

*10.2012-03.2013*

# **Grundlagen kompressibler Strömungen**

JUSTUS BENAD



**Inhalt**

<b>1</b>	<b>Zielsetzung .....</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen der Gasdynamik.....</b>	<b>3</b>
2.1	Der Energiesatz für ein Materielles Volumen .....	3
2.2	Der Energiesatz für einen Stromfaden .....	5
2.3	Die ideale Gasgleichung.....	7
2.4	Zur Irreversibilität von thermodynamischen Prozessen .....	9
2.5	Die Entropieungleichung.....	9
2.6	Die Gibbssche Gleichung.....	10
2.7	Die isentrope Zustandsänderung für ideale Gase .....	10
2.8	Schall und Schallausbreitung .....	11
2.8.1	Herleitung der Schallgeschwindigkeit.....	12
2.8.2	Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Höhe .....	13
2.8.3	Schallausbreitung, MACHscher Winkel.....	16
2.9	Die BERNOULLISCHE Gleichung für ein ideales Gas.....	17
2.9.1	Kritische Größen .....	18
2.9.2	Kompressibilitätseinfluss .....	19
2.9.3	Kompressibler Druckbeiwert.....	19
<b>3</b>	<b>Flächen-Geschwindigkeitsbeziehung, Verdichtungsstöße.....</b>	<b>20</b>
3.1	Die Flächen-Geschwindigkeitsbeziehung .....	20
3.2	Der senkrechte Verdichtungsstoß.....	22
3.3	Der schiefe Verdichtungsstoß.....	26
3.3.1	$\beta - \theta$ – Diagramm .....	27
3.3.2	Folgerungen aus dem $\beta - \theta$ – Diagramm.....	28
<b>4</b>	<b>Kompressible Potentialströmungen.....</b>	<b>30</b>
4.1	Linearisierung der Potentialgleichung & die PRANDTL-GLAUERT-ACKERETSCHKE Regel....	32
4.2	Ergänzungen zum vorhergehenden Kapitel.....	37
<b>5</b>	<b>Expansions- und Kompressionswellen .....</b>	<b>37</b>
5.1	Nutzen / Berechnungsmethode / Herleitung der Gleichungen .....	37
5.2	Ergebnisse / Anwendung.....	38
<b>6</b>	<b>Tragflügelaerodynamik im Transschall.....</b>	<b>39</b>
6.1	Kritische Machzahl.....	39
6.2	Änderung von $c_a$ & $c_w$ mit der Anströmmachzahl.....	39

---

6.3	Tragflügelpfeilung.....	40
6.4	Profileigenschaften im Transschall .....	40
6.5	Aerodynamische Auslegung transsonischer Profile .....	41
6.6	Profileinsatzgrenzen .....	41
6.7	Transsonische Flächenregel.....	41
<b>7</b>	<b>Stoß-Grenzschicht-Interferenzen.....</b>	<b>42</b>
7.1	Stoßinduzierte Ablösung .....	42
7.1.1	Turbulente Grenzschicht vor dem Stoß.....	42
7.1.2	Laminare Grenzschicht vor dem Stoß .....	42
7.1.3	Druckverläufe .....	42
7.2	Zusammenspiel von Stoßinduzierter- und Hinterkantenablösung.....	43
<b>8</b>	<b>Deltaflügel .....</b>	<b>43</b>
<b>9</b>	<b>Literaturverzeichnis.....</b>	<b>44</b>

## 1 Zielsetzung

Der folgende Text soll den Vorlesungsstoff des Moduls Aerodynamik 2 zusammenfassen. Nachdem sich die theoretischen Abhandlungen im ersten Teil der Zusammenfassungsreihe zur Aerodynamik vor allem mit inkompressiblen Strömungen beschäftigt haben, wird in diesem Text der Schwerpunkt nun auf den kompressiblen Strömungen liegen.

Dabei wird nicht nur das Skript zur Lehrveranstaltung (1) als Grundlage genommen, sondern vor allem das Werk „Strömungslehre“ von SCHADE und KUNZ(2).

## 2 Grundlagen der Gasdynamik

Im ersten Teil der Zusammenfassung soll ein kurzer Überblick über die wichtigsten Zusammenhänge der Gasdynamik gegeben werden. Dabei wird meist wie in (2) vorgegangen.

Auftreten kompressibler Strömungen:

- Gasströmungen mit großen Geschwindigkeitsgradienten (Gasdynamik)
- Gasströmungen mit großen zeitlichen Geschwindigkeitsänderungen (Akustik)
- Strömungen mit großen Höhenunterschieden im Schwerfeld oder Strömungen mit Temperatur- oder Konzentrationsgradienten

Die Phänomene der Gasdynamik lassen sich nicht mehr allein durch die Bilanzierung von Masse und Impuls lösen.

In der Mechanik wurde gezeigt, dass aus den NEWTONschen Axiomen direkt folgt, dass es eine Größe gibt, welche in einem abgeschlossenen System konstant bleibt. Man nennt sie Energie. Viele theoretische Untersuchungen aber vor allem unzählige Experimente zeigen, dass die Energie in einem abgeschlossenen System auch bei Prozessen, welche sich nicht mit Hilfe der Mechanik beschreiben lassen, konstant bleibt. Dieses Naturgesetz nennt man den ersten Hauptsatz der Thermodynamik. Nimmt man ihn als „richtig“ an, so kann man z.B. Grundgleichungen der Gasdynamik herleiten.

### 2.1 Der Energiesatz für ein Materielles Volumen

Die Änderung der kinetischen und inneren Energie eines Materiellen Volumens ist gleich der durch äußere Kräfte zugeführten Leistung und der Wärmezufuhr  $\dot{Q}$ .

Es ist die kinetische Energie eines Materiellen Volumens mit

$$E_K = \int \rho \frac{c^2}{2} dV \quad (2.1)$$

gegeben, die innere Energie ist

$$E_I = \int \rho u dV, \quad (2.2)$$

wobei  $u$  die spezifische innere Energie als Skalarfeld  $u = u(x, y, z)$  im Raum ist.

Die Leistung, welche einem endlichen Volumen durch äußere Kräfte zugeführt wird, berechnet sich mit

$$P = \int \underline{c} \cdot \rho \underline{f} dV + \oint \underline{c} \cdot \underline{\sigma} dA. \quad (2.3)$$

Die Wärmezufuhr setzt sich aus einem Anteil  $\dot{Q}_V$ , der Anteil der Wärmezufuhr, welcher jedem Massenelement durch chemische Reaktionen im Innern oder durch Strahlung hinzugefügt wird, und einem Anteil  $\dot{Q}_O$ , der Anteil der Wärmezufuhr welcher über die Begrenzung des Volumens „fließt“ (das ist kein materieller Fluss!).

Wärme ist halt in der Thermodynamik überhaupt die einzige Energieform, welche an ein materielles Volumen „übergeben“ werden kann. Mit der Temperatur  $T$  im Volumen hat die Wärme erst einmal nichts zu tun.

Es ergibt sich

$$\dot{Q} = \int \rho w dV - \int \underline{q} \cdot d\underline{A}. \quad (2.4)$$

$w$  ist die Wärmequellendichte und  $\underline{q}$  ist die Wärmestromdichte. Das negative Vorzeichen vor  $\dot{Q}_O$  kommt daher, da  $\underline{q}$  per Definition nach innen gerichtet ist.

Somit ist der Energiesatz für ein materielles Volumen gegeben mit

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left( \frac{c^2}{2} + u \right) dV = \int \rho \underline{c} \cdot \underline{f} dV + \oint \underline{c} \cdot \underline{\sigma} dA + \int \rho w dV - \int \underline{q} \cdot d\underline{A}. \quad (2.5)$$

Ist die Kraftdichte rotorfrei und unabhängig von der Zeit, so gilt  $\underline{f} = -\nabla U$  und damit kann geschrieben werden  $\int \rho \underline{c} \cdot \underline{f} dV = -\int \rho \underline{c} \cdot \nabla U dV$ . Da für die substantielle Ableitung von  $U$  gilt

$\frac{DU}{Dt} = \underline{c} \cdot \nabla U$  (Potential ist Zeitunabhängig, Schwerfeld), kann nun der Energiesatz für das materielle Volumen (2.5) geschrieben werden als

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left( U + \frac{c^2}{2} + u \right) dV = \oint \underline{c} \cdot \underline{\sigma} dA + \int \rho w dV - \int \underline{q} \cdot d\underline{A}. \quad (2.6)$$

Es ist nun also eine Gleichung gefunden worden, welche die Zunahme von potentieller, kinetischer und innerer Energie des materiellen Volumens durch die hinzugefügte Leistung und Wärme ausdrückt.

## 2.2 Der Energiesatz für einen Stromfaden

Zunächst soll die linke Seite von (2.6) für einen Stromfaden geschrieben werden.

Ein Stromfaden ist eine Stromröhre, bei der alle Strömungsgrößen über den Querschnitt konstant angesehen werden. Eine Stromröhre ist dadurch definiert, dass keine Teilchen durch ihren Mantel gehen. Sie ist nur für stationäre Strömungen durch Stromlinien begrenzt, ansonsten durch Streichlinien.

Mit der LEIBNIZregel für Parameterintegrale<sup>1</sup> kann geschrieben werden

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\tilde{V}} \rho \left( gz + \frac{c^2}{2} + u \right) dV \\ &= \frac{d}{dt} \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} \rho A \left( gz + \frac{c^2}{2} + u \right) ds \\ &= \int_{s_1}^{s_2} \frac{d}{dt} \left[ \rho A \left( gz + \frac{c^2}{2} + u \right) \right] ds + \dot{m}_2 \left( gz_2 + \frac{c_2^2}{2} + u_2 \right) - \dot{m}_1 \left( gz_1 + \frac{c_1^2}{2} + u_1 \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Mit dieser Umformung wird die Energiezunahme eines Stromfadenabschnitts in einem bestimmten Zeitpunkt beschrieben. Entlang einer Koordinate zu integrieren macht es möglich die Trennung zwischen zeitlichem Zuwachs und dem Zuwachs auf Grund der Bewegung einfach zu gestalten. Es kommt nun also eine Aussage heraus für einen konkreten nicht bewegten Abschnitt.

Die rechte Seite könnte natürlich einfach wie in (2.6) geschrieben übernommen werden, es wurde ja auf der linken Seite nur eine Umformung gemacht. Sie soll jedoch noch ein bisschen umgeschrieben werden.

Betrachtet man die Leistung, welche dem System allein durch Druck senkrecht auf der Manteloberfläche hinzu geführt wird, so kann man sie in eine Leistung  $P_{V\dot{A}}$  aufteilen, welche das Volumen ändert (z.B. Kolben), und in eine Leistung, die das Volumen nicht ändert  $P_T$  (z.B. Rührer).

Die Leistung an den Endflächen wird gesondert betrachtet. Sie ist

$$P_E = p_1 c_1 A_1 - p_2 c_2 A_2. \quad (2.8)$$

Das negative Vorzeichen im Vergleich zu dem Term in (2.6) kommt daher, dass der Druck konventionsgemäß in die entgegengesetzte Richtung der Spannung gerichtet ist.

Bezeichnet man auch die zugeführte Wärme mit Großbuchstaben ( $\dot{Q}_V$  - Anteil aufgrund von Wärmequellendichte,  $\dot{Q}_M$  - Anteil von Wärmestrom durch Mantel,  $\dot{Q}_E$  - Anteil von Wärmestrom

---


$$^1 \frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy + f(b(x), x) \cdot \frac{db(x)}{dx} - f(a(x), x) \cdot \frac{da(x)}{dx}.$$

(Beweis in der „Zusammenfassung der zusätzlichen Mathematik zur Strömungslehre“, Abschnitt 7.)

durch Endflächen) und benennt zudem noch die hinzugefügte Leistung durch Reibungskräfte mit  $P_D$ , so lautet der Energiesatz für einen Stromfaden:

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{d}{dt} \left[ \rho A \left( gz + \frac{c^2}{2} + u \right) \right] ds + \dot{m}_2 \left( gz_2 + \frac{c_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} + u_2 \right) - \dot{m}_1 \left( gz_1 + \frac{c_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} + u_1 \right) \quad (2.9)$$

$$= P_{VA} + P_T + P_D + \dot{Q}_V + \dot{Q}_M + \dot{Q}_E.$$

Mit einigen Einschränkungen lässt sich nun aus (2.9) die sogenannte BERNOULLISCHE Gleichung der Gasdynamik herleiten.

1. Man stelle sich einen Stromfaden vor, welcher ja bekanntlich aufgrund einer weiteren Annahme, konstante Strömungsgrößen entlang seiner Querschnitte aufweist. Verringert man nun den Querschnitt etwas, so ist die Geschwindigkeit inner- und außerhalb der Stromröhre gleich und es gibt am Mantel keine Reibung, welche Arbeit verrichtet.

*Lässt man den Querschnitt gegen null gehen, so wird z.B. im ebenen Fall schnell klar, dass die Geschwindigkeit ober- und unterhalb eines unendlich dünnen Fadens entweder gleich ist oder dass ihre Änderung nach oben sowie nach unten den gleichen Betrag aber das unterschiedliche Vorzeichen hat – in beiden Fällen entfällt die resultierende Reibkraft.*

$P_D$  tritt also nur an den Endflächen auf, und die Annahme soll nun sein, dass diese Leistung vernachlässigbar ist.

2. Die Strömung ist stationär, damit entfällt das instationäre Glied und eingehender und ausgehender Massenstrom sind gleich.
3. Die Strömung ist adiabat, das heißt es soll keine Wärme von außen hinzugefügt werden oder durch chemische Reaktionen im Innern entstehen.

Im Energiesatz fällt so unter anderem die Fläche weg und es ergibt sich

$$gz_2 + \frac{c_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} + u_2 = gz_1 + \frac{c_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} + u_1. \quad (2.10)$$

Diese Gleichung gilt nun entlang eines Stromfadenabschnitts, jedoch bei unendlich kleiner Fläche auch entlang einer Stromlinie.

Unter der Einführung der spezifischen Enthalpie

$$h := u + pv = u + \frac{p}{\rho} \quad (2.11)$$

kann die Gleichung (2.10) auch als

$$h + \frac{c^2}{2} + gz = const \quad (2.12)$$

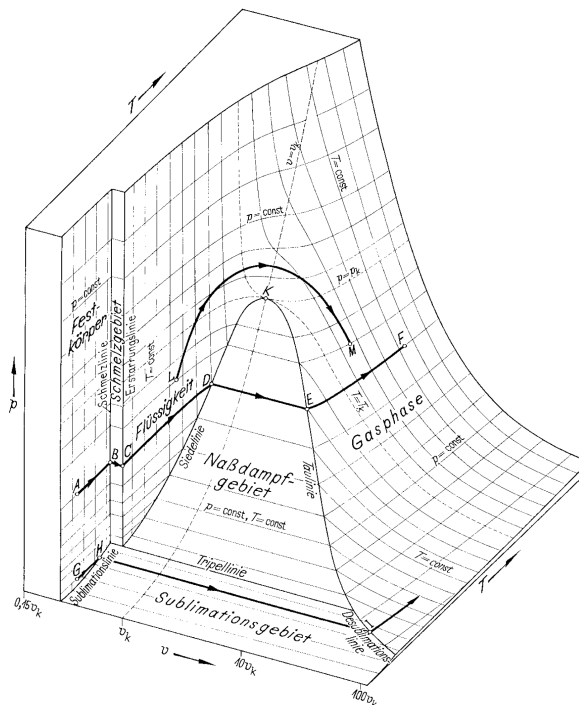
geschrieben werden. Sind  $h$ ,  $c$  und  $z$  also „Koordinaten“, welche zusammen in der Form von (2.12) z.B. eine Funktion  $F$  darstellen, so ändert sich diese Funktion nicht bei einer infinitesimalen Änderung in Koordinatenrichtung, da sie ständig konstant ist. Es ist deshalb

$$dF = \frac{\partial F}{\partial h} dh + \frac{\partial F}{\partial c} dc + \frac{\partial F}{\partial z} dz = dh + cdc + gdz = 0, \tag{2.13}$$

was eine weitere Formulierung von (2.12) - der BERNOULLISCHEN Gleichung der Gasdynamik - ist.

