der Elektronenkanone und der Ankopplung der Wellenleiter an die Resonatoren. Die Optimierung letzterer bezüglich ihrer Shuntwiderstände erfolgte ebenfalls auf numerischem Wege basierend auf einer Orthogonalentwicklung. Es zeigte sich, daß der Shuntwiderstand einer einzelnen Resonatorzelle äußerst gering ausfällt, weshalb dem weiteren Entwurf mehrzellige Resonatoren zugrundegelegt wurden. Zur Strahlfokussierung wurde eine aus Permanentmagneten bestehende periodische Struktur dimensioniert und deren Funktionsfähigkeit mittels PIC-Simulation verifiziert. Die Theorie lieferte schließlich die zu erwartenden Leistungsdaten des Bandstrahlklystrons; der Wirkungsgrad wird lediglich einige Prozent betragen. Abschließend wurden Strategien zur Leistungssteigerung diskutiert, wobei einer Anhebung der Strahlspannung die größte Bedeutung zugeschrieben werden mußte.

Obwohl die angestrebten Parameter des Bandstrahlklystrons nicht erreicht wurden, konnte der kritische Punkt beim Entwurf von Leistungsverstärkern für Millimeterwellen deutlich herausgestellt werden: Hohe Arbeitsfrequenzen und geringe Strahlspannungen führen unvermeidlich zu geringen Wirkungsgraden. Das Problem besteht in der geringen

A Ausführlichere Betrachtungen

Kopplung zwischen Strahl und Resonatoren und ist von deren Geometrien weitestgehend unabhängig. Eine aussichtsreiche Möglichkeit, das Wirkungsgradproblem beim Millimeterwellenverstärker zu lösen, besteht in der Verwendung eines vorgespannten Kollektors.

Literaturverzeichnis

- [1] Arsenjewa-Heil, A.; Heil, O.: Eine neue Methode zur Erzeugung kurzer, ungedämpfter, elektromagnetischer Wellen großer Intensität. Zeitschrift für Physik, Band 95, Heft 11/12, 752-762, Juli 1935
- [2] Barkhausen, Heinrich Georg: Lehrbuch der Elektronenröhren, 1. Band. Verlag S. Hirzel, Leipzig 1950
- [3] Beck, Arnold Hugh William: Velocity-Modulated Thermionic Tubes. Cambridge University Press, 1948
- [4] Beck, Arnold Hugh William: Thermionic Valves - Their Theory and Design. Cambridge University Press, 1953
- [5] Beck, Arnold Hugh William: Space-Charge Waves And Slow Electromagnetic Waves. Pergamon Press, London–New York–Paris–Los Angeles, 1958
- [6] Branch, G. M.; Mihran, Theodore Gregory: Plasma Frequency Reduction Factors in Electron Beams. IRE Transactions on Electron Devices, vol. ED-2, no. 2, April 1955, pp. 3-11
- [7] Brillouin, Leon: Wave Propagation in Periodic Structures. McGraw-Hill Book Company, New York, 1946
- [8] Brüche, E.; Recknagel, Alfred: Über die Phasenfokussierung bei der Elektronenbewegung in schnellveränderlichen elektrischen Feldern. Zeitschrift für Physik, Band 108, Heft 7/8, 459-482, März 1938
- [9] Bruns, Warner: GdfidL: A Finite Difference Program for Arbitrarily Small Perturbations in Rectangular Geometries. IEEE Transactions on Magnetics, vol. MAG-32, no. 3, 1453-1456, May 1996
- [10] Busch, Hans Walter Hugo: Berechnung der Bahn von Kathodenstrahlen im axialsymmetrischen elektromagnetischen Felde. Annalen der Physik, vol. 81, no. 25, 974-993, 1926
- [11] Child, Clement Dexter: Discharge from Hot CaO. Physical Review, ser. 1, vol. 32, 492-511, 1911
- [12] Chodorow, Marvin; Susskind, Charles: Fundamentals of Microwave Electronics. McGraw-Hill Book Company, New York–San Francisco–Toronto–London, 1964

