Prof. Dr. Martin Kreuzer
Dipl.–Math. Holger Bluhm
Stefan Kühling

Abgabe: 05.02.2007, 12.30h

Logik / Logik für Informatiker
Übungsblatt 14 — Wiederholungsblatt

Wichtig: Die Übungsgruppen am 07.02.2007 finden jeweils zusammen statt.

Gruppe 1 und Gruppe 2:	08^{15} – 09^{45}	MB/E21 (Maschinenbaugebäude)
Gruppe 3 und Gruppe 4:	12^{15} – 13^{45}	HGI/HS5 (Campus Süd)

Aufgabe 1: (Gefährliche Montagearbeiten) **3 Punkte**

In einer Stahlbaufirma haben die Vorbereitungen für die Montage einer Brücke begonnen. Die vormontierten Baugruppen sollen mit Hilfe von Hydraulikpressen in die erforderliche Position gebracht werden. Bei einem dieser Montageschritte muss unbedingt *vermieden* werden, dass die Ventile zur Betätigung der Hydraulikpressen in eine der folgenden Konstellationen kommen:

1. Ventile A und B geschlossen.
2. Ventile A und C offen.
3. Ventil A geschlossen, und Ventile B oder C offen.
4. Ventil B geschlossen, und Ventile A oder C offen.

a) Stellen Sie eine aussagenlogische Formel auf, die die Regeln für *erlaubte* Konstellationen beschreibt.

b) Finden Sie alle erlaubten Konstellationen.

Aufgabe 2: (Backe, backe Kuchen) **4 Punkte**

Ein Bäcker möchte Rosinenbrötchen backen. Leider hat er nicht alle nötigen Zutaten (ihm fehlen die Rosinen), er kann jedoch einige vorhandene Zutaten gegen andere tauschen, und zwar:

$$\begin{aligned} \text{Mehl} + \text{Eier} &\rightarrow \text{Milch} + \text{Honig} \\ \text{Mandeln} + \text{Honig} &\rightarrow \text{Rosinen} \\ \text{Milch} + \text{Hefe} &\rightarrow \text{Mandeln} \end{aligned}$$

In großer Menge vorhanden sind Mehl, Eier und Hefe.

a) Übersetzen Sie die Aussagen in aussagenlogische Formeln und formulieren Sie die Frage, ob der Bäcker Rosinen erhält, als Unerfüllbarkeitsproblem.

b) Stellen Sie für die Formel aus a) ein PROLOG–Programm auf und zeigen Sie mittels SLD–Resolution, dass der Bäcker durch Tauschen Rosinen erhalten kann.

Aufgabe 3: (Indiana Jones auf der Jagd nach dem Goldenen Vlies) **5 Punkte**

Im verborgenen Tempel gelangt Indiana Jones schließlich zu einer verschlossenen Kammer. Vor dieser Kammer befindet sich eine Kiste mit metallenen Zylindern, die in Löcher passen, die in einem Kreis angeordnet in den Boden eingelassen sind. Die Zylinder gibt es in zwei Farben (*weiß* und *schwarz*) und in zwei Größen (*kurz* und *lang*). Um die Kammer zu öffnen sind die Zylinder auf die richtige Art und Weise in die Löcher zu stecken. Indiana Jones weiß, dass dabei folgende Regeln zu beachten sind:

1) Rechts von einem langen Zylinder muss ein schwarzer Zylinder sein.
2) Links von einem schwarzen Zylinder muss ein weißer Zylinder sein.

Indiana folgert, dass keine langen schwarzen Zylinder verwendet werden.

a) Formulieren Sie eine prädikatenlogische Formel mit Angabe der zugehörigen Struktur, deren Unerfüllbarkeit die Korrektheit von Indianas Folgerung zeigt.

b) Zeigen Sie, dass

$$F = \neg\left(\forall x : \left(\neg P\left(f\left(x\right)\right) \Rightarrow Q\left(x\right)\right) \wedge \neg\exists x : \left(P\left(x\right) \wedge P\left(f\left(x\right)\right)\right)\right) \vee \neg\exists x : \left(P\left(x\right) \wedge \neg Q\left(x\right)\right)$$

eine Tautologie ist.

c) Berechnen Sie jeweils für (i) und (ii) den allgemeinsten Unifikator bzw. begründen Sie, warum dies nicht möglich ist.

(i) $\{P(x,a), P(f(y), y)\}$
(ii) $\{P(x,y), P(y, g(x))\}$

Aufgabe 4: (Noethersch oder nicht Noethersch, das ist hier die Frage) **4 Punkte**

Gegeben seien die Gleichungen

F_1: $p(r(x)) = s(x)$,

F_2: $s(r(x)) = p(x)$,

F_3: $s(t(x)) = p(p(x))$,

F_4: $r(r(x)) = x$.

a) Zeigen Sie, dass das zu $M = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ gehörende Termersetzungssystem Noethersch und konfluent ist.

b) Zeigen Sie, dass aus diesen Gleichungen *nicht*

$$s(r(p(r(x)))) = s(p(r(r(x))))$$

folgt.

Aufgabe 5: (Der Fußball–Stammtisch) **4 Punkte**

An einem Fußball–Stammtisch wurden die folgenden Voraussagen getroffen:

1) „Bremen gewinnt alle restlichen Spiele.“

2) „Dortmund gewinnt nicht alle restlichen Spiele.“

3) „Wenn irgendwann einmal München nicht gewinnt, dann gewinnt in dieser Runde auch Bremen nicht.“

4) „Gewinnt München in einer Runde, so gewinnt in dieser Runde auch Dortmund.“

5) „In jeder Runde gewinnt mindestens eine der Mannschaften Bremen, Dortmund und München.“

a) Übersetzen Sie diese Aussagen in modallogische Formeln.

b) Zeigen Sie, dass sich einer der „Experten“ irrt, indem sie die Unerfüllbarkeit einer geeigneten modallogischen Formel mittels Tableauvervollständigungsalgorithmus zeigen.

Aufgabe 6: (Der Fußball–Stammtisch — einige Bierchen später) **4 Punkte**

Einige Stunden und etliche Glas Bier später wird am Stammtisch von Aufgabe 5 immer noch heiß diskutiert. Von den ursprünglichen Thesen wird nur eine aufrecht erhalten, die übrigen wurden in der Diskussion hinweggefegt oder sind inzwischen in Vergessenheit geraten. Die aktuellen Thesen über den Rest der Saison lauten nun:

1) „In jeder Runde gewinnt mindestens eine der Mannschaften Bremen, Hamburg und München.“

2) „Es wird ein Spieltag kommen, an dem München nicht gewinnt.“

3) „Danach wird ein Spieltag kommen, an dem Hamburg gewinnt, wenn Bremen gewinnt. Wenn hingegen Hamburg nicht gewinnt, dann gewinnt auch München nicht.“

Angenommen, obige Thesen sind korrekt. Zeigen Sie mit Hilfe des zeitlogischen Tableaukalküls, dass Hamburg an dem Spieltag in These 3 gewinnt.