### 2.3 Die ideale Gasgleichung

In der Thermodynamik beschreibt man einen Stoff mit der Hilfe von Zustandsgrößen. Diese haben interessante Eigenschaften und Abhängigkeiten, wie man in Experimenten beobachten kann. Z.B. ist von einem bestimmten materiellen Volumen immer eine der drei Größen Druck  $p$ , spezifisches Volumen  $v$  und Temperatur  $T$  bekannt, insofern die zwei anderen gegeben sind. Für einen konkreten Stoff ergibt sich z.B. solch ein Diagramm(3):



Nun gibt es für bestimmte Stoffe in einem bestimmten Aggregatzustand ein Modell, welches diese Fläche gut wiedergibt: Das Modell des idealen Gases verknüpft  $p$ ,  $v$  und  $T$  eines Gases mit der Gleichung

$$\boxed{pv = RT}, \tag{2.14}$$

wobei  $R$  die spezifische Gaskonstante ist und für Luft

$$R = 287 \frac{J}{kgK} \tag{2.15}$$



beträgt. Längst nicht alle Gase lassen sich durch diese Gleichung gut beschreiben. Für einfache Anwendungsfälle reicht es jedoch aus, sie zunächst als gültig anzunehmen. Einschränkung werden an entsprechender Stelle deutlich gemacht.

In der Thermodynamik hat man außerdem festgestellt, dass zwei Zustandsgrößen nicht nur, wie im speziellen Fall oben, den Druck, die Temperatur, oder das spezifische Volumen, als dritte Zustandsgröße automatisch liefern, sondern dass sie z.B. auch die innere Energie eines bestimmten materiellen Volumens bestimmen.

Ganz allgemein kann man das natürlich mathematisch formulieren, man schreibt z.B.

$$du = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv. \quad (2.16)$$

*Diese Gleichung bedeutet keines Falles, dass die innere Energie nicht vom Druck abhängig wäre.* Er muss hier schlicht und einfach nicht mit erscheinen, da er wiederum eindeutig durch  $T$  und  $v$  bestimmt ist.

Für das Modell eines idealen Gases ist Gleichung (2.16) sehr einfach. Man hat herausgefunden, dass sie die Form

$$\boxed{du = c_v dT} \quad (2.17)$$

annimmt, wobei  $c_v = \text{const}$  gilt. Damit lässt sie sich sehr einfach als

$$u_2 - u_1 = c_v \cdot (T_2 - T_1) \quad (2.18)$$

schreiben. Man nennt (2.18) auch die kalorische Zustandsgleichung eines idealen Gases. Sie ist vollkommen gleichwertig mit einer nun folgenden Gleichung: Setzt man nach (2.11)  $h = u + pv$  und nach (2.14)  $pv = RT$ , so bekommt man

$$h_2 - h_1 = (R + c_v)(T_2 - T_1). \quad (2.19)$$

Setzt man nun

$$c_p = c_v + R, \quad (2.20)$$

so erhält man die zu (2.18) gleichwertige Gleichung

$$h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1). \quad (2.21)$$

Man bezeichnet  $c_v$  üblicherweise als isochore,  $c_p$  als isobare spezifische Wärmekapazität. Der Quotient

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} \quad (2.22)$$

ist natürlich für ein ideales Gas auch konstant - man nennt ihn Isentropenexponent.

## 2.4 Zur Irreversibilität von thermodynamischen Prozessen

In der Thermodynamik führt man eine Hilfsgröße ein, welche einem einen Aufschluss darüber geben kann, ob ein bestimmter Prozess überhaupt ablaufen kann oder nicht. Wärme (also Energie) wird z.B. nie von alleine von einem Reservoir niedriger Temperatur in ein Reservoir höherer Temperatur übergehen. So beobachten wir es in der Natur. In der Thermodynamik führt man deshalb eine weitere Zustandsgröße, die Entropie, ein. Diese ist so definiert, dass sie in einem bestimmten materiellen Volumen steigt, wenn Wärme hinzugefügt wird:

$$dS := \frac{1}{T} \cdot dQ. \quad (2.23)$$

Die Temperatur  $T$  des materiellen Volumens bestimmt bei dieser Definition wie stark der Anstieg der Entropie ist. Dieser Trick führt dazu, dass das oben beschriebene Naturgesetz stets eingehalten wird, insofern der gesamte Anstieg der Entropie in einem geschlossenen System stets positiv ist.

Um sich dies zu verdeutlichen betrachte man eine Kaffeetasse, welche in einem geschlossenen Raum auf einem Tisch steht. Sie besitzt im Ausgangszustand eine Temperatur  $T_1$  und der Raum um sie herum eine Temperatur  $T_2$ . Der Kaffee soll noch warm sein, es gilt also  $T_1 > T_2$ . Aus Erfahrung weiß man nun, dass sie sich abkühlen wird und die Raumtemperatur etwas zunimmt – es wird nicht passieren, dass sie eine höhere Temperatur erlangt während der Raum kälter wird. Ersterer Fall ist nach Definition (2.23) in der Tat mit einer Erhöhung der Entropie verbunden, letzterer nicht realistischer Fall mit einer Verringerung.

Wird der Raum aufgewärmt, so steigt seine Entropie z.B. um  $dS_{Raum} = \frac{1}{T_2} \cdot dQ$ , während die Entropie der Tasse

fällt mit  $dS_{Tasse} = -\frac{1}{T_1} \cdot dQ$ . Die Änderung der Entropie des Gesamtsystems ist

$$dS = dS_{Tasse} + dS_{Raum} = \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) dQ. \text{ Dieses Ergebnis ist größer als null. Für den zweiten Fall ist es kleiner.}$$

Letzterer kann also nicht eintreten.

Bei vielen Prozessen ist es nicht so einfach wie in diesem Beispiel den Überblick zu behalten. Deshalb definiert man formal nach (2.23) die Entropie, und kann diesen Zusammenhang bei komplizierteren Prozessen anwenden.

Natürlich steigt die Entropie nach dieser Definition bei jedem Prozess in einem geschlossenen System. Dies geschieht jedoch nicht nur durch den Übergang von Energie in Form von Wärme, sondern auch durch die Umwandlung von z.B. mechanischer Energie in Wärme (Reibung). Auch dies hat man in der Natur beobachtet. Möchte man all diese irreversiblen Effekte in einer Gleichung vernachlässigen, oder wird z.B. gerade soviel Wärme an die Umgebung abgeführt, so dass all die Irreversibilitäten ausgeglichen werden können, so kann man die Entstehung der Entropie auf null setzen. Dann hat man das Modell eines reversiblen („isentropen“) Prozesses.

## 2.5 Die Entropiegleichung

Man kann natürlich die Gleichung (2.23) noch etwas allgemeiner schreiben, in dem man eben ein konkretes materielles Volumen betrachtet und wie schon in (2.4) eine Unterscheidung der

zugeführten Wärme vornimmt. Nimmt man zudem noch an, dass auch weitere Irreversibilitäten im Innern des materiellen Volumens auftreten können, so kann man formal die folgende Gleichung schreiben:

$$\frac{d}{dt} \int_{\tilde{V}} \rho s dV \geq \int \frac{\rho w}{T} dV - \oint \frac{1}{T} \underline{q} \cdot d\underline{A}. \quad (2.24)$$

Für eine adiabate (ohne Wärmezufuhr oder -abfuhr) Strömung durch einen Stromfaden ergibt sich dann, wenn man die Bogenlänge mit  $l$  bezeichnet analog zu (2.7)

$$\int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial(\rho s A)}{\partial t} dl + \dot{m}_2 s_2 - \dot{m}_1 s_1 \geq 0. \quad (2.25)$$

Für stationäre Strömungen vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$s_2 - s_1 \geq 0. \quad (2.26)$$

## 2.6 Die Gibbssche Gleichung

Betrachtet man nun ein geschlossenes System in das Wärme übergeht und an dem Volumenänderungsarbeit verrichtet wird, so ergibt die Energiebilanz

$$dU = dQ - p dV. \quad (2.27)$$

Das betrachtete materielle Volumen wird also komprimiert, und ihm wird Wärme (auch z.B. durch Reibung) hinzugefügt. Mit (2.23) kann man nun, wenn man die Zustandsgrößen auf die Masse des materiellen Volumens bezieht, schreiben

$$du = T ds - p dv. \quad (2.28)$$

Dies ist die sogenannte GIBBSSche Fundamentalgleichung. Sie gilt nur im thermodynamischen Gleichgewicht, also dann, wenn sich die Zustandsgrößen nicht mit der Zeit und mit dem Ort ändern. Jedoch kann diese Abhängigkeit auch als gutes Modell für Strömungen dienen, wo sich ja in der Tat die Zustandsgrößen räumlich und zeitlich ändern. Man spricht dann von einer Strömung in einem lokalen thermodynamischen Gleichgewicht.

## 2.7 Die isentrope Zustandsänderung für ideale Gase

Es befinde sich nun eine Strömung in lokalem thermodynamischen Gleichgewicht. Alle kleinen materiellen Volumina innerhalb dieser Strömung sollen nun eine ganz bestimmte Zustandsänderung vollführen. Es wird davon ausgegangen, dass z.B. Energie, die durch Reibung in das Volumenelement kommen könnte, sofort in Form von Wärme wieder an die Umgebung abgegeben wird. In der Tat werden alle Irreversibilitäten direkt in Form von Wärme an die Umgebung abgegeben. Oder noch allgemeiner: Man nimmt an, es entsteht keine Entropie bei der Zustandsänderung. Dass dies nun natürlich noch ein gröberes Modell ist, leuchtet sofort ein. Die Energiebilanz (2.27) ist dann

$$dU = -p dV. \quad (2.29)$$

Dies kann man natürlich wieder spezifisch schreiben und außerdem die Zustandsgleichung für das ideale Gas benutzen.

$$\begin{aligned}
 0 &= du + pdv \\
 &= c_v dT + RT \frac{dv}{v} \\
 &= c_v dT + RT \left( \frac{dT}{T} - \frac{dp}{p} \right) \\
 &= c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p},
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

wobei hier benutzt wurde, dass  $\frac{dp}{p} + \frac{dv}{v} - \frac{dT}{T} = 0$  gilt, was direkt und z.B. nach totalem Differenzieren aus der idealen Gasgleichung folgt.

Durch Umstellen erhält man aus (2.30) die Gleichung

$$\kappa \frac{dT}{T} = (\kappa - 1) \frac{dp}{p}. \tag{2.31}$$

Durch Integration erhält man

$$\boxed{\kappa \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) = (\kappa - 1) \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) \rightarrow \frac{p^{\kappa-1}}{T^\kappa} = const.} \tag{2.32}$$

Letzteren Zusammenhang nennt man die Isentropengleichung. Mit ihr hat man nun neben der idealen Gasgleichung eine weitere Gleichung zur Berechnung der Zustandsgrößen erhalten.

Eine kurze Zusammenfassung bis zu diesem Punkt:

Zunächst war das Dichtefeld der Strömung unbekannt. Die Dichte hängt aber von  $p$  und  $T$  ab. Für diese Abhängigkeit wurde die ideale Gasgleichung herangezogen. Damit war nun zwar  $\rho$  nicht mehr gesucht, aber nun das Temperaturfeld. Über die kalorische Gleichung für ideale Gase wurde nun das gesuchte Temperaturfeld durch das Feld der inneren Energie ersetzt. Dieses war aber immer noch nicht bekannt. Erst der letzte Schritt, nämlich das Aufstellen einer Bilanzgleichung, führte dazu, dass man einen Anstieg der inneren Energie in diesem Fall (isentrop) eindeutig mit einer einfachen Volumenänderung durch Druck verknüpfen konnte.

## 2.8 Schall und Schallausbreitung

Es soll im Folgenden zunächst die Geschwindigkeit des Schalls  $a$  hergeleitet werden. Eine Verdichtung der Luft in einem bestimmten Gebiet führt zu einem Anstieg des Drucks auf ein benachbartes Gebiet. Es folgt eine Bewegung und es kommt wiederum zu einem Dichteanstieg, nun in einigem Abstand zum ersten Gebiet. So bewegt sich eine Druck- und Dichteänderung fort, man nennt sie Schall.

### 2.8.1 Herleitung der Schallgeschwindigkeit

Man benötigt beim Schreiben der Masse- und Impulserhaltung dieses Problems eine wichtige Größe. Man muss wissen, wie stark der Druck in einem infinitesimal kleinen materiellen Volumen mit der Dichte zunimmt. Für einen isentropen Vorgang findet man mit (2.31) und (2.14) zunächst

$$\frac{dp}{p} = \kappa \frac{d\rho}{\rho}, \quad (2.33)$$

woraus man dann wiederum mit (2.14) erhält, dass

$$\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \kappa RT \quad (2.34)$$

gilt. In dieser Gleichung hat man mit Hilfe der partiellen Ableitung noch einmal besonders betont, dass es sich hierbei um eine isentrope Zustandsänderung handelt.

Nimmt man nun an, dass es in der Tat eine annähernd isentrope Zustandsänderung gibt, also dass erstens bei den sehr kleinen Druckänderungen des Schalls thermodynamisches Gleichgewicht herrscht und dass zweitens die Zustandsänderung ohne Irreversibilitäten abläuft, kann man im Folgenden Gleichung (2.34) verwenden. Das Ergebnis stimmt sehr gut mit Experimenten überein und allein das rechtfertigt die Annahmen an dieser Stelle.

Der einfachste Weg der Herleitung ergibt sich, wenn man annimmt, dass sich der Schall mit konstanter Geschwindigkeit ausbreitet. Dass dies (unter den obigen Annahmen) korrekt ist wissen wir, jedoch muss man es eigentlich noch zeigen. Dies soll im Anschluss geschehen.

Nimmt man jedoch zunächst an, dass sich eine Schallwelle mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, so kann man für ein mit der Strömung bewegtes System die Kontinuitätsgleichung schreiben, es ist  $\rho c = \text{const}$  und dies lässt sich schreiben als

$$\rho dc + c d\rho = 0. \quad (2.35)$$

Der Impulssatz in horizontaler Richtung ist dann einfach  $\rho c^2 + p = \text{const}$  und dies lässt sich schreiben als

$$2c\rho dc + c^2 d\rho + dp = 0. \quad (2.36)$$

Subtrahiert man von letzterer Gleichung das 2c-fache von (2.35), so ergibt sich

$$c^2 = a^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (2.37)$$

und damit ist die Schallgeschwindigkeit mit (2.34) gegeben mit

$$\boxed{a = \sqrt{\kappa RT}}. \quad (2.38)$$

Bei der Herleitung wurde vorausgesetzt, dass sich die Welle mit konstanter Geschwindigkeit ausbreitet. Dies ist vielleicht nicht sofort einleuchtend. Es muss jedoch so sein. In der Tat ergibt sich für die Ausbreitung von Schall die exakt gleiche Wellengleichung, welche schon aus der Kontinuumsmechanik bekannt ist (longitudinal Schwingungen in Stäben).

