UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

**Lineare Algebra 2**
**Prof. Dr. R. Dahlhaus**
**Dr. S. Richter, N. Phandoidaen**
**Sommersemester 2019**

# 10. Präsenzblatt – Lösungen

**Aufgabe P37 (Eigenschaften adjungierter Abbildungen).**
Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V), (W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ Euklidische Vektorräume und $f, g : V \to W$ linear. Zeigen Sie:

(a) Seien $V, W$ zunächst unendlichdimensional. Zeigen Sie, dass $f^{\mathrm{ad}}$ eindeutig bestimmt ist (es muss allerdings nicht notwendig existieren!)

(b) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $(\lambda f)^{\mathrm{ad}} = \lambda f^{\mathrm{ad}}$ und $(f+g)^{\mathrm{ad}} = f^{\mathrm{ad}} + g^{\mathrm{ad}}$.

(c) Sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie:

  (i) Die orthogonale Projektion $p_U : V \to V$ ist eine selbstadjungierte Abbildung.

  (ii) $(f^{\mathrm{ad}})^{-1}(U^\perp) = f(U)^\perp$
  *Hinweis: Nutzen Sie A34(c).*

(d) Sei nun $V = W$ und es gelte $f^{\mathrm{ad}} = -f$. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $f$, so folgt bereits $\lambda = 0$.

**Lösung:**

(a) Seien $f_1, f_2$ zwei zu $f$ adjungierte Abbildungen. Für alle $v \in V, w \in W$ gilt dann:

$$\langle v, f_2(w)\rangle_V = \langle f(v), w\rangle_W = \langle v, f_1(w)\rangle_V \quad \Rightarrow \quad \langle v, f_1(w) - f_2(w)\rangle_V = 0.$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ nicht ausgeartet $\Rightarrow f_1(w) - f_2(w) = 0$
$\overset{w\in W \text{ beliebig}}{\Rightarrow} f_1 = f_2.$

(b) Wir rechnen nach, dass $\lambda f^{\mathrm{ad}}$ die adjungierte Abbildung zu $\lambda f$ ist ($\Rightarrow (\lambda f)^{ad} = \lambda f^{ad}$).
Es gilt für $v \in V, w \in W$:

$$\langle \underbrace{(\lambda f)(v)}_{=\lambda f(v)}, w\rangle_W = \lambda\langle f(v), w\rangle_W \overset{\text{Def. adj. Abb.}}{=} \lambda\langle v, f^{ad}(w)\rangle_V = \langle v, \underbrace{\lambda f^{ad}(w)}_{=(\lambda f^{ad})(w)}\rangle_V.$$

Wir rechnen nach, dass $f^{\mathrm{ad}} + g^{ad}$ die adjungierte Abbildung zu $f+g$ ist ($\Rightarrow (f+g)^{ad} = f^{ad} + g^{ad}$).
Es gilt für $v \in V, w \in W$:

$$\begin{aligned}\langle \underbrace{(f+g)(v)}_{=f(v)+g(v)}, w\rangle_W &= \langle f(v), w\rangle_W + \langle g(v), w\rangle_W \overset{\text{Def. adj. Abb.}}{=} \langle v, f^{ad}(w)\rangle_V + \langle v, g^{ad}(w)\rangle_V \\ &= \langle v, \underbrace{f^{ad}(w) + \lambda g^{ad}(w)}_{=(f^{ad}+g^{ad})(w)}\rangle_V.\end{aligned}$$

(c) (i) Seien $v_1, v_2 \in V$ beliebig.
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\langle v_1, p_U(v_2)\rangle &= \underbrace{\langle v_1 - p_U(v_1), \underbrace{p_U(v_2)}_{\in U}\rangle}_{=0 \text{ (Def. } p_U)} + \langle p_U(v_1), p_U(v_2)\rangle \\ &= \langle p_U(v_1), p_U(v_2)\rangle \\ &= \langle p_U(v_1), v_2\rangle + \underbrace{\langle \underbrace{p_U(v_1)}_{\in U}, p_U(v_2) - v_2\rangle}_{=0 \text{ (Def. } p_U)}. \\ &= \langle p_U(v_1), v_2\rangle.\end{aligned}$$