- [13] Collin, Robert E.: Foundations for Microwave Engineering. McGraw-Hill Book Company, New York 1966
- [14] Gilmour, A. S.: Principles of Traveling Wave Tubes. Artech House Boston–London, 1994
- [15] Ginzton, Edward L.: The \$100 Idea. IEEE Transactions on Electron Devices, vol. ED-23, no. 7, 714-723, July 1976
- [16] Gradshteyn, I.S.; Ryzhik, I.M.: Tables of Integrals, Series, and Products. Fifth Edition, Academic Press, 1994
- [17] Hahn, W. C.; Metcalf, G. F.: Velocity-Modulated Tubes. Proceedings of the I.R.E., vol. 27, 106-116, February 1939
- [18] Hahn, W. C.: Small Signal Theory of Velocity-Modulated Electron Beams. Gen. Elec. Rev., vol. 42, 258-270, June; 1939
- [19] Hamilton, Donald Ross; Knipp, Julian K.; Kuper, J. B. Horner: Klystrons and Microwave Triodes. MIT Radiation Laboratory Series vol. 7, McGraw-Hill Book Company, New York–Toronto–London, 1948
- [20] Harman, Willis W.: Fundamentals of Electronic Motion. McGraw-Hill Publishing Company, New York–London–Toronto 1953
- [21] Harrison, Arthur Elliot: Klystron Tubes. McGraw-Hill Book Company, New York–London, 1947
- [22] Henke, Heino: Elektromagnetische Felder - Theorie und Anwendung. Springer, 2001
- [23] Herrmannsfeldt, W. B.: EGUN - An Electron Optics and Gun Design Program. Stanford Linear Accelerator Center/Stanford University, California, SLAC-331, UC-28, October 1988
- [24] Kammerloher, Josef: Elektronenröhren und Verstärker. C.F. Winter'sche Verlags-handlung, Füssen 1953
- [25] Kirstein, Peter T.; Kino, Gordon S.; Waters, William E.: Space-Charge Flow. McGraw-Hill Book Company, New York–San Francisco–Toronto–London–Sydney, 1967
- [26] Kleen, Werner: Einführung in die Mikrowellen-Elektronik. S. Hirzel Verlag, Stuttgart 1952
- [27] Langmuir, Irving: The Effect of Space Charge and Residual Gases on Thermionic Currents in High Vacuum. Physical Review, ser. 2, vol. 2, 450-486, December 1913
- [28] Langmuir, Irving: The Effect of Space Charge and Initial Velocities on the Potential Distribution and Thermionic Current Between Parallel Plane Electrodes. Physical Review, vol. 21, 419-435, April 1923