Beweis:

Für die Massenerhaltung eines infinitesimalen Volumenelements gilt  $\rho_0 dx = (\rho_0 + d\rho) \cdot \left( dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)$ , wobei  $u(x, t)$  die Verschiebung aus der Gleichgewichtslage ist. Die zweite Klammer ist hier die neue Länge des Elements an einem anderen Ort zu einer späteren Zeit und die erste Klammer ist die neue Dichte an einem anderen Ort zu einer anderen Zeit. Um sich den Grenzübergang zu verdeutlichen ist es sinnvoll sich den Term noch einmal so zu schreiben:  $\rho_0 dx = (\rho_0 + d\rho) \cdot \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx$ . Lässt man die Zeit gegen null gehen, so sieht man, dass  $\frac{\partial u}{\partial x}$

gegen null gehen muss, und damit entfällt beim Grenzübergang der Term  $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot d\rho \cdot dx$ . lässt sich dann sogar kürzen, kann aber natürlich auch unendlich klein sein – so ergibt sich, dass  $d\rho = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}$  ist. Für die Bewegungsgleichung ergibt sich damit

$$\rho_0 \ddot{u} = -\frac{\partial p}{\partial x} = -\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ oder anderes geschrieben}$$

$$\ddot{u} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s u'' . \tag{2.39}$$

Dies ist die allgemeine Wellengleichung und es ist aus der Kontinuumsmechanik bekannt, dass sich eine solche Welle mit der konstanten Geschwindigkeit  $c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$  fortbewegt. Dies liegt daran, dass der D’ALEMBERTSche Ansatz  $u(x, t) = f(x + ct) - g(x - ct)$  die allgemeine Lösung der Gleichung (2.39) ist. Diesen Beweis findet man z.B. in (4) ganz am Anfang auf Seite 1.

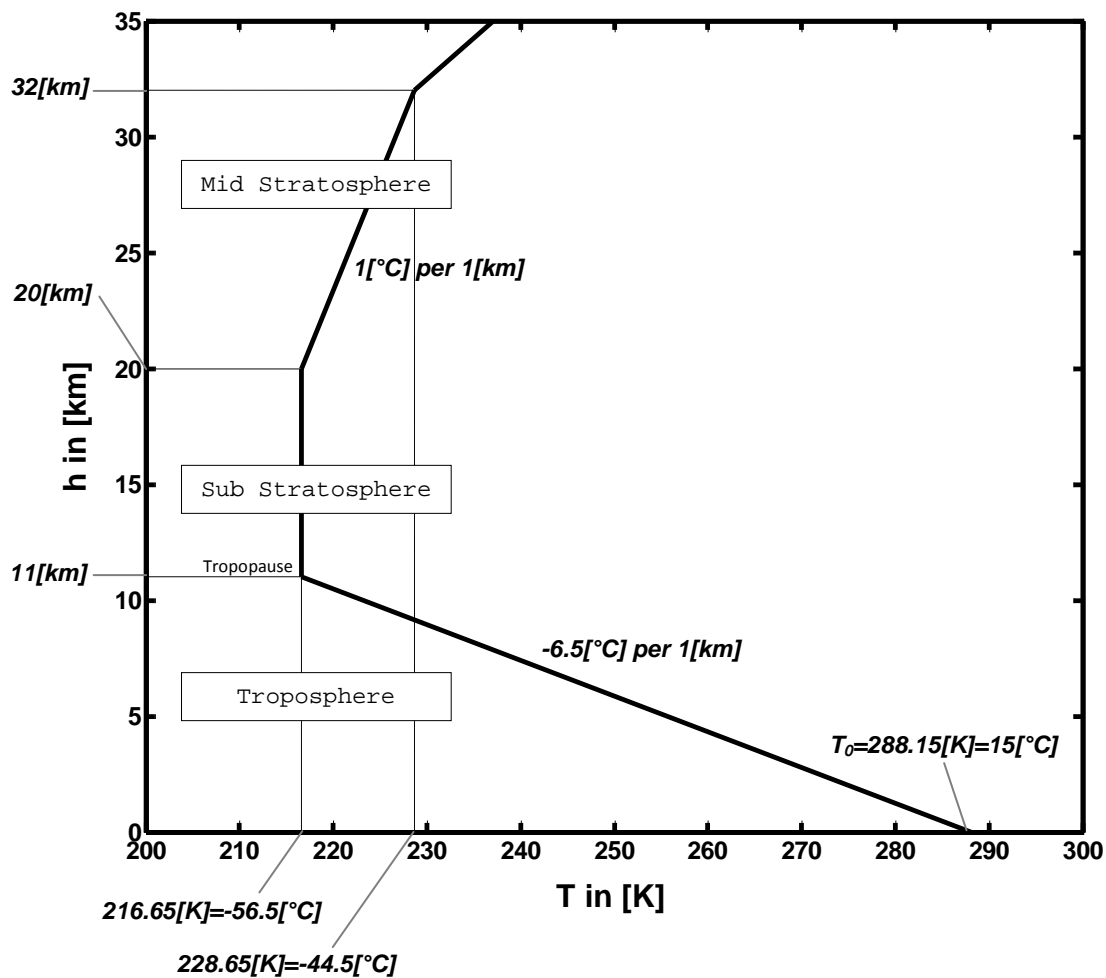
**2.8.2 Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Höhe**

Ein gutes Modell zur Berechnung der Schallgeschwindigkeit ist nun also mit (2.38) bekannt, für die an dieser Stelle relevanten Anwendungen scheint sie nur abhängig von der Temperatur zu sein.

Da die Temperatur der Atmosphäre sich bekanntlich mit der Höhe ändert, soll hier nun kurz die ISA Standard Atmosphäre vorgestellt werden, da sie eindeutig Temperatur und Druckverlauf festlegt und somit das Vergleichen und Bewerten von Ergebnissen sehr einfach möglich macht.

**2.8.2.1 Die Normalatmosphäre (ISA)**

ISA steht für „International Standard Atmosphere“. Sie ist durch ein gegebenes Temperaturprofil gekennzeichnet, ferner wird die Erdbeschleunigung als konstant angekommen ( $g = 9.80665 m / s^2$ ) und Luft kann als ideales Gas modelliert werden. Es gilt das folgende Temperaturprofil:



Mit diesem Temperaturprofil ist nun auch der Druck und die Dichte in Abhängigkeit von der Höhe bekannt:

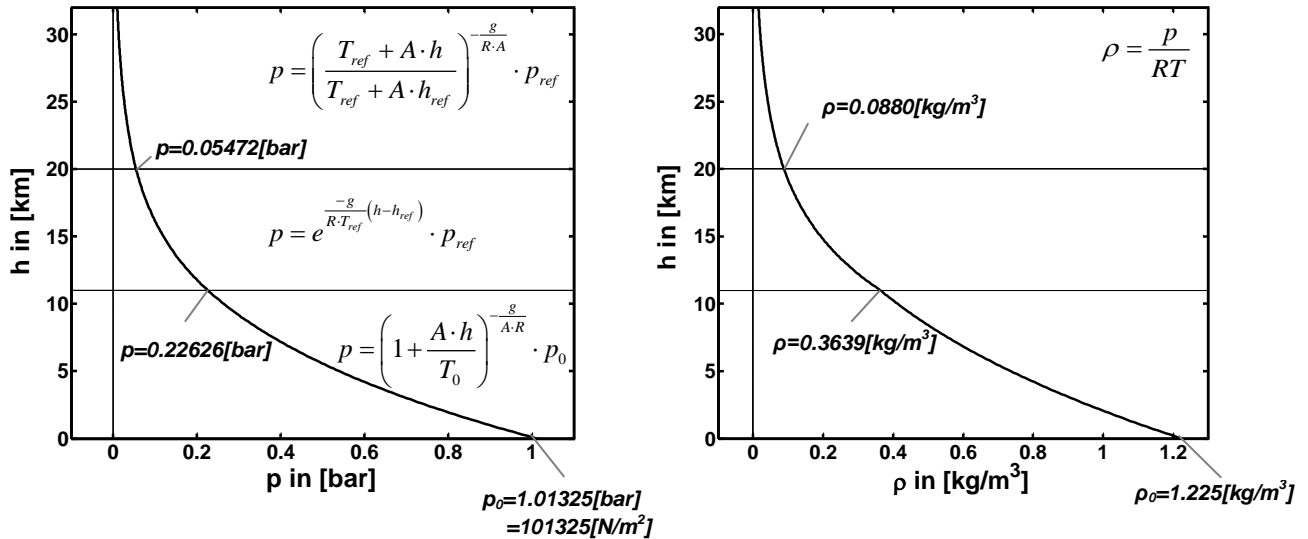
In der Zusammenfassung zur Strömungslehre (5) wurde in Kapitel 4 gezeigt, dass das EULERSche Grundgesetz der Hydrostatik,  $\rho f_i = \frac{\partial p}{\partial x_i}$ , nur erfüllt sein kann, wenn das Fluid inkompressibel ist oder barotrop geschichtet ist. Letzteres ist hier der Fall und es gilt für die z Komponente, da in diesem Fall gilt dass  $f = -g$ ,

$$-\rho g = \frac{dp}{dz}. \tag{2.40}$$

Für  $\rho$  wird nun die ideale Gasgleichung verwendet und dann gilt nach Trennung der Variablen und wenn der Anstieg der Temperatur mit der Höhe  $h$  als  $A$  bezeichnet wird

$$\frac{dp}{p} = \frac{-g}{R(T_{ref} + A \cdot h)} dh. \tag{2.41}$$

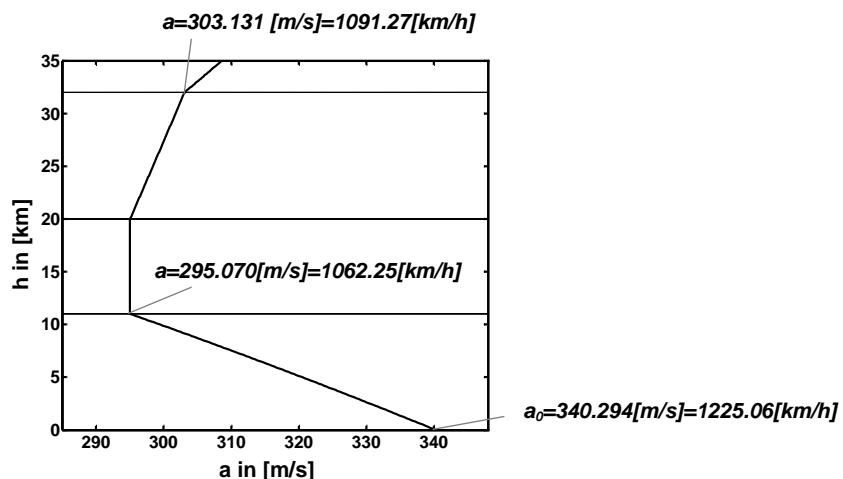
Diese Gleichung kann man nun für die verschiedenen Werte von  $A$  integrieren und es ergeben sich die folgenden Gleichungen und Verläufe<sup>1</sup>:



Die mit „ref“ gekennzeichneten Variablen beziehen sich auf die Endwerte der jeweiligen Größe im vorherigen Intervall. Eine Vereinfachung ist natürlich, dass die Erdbeschleunigung bei der Integration als konstant angenommen wurde.<sup>2</sup>

### 2.8.2.2 Änderung der Schallgeschwindigkeit in der Normalatmosphäre

Um den Verlauf der Schallgeschwindigkeit mit der Höhe zu bestimmen, ist nur der Temperaturverlauf notwendig. Man setzt ihn in die Gleichung (2.38) ein und es ergibt sich das folgende Diagramm.



<sup>1</sup> Ab einer Höhe von 20 km weichen die mit dieser Methode berechneten Werte etwas (<5%) von den von der ISA gegebenen Werten ab. Dies kann ich mir zu diesem Zeitpunkt noch nicht erklären. Die korrekten Werte findet man z.B. in Tabellenwerken zur ISA. Jedoch ermöglichen die hier gegebenen Formeln zumindest bis zu einer Höhe von 20 km eine perfekte Abschätzung.

<sup>2</sup> Die sogenannte „Geopotentielle Höhe“ ist die Höhe auf die man einen Körper heben müsste, um die gleiche potentielle Energie bei korrektem Verlauf der Erdbeschleunigung zu erreichen, wie man auf einer anderen Höhe hatte, jedoch in diesem Fall berechnet mit der konstanten Erdbeschleunigung. Mit diesem Maß kann man ungefähr einschätzen wie groß der Fehler ist, den man mit der Annahme eines konstanten Erdbeschleunigung macht, jedoch ist es keines Falls so, dass die mit dem vorgestellten Modell berechneten Zustandsgrößen in Wirklichkeit in der geopotentialen Höhe gelten.



Änderungen der Umgebungsbedingungen werden z.B. durch ein „Temperaturinkrement“ mit berücksichtigt. Der Druck- und Dichte Verlauf in der Standardatmosphäre bleibt immer gleich, ISA+15 erhöht dann lediglich die Temperatur auf jeder Höhe um 15°C.

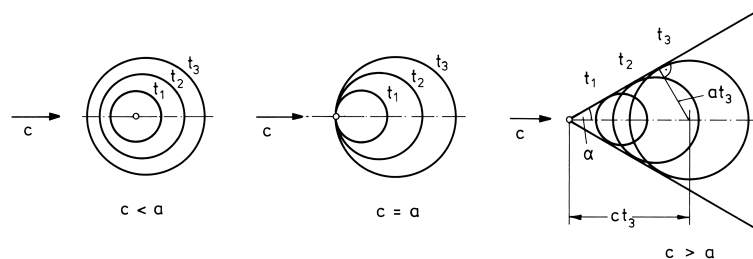
### 2.8.3 Schallausbreitung, MACHscher Winkel

Der zum Ende von 2.8.1 vorgestellte D’ALEMBERTSche Ansatz ist, wie in diesem Kapitel beschrieben wird, die allgemeine Lösung der Gleichung (2.39) und somit pflanzt sich eine Druckstörung als Änderung der Position von Teilchen um ihren Gleichgewichtspunkt fort. Diese Fortpflanzung geschieht mit der Geschwindigkeit  $a$ , welche in (2.38) berechnet wird.

Flächen gleicher momentaner Abweichungen von der Ruhelage nennt man Wellenfronten. Befindet sich also eine punktförmige Schallquelle im Raum, so liegen die Wellenfronten auf konzentrischen Kugeln um die Punktquelle.