(ii) Seien $\Psi : V \to V^*, \Phi : W \to W^*$ die zu $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ bzw. $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ gehörigen kanonischen Isomorphismen.
$\Rightarrow f^{ad} = \Psi^{-1} \circ f^* \circ \Phi$.
$\Rightarrow$

$$(f^{ad})^{-1}(U^\perp) = \Phi^{-1}((f^*)^{-1}(\Psi(U^\perp))) \overset{VL}{=} \Phi^{-1}((f^*)^{-1}(U^0)) \overset{A34(c)}{=} \Phi^{-1}(f(U)^0) \overset{VL}{=} f(U)^\perp.$$

(d) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert von $f$ zum Eigenvektor $v \in V\backslash\{0\}$.
$\Rightarrow f(v) = \lambda v$.
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\lambda\|v\|^2 &= \langle \lambda v, v\rangle = \langle f(v), v\rangle \overset{\text{Def. adj. Abb.}}{=} \langle v, f^{ad}(v)\rangle \\ &\overset{\text{Vorauss.}}{=} \langle v, -f(v)\rangle = \langle v, -\lambda v\rangle = -\lambda\|v\|^2.\end{aligned}$$

$\Rightarrow 2\lambda\|v\|^2 = 0 \overset{v\neq 0}{\Rightarrow} \lambda = 0$.

**Aufgabe P38 (Eigenschaften von Matrizen im unitären Raum).**
Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$.

(a) Zeigen Sie: Ist $A$ hermitesch, so gilt $\det(A) \in \mathbb{R}$ und die Diagonalelemente von $A$ sind reell.

(b) Überprüfen Sie, ob die folgenden Matrizen symmetrisch, hermitesch oder sogar positiv definit sind:

$$A_1 = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}.$$

*Hinweis: Sowohl die Charakterisierung positiv definiter Matrizen über das Hauptminorenkriterium als auch über positive Eigenwerte gelten weiterhin für hermitesche Matrizen.*

(c) Bestimmen Sie eine ONB im unitären Standardraum $(\mathbb{C}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine ONB aus Eigenvektoren von $A_4$.

(d) Sei nun $C := \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

(i) Ermitteln Sie eine ONB von $(\mathbb{C}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_C)$ ausgehend von der Basis $(v_1, v_2) := ((1,0)^t, (0,i)^t)$.

(ii) Prüfen Sie, ob die Abbildungen $f_1, f_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$,

$$f_1(v) := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad f_2(v) := \begin{pmatrix} i & 2 \\ 1 & -i \end{pmatrix},$$

selbstadjungiert / unitär in $(\mathbb{C}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ bzw. $(\mathbb{C}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_C)$ sind. Geben Sie auch jeweils die adjungierte Abbildung an.
*Hinweis: Nutzen Sie bei Bedarf A37(b).*

**Lösung:**

(a) $A$ hermitesch $\Rightarrow \overline{A}^t = A \Rightarrow \det(A) = \det(\overline{A}^t) \overset{\text{Regel Det.}}{=} \det(\overline{A}) = \overline{\det(A)} \Rightarrow \det(A) \in \mathbb{R}$.

$A$ hermitesch $\Rightarrow A_{ij} = (\overline{A}^t)_{ij} = \overline{A_{ji}}$.
Insbesondere für $i \in \{1, ..., n\}$: $A_{ii} = \overline{A_{ii}} \Rightarrow A_{ii} \in \mathbb{R}$.