- [29] Langmuir, Irving; Blodgett, Katharine B.: Currents Limited by Space Charge between Coaxial Cylinders. *Physical Review*, vol. 22, 347-356, October 1923
- [30] Langmuir, Irving; Blodgett, Katharine B.: Currents Limited by Space Charge between Concentric Spheres. *Physical Review*, vol. 24, 49-59, July 1924
- [31] Mangoldt, H.v.; Knopp, Konrad: Einführung in die höhere Mathematik, Band 3. 12. Auflage, S. Hirzel Verlag Leipzig, 1963
- [32] Olson, Thor: Behind Gamma's Disguise. *SMPTE Journal*, July 1995, <http://home.att.net/thor.olson/papers/BehindGammasDisguise.pdf>
- [33] Pierce, John Robinson: Rectilinear Electron Flow in Beams. *Journal of Applied Physics*, vol. 11, 548-554, August 1940
- [34] Pierce, John Robinson: Theory and Design of Electron Beams. D. Van Nostrand Company, Toronto/New York/London 1954
- [35] Ramo, Simon: Currents Induced by Electron Motion. *Proceedings of the I.R.E.*, vol. 27, 584-585, September 1939
- [36] Rothe, Horst; Kleen, Werner: Grundlagen und Kennlinien der Elektronenröhren (Bücherei der Hochfrequenztechnik, Bd. 2). Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig K.-G., Leipzig 1948
- [37] Rothe, Horst; Kleen, Werner: Physikalische Grundlagen (Hochvakuum Elektronenröhren, Bd. 1). Akademische Verlagsgesellschaft m.b.H., Frankfurt am Main 1955
- [38] Solyga, Steffen: Felddarstellung mittels spezieller Potentialfunktionen. Diplomarbeit am Institut für Elektrotechnik der Humboldt-Universität zu Berlin, September 1994
- [39] Solyga, Steffen; Henke, Heino: Two-Dimensional Design of a Low Voltage mm-Wave Sheet Beam Klystron. *Proceedings of the 8th ITG-Conference on Displays and Vacuum Electronics*, April 29-30, 1998, Garmisch-Partenkirchen, Germany, pp. 275-279
- [40] Solyga, Steffen; Schmolke, Michael; Henke, Heino: The mm-Wave Sheet Beam Klystron: Performance at Different Voltages. *Proceedings of the 1999 Particle Accelerator Conference*, New York, 1999, pp. 1034-1036
- [41] Sommerfeld, Arnold: Vorlesungen über Theoretische Physik Band 1, Mechanik. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1964
- [42] Sommerfeld, Arnold: Vorlesungen über Theoretische Physik Band 3, Elektrodynamik. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1964
- [43] Spangenberg, Karl Ralph: Vacuum Tubes. McGraw-Hill Book Company, New York-Toronto-London 1948
- [44] True, Richard; Booske, John: Design of a Custom Sheet Beam Thermionic Electron Gun. University of Wisconsin - Madison, February 1995

Literaturverzeichnis

- [45] Varian, Russell H.; Varian, Sigurd F.: A High Frequency Oscillator and Amplifier. *Journal of Applied Physics*, vol. 10, 321-327, May 1939
- [46] Webster, David L.: Cathode-Ray Bunching. *Journal of Applied Physics*, vol. 10, 501-508, July 1939
- [47] Webster, David L.: The Theory of Klystron Oscillation. *Journal of Applied Physics*, vol. 10, 864-872, December 1939
- [48] Webster, David L.: Velocity-Modulation Currents. *Journal of Applied Physics*, vol. 13, 786-787, December 1942
- [49] Yu, David; Wilson, Perry Baker: Sheet-Beam Klystron RF Cavities. *Proceedings of the 1993 Particle Accelerator Conference*, Washington DC, May 17-20, pp. 2681-2683
- [50] Yu, Simon: Particle-In-Cell Simulation of High Power Klystrons. *Stanford University, SLAC/AP-34*, September 1984

Danksagung

Mein Dank gilt meinen Lehrern, allen voran Herrn Dr. rer. nat. Klaus Morgenthal, Herrn Dipl.-Phys. Walter Wilhelm und Herrn Dr.-Ing. Dietrich Schilder, die mich für Analysis und Feldtheorie begeisterten.

Herrn Dr.-Ing. Manfred Filtz und Herrn Priv.-Doz. Dr.-Ing. habil. Arnim Nethe danke ich für Ihre Korrekturen, vor allem aber für ihre moralische Unterstützung beim Schreiben dieser Arbeit.

Meinen ehemaligen Kollegen Herrn Dr.-Ing. Warner Bruns, Herrn Dipl.-Ing. Michael Schmolke, Herrn Dipl.-Ing. MSc. Rolf Wegner und Herrn Dipl.-Ing. Frank Gerigk möchte ich für die zahlreichen fachlichen und persönlichen Gespräche danken.

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Hanns-Dietrich Stahlmann danke ich für seine Unterstützung und die Begutachtung meiner Arbeit.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Heino Henke sei gedankt für die Betreuung der vorliegenden Dissertation und dafür, daß er mich 1994 an sein Institut holte.

Und schließlich danke ich meiner Familie und meinen Freunden für ihre Treue und ihr Vertrauen in meine Fähigkeiten.