Es gibt hier nun natürlich nicht nur eine „Störung“ z.B. in Form einer Einzelnen Druckerhöhung und -verringern, sondern ein komplettes Soundsignal, welches die Rolle der Funktion  $f_1$  oder  $f_2$  annimmt und sich mit  $a$  fortbewegt. Innerhalb dieses Signales durchlaufen die Teilchen z.B. mehrmals den Gleichgewichtspunkt, hier könnte man also z.B. die „Wellenfronten“ hindurchführen.

Wird die Punktquelle nun mit der Geschwindigkeit  $c$  angeströmt, so ergibt sich das folgende Bild(2):



Ist  $c > a$  so bildet sich der sogenannte MACHsche Kegel, welcher nach der Skizze einen Öffnungswinkel von

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{1}{Ma} \tag{2.42}$$

hat, wobei  $Ma$  die Machzahl ist, welche eine Geschwindigkeit mit Hilfe der örtlichen Schallgeschwindigkeit misst.

Experimentell kann man den Kegel z.B. durch ein an einer durchlöchernten Wand vorbeifliegendes Projektil sichtbar machen. Das Projektil verursacht eine lokale Druckstörungen, welche sich durch die Schlitze ausbreiten können und somit den Kegel bilden. Die „Schlieren-Technik“ wird verwendet, um Dichteänderung (Änderungen des Brechungswinkels) dieser Art fotografisch festzuhalten.

## 2.9 Die BERNOULLISCHE Gleichung für ein ideales Gas

Es sollen nun – wie schon angekündigt – die ideale Gasgleichung, die kalorischen Gleichungen und die Isentropengleichung in die BERNOULLISCHE Gleichung der Gasdynamik (2.12) eingesetzt werden um so die Strömungsgrößen zwischen zwei Punkten in einer stationären adiabaten Strömung berechnen zu können.

Zunächst nehmen wir an, dass es sich bei der Strömung um ein ideales Gas handelt. Dann wird (2.12) mit (2.15) und (2.21) zu

$$\frac{p}{R\rho}c_p + \frac{c^2}{2} + gz = const. \quad (2.43)$$

Diese Gleichung darf nur geschrieben werden, da hier ein einfacher stationärer Vorgang vorliegt, bei dem die Energie eines Abschnittes um die Energie eines einströmenden dm erhöht wird und um die Energie eines ausströmenden dm verringert wird. Während der Durchströmung des Abschnittes vollzieht dieses infinitesimale materielle Volumen eine Enthalpieänderung und somit auch eine Temperaturänderung.

Nun kann unter der Annahme, dass sich die Schallgeschwindigkeit nach (2.38) berechnen lässt, die Gleichung (2.44) umgeschrieben werden.

$$\frac{a^2}{\kappa - 1} + \frac{c^2}{2} + gz = const. \quad (2.45)$$

Aus dieser Gleichung folgt sofort unter Vernachlässigung von dem Höhenunterschied und unter Kennzeichnung des Staupunktes mit dem Index 0

$$\boxed{\left(\frac{a_0}{a}\right)^2 = \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2}. \quad (2.46)$$

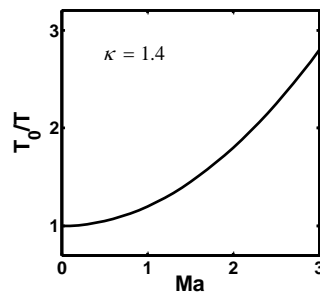
Bisher wurde bei der Änderung der Strömungsgrößen von einem Punkt zum anderen Punkt noch keine Isentropie voraus gesetzt. Lediglich die Schallgeschwindigkeit wurde unter Annahme einer isentropen Zustandsänderung berechnet. Nun soll auch erst genanntes geschehen.

Für einen isentropen Vorgang ergibt sich mit (2.32)

$$\boxed{\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}, \quad (2.47)$$

$$\boxed{\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}}. \quad (2.48)$$

Man kann z.B. mit Gleichung (2.46) die Temperatur in einer Strömung messen, in dem man die Luft an einem Thermoelement oder einem Widerstandsthermometer aufstaut und die gemessene Temperatur im Staupunkt  $T_0$  auf die statische Temperatur  $T$  zurückrechnet. Man kann die Gleichung in einem Diagramm darstellen und es ergibt sich folgendes Bild:



Von den drei obigen Gleichungen spricht man oft auch mit dem Begriff des isentropen Aufstaus.

### 2.9.1 Kritische Größen

Setzt man in Gleichung (2.46), (2.47) und (2.48) die Geschwindigkeit außerhalb des Staupunktes auf die Schallgeschwindigkeit und kennzeichnet die jeweilige Strömungsgröße dort mit einem Sternchen, so ergibt sich für Luft

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\kappa + 1} = \frac{5}{6} \approx 0.83 \tag{2.49}$$

$$\frac{p^*}{p_0} = \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \approx 0.53 \tag{2.50}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \approx 0.63. \tag{2.51}$$

Diese Größen kann man z.B. als Verhältnis der jeweiligen Strömungsgröße außer- und innerhalb eines Kessels sehen, damit beim Ausfluss gerade Überschall auftritt. Eine andere, in der Aerodynamik wichtige Anwendung ist die folgende:

Es ist nun möglich unter Kenntnis der Machzahl und einer weiteren Strömungsgröße in einem Punkt die Machzahl in einem anderen Punkt zu bestimmen, wenn dort eine weitere Strömungsgröße gegeben ist oder die Strömungsgröße zu bestimmen, wenn dort die Machzahl gegeben ist. Es existieren also genau die gleichen Möglichkeiten die die Bernoulligleichung für inkompressible Fluide für Druck und Geschwindigkeit geboten hat, nur dass der Druck nun eindeutig auch mit Dichte und Temperatur verknüpft ist.

Bei bekannter Anströmmachzahl und bekanntem statischem Druck der Umgebung kann nun also z.B. eine beliebige Strömungsgröße in einem Punkt nahe eines Profils berechnet werden, wenn man dort eine bestimmte Machzahl vorgibt. Interessant ist natürlich der Bereich, wo es zu einer Überschallströmung kommt, also wo  $Ma=1$  ist. Die Gleichung dafür findet man, wenn man in (2.45) nicht sofort die Geschwindigkeit auf null setzt, sondern ganz

formal umstellt zu  $T_1/T_2 = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_1^2 \Big/ 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_2^2$ . Diese Gleichung kann

natürlich mit der Forderung nach Isentropie wiederum für den Druck und die Dichte geschrieben werden. An der Struktur der obigen Gleichung kann man sofort sehen, dass man auch die Strömungsgrößen zweier Punkte welche nicht auf einer Stromlinie liegen gerade eben mit dieser Gleichung berechnen kann. Zur Erklärung soll die

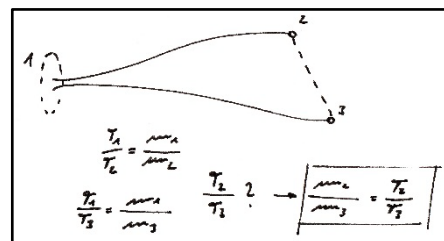
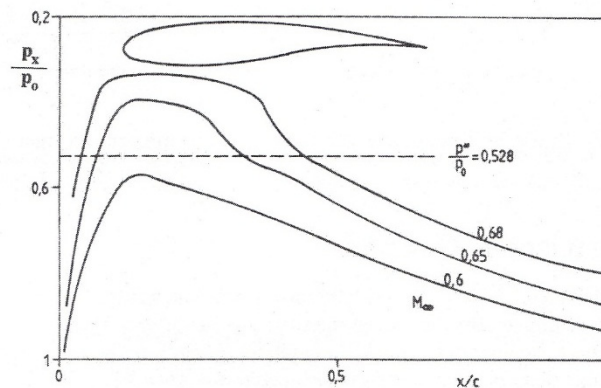


Abbildung auf der rechten Seite hilfreich sein. Kurz und gut heißt das nun: Die Verhältnisse (2.49), (2.50) und (2.51) können verwendet werden um bei einer bekannten Strömungsgröße im Staupunkt die Strömungsgröße dort zu berechnen, wo  $Ma=1$  herrscht. Ist also z.B. bei einer gemessenen Druckverteilung der lokale Druck auf den Staupunkt normiert worden, so kann man bei Unterschreitung des kritischen Verhältnisses sofort schlussfolgern, dass an dieser Stelle ein Überschallgebiet beginnt.

Die folgende Abbildung(1) zeigt wie die Kenntnis kritischer Größen helfen kann, Überschallgebiete zu identifizieren:



### 2.9.2 Kompressibilitätseinfluss

Es ist nun z.B. mit Gleichung (2.48) möglich, die prozentuale Änderung der Dichte vom Umgebungswert bei einer Strömung auf einen Staupunkt bei bestimmten Machzahl auszurechnen.

Man findet die folgende Tabelle:

Normalbedingungen:		
rho	1,225	kg/m <sup>3</sup>
kappa	1,4	-
a	340,3	m/s
c in m/s	Ma	(rho_stau-rho)/rho
0	0,00	0,00%
50	0,15	1,08%
100	0,29	4,37%
150	0,44	10,00%

Genauere Betrachtungen zeigen, dass der Betrag der prozentuale Abweichung vom Umgebungsdruck im Staupunkt und der Saugspitze addiert ungefähr einen Wert von 5% bei Ma=0.3 erreicht. Diese Machzahl wird also allgemein als Richtwert angegeben, ab dem Kompressibilitätseffekte berücksichtigt werden müssen.

### 2.9.3 Kompressibler Druckbeiwert

Mit Hilfe der idealen Gasgleichung sowie der Gleichung für die Schallgeschwindigkeit kann man es schaffen, die Dichte aus der Definition des Druckbeiwertes

$$c_p = \frac{p_x - p_\infty}{\frac{\rho_\infty u_\infty^2}{2}} \tag{2.52}$$

zu entfernen und stattdessen die Machzahl einzusetzen. Für diesen Fall ist natürlich nichts mehr auf den Staudruck normiert, da der Staudruck im kompressiblen Fall ja ganz anders, nach Gleichung (2.47), berechnet wird. Die folgende Gleichung ist also nur eine andere Schreibweise der Definition (2.52):

$$c_p = \frac{2}{\kappa M_\infty^2} \cdot \frac{p_x - p_\infty}{p_\infty} . \quad (2.53)$$

### 3 Flächen-Geschwindigkeitsbeziehung, Verdichtungsstöße

#### 3.1 Die Flächen-Geschwindigkeitsbeziehung

Im folgenden soll die Strömung in einer wirklichen Stromröhre untersucht werden – z.B. in einem Kanal. Die Vereinfachung ist hier natürlich wieder, dass alle Strömungsgrößen über den Querschnitt als konstant angenommen werden. Für eine Verengung des Querschnitts ergab sich für inkompressible Strömungen allein aus der Massenerhaltung direkt die Änderung der Geschwindigkeit. Es ist für den Fall

$$A \cdot c = const , \quad (3.1)$$

was sich mit Hilfe der Bernoulligleichung auch als

$$\frac{dp}{p} = \frac{\rho c^2}{p} \frac{dA}{A} \quad (3.2)$$

schreiben lässt.

Zu bemerken ist, dass der Faktor  $\rho c^2 / p$  das Reziproke der sogenannten Eulerzahl, einer dimensionslose Kennzahl, ist.

Für kompressible Strömungen lässt sich mit der großen Gesamtheit aller in den vorherigen Kapiteln getroffener Annahmen (ideales Gas, lokales thermodynamisches Gleichgewicht, isentrope Zustandsänderung, keine Reibung an Endflächen der Stromröhre) ein anderer Zusammenhang schreiben.

Die Bernoulligleichung (2.43) lässt sich mit den gängigen Umformungen für ideale Gase als

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} \left( \frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} \right) + cdc = 0 \quad (3.3)$$

schreiben. Mit Gleichung (2.33) für eine isentrope Zustandsänderung ergibt sich dann mit Verwendung der Schallgeschwindigkeit

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\text{Ma}^2 \frac{dc}{c}. \quad (3.4)$$

Wieder ist es eine dimensionslose Kennzahl, welche hier die relative Dichte- und Geschwindigkeitsänderung mit einander verbindet.

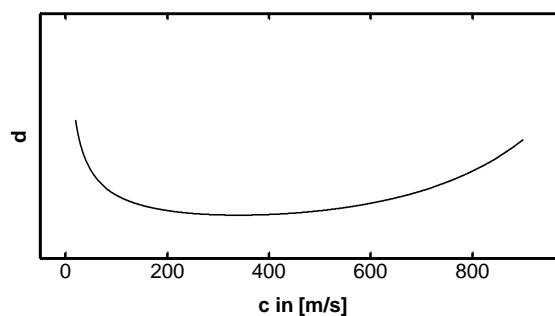
Setzt man diese Gleichung in die Gleichung der Massenerhaltung für eine kompressible Strömung in einem Stromfaden  $A\rho c = \text{const}$  ein, so erhält man die sogenannte Flächen-Geschwindigkeits-Beziehung

$$\boxed{\frac{dA}{A} = (\text{Ma}^2 - 1) \frac{dc}{c}}. \quad (3.5)$$

Diese Gleichung gibt eine konkrete Abhängigkeit der Fläche des Kanals von der Geschwindigkeit an. Wie diese Geschwindigkeit erreicht wird, und was für ein Druck dabei herrscht, das ist dieser Gleichung egal. Wenn es aber eine bestimmte Anfangsgeschwindigkeit gibt und die Massenerhaltung gelten soll (sowie alle anderen Annahmen: ideales Gas, lokales thermodynamisches Gleichgewicht, isentrope Zustandsänderung, keine Reibung an Endflächen der Stromröhre), dann gibt es die konkrete Abhängigkeit, welche sich aus (3.5) durch Integration bestimmen lässt mit

$$A(c) = e^{\left( \frac{c^2 - c_0^2}{2a^2} - \ln(c) + \ln(c_0) + \ln(A_0) \right)}. \quad (3.6)$$

Es ergibt sich der folgende Verlauf:



Ist die Geschwindigkeit also kleiner als die Schallgeschwindigkeit, so nimmt die Fläche bei einer Beschleunigung ab, ist sie größer, so nimmt die Fläche bei einer Beschleunigung zu. Ob in der Tat eine Beschleunigung statt finden kann hängt natürlich vom Druck ab.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Weiter soll an dieser Stelle nicht in die Dimensionsierungsproblematik von Lavaldüsen eingegangen werden. Eine erste Betrachtung dazu findet man z.B. in (2).

### 3.2 Der senkrechte Verdichtungsstoß

Man betrachte eine stationäre Strömung durch ein Rohr. Das Fluid im Rohr soll als Stromröhre modelliert werden. Alle Strömungsgrößen im ersten Querschnitt, also  $c_1$ ,  $\rho_1$ ,  $p_1$  und  $T_1$  sollen bekannt sein. Ändert sich die Dichte des Fluides nicht, so ist durch die Massenerhaltung auch die Strömungsgeschwindigkeit in jedem andern Querschnitt gegeben.

Ist die Strömung stationär, so ist dies also in der Tat die richtige Lösung in einem anderen Querschnitt, und diese stimmt nicht nur mit der Kontinuitätsgleichung, sondern auch mit dem Impulssatz und der Bernoulligleichung überein, wie gleich gezeigt wird. Letztere beiden Gleichungen lassen jedoch noch eine weitere Lösung zu – auch dies wird nun gezeigt.