(b)
- $A_1$ ist symmetrisch, aber nicht hermitesch (Diagonalelemente von $A_1$ nicht reell). Da $A_1$ nicht hermitesch, ist positiv definit nicht definiert.
- $A_2$ ist symmetrisch, aber nicht hermitesch, denn $\overline{A_2}^t = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{smallmatrix}\right) \neq A_2$. Da $A_2$ nicht hermitesch, ist positiv definit nicht definiert.
- $A_3$ ist nicht symmetrisch. $A_3$ ist hermitesch, denn $\overline{A_3}^t = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right)^t = A_3$.

  Es gilt $\det(A_3^{(1)}) = \det(1) = 1 > 0$, und $\det(A_3) = 1 - i \cdot (-i) = 0 \overset{\text{Hauptminorenkriterium}}{\Rightarrow}$ $A_3$ nicht positiv definit.
  (Alternativ: Berechne Eigenwerte von $A_3$: $\chi_{A_3} = (t-1)^2 - 1 = t(t-2)$, d.h. Eigenwerte sind $0, 2$ und somit nicht alle positiv).
- $A_4$ ist nicht symmetrisch. $A_4$ ist hermitesch, denn $\overline{A_4}^t = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right)^t = A_4$.

  Es gilt $\det(A_4^{(1)}) = \det(2) = 2 > 0$, und $\det(A_4) = 4 - i \cdot (-i) = 3 > 0$ $\overset{\text{Hauptminorenkriterium}}{\Rightarrow}$ $A_4$ ist positiv definit.
  (Alternativ: Berechne Eigenwerte von $A_4$: $\chi_{A_4} = (t-2)^2 - 1 = (t-1)(t-3)$, d.h. Eigenwerte sind $1, 3$ und somit alle positiv).

(c) Berechne Eigenräume:

$$\begin{aligned} \mathrm{Eig}(A_4, 1) &= \mathrm{Kern}(A_4 - E_2) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} = \mathrm{Lin}((i, -1)^t), \\ \mathrm{Eig}(A_4, 3) &= \mathrm{Kern}(A_4 - 3E_2) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} = \mathrm{Lin}((i, 1)^t). \end{aligned}$$

$A_4$ hermitesch $\overset{\text{Spektralsatz}}{\Rightarrow} \mathrm{Eig}(A_4, 1) \perp \mathrm{Eig}(A_4, 3) \Rightarrow$ Gefundene Vektoren $(i, -1)^t, (i, 1)^t$ müssen bereits orthogonal sein bzgl. Standardskalarprodukt.

(d) (i) Gram-Schmidt: Seien $v_1 = (1, 0)^t$, $v_2 = (0, i)^t$.
$\tilde{w}_1 := v_1 = (1, 0)^t$, $\|\tilde{w}_1\|_C^2 = 1 \Rightarrow w_1 := \frac{\tilde{w}_1}{\|\tilde{w}_1\|_C} = (1, 0)^t$.
$\tilde{w}_2 := v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle_C w_1 = (0, i)^t - \underbrace{(0, i)C(1, 0)^t}_{=1} \cdot (1, 0) = (-1, i)^t$.

$\|\tilde{w}_2\|_C^2 = (-1, i)C(-1, i)^t = 1 \Rightarrow w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|_C} = (-1, i)^t$.

(ii)

- In $(\mathbb{C}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist $E := (e_1, e_2)$ eine ONB, d.h. wir können direkt anhand $M_E^E(f_1)$ prüfen:
Es ist $A := M_E^E(f_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}$ unitäre Matrix, da $\overline{A}^t A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix} = E_2$. $\Rightarrow f_1$ unitär.
$A$ ist nicht hermitesch $(\overline{A}^t \neq A) \overset{E\text{ ONB}}{\Rightarrow} A$ nicht selbstadjungiert.
Es gilt $M_E^E(f_1^{ad}) \overset{E\text{ ONB}}{=} \overline{M_E^E(f_1)}^t = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{pmatrix}$.

