UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Statistik I
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Wintersemester 2020/2021

7. Übungsblatt

Aufgabe 25	Aufgabe 26	Aufgabe 27	Aufgabe 28	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 25 (Berechnung von UMVU-Schätzern, 4 = 2 + 2 Punkte).

Gegeben sei ein statistisches Experiment $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta)$ sowie eine suffiziente und vollständige Statistik T für $\theta, g : \Theta \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und S^* der UMVU-Schätzer für $g(\theta)$, falls er existiert. Nach der Vorlesung gilt dann $S^* = h \circ T$, wobei h eine geeignete Abbildung ist. Neben der direkten Berechnung eines bedingten Erwartungswertes gibt es die folgenden weiteren Methoden, um S^* zu berechnen. Für beide Methoden ist es sinnvoll, zunächst die Verteilung von T zu bestimmen.

(i) *Koeffizientenvergleichsmethode*: Es gilt für alle $\theta \in \Theta : \int h(t)\, d\mathbb{P}_\theta^T = \mathbb{E}_\theta[h \circ T] = g(\theta)$. Nutzen Sie Koeffizientenvergleiche für Polynome oder den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, um daraus $h(t)$ zu bestimmen.

(ii) *Momentenmethode*: Berechnen Sie sukzessive $\mathbb{E}_\theta T^k$ für $k \in \mathbb{N}$ und versuchen Sie durch geeignete lineare Kombination der erhaltenen Werte und der Linearität des bedingten Erwartungswertes eine Abbildung h mit $\mathbb{E}_\theta[h \circ T] = g(\theta)$ zu finden.

Wenden Sie jeweils beide Methoden auf die folgenden beiden Modelle an:

(a) Sei $\mathbb{P}_\theta := U[0, \theta]^n$ mit Parameter $\theta > 0$. Bekanntermaßen ist $T(x_1, ..., x_n) = \max\{x_1, ..., x_n\}$ suffizient und vollständig für θ. Bestimmen Sie einen UMVU S^* für θ.

(b) Sei $\mathbb{P}_\theta :=$ Poi$(\theta)^n$ mit Parameter $\theta > 0$. Bekanntermaßen ist $T(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$ suffizient und vollständig für θ. Bestimmen Sie einen UMVU S^* für θ^2.

Aufgabe 26 (Nichtexistenz von U- und UMVU-Schätzern, 4 = 2 +2 Punkte).

In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass weder U-Schätzer noch UMVU-Schätzer immer existieren müssen.

(a) Gegeben sei das statistische Experiment $\mathcal{E} = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{P}_\theta = \text{Bin}(1, \theta)^n,\ \theta \in (0, 1))$. Zeigen Sie, dass hier für $g(\theta) = 1/\theta$ kein U-Schätzer existiert.
Hinweis: Zeigen Sie, dass ein solcher Schätzer $S(0, ..., 0) = \infty$ erfüllen müsste.

(b) Gegeben sei das statistische Experiment $\mathcal{E} = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{P}_\theta = U[\theta, \theta+1]^n,\ \theta \in [0, \frac{1}{2}])$ Zeigen Sie, dass für $g(\theta) = \theta + \frac{1}{2}$ kein UMVU-Schätzer existiert.
Hinweis: Betrachten Sie $S_0(x) := \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{x_i \geq 1\}}$ und $S_1(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{x_i \geq \frac{1}{2}\}}$. Zeigen Sie dann, dass für $\theta_0 = 0$ und $\theta_1 = \frac{1}{2}$, $\mathrm{Var}_\theta(S_i) = 0$, $i = 0, 1$, gilt, und folgern Sie daraus, dass der UMVU-Schätzer auf bestimmten Bereichen $x \in \mathbb{R}^n$ konstant sein müsste.

Aufgabe 27 (Charakterisierung und Eindeutigkeit von UMVU-Schätzern, 4 = 3 + 1 Punkte).

Sei $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta\}$ eine Familie von Verteilungen und S ein U-Schätzer für θ mit $\mathbb{E}_\theta[S^2] < \infty$ für alle $\theta \in \Theta$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt folgende Äquivalenz: S ist ein UMVU-Schätzer für θ genau dann, wenn für jeden U-Schätzer S' von 0 mit $\mathbb{E}_\theta[(S')^2] < \infty$ für alle $\theta \in \Theta$, $\mathbb{E}_\theta[SS'] = 0$ für alle $\theta \in \Theta$ gilt.

(b) Es gibt höchstens einen UMVU-Schätzer für θ.
Hinweis: Nehmen Sie an, es gäbe zwei UMVU-Schätzer S, $\tilde{S}$ und zeigen Sie $S = \tilde{S}$ $\mathbb{P}_\theta$-f.s. für alle $\theta \in \Theta$. Nutzen Sie ohne Beweis aus, dass für Zufallsvariablen X, Y mit Korrelation $\rho_\theta(X, Y) = 1$ ein Vektor $(a, b) \neq 0$ existiert mit $aX + bY = 0$ $\mathbb{P}_\theta$-f.s.

Aufgabe 28 (Verbindung zwischen UMVU- und MRE-Schätzern, 4 = 1 + 1.5 + 1.5 Punkte).

Sei $\mathcal{P} := \{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$ eine Lokationsfamilie von Verteilungen auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ mit Dichten p_θ bzgl. dem Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$, d.h. für alle $\theta \in \mathbb{R}$ gelte

$$p_\theta(x_1, ..., x_n) = p_0(x_1 - \theta, ..., x_n - \theta).$$

Weiter sei $L(\theta, s)$ eine lokationsinvariante Verlustfunktion und $R_\theta(\theta, S) := \mathbb{E}_\theta L(\theta, S)$. Dann heißt ein Schätzer $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für θ risiko-unverfälscht, falls

$$R_\theta(\theta, S) \leq R_\theta(\tilde{\theta}, S) \quad \forall \tilde{\theta} \neq \theta.$$

Zeigen Sie:

(a) Ist S ein MRE-Schätzer für θ, so ist S risiko-unverfälscht.
Hinweis: Für festes $\theta, \tilde{\theta}$ ist $\tilde{S} := S - (\theta - \tilde{\theta})$ ein weiterer lokationsäquivarianter Schätzer.

(b) Bei quadratischer Verlustfuntion ist jeder risiko-unverfälschte Schätzer S mit existierendem zweitem Moment, $\mathbb{E}_\theta[S^2] < \infty$, für alle θ erwartungstreu.

(c) Existiert bei quadratischer Verlustfunktion ein UMVU-Schätzer S für θ und ist S lokationsäquivariant, so ist S auch ein MRE-Schätzer.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **14.01.2021, 11:00 Uhr**.
Bitte geben Sie Ihre Lösungsvorschläge im PDF-Format ab. Es reicht, wenn eine der beiden Personen das Dokument hochlädt.
Wir wünschen Ihnen schöne Feiertage und einen guten Rutsch ins neue Jahr. Bleiben Sie gesund!

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/stat-ws2020/index.html`