Es werden folgende Gleichungen verwendet: Der Impulssatz

$$\rho_1 c_1^2 + p_1 = \rho_2 c_2^2 + p_2, \quad (3.7)$$

die Bernoulligleichung

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{c_1^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{c_2^2}{2} \quad (3.8)$$

und die Massenerhaltung

$$\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2. \quad (3.9)$$

Alle Strömungsgrößen im Querschnitt 1 sind gegeben. Es soll zunächst das Ziel sein, die Geschwindigkeit im zweiten Querschnitt zu berechnen.

Nach (3.9) gilt  $\frac{c_2}{c_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = C$ , wobei die Abkürzung „C“ im Folgenden zur Vereinfachung benutzt werden soll. Es lässt sich dann Gleichung (3.7) schreiben als

$$p_2 = p_1 + \rho_1 c_1^2 (1 - C), \quad (3.10)$$

und dieser Ausdruck in (3.8) eingesetzt ergibt  $\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{c_1^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} C + \frac{\kappa}{\kappa-1} c_1^2 C (1 - C) + C^2 \frac{c_1^2}{2}$ . Teilt man diesen Ausdruck durch die Schallgeschwindigkeit und klammert  $1 - C$  aus, so ergibt sich

$$(1 - C) \cdot \left[ \frac{1}{\kappa - 1} + (1 + C) \frac{\text{Ma}_1^2}{2} - \frac{\kappa}{\kappa - 1} C \text{Ma}_1^2 \right] = 0. \quad (3.11)$$

Diese Gleichung kann entweder erfüllt sein wenn der erste oder der zweite Term Null ist. Im ersten Fall bedeutet das, dass die Geschwindigkeit einfach konstant bleiben kann und dass damit weder Impuls- noch Energie- noch Massenerhaltung verletzt werden. Was passiert aber, wenn der zweite Term Null ist?

Mit der Abkürzung  $m = M_1^2 - 1$  und einigen Umformungen wird der zweite Term schließlich zu

$$\boxed{C = \frac{c_2}{c_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = 1 - \frac{2}{\kappa + 1} \cdot \frac{m}{m + 1}} \quad (3.12)$$

Das bedeutet aber, dass es entweder eine konkrete Geschwindigkeit  $c_2$  in einem anderen Querschnitt gibt, welche von  $c_1$  verschieden ist, oder dass die Geschwindigkeit gleich bleibt. Welcher Fall von beiden eintritt, kann man mit dieser Betrachtung nicht herausfinden. Eins jedoch ist sicher: Sollte es in einem Rohr an zwei Querschnitten unterschiedliche Strömungsgeschwindigkeiten geben, dann muss dazwischen eine sprunghafte Änderung der Geschwindigkeit liegen, denn: Würde die Geschwindigkeit sich allmählich ändern, so würde Gleichung (3.12) nur in zwei Punkten gelten können, aber nicht entlang des ganzen Rohres. Es wurde ja zu keiner Zeit ein Abstand der beiden Querschnitte eingeführt. Das heißt, dass die einzig mögliche Änderung eine sprunghafte Änderung ist. Außerdem kann es nicht zwei oder mehrere solcher sprunghaften Änderungen hintereinander geben. Eine solche Änderung nennt man Verdichtungsstoß.

Ist der Zusammenhang (3.12) gefunden, so lassen sich auch alle weiteren Zustandsgrößen berechnen.

Teilt man (3.10) durch  $p_1$  und setzt für  $C$  (3.12) ein, so erhält man nach etwas Umstellen

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} m} \quad (3.13)$$

Mit der idealen Gasgleichung folgt sofort aus (3.13) und (3.9)

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \frac{a_2^2}{a_1^2} = \left(1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} m\right) \left(1 - \frac{2}{\kappa + 1} \cdot \frac{m}{m + 1}\right)} \quad (3.14)$$

Da der Zusammenhang für die Schallgeschwindigkeit gefunden ist und der Zusammenhang für die Strömungsgeschwindigkeit auch bekannt ist kann nun also auch die Gleichung für die Machzahl geschrieben werden. Es ist

$$\boxed{\frac{\text{Ma}_2}{\text{Ma}_1} = \sqrt{\frac{\kappa + 1 + (\kappa - 1)m}{(1 + m)(\kappa + 1 + 2\kappa m)}}} \quad (3.15)$$

Es ist nun sogar möglich, die Änderung der Entropie zwischen den zwei Querschnitten zu berechnen. Dafür muss man sich noch einmal klarmachen, dass sich die materiellen Volumina  $dm$  welche stationär durch die Stromröhre strömen, modellhaft einer Zustandsänderung im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht unterziehen. Diese ist dann nach (2.28) und mit der Definition für die Enthalpie sowie mit der idealen Gasgleichung gegeben

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \quad (3.16)$$



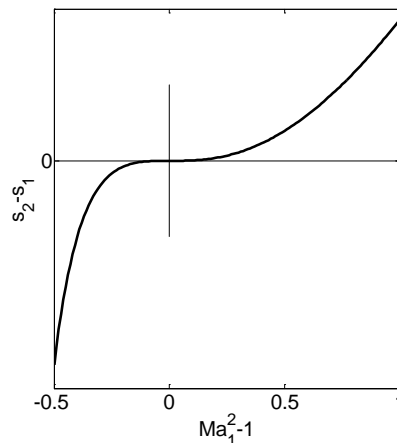
Diese Gleichung kann man genau wie im zwei dimensionalen Fall hier nun über drei Koordinatenrichtungen integrieren und erhält

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{p_2}{p_1}. \quad (3.17)$$

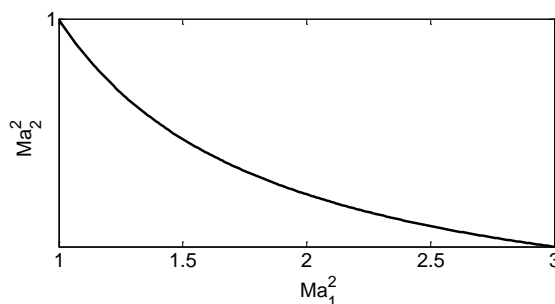
Setzt man in diese Gleichung (3.13) und (3.14) ein, so ergibt sich nach langer Rechnung

$$s_2 - s_1 = \frac{R}{\kappa - 1} \left[ \ln \left( 1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} m \right) + \kappa \ln \left( \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} m \right) - \kappa \ln(1 + m) \right]. \quad (3.18)$$

Da nach (2.26) die Änderung der Entropie nur positiv sein kann, tritt der Verdichtungsstoß nur auf, wenn die Anströmgeschwindigkeit gerade größer als die Schallgeschwindigkeit ist. Das zeigt der folgende Plot der Gleichung (3.18). Der formale Beweis dieser Tatsache ist in (2) zu finden.



Dies hat zur Folge, dass im Unterschall nie ein Verdichtungsstoß auftritt, und dass, wenn er im Überschall auftritt, die Geschwindigkeit im zweiten Querschnitt wieder im Unterschallbereich liegt. Das zeigt ein Plot von (3.15):



Es gelten außerdem die folgenden Relationen:

$$\begin{array}{l}
 c_1 > c_2, \quad \text{Ma}_1 > 1, \quad \text{Ma}_2 < 1, \\
 \rho_1 < \rho_2, \quad p_1 < p_2, \quad T_1 < T_2, \quad a_1 < a_2, \\
 s_2 - s_1 > 0.
 \end{array}
 \tag{3.19}$$

Wichtig ist auch, was mit den in 2.9 eingeführten „Ruhgrößen“ vor und hinter dem Verdichtungsstoß geschieht. Für die Temperatur folgt dies ganz einfach aus der Bernoulligleichung, welche ja in (3.8) zur Herleitung der Beziehungen des Verdichtungsstoßes verwendet wurde. Sie lässt sich auch schreiben als

$$c_p \cdot T_1 + \frac{c_1^2}{2} = c_p \cdot T_2 + \frac{c_2^2}{2}, \tag{3.20}$$

und da die Ruhegrößen im Staupunkt bei der Geschwindigkeit  $c = 0$  errechnet werden ergibt sich

$$T_{0,1} = T_{0,2}. \tag{3.21}$$

Die Verhältnisse der Ruhedrucke bekommt man mit einer trickreichen Umformung: Aus (3.17) folgt (da diese Gleichung entlang aller hier betrachteten Pfade gilt)

$$s_{0,2} - s_{0,1} = c_p \ln \frac{T_{0,2}}{T_{0,1}} + R \ln \frac{p_{0,2}}{p_{0,1}}. \tag{3.22}$$

Das ist aber mit (3.21) und unter der Berücksichtigung der Tatsache, dass die Entropie zwischen Strömungs- und Ruhegrößen auf einer Seite des Verdichtungsstoßes gleich bleibt,

$$s_2 - s_1 = R \ln \frac{p_{0,1}}{p_{0,2}}. \tag{3.23}$$

Nach etwas Umformarbeit erhält man dann aus (3.18) die Gleichung

$$s_2 - s_1 = R \ln \left[ \left( 1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1} m \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \left( 1 - \frac{2}{\kappa+1} \cdot \frac{m}{1+m} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \right]. \tag{3.24}$$

Durch Vergleichen mit (3.23) folgt unter der Berücksichtigung, dass man in (3.17) auch die Dichte hätte einsetzen können

$$\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} = \frac{\rho_{0,2}}{\rho_{0,1}} = \left( 1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1} m \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \left( 1 - \frac{2}{\kappa+1} \cdot \frac{m}{1+m} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}. \tag{3.25}$$

Der Gesamtdruck nimmt also ab. Obwohl die Energie über den Stoß konstant bleibt, findet eine Energieumwandlung statt, die aerodynamisch nicht nutzbar ist.

Sehr interessant ist eine Möglichkeit den geraden Verdichtungsstoß „künstlich“ zu erzeugen: Das Stoßrohr. Werden zwei Kammern, eine große mit niedrigem Druck und niedriger Dichte, und eine kleine mit hohem Druck und hoher Dichte durch eine Membran getrennt, so existiert beim Sprengen der Membran ein Druck-, und Dichte Sprung zwischen den beiden Medien. Dieser breitet sich in der Tat hin zum Medium geringerer Dichte aus. Im mitbewegten Koordinatensystem mit dem Stoß ström jedoch das dünne Fluid mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Stoßes in ihn ein, jedoch muss es dann einen Geschwindigkeitssprung geben, da man ja nun die gleiche

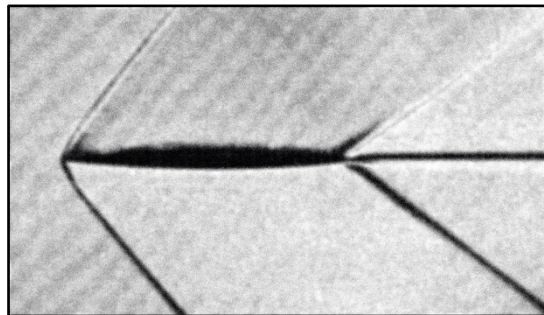
Konfiguration hat, wie oben ständig betrachtet. Das heißt aber auch, dass sich sehr große Druckstörungen (Explosionen) mit Überschallgeschwindigkeit ausbreiten. Dieser Vorgang ist dann nicht mehr isentrop, wie es für kleine Druckstörungen bei der Herleitung der Schallgeschwindigkeit angenommen werden konnte.

### 3.3 Der schiefe Verdichtungsstoß

Dieses Kapitel weist besonders viele vereinfachte Darstellungen und Annahmen auf. Um Stoßwellen aller Art völlig genau nachzuvollziehen sollte man z.B. auf den Band 4 der Serie „Lehrbuch der theoretischen Physik“ von LANDAU und LIFSCHITZ(6) zurückgreifen.

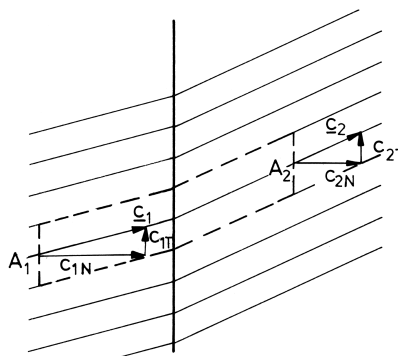
Hier nun nur ganz einfach:

Man beobachtet wenn eine Überschallströmung auf einen schlanken spitzen Körper trifft, einen schrägen Verdichtungsstoß. Dieser kann man der Methode der Schlierenoptik sichtbar gemacht werden (Bild: (7)):



Es sollen nun zur genaueren Untersuchung der Strömungsgrößen vor und hinter dem Stoß, die Bilanzgleichungen für Masse, Impuls, und Energie genau wie beim geraden Verdichtungsstoß über den Stoß hinweg angewendet werden.

Es wird beobachtet, dass die Stromlinien gerade auf einen schrägen Verdichtungsstoß treffen und dann an ihm „gebrochen“ werden. Für diese Konfiguration lässt sich die folgende Skizze (2) zeichnen und mit dem festgelegten Kontrollraum können die Bilanzgleichungen geschrieben werden:



Die Flächen werden als gleich groß beobachtet, also gilt die Kontinuitätsgleichung mit

$$\rho_1 c_{1N} = \rho_2 c_{2N} \cdot \tag{3.26}$$

Normal zu Verdichtungsstoß ergibt der Impulssatz unter Vernachlässigung von Mantel- und Volumenkräften

$$\rho_1 c_{1N}^2 + p_1 = \rho_2 c_{2N}^2 + p_2 \quad (3.27)$$

Tangential ergibt sich

$$\rho_1 c_{1T} c_{1N} = \rho_2 c_{2T} c_{2N} \quad (3.28)$$

Aber das ist mit (3.26) einfach

$$c_{1T} = c_{2T} \quad (3.29)$$

Die Bernoulligleichung lautet unverändert

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{c_1^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{c_2^2}{2} \quad (3.30)$$

Da aber  $c^2 = c_N^2 + c_T^2$  ist kann auch

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{c_{1N}^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{c_{2N}^2}{2} \quad (3.31)$$

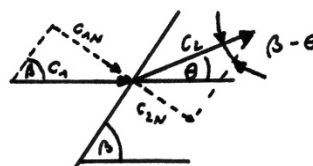
geschrieben werden.

Diese Gleichungen entsprechen exakt den Bilanzgleichungen, welche zur Herleitung der Gleichungen am geraden Verdichtungsstoß gewählt wurden, nur mit der Ausnahme dass nun hier  $c$  durch  $c_N$  ersetzt werden muss. (Es muss in den dort hergeleiteten Gleichungen dann auch  $M = c_N / a$  geschrieben werden.) Große (vor und hinter dem Verdichtungsstoß gleichbleibende) Tangentialkomponenten führen dazu, dass hinter dem schrägen Verdichtungsstoß auch Überschallgeschwindigkeiten herrschen können, was in der Realität in der Regel auch so ist.

### 3.3.1 $\beta - \theta$ - Diagramm

„Einfallswinkel- und Ausfallswinkel“ des schrägen Stoßes hängen zusammen, und dieser Zusammenhang hängt nur von der Machzahl  $M_1$  ab.