  In $(\mathbb{C}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_C)$ ist $\mathcal{B} = (w_1, w_2)$ eine ONB.
Es ist $T_E^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & i\end{pmatrix}$. Es gilt

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_1) = \underbrace{T_{\mathcal{B}}^E}_{=(T_E^{\mathcal{B}})^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -i\\ 0 & -i\end{pmatrix}} \cdot \underbrace{M_E^E(f_1)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}} \cdot \underbrace{T_E^{\mathcal{B}}}_{=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & i\end{pmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix} =: A.$$

  Offensichtlich ist $A$ nicht unitär (Spalten sind nicht normiert) $\Rightarrow f_1$ nicht unitär.
$A$ nicht hermitesch $(\overline{A}^t \neq A) \Rightarrow f_1$ nicht selbstadjungiert.
A... $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} M_E^E(f_1^{ad}) &= \overline{M_E^*(\langle\cdot,\cdot\rangle_C)}^{-1}\overline{M_E^E(f_1)}^t\,\overline{M_E^*(\langle\cdot,\cdot\rangle_C)} \\ &\overset{M_E^*(\langle\cdot,\cdot\rangle_C=C}{=} \begin{pmatrix}2 & i\\ -i & 1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 2\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}4 & -5i\\ -2i & -2\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- In $(\mathbb{C}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist $E := (e_1, e_2)$ eine ONB, d.h. wir können direkt anhand $M_E^E(f_2)$ prüfen:
Offensichtlich ist $A$ nicht unitär, da die Spalten nicht normiert sind.
$A$ ist nicht hermitesch $(\overline{A}^t \neq A) \overset{E\text{ ONB}}{\Rightarrow} A$ nicht selbstadjungiert.
Es gilt $M_E^E(f_2^{ad}) \overset{E\text{ ONB}}{=} \overline{M_E^E(f_2)}^t = \begin{pmatrix}-i & 1\\ 2 & i\end{pmatrix}$.

  In $(\mathbb{C}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_C)$ ist $\mathcal{B} = (w_1, w_2)$ eine ONB.
Es ist $T_E^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & i\end{pmatrix}$. Es gilt

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_2) = \underbrace{T_{\mathcal{B}}^E}_{=(T_E^{\mathcal{B}})^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -i\\ 0 & -i\end{pmatrix}} \cdot \underbrace{M_E^E(f_2)}_{=\begin{pmatrix}i & 2\\ 1 & -i\end{pmatrix}} \cdot \underbrace{T_E^{\mathcal{B}}}_{=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & i\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix} =: A.$$

  $A$ ist unitär, da $\overline{A}^t A = E_2$.
$A$ ist hermitesch $(\overline{A}^t = A) \Rightarrow f_2$ ist selbstadjungiert.
$\Rightarrow$

$$M_E^E(f_2^{ad}) = \begin{pmatrix}i & 2\\ 1 & -i\end{pmatrix}.$$

**Aufgabe P39 (Beispiele für adjungierte Abbildungen in verschiedenen Vektorräumen).**

(a) Sei $V = \mathbb{R}^2$ der Standardvektorraum über $\mathbb{R}$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Sei $f : V \to V, f(x,y) = (x-y, 2x+y)^t$ linear. Ermitteln Sie $f^{\mathrm{ad}}$ in den Euklidischen Vektorräumen $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_{E_2})$ und $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_A)$.

(b) Es sei $V = \ell^2 := \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^\infty a_n^2 < \infty\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Vektorraum der quadratsummierbaren Folgen über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt $\langle a, b\rangle := \sum_{n=1}^\infty a_n b_n$. Berechnen Sie für den Linksshift $f : V \to V, f((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ die Abbildung $f^{\mathrm{ad}}$ im Euklidischen Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

(c) Es sei $V := M(n\times n, \mathbb{C})$ der Raum der $n\times n$-Matrizen über $\mathbb{C}$ und $\langle A, B\rangle := \mathrm{Spur}(A^t\overline{B})$ ein Skalarprodukt auf $V$. Berechnen Sie jeweils $f^{\mathrm{ad}}$ zu folgenden Abbildungen $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$:

  (i) $f(A) = A^t$,

  (ii) $f(A) = S\cdot A$ mit festem $S \in M(n\times n, \mathbb{C})$,

  (iii) $f(A) = SAS^{-1}$ mit festem $S \in GL(n, \mathbb{C})$.

(d) Seien $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $(\mathbb{R}^{2n}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ die Euklidischen Standardräume. Sei $g \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ mit $f(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = g(x)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

  (i) Zeigen Sie, dass für $v \in \mathbb{R}^n$ gilt: $f^{\mathrm{ad}}(v) = \left(\begin{smallmatrix} g^{\mathrm{ad}}(v) \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

  (ii) Zeigen Sie: $\dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Bild}(f^{\mathrm{ad}}) = n - \dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Kern}(g)$.

**Lösung:**

(a) Sei $E := (e_1, e_2)$ die Standardbasis von $V$.
$\Rightarrow$ Es gilt $M_E^E(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- In $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist $E$ eine ONB.
  $\Rightarrow M_E^E(f^{ad}) = M_E^E(f)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- A37(b) (euklidisch ohne konjugiert komplex) $\Rightarrow M_E^E(f^{ad}) = \underbrace{M_E^*(\gamma)^{-1}}_{=A^{-1}} M_E^E(f)^t \underbrace{M_E^*(\gamma)}_{=A}$.

  Hier ist $A^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
  $\Rightarrow$

$$M_E^E(f^{ad}) = A^{-1}M_E^E(f)^tA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

(b) $f^{ad}$ muss erfüllen: Für alle $a, b \in V$:

$$\sum_{n=1}^\infty a_n f^{ad}(b)_n = \langle a, f^{ad}(b)\rangle \stackrel{!}{=} \langle f(a), b\rangle = \sum_{n=1}^\infty f(a)_n b_n = \sum_{n=1}^\infty a_{n+1}b_n. \quad (*)$$

Setze $f^{ad}(b)_n := (0, b_1, b_2, b_3, ...)$ (Rechtsshift), so gilt

$$\sum_{n=1}^\infty a_n f^{ad}(b)_n = \sum_{n=2}^\infty a_n b_{n-1} = \sum_{n=1}^\infty a_{n+1}b_n,$$

d.h. (*) ist erfüllt.

(c) (i) Für alle $A, B \in V$ muss gelten:

$$\begin{aligned}\operatorname{Spur}(A^t\overline{f^{ad}(B)}) &= \langle A, f^{ad}(B)\rangle \overset{!}{=} \langle f(A), B\rangle = \langle A^t, B\rangle \\ &= \operatorname{Spur}(A\overline{B}) \overset{\operatorname{Spur}(C^t)=\operatorname{Spur}(C),\operatorname{Spur}(CD)=\operatorname{Spur}(DC)}{=} \operatorname{Spur}(A^t\overline{B}^t).\end{aligned}$$

Das heißt, es muss $\overline{f^{ad}(B)} = \overline{B}^t$ gelten bzw. $f^{ad}(B) := B^t$.

(ii) Für alle $A, B \in V$ muss gelten:

$$\begin{aligned}\operatorname{Spur}(A^t\overline{f^{ad}(B)}) &= \langle A, f^{ad}(B)\rangle \overset{!}{=} \langle f(A), B\rangle = \langle SA, B\rangle \\ &= \operatorname{Spur}(A^tS^t\overline{B}).\end{aligned}$$

Das heißt, es muss $\overline{f^{ad}(B)} = S^t\overline{B}$ gelten bzw. $f^{ad}(B) := \overline{S}^tB$.