Eine genaue Betrachtung der Winkel,



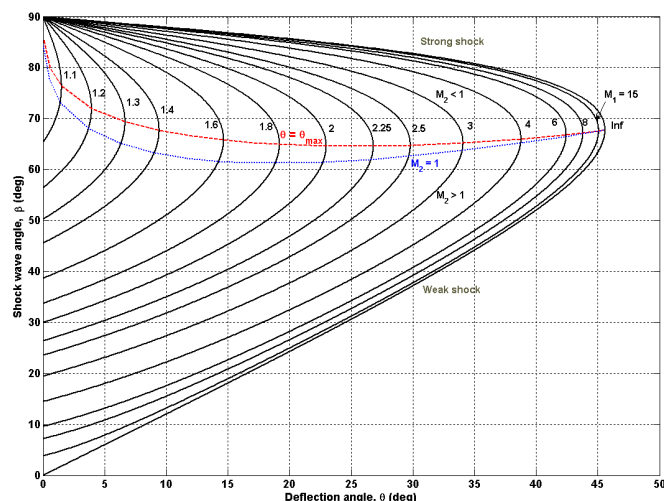
zeigt, dass  $M_{2N} = M_2 \cdot \sin(\beta - \theta)$ , dass  $\tan(\beta) \cdot c_{1T} = c_{1N}$  und dass  $\tan(\beta - \theta) \cdot c_{2T} = c_{2N}$  ist. Mit(3.29) gilt dann auch

$$\frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan(\beta)} = \frac{c_{2N}}{c_{1N}}. \tag{3.32}$$

Das Verhältnis von  $c_{1N}$  und  $c_{2N}$  ist aber über die Gesetzmäßigkeiten am geraden Verdichtungsstoß mit (3.12) gegeben und ist nur abhängig von der Anströmmachzahl. Damit ist die gesuchte Beziehung gefunden, und nach einigen aufwändigen Umstellarbeiten ergibt sich

$$\tan \theta = 2 \cot \beta \left[ \frac{M_1^2 \cdot \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\kappa + \cos(2\beta)) + 2} \right]. \tag{3.33}$$

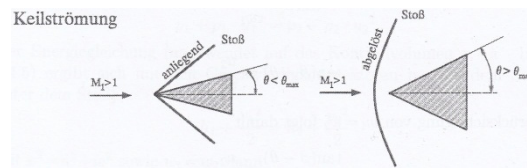
Diesen Zusammenhang kann man für verschiedene „Einfallsmachzahlen“ plotten:



Die rote Linie zeigt den maximalen Ablenkungswinkel. Die blaue Linie durchläuft gerade die Wahl von  $\beta$  und  $\theta$  bei der für die Austrittsmachzahl gilt  $M_2 = 1$ . Man bekommt diesen Zusammenhang, wenn man als erste Gleichung (3.33) nimmt, welche für ein bestimmtes  $M_1$  eine Gleichung mit zwei Unbekannten wird, und dazu noch Gleichung (3.15) heranzieht, welche nach Hinzunahme der eben betrachteten Winkelbeziehungen die zweite Gleichung zur Bestimmung der beiden Winke für den Fall  $M_2 = 1$  liefert. Durch ebendieses Vorgehen für andere Austrittsmachzahlen ergibt sich ein Gebiet starker Stöße, wo  $M_2 < 1$ , und ein Gebiet niedriger Stöße, wo  $M_2 > 1$  gilt.

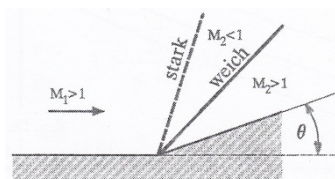
### 3.3.2 Folgerungen aus dem $\beta - \theta -$ Diagramm

Aus dem Diagramm geht hervor, dass es nur Lösungen für einen maximalen Ablenkungswinkel  $\theta$  gibt. Wird der Winkel überschritten, so können die Bilanzgleichungen für eine solchen Strömungsfeld also nicht mehr eingehalten werden. Experimente bestätigen, dass es in diesem Fall keinen anliegenden, sondern ein abgelösten Stoß gibt (1):



Ein abgelöster Stoß weist aus Symmetriegründen immer ein Gebiet eines geraden Verdichtungsstoßes auf, es gibt also hier auf jeden Fall ein Unterschallgebiet. Solche abgelösten Kopfwellen sind mit starken Strömungsverlusten verbunden (eine große Luftmenge wird hier erst angehalten und verdichtet bis sie wieder beschleunigt wird und ihr Druck abnimmt, das kostet Energie).

Für jeden Winkel  $\theta < \theta_{max}$  gibt es zwei Lösungsmöglichkeiten. In der Natur treten meist weiche Stöße auf, also Stöße bei denen gilt  $M_2 > 1$  (1):

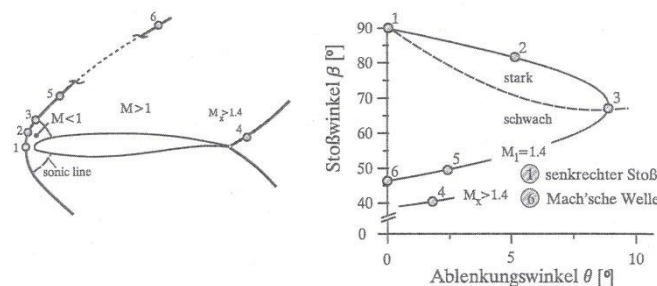


Ist  $\theta = 0$ , so gibt es entweder einen geraden Verdichtungsstoß oder einen weichen schrägen Stoß **bei dem der Öffnungswinkel gerade der, der MACHschen Welle ist**.

Aus Gleichung (3.32) folgt, dass für diesen Fall die Geschwindigkeiten gleich sind, man spricht auch von einem *unendlich schwachen Verdichtungsstoß*.

Eine weitere Folgerung aus dem Diagramm ist, dass sich schräge Stöße meist mit zunehmender Machzahl an einen zugespitzten Körper anlegen. Erreicht wird die Kontur jedoch selbst bei unendliche großer Machzahl nicht.

Die Überschall Umströmung eines Tragflügelprofils kann nun interpretiert werden (1):



An der Hinterkante des Profils muss sich ein schräger schwacher Stoß ausbilden, da die Strömung ja nicht – bevor sie dann wirklich das Ende des Profils erreicht hat – weiß, dass ein Ende des Profils in Sicht ist. Die un stetige Änderung des Profils muss zu einer un stetigen Änderung der Richtung der Strömung führen, wobei es für die Geschwindigkeit hinter dem Stoß keinen Grund gibt den Überschall der Umgebung zunächst zu verlassen und dann wieder aufzunehmen.

## 4 Kompressible Potentialströmungen

Wie bei den inkompressiblen Strömungen lassen sich auch für kompressible Strömungen besonders einfache Gesetzmäßigkeiten für Strömungen bekommen, wenn man das Ansatz der Drehungsfreiheit in der Strömung wählt.

Doch zunächst noch einmal zur Erinnerung: Für eine ebene *inkompressible* Strömung gilt die Kontinuitätsgleichung in der Form

$$\operatorname{div} \underline{c} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (4.1)$$

Alle Herleitungen hierzu findet man z.B. in (5). Wählt man zudem den Ansatz der Drehungsfreiheit, so ergibt sich mit

$$\operatorname{rot} \underline{c} = 0 \iff \underline{c} = \operatorname{grad} \Phi, \quad (4.2)$$

dass für das Strömungsbild drehungsfreier inkompressibler Fluide die Laplace Gleichung gelten muss:

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (4.3)$$

Lösungen dieser linearen homogenen Differentialgleichung darf man superponieren und erhält wieder Lösungen. Außerdem erfüllen die Lösungen immer die Navier-Stokesschen Gleichungen für geeignete reibungsfreie Randbedingungen, wenn Druck und Geschwindigkeit nach Bernoulli zusammenhängen.

Für kompressible Fluide ist der Ansatz (4.2) ebenso gültig! Auch hier erfüllt dieser Ansatz die Differentialgleichungen zur Bestimmung der Strömungsgrößen – jedoch auch wieder nur wenn die Strömung reibungsfrei ist. Dafür ist zu zeigen, dass der Impulssatz in differentieller Form (Eulersche Bewegungsgl.) für reibungsfreie Fluide immer noch gilt, nach dem der Ansatz eingesetzt wurde.

Diese Bewegungsgleichung

$$\rho \frac{D\underline{c}}{Dt} = \rho \underline{f} - \operatorname{grad} p \quad (4.4)$$

liefert in ihren x und y Koordinaten ausgeschrieben und unter Vernachlässigung der Massenkräfte (wie z.B. der Schwerkraft oder Scheinkräften) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Diese werden nun differenziert und von einander abgezogen, die dabei herauskommende Gleichung muss aber immer noch für ein Strömungsfeld gelten.

Leitet man die Gleichung (4.5)-1 nach y ab, und die Gleichung (4.5)-2 nach x, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \rho v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial y} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}, \\ \rho u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial x} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Da die Dichte eine eindeutige Funktion des Druckes ist, lässt sich schreiben

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{d\rho}{dp} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{d\rho}{dp} \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{4.7}$$

und durch einsetzen in (4.5) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial y} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{d\rho}{dp} \frac{\partial p}{\partial y} \left( - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \frac{d\rho}{dp} \frac{\partial p}{\partial x} \left( - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Bei der Subtraktion beider Gleichungen (4.6) fällt dann u.a. das letzte Glied auf der linken Seite weg und es ergibt sich

$$\rho u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \rho v \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0. \tag{4.9}$$

Die Bedingung, dass  $\text{rot } \underline{c} = 0$  ist jedoch in der Ebene gleichbedeutend mit

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{4.10}$$

Damit sieht man, dass eine rotationsfreie Strömung durchaus für diese Bedingung eine Lösung ist - hat man aber eine Lösung für bestimmte Randbedingungen, so hat man auch die (dann einzige) Lösung!

Insofern man sich einen Punkt im Strömungsfeld wählt, wo die Gleichungen (4.5) gelten (was ja einfach ist, da es auf jeden Fall z.B. eine einfach Parallelströmung bei einem bestimmten Druck irgendwo geben wird, auf jeden Fall im Unendlichen), ist es legitim sich von dort an nur noch die Änderungen anzusehen, also ist der Beweis mit dem Mittel der Differentiation auch legitim.

Deshalb kann man nun genau wie bei inkompressiblen Strömungen das Geschwindigkeitsfeld als den Gradienten eines Potentials einführen:

$$\underline{c} = \text{grad } \Phi, \tag{4.11}$$

und Lösungen für das Strömungsbild reibungsfreier kompressibler Fluide berechnen. Es soll nun in Analogie zu (4.3) eine Differentialgleichung zur Beschreibung der Strömungsgeschwindigkeiten hergeleitet werden.

Neben der Bewegungsgleichung muss auch noch die Kontinuitätsgleichung gelten. In diese werden nun die Ergebnisse aus (4.11) eingesetzt um eine Differentialgleichung für das Potential zu erlangen:

Es gilt allgemein die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{c}) = 0, \tag{4.12}$$



welche für stationäre Strömungen zu

$$\operatorname{div}(\rho \underline{c}) = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \quad (4.13)$$

wird. Nun werden zusätzlich noch zwei Gleichungen benötigt, welche sich aus (4.5), (4.7) und mit Hilfe von  $dp/d\rho = a^2$  ergeben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= -\frac{\rho}{a^2} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} &= -\frac{\rho}{a^2} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Werden diese beiden Gleichungen in (4.13) eingesetzt, so ergibt sich

$$\frac{\partial u}{\partial x} \left( 1 - \frac{u^2}{a^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left( 1 - \frac{v^2}{a^2} \right) - \frac{uv}{a^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0. \quad (4.15)$$

Setzt man dann getreu Gleichung (4.11) die Ausdrücke

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi_x \quad \& \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \Phi_y \quad (4.16)$$

in die nach der Produktregel umgeformten Kontinuitätsgleichung (4.13) ein so ergibt sich

$$\boxed{\Phi_{xx} \left( 1 - \frac{\Phi_x^2}{a^2} \right) + \Phi_{yy} \left( 1 - \frac{\Phi_y^2}{a^2} \right) - 2 \frac{\Phi_x \Phi_y}{a^2} \Phi_{xy} = 0.} \quad (4.17)$$

Damit ist die gesuchte Gleichung gefunden. Für  $Ma \rightarrow 0$  wird diese Gleichung gerade zu (4.3). Die in der Gleichung auftretende Schallgeschwindigkeit ist jedoch auch eine Feldgröße und keine Konstante! Sie kann jedoch mit Kenntnis der Schallgeschwindigkeit im Unendlichen sowie der Anströmgeschwindigkeit im Unendlichen mit Hilfe der Energiegleichung (2.45) berechnet werden, welche nach einigem Umstellen zu

$$\left( \frac{a}{a_\infty} \right)^2 = 1 - \frac{\kappa - 1}{2} Ma_\infty^2 \left( \frac{u^2 + v^2}{w_\infty^2} - 1 \right) \quad (4.18)$$

wird.

Für die nicht lineare Potentialgleichungen existieren keine einfachen Lösungen. Um Lösungen zu finden muss die Gleichung vereinfacht werden.

#### 4.1 Linearisierung der Potentialgleichung & die PRANDTL-GLAUERT-ACKERETSCHER Regel

Im Folgenden soll eine einfache Form der eben hergeleiteten Potentialgleichung geschrieben werden, da diese Form dann sehr stark z.B. der Potentialgleichung für inkompressible

Strömungen ähnelt. In der Tat lässt sich ein einziger Faktor finden, mit dem man dann die Druckverteilung um ein inkompressibel umströmtes Profil in die Druckverteilung eines kompressibel umströmten Profils umrechnen kann.

Zunächst linearisiert man Gleichung (4.17). Sie ist ausgeschrieben

$$\Phi_{,xx} \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) + \Phi_{,yy} \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) - 2 \frac{uv}{a^2} \Phi_{,xy} = 0. \quad (4.19)$$

Unter der Annahme, das für *schlanke Profile, welche entlang ihrer Längsachse angeströmt werden* gilt

$$u \approx u_\infty, \quad v \ll u, \quad v \ll a, \quad (4.20)$$

ergibt sich unter der Berücksichtigung der Tatsache, dass dann aus (4.18) auch  $a \approx a_\infty$  folgt,

$$(1 - \text{Ma}_\infty^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (4.21)$$

Dies ist nun die linearisierte Potentialgleichung, welche als Faktor nur die konstante Anströmmachzahl enthält. *Die Anströmmachzahl darf dabei nicht 1 sein*, sonst gelten die Vereinfachungen nicht (Begründung: (7) Seite 171). Durch eine geniale Transformation kann man nun sehen, dass sich Lösungen einer Gleichung

$$(1 - \text{Ma}_\infty^2) \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x'^2} + c_1^2 \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y'^2} = 0 \quad (4.22)$$

einfach in das ursprüngliche Koordinatensystem zurückübertragen lassen, nämlich mit den Transformationen

$$x' = x, \quad y' = c_1 y, \quad \Phi = c_2 \Phi'. \quad (4.23)$$

Beweis: Man setzt (4.23) in (4.22) ein:  $(1 - \text{Ma}_\infty^2) \frac{\partial^2 (\Phi / c_2)}{\partial x^2} + c_1^2 \frac{\partial^2 (\Phi / c_2)}{\partial (c_1 y)^2} = 0$ , es folgt sofort (4.21).

Es lässt sich nun der Faktor  $c_1$  so bestimmen, dass die Machzahl aus der Gleichung entfällt. Man wählt

$$c_1 = \sqrt{|1 - \text{Ma}_\infty^2|}. \quad (4.24)$$

Für die transformierte Vergleichsströmung ergeben sich also die folgenden Differentialgleichungen für das Potential:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y'^2} &= 0 && \text{für } \text{Ma}_\infty < 1, \\ \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y'^2} &= 0 && \text{für } \text{Ma}_\infty > 1. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Die bis hierhin unternommenen Schritte bedeuten also Folgendes: Umströmt man ein Profil mit einer kompressiblen Strömung, so gilt für die Berechnung der Größen in dieser Strömung näherungsweise die Potentialgleichung (4.21). Diese ist aber vielleicht nicht so einfach zu lösen, da ja noch ein Faktor in der Gleichung ist. In einem anderen Koordinatensystem ist die Gleichung jedoch gut zu lösen: Ändert man die  $x$  und  $y$  Koordinate des entsprechenden Profils nach den in (4.23) geschriebenen Regeln, so erhält man dann eine

Strömungssituation in einem neuen Koordinatensystem, welche man – je nach dem, ob man aus dem unendlichen mit Über- oder Unterschall anströmt – mit der Gleichung (4.25)-1 oder (4.25)-2 berechnen kann. Das sich ergebene  $\Phi'$  muss dann natürlich rücktransformiert werden, um die auf Strömungsgrößen um das eigentlich betrachtete Profil zu schließen.

Nun soll nach der Druckverteilung auf dem Ausgangsprofil gesucht werden, wenn die Druckverteilung in der transformierten Ebene bekannt ist (denn letztere kann man ja einfach mit Mitteln der Potentialtheorie berechnen).

Die Definition von  $c_p$  wurde schon weiter oben benutzt, soll hier aber noch einmal genannt werden. Es ist

$$c_p := (p_x - p_\infty) / \frac{\rho_\infty}{2} u_\infty^2. \quad (4.26)$$

Mit Hilfe der Bernoulligleichung und im Rahmen einer linearen Näherung, welche in (7) beschrieben ist und wiederum die Annahme benutzt, dass die lokale Geschwindigkeit sich von der Anströmgeschwindigkeit nur wenig unterscheidet, findet man:

$$c_p = -2 \frac{u}{u_\infty} = -\frac{2}{u_\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (4.27)$$

Strömt man das transformierte Profil nun auch mit der Geschwindigkeit  $u_\infty$  an (!), so findet man für den Druckbeiwert des transformierten Profils

$$c_p' = -2 \frac{u'}{u_\infty} = -\frac{2}{u_\infty} \frac{\partial \Phi'}{\partial x'}. \quad (4.28)$$

Daraus folgt mit (4.23)

$$c_p = c_2 \cdot c_p'. \quad (4.29)$$

Nun benutzt man einen Trick um  $c_2$  zu ermitteln (man nennt ihn die Stromlinienanalogie). Beschreibt  $y_k$  die Kontur des Profils, so gilt

$$v = u_\infty \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x}, \quad v' = u_\infty \cdot \frac{\partial y_k'}{\partial x'}. \quad (4.30)$$

Und daraus folgt wiederum

$$c_1^2 c_2 = 1, \quad (4.31)$$

was dazu führt, dass

$$c_2 = \frac{1}{|1 - \text{Ma}_\infty^2|} \quad (4.32)$$

gilt und damit die gesuchte Transformation des Druckbeiwerts gefunden ist. Es kann nun also der Druck um ein kompressibel angeströmtes Profil berechnet werden, wenn es zuvor transformiert wurde und die Druckverteilung im transformierten Raum berechnet wurde.

Es ist existiert dann also zwischen dem Druckbeiwert des transformierten Profils (mit einem Strich gekennzeichnet) und dem Beiwert des nicht transformierten der Zusammenhang

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{q_\infty} = \frac{c_p'}{\sqrt{|1 - \text{Ma}_\infty^2|}} \quad (4.33)$$

Es ist nun auch möglich abzuschätzen, wie groß die Druckbeiwerte eines Profils in einer kompressiblen Strömung sein werden, wenn sie für den nicht kompressiblen Fall schon gemessen wurden. Man nimmt nun die gemessenen Werte als „in-der-Transformation“ gemessen an und rechnet sie mit (4.33) auf eine kompressible Strömung eines nun aber anders aussehenden Profils herunter. Man hat dann also die Druckverteilung der Strömung um ein kompressibel angeströmtes Profil gegeben, jedoch nicht um das, was man eigentlich haben wollte. Jetzt muss das Profil wieder richtig skaliert werden. Man muss also die  $y$  Koordinate nach den Transformationsregeln (4.20) skalieren. Es ändert sich dabei z.B. der Anstellwinkel des Profils, das Dickenverhältnis sowie der Anstellwinkel:

$$\begin{aligned} \text{Wölbung: } \quad \frac{f'}{l'} &= \frac{f}{l} \cdot \sqrt{|1 - \text{Ma}_\infty^2|}, \\ \text{Dicke: } \quad \frac{d'}{l'} &= \frac{d}{l} \cdot \sqrt{|1 - \text{Ma}_\infty^2|}, \\ \text{Winkel: } \quad \alpha' &= \alpha \cdot \sqrt{|1 - \text{Ma}_\infty^2|}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Unter der reinen Annahme, dass sich *auch*  $c_p$  derart ändert gelangt man dann zu dem Ergebnis

$$c_p = \frac{c_p'}{\sqrt{|1 - \text{Ma}_\infty^2|}}, \quad (\text{Geometrie ungeändert}). \quad (4.35)$$

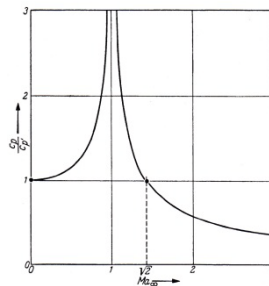
Man kann nun also ein Modell bei niedrigen Machzahlen vermessen und dann die  $c_p'$  Verteilung mit dem sogenannten Prandtl Glauert Faktor

$$\frac{1}{\sqrt{|1 - \text{Ma}_\infty^2|}} \quad (4.36)$$

multiplizieren und erhält dann die Druckverteilung  $c_p$  für eine Machzahl  $\text{Ma} < 1$ . Möchte man Überschalluntersuchungen anstellen, so muss die Druckverteilung bei  $\text{Ma} = \sqrt{2}$  bekannt sein und diese ist dann mit dem Faktor zu multiplizieren.

Da die Transformation nicht die Wahl von gleichen Bedingungen in der Unendlichkeit  $(u_\infty, \rho_\infty)$  verbietet sondern in der Tat sogar vorschreibt kann (4.35) auch als  $p(x) - p_\infty = \frac{1}{\sqrt{|1 - Ma_\infty^2|}} [p_{ink}(x) - p_\infty]$  geschrieben werden.

Den Faktor kann man in der folgenden Grafik (7) aufgetragen sehen:



Auftriebs- und Momentenbeiwert werden direkt aus den Druckbeiwerten berechnet und damit werden sie auch mit dem P-G Faktor transformiert.

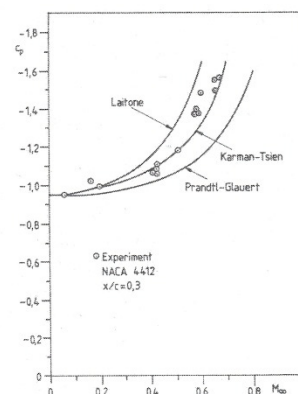
Mit Experimenten stimmt der eben mit unzähligen Annahmen hergeleitete Faktor sehr gut überein. Im Laufe der Zeit wurde das Modell von LAITONE,

$$c_p = \frac{c_{p,0}}{\sqrt{1 - Ma_\infty^2} + \left[ \frac{Ma_\infty^2}{2\sqrt{1 - Ma_\infty^2}} \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_\infty^2 \right) \right] c_{p,0}}, \tag{4.37}$$

und KARMAN-TSIEN,

$$c_p = \frac{c_{p,0}}{\sqrt{1 - Ma_\infty^2} + \left[ \frac{Ma_\infty^2}{1 + \sqrt{1 - Ma_\infty^2}} \right] \frac{c_{p,0}}{2}}, \tag{4.38}$$

verfeinert. Die folgende Grafik verdeutlicht dies (1):



## 4.2 Ergänzungen zum vorhergehenden Kapitel

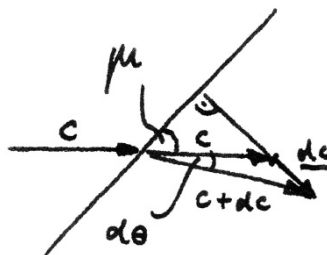
Im Skript zur Aerodynamik der TU Berlin (1) wird bei der Herleitung der eben gezeigten Zusammenhänge anders vorgegangen. Die Ergebnisse unterscheiden sich jedoch natürlich nicht.

## 5 Expansions- und Kompressionswellen

Auf Grund mangelnder Zeit zum Ende des Semesters, werden die folgenden Kapitel stichpunktartig abgearbeitet.

### 5.1 Nutzen / Berechnungsmethode / Herleitung der Gleichungen

- *Berechnungsmittel für reine Überschallströmungen*
- Mit „Wellen“ sind unendlich schwache schiefe Verdichtungsstöße, also MACH'sche Linien gemeint. An ihnen ändert sich der Geschwindigkeitsvektor schlagartig, da die Information nicht „stromaufwärts“ wandern konnte.
- Eine Geschwindigkeitsänderung entlang einer solchen Linie findet (wie beim schiefen Verdichtungsstoß) nur *normal* zu der Linie statt (**folgt aus Erhaltungsgleichungen**)
- Methode der Herleitung: Analog zur HAMILTON'schen Mechanik
- Skizze zur Herleitung:



Sinussatz liefert:  $\frac{c+dc}{c} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \mu\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \mu - d\theta\right)}$ . Mit trigonometrischen Umformungen ergibt sich

$1 + \frac{dc}{c} = \frac{\cos \mu}{\cos \mu \cos d\theta - \sin \mu \sin d\theta}$ . Da der Anstieg in einem Punkt betrachtet wird, kann man vereinfachen (

$\sin \alpha = \alpha$ ,  $\cos \alpha = 1$ ) und schreiben  $1 + \frac{dc}{c} = \frac{1}{1 - d\theta \tan \mu}$ . Die Definition des MACH'schen Winkels führt zu

$\tan \mu = \frac{1}{\sqrt{\text{Ma}^2 - 1}}$  und damit bekommt man  $d\theta = \sqrt{\text{Ma}^2 - 1} \frac{dc}{c}$ . Um diese Gleichung zu integrieren muss die

rechte Seite in der Machzahl ausgedrückt werden, mit  $\ln c = \ln \text{Ma} + \ln a$  und  $dc/c = d\text{Ma}/\text{Ma} + da/a$  erhält

man unter Verwendung der Gleichung  $\left(\frac{a_0}{a}\right)^2 = \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \text{Ma}^2$  den Ausdruck

$\ln a = -\frac{1}{2} \ln \left[ a_0 \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} \text{Ma}^2 \right) \right]$ . Differenzieren liefert dann den Ausdruck für  $da/a$  welcher dann zu der gesuchten Gleichung führt:

$$d\theta = \frac{\sqrt{\text{Ma}^2-1}}{1 + \left(\frac{\kappa-1}{2}\right)\text{Ma}^2} \frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}} \tag{5.1}$$

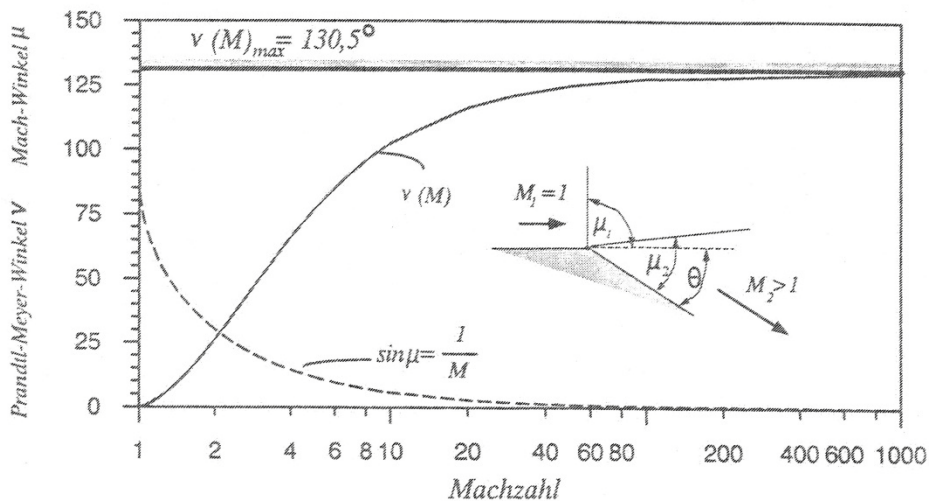
- Integration findet nach PRANDTL-MEYER von  $\theta = 0$  und  $\text{Ma}_1 = 1$  statt. Integration gilt für **Kompression** und Expansion. Spätere Superposition möglich.
- Bedingung für Kompression: Wellen schneiden sich nicht im Gebiet (sonst VS).

### 5.2 Ergebnisse / Anwendung

- Es ergibt sich nach Integration die PRANDTL-MEYER Funktion:

$$v(\text{Ma}) = \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} \arctan \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1} (\text{Ma}^2-1)} - \arctan \sqrt{\text{Ma}^2-1} \tag{5.2}$$

- Darstellung(1):



- Um Ablenkungswinkel von  $\text{Ma}_1 > 1$  zu  $\text{Ma}_2 > \text{Ma}_1$  zu bekommen:

$$\theta = v(\text{Ma}_2) - v(\text{Ma}_1) \tag{5.3}$$

- Isentroper Prozess, Gesamtgrößen bleiben erhalten (siehe Kap. 2.9):

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} \text{Ma}_1^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} \text{Ma}_2^2}, \quad \frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} \text{Ma}_1^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} \text{Ma}_2^2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \left( \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} \text{Ma}_1^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} \text{Ma}_2^2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \tag{5.4}$$

## 6 Tragflügelaerodynamik im Transschall

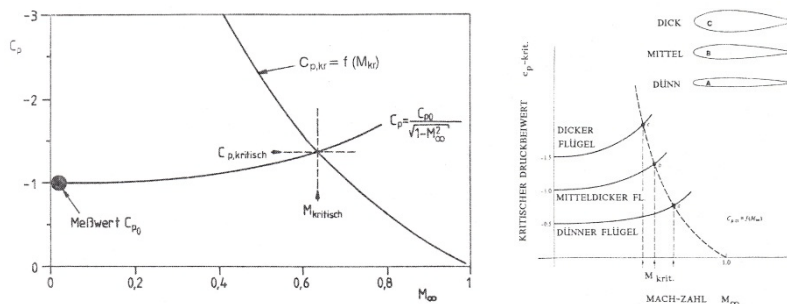
Im Folgenden soll noch einmal zusammenfassend auf die Tragflügelaerodynamik im Transschall (insbesondere interessant für herkömmliche Verkehrsflugzeuge) eingegangen werden. Die Betrachtung wird wieder in Stichpunkten stattfinden und orientiert sich stark an (1).