(iii) Für alle $A, B \in V$ muss gelten:

$$\begin{aligned}\operatorname{Spur}(A^t\overline{f^{ad}(B)}) &= \langle A, f^{ad}(B)\rangle \overset{!}{=} \langle f(A), B\rangle = \langle SAS^{-1}, B\rangle \\ &= \operatorname{Spur}((S^{-1})^tA^tS^t\overline{B}) \overset{\operatorname{Spur}(CD)=\operatorname{Spur}(DC)}{=} \operatorname{Spur}(A^tS^t\overline{B}(S^{-1})^t),\end{aligned}$$

Das heißt, es muss $\overline{f^{ad}(B)} = S^t\overline{B}(S^{-1})^t$ gelten bzw. $f^{ad}(B) := \overline{S}^tB(\overline{S}^{-1})^t$.

(d) (i) Wir zeigen, dass $\left(\begin{smallmatrix} g^{\mathrm{ad}} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ die Definition von $f^{ad}$ erfüllt. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann gilt:

$$\left\langle \left(\begin{smallmatrix} g^{ad}(w) \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right\rangle = \langle g^{ad}(w), x\rangle \overset{\text{Def. } g^{ad}}{=} \langle w, g(x)\rangle = \left\langle w, f\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right)\right\rangle.$$

$\Rightarrow f^{ad} = \left(\begin{smallmatrix} g^{\mathrm{ad}} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(ii) Es gilt

$$\dim_{\mathbb{R}}\operatorname{Bild}(f^{ad}) \overset{\text{Form } f^{ad}}{=} \dim_{\mathbb{R}}\operatorname{Bild}(g^{ad}) \overset{VL}{=} \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Kern}(g)^{\perp}) = n - \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Kern}(g)).$$

**Aufgabe P40 (Charakterisierung unitärer Abbildungen in unitären Vektorräumen).**

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) Für alle $x, y \in V$ gilt

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\big).$$

(b) Sei $f : V \to V$ linear. Dann gilt

$$f \text{ unitär} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall v \in V : \|f(v)\| = \|v\|.$$

(c) Sei $f$ unitär. Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von $f$, so gilt $|\lambda| = 1$.

**Lösung:**

(a) Seien $x, y \in V$. Dann gilt

$$\begin{aligned}& \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 \\ =\ & \langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle + i\langle x+iy, x+iy\rangle - i\langle x-iy, x-iy\rangle \\ =\ & \big(\|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle\big) \\ & -\big(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \langle y, x\rangle - \langle x, y\rangle\big) \\ & +i\big(\|x\|^2 + \|y\|^2 + i\langle y, x\rangle - i\langle x, y\rangle\big) \\ & -i\big(\|x\|^2 + \|y\|^2 - i\langle y, x\rangle + i\langle x, y\rangle\big) \\ =\ & 2\langle y, x\rangle - 2\langle y, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + 2\langle x, y\rangle \\ =\ & 4\langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

(b) 
- „$\Rightarrow$“: Sei $v \in V$. Dann folgt

$$\|f(v)\|^2 = \langle f(v), f(v)\rangle \overset{\text{unitär}}{=} \langle v, v\rangle = \|v\|^2$$

- „$\Leftarrow$“: Seien $x, y \in V$. Dann folgt (Achtung: $f$ ist jetzt $\mathbb{C}$-linear!):

$$\begin{aligned}\langle f(x), f(y)\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x-y)\|^2 + i\|f(x+iy)\|^2 - i\|f(x-iy)\|^2\right) \\ &\overset{\|f(v)\|=\|v\|}{=} \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right) = \langle x, y\rangle\end{aligned}$$

(c) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ EW von $f$ und $v \in V\backslash\{0\}$ der dazugehörige EV, d.h. $f(v) = \lambda v$.
$\Longrightarrow \|v\| \overset{(b)}{=} \|f(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda|\|v\| \overset{\|v\|\neq 0}{\Longrightarrow} 1 = |\lambda|$.

---

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

**Homepage der Vorlesung:**
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`