### 6.1 Kritische Machzahl

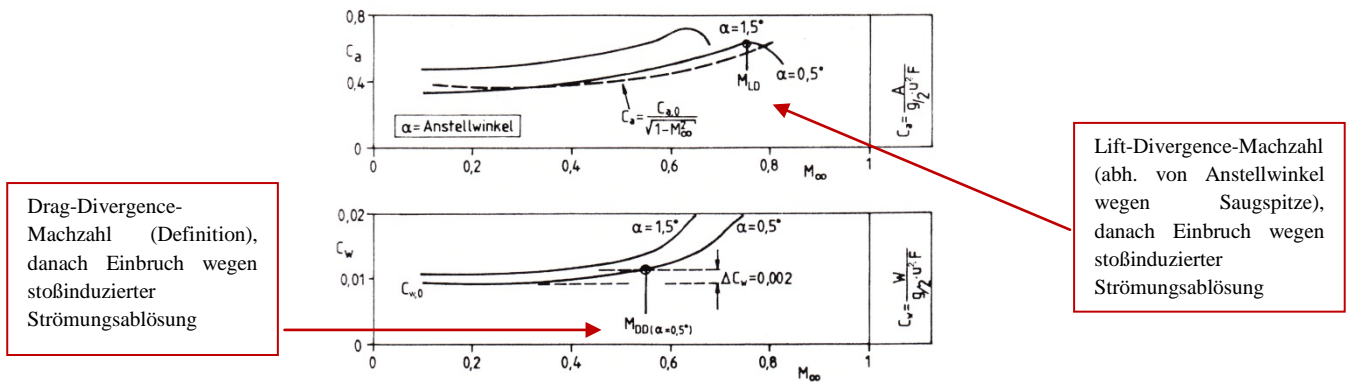
- Frage: Bei welcher Machzahl tritt lokal Überschallgeschwindigkeit auf?
- Mit Energiegleichung zwischen Unendlichem und kritischem Punkt auf Profil:

$$c_{p,krit} = \frac{2}{\kappa Ma_\infty^2} \left[ \left( \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_\infty^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2}} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - 1 \right]. \tag{6.1}$$

- Mit PG-Faktor lässt sich inkompressibler Druckbeiwert an kritischer Stelle der Saugspitze ins Kompressible fortzeichnen => es ergibt sich krit. Machzahl, siehe Abbildung (1):

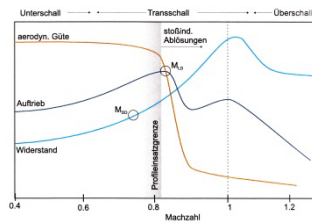


### 6.2 Änderung von $c_a$ & $c_w$ mit der Anströmmachzahl



- Schematischer Verlauf aerodynamische Güte:

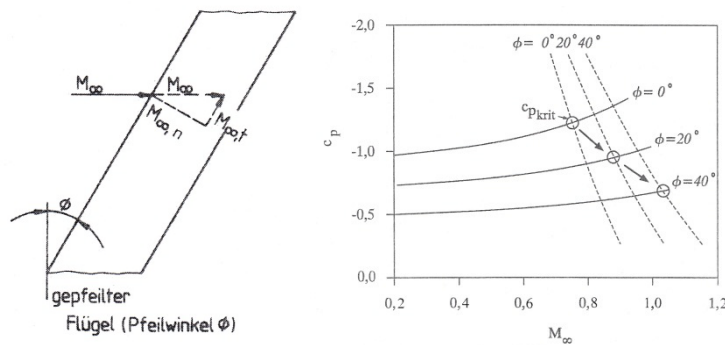




### 6.3 Tragflügelpfeilung

- Eine von vielen Möglichkeiten kritische Machzahl zu erhöhen
- Warum gerade Pfeilung? Warum nicht einfach Profil dünner? (Gewichtseinsparung)
- Grund: Dickerer Flügel notwendig um wiederum leichter zu Bauen (Flächenträgheitsmoment Flügelwurzel...)
- Die folgende Gleichung wird in (6.1)&(4.36) eingesetzt und es ergeben sich nachfolgende Diagramme (1).

$$Ma_{\infty, n} = Ma_{\infty} \cdot \cos(\Phi) \tag{6.2}$$

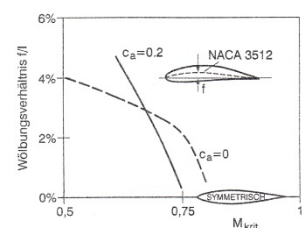


Gleichung (6.2) ist natürlich nicht ganz korrekt. Für einen unendlich langen Tragflügel in der Potentialtheorie jedoch stimmt sie: Ob ein Tragflügel entlang seiner eigenen Achse ruht oder reibungsfrei durch die Strömung hindurchgezogen wird, ist völlig egal. Für die kritische Machzahl folgt aus (6.2) sofort, dass  $Ma_{krit, \Phi} = Ma_{krit, \Phi=0} / \cos(\Phi)$ . Für reale Flügel endlicher Streckung liefert der empirische Zusammenhang  $Ma_{krit, \Phi} = Ma_{krit, \Phi=0} / \sqrt{\cos(\Phi)}$  bessere Ergebnisse. Da es weniger Auftrieb gibt, gibt es auch insgesamt weniger Widerstand. Außerdem treten Stoßverluste später auf, und so ist der Widerstandsverlauf zu erklären.

- weitere Effekte: „inwash“ bei konventionellen und „outwash“ bei transsonischen Profilen ?
- negative Aspekte der Flügelpfeilung: Leading Edge Contamination, Strömungsabriss Hochauftrieb, Probleme bei Laminarhaltung (durch Querströmungsinstabilitäten), Verlagerung Auftriebmaximum zur Flügelspitze hin (Biegemoment, Flattern)

### 6.4 Profileigenschaften im Transschall

- desto größer das Dickenverhältnis, desto geringer der Unterschied der krit. Machzahl bei  $c_a$ -Änderung
- desto größer die Dickenrücklage, desto höher ist  $Ma_{krit}$  (da es dann insgesamt flachere Druckverteilung gibt), dann aber sensible Reaktion der Stoßlage auf Anströmbedingungen (Laminarprofile nutzen diese



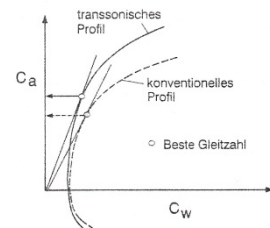
Eigenschaft zur Herstellung eines negativen Druckgradienten)

- zum Einfluss der Wölbung soll das Bild (1) genügen

Es eignen sich für den Einsatz bei transsonischen Strömungen also schlanke Profile mit mäßiger Dickenrücklage, die Wölbung ist zu optimieren. Diese Profile haben jedoch geringe Maximalauftriebsbeiwerte. Für Start und Landung sind aufwändige Klappensysteme notwendig.

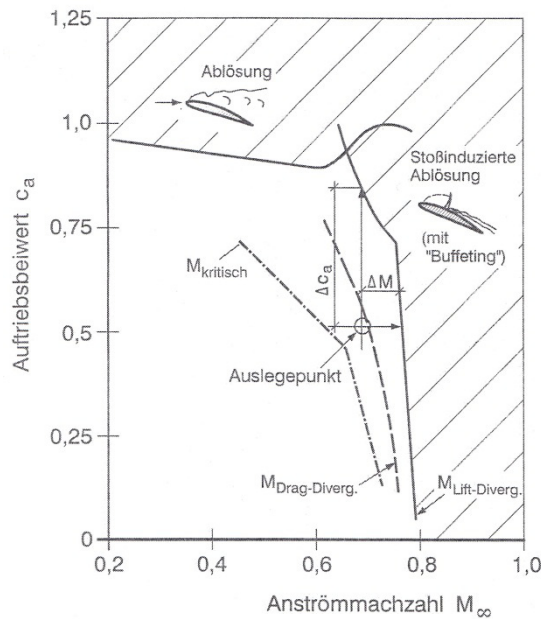
**6.5 Aerodynamische Auslegung transsonischer Profile**

- Anfang 60-er Jahre: neues Konzept: Überschallgebiet wird zugelassen, aber  $Ma_{DD}$  wird erhöht => „Überkritische Profile“
- Flache Oberseite mit schwachem Verdichtungsstoß, wenig Auftrieb vorne, hinten deshalb mehr Wölbung (rear-loading) => Kopflastiges Moment (negatives Moment)
- Vergleich zum konventionellen Profil siehe Bild (1):



**6.6 Profileinsatzgrenzen**

Schematische Darstellung: (weitere Erklärungen siehe Aufgabe 5 im Anhang)



**6.7 Transsonische Flächenregel**

- manche Flügelprofilkonfigurationen leiten Strömung zum Rumpf hin, dann Kompressionswellen und Stoß außen, empirische Lösung: Fläche in der Draufsicht konstant lassen, das heißt da wo Flügel kommt Rumpf dünner machen

## 7 Stoß-Grenzschicht-Interferenzen

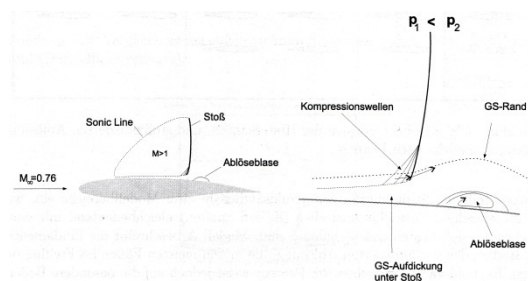
- Druckanstieg über Stoß resultiert in einem Aufdicken der Grenzschicht, Information des Druckanstiegs pflanzt sich auch stromaufwärts fort
- dadurch Ablösung am Stoß möglich, jedoch auch Ablösung zuerst an der Hinterkante möglich:

### 7.1 Stoßinduzierte Ablösung

- hier löst Grenzschicht am Stoß ab, unterschiedliche Strömungsbilder bei turbulenter oder laminarer Grenzschicht vor Stoß

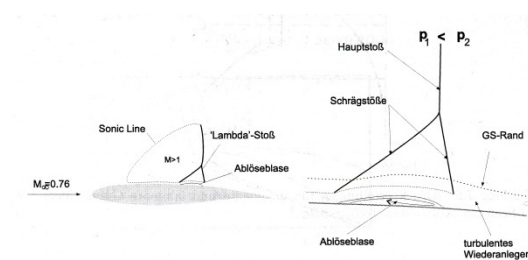
#### 7.1.1 Turbulente Grenzschicht vor dem Stoß

- zunächst lokale Ablöseblase unter Stoß, da dort GS instabil
- aufgefächerter Stoßfuß durch Druckinformationsausbreitung Stromaufwärts



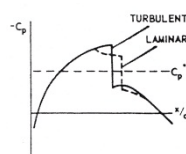
#### 7.1.2 Laminare Grenzschicht vor dem Stoß

- auf Grund des flacheren Geschwindigkeitsgradienten an der Wand kann sich Druckinformation in laminarer Grenzschicht schneller stromaufwärts ausbreiten
- Ablöseblase schon vor Stoß, verdrängt Strömung, zweiter kleiner Stoß
- GS kann auch gleich ganz ablösen, lam. GS vor Stoß wird also versucht zu vermeiden



#### 7.1.3 Druckverläufe

- typisches Bild:

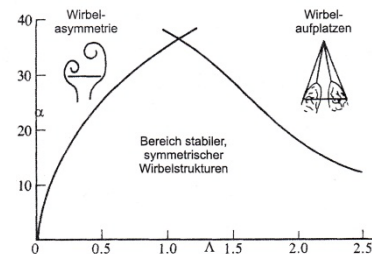
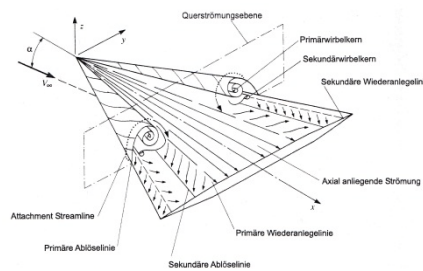


### 7.2 Zusammenspiel von Stoßinduzierter- und Hinterkantenablösung

- bei Stoßinduzierte Ablösung, dehnt sich die Ablöseblase empirisch genau dann sehr rasch aus, wenn ihr Druck auf fällt  $p^*$
- jedoch auch zuerst Ablösung an Hinterkante, z.B. durch starkes rear-loading mit ausgeprägter Rekompensation möglich
- Oszillationen der Stoßlage führen zu Oszillationen von Ablösegebieten, Buffeting
- Stabilisierung Verdichtungsstoß mit aktiven (Absaugen...) / passiven (Pannels mit darunterliegender Kammer) Maßnahmen möglich
- tritt nicht nur die Stoßinduzierte Ablösung auf gibt es eine große Abhängigkeit von der Reynoldszahl der Druckverteilung – kann durch Fixierung der Transition (z.B. beim Windkanalversuch) aufgehoben werden (dann nur turbulente GS)
- Transsonischer Laminarflügel hat das Ziel GS bis an den Stoß heran laminar zu halten

## 8 Deltaflügel

- Vorteile: geringes Dickenverhältnis, gute Steuerwirkung durch steife Struktur, kein Abkippen, kein plötzlicher Stall
- subsonische Deltaflügelumströmung: potentialtheoretische Strömung beschreibt Auftrieb des Deltaflügels mit einem dem Anstellwinkel proportionalen Fehler =>Vortex-Lift(1)
- Strömung bildet an scharfer Vorderkante Wirbel aus, welche den statischen Druck verringern
- Aerodynamische Güte des Deltaflügel liegt unter der des konventionellen Tragflügels
- Modifikationen der Leading Edge (Flap oder Rundung) können AG erhöhen
- „Stall“ ab ca. 35°, Aufplatzen der Vorderkantenwirbel (Querdiffusion führt zur Ausdehnung der Wirbel, Zirkulation muss jedoch konstant bleiben =>Tangentialgeschwindigkeiten nehmen ab => ab bestimmtem Punkt wird alles instabil und es „platzt“ auf (Vortex Burst, Vortex Breakdown)
- diesem Phänomen steht Wirbelasymmetrie gegenüber (siehe Bild) (1)
- „Strakes“ stabilisieren das Wirbelsystem und führen zu höheren möglichen Anstellwinkeln und bei gleichen Winkeln höheren Auftriebsbeiwerten



## 9 Literaturverzeichnis

1. **Nitsche.***Aerodynamik 2*. Berlin : Institut für Luft- und Raumfahrttechnik der Technischen Universität Berlin, 2012.
2. **Schade, Kunz.***Strömungslehre*. Berlin : de Gruyter, 2007.
3. **Baehr, Kabelac.***Thermodynamik*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2009.
4. **Popov.***Kontinuumsmechanik - Vorlesungsnotizen WiSe 2011/12*. Berlin : TU Berlin, 2011.
5. **Benad.***Zusammenfassung der Strömungslehre SS2012*. Berlin : TU Berlin, 2012.
6. **Landau, Lifschitz.***Lehrbuch der theoretischen Physik, Band 4: Hydrodynamik*. Frankfurt am Main : Harri Deutschland GmbH, 2007. 978-3-8171-1331-6.
7. **Schlichting, Truckenbrodt.***Aerodynamik des Flugzeuges*. Göttingen : Springer, 2001. 3-540-67374-1.