Einführung in die Kombinatorik

→Buch, Seite 50–59

Bei der Kombinatorik geht es in der Hauptsache darum, wie man mögliche Anordnungen mehrerer unterscheidbarer oder teilweise nicht unterscheidbarer Objekte **zählen** kann.

Einfaches Beispiel: Auf wie viele Weisen kann man drei Personen nebeneinander anordnen? → Ausprobieren: 6 Weisen.
Schwieriges Beispiel: Auf wie viele Arten kann man drei blaue, fünf gelbe und acht rote Kugeln in einer Reihe anordnen?

Begriffsklärungen

Kombination

Eine Kombination ist eine – je nach Kontext geordnete oder ungeordnete – Anordnung mehrerer Objekte, Ereignisse o.ä.

Stufen der Kombination

Wie ein Zufallsexperiment hat auch eine Kombination Stufen. Die Anzahl der Stufen gibt an, wie viele Objekte etc. letztendlich angeordnet werden sollen.

Beispiel
Wenn es darum geht, sich morgens anzuziehen, kann z.B. eine Kombination aus Socken, Unterhose, Hose und T-Shirt gewählt werden. Diese Kombination hat offensichtlich vier Stufen.

Produktregel und ihre Spezialfälle

Die Grundform

Bei einer Kombination mit k Stufen, bei der jede Stufe unabhängig von den anderen besetzt werden kann, und bei der es bei den ersten Stufe n_1 Möglichkeiten gibt, sie zu besetzen, bei der zweiten n_2 usw. bis zur letzten, bei der es n_k Möglichkeiten gibt, sie zu besetzen, gibt es insgesamt

$$\boxed{N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k}$$

mögliche Varianten für diese Kombination.

Beispiel
Nehmen wir an, Walter hat 17 Paar Socken, 32 Unterhosen, 8 Hosen und 42 T-Shirts, so hat er $17 \cdot 32 \cdot 8 \cdot 42 = 182784$ Möglichkeiten, sich anzuziehen. Recht viel, nicht wahr?

Die Anzahl der möglichen Kombinationen variiert massiv – abhängig davon, ob die Ergebnisse als geordnet oder ungeordnet aufgefasst werden. Geordnete Stichproben entsprechen prinzipiell der Produktregel, ungeordnete funktionieren etwas anders, darum haben sie ein extra Kapitel.

Geordnete Stichproben

Gleiche Anzahl der Möglichkeiten bei allen Stufen, Ziehen mit Zurücklegen
Wenn man z.B. aus einer Lottotrommel insgesamt k-mal eine nummerierte Kugel zieht, diese jeweils aber wieder zurücklegt und jeweils die Nummer aufschreibt, hat man auf allen k Plätzen 49 Möglichkeiten, also insgesamt 49^k verschiedene Kombinationen. Allgemein gilt:

In einer geordneten Kombination mit k Stufen und jeweils n Möglichkeiten, eine Stufe zu besetzen, gibt es insgesamt

$$\boxed{N = n^k}$$

Anordnungsmöglichkeiten.

Ziehen ohne Zurücklegen
Bei einer richtigen Lottoziehung werden die Kugeln nicht wieder in die Trommel zurückgelegt. In einem solchen Fall hat man natürlich pro Stufe weniger Auswahlmöglichkeiten. Nehmen wir an, die Reihenfolge bei der Lottoziehung wäre relevant, dann gäbe es bei sieben Stufen $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43$ Kombinationsmöglichkeiten. Allgemein gilt:

In einer geordneten Kombination mit k Stufen und anfangs n Möglichkeiten, eine Stufe zu besetzen, gibt es beim Ziehen ohne Zurücklegen insgesamt

$$\boxed{N = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}$$

Anordnungsmöglichkeiten.

Anordnen aller Elemente einer Menge mit n Elementen
Als Spezialfall des vorigen Falles können z.B. alle Lottokugeln gezogen und angeordnet werden. Dann gibt es $49 \cdot 48 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 49!$ (49-Fakultät) Anordnungsmöglichkeiten. Allgemein gilt:

Die Anzahl der Möglichkeiten, n unterscheidbare Elemente einer Menge anzuordnen, beträgt

$$\boxed{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$$

(n-Fakultät).

Spezialfall: Es ist definiert: $0! = 1$

Ungeordnete Stichproben – der Binomialkoeffizient

Bei einer Kombination aus anfangs n Elementen mit k Stufen ergeben sich beim „Ziehen ohne Zurücklegen“ und ohne Beachtung der Reihenfolge der einzelnen Stufen

$$\boxed{\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}}$$ Anordnungsmöglichkeiten.

Der Ausdruck oben wird noch oft vorkommen und heißt **Binomialkoeffizient.**

Beispiele und Rechenregeln zum Binomialkoeffizient

Vereinfachte Berechnung

Der Binomialkoeffizient ist nicht so schwer zu bilden, wie man aufgrund der Formel vielleicht annehmen könnte.

Beispiele: $\binom{15}{3}=\frac{15!}{3!\cdot(15-3)!}=\frac{15!}{3!\cdot 12!}=\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(3\cdot 2\cdot 1)\cdot(12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}=\frac{15\cdot 14\cdot 13}{3\cdot 2\cdot 1}$

$\binom{41}{7}=\frac{41\cdot 40\cdot 39\cdot 38\cdot 37\cdot 36\cdot 35}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$ $\binom{8}{2}=\frac{8\cdot 7}{2\cdot 1}$ $\binom{10}{4}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$

Rechenregeln, ggf. mit Beispielen

$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, $\binom{7}{5}=\binom{7}{2}$

$\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1$

$\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$, $\binom{11}{1}=\binom{11}{10}=\frac{11}{1}=11$

$k\cdot\binom{n}{k}=n\cdot\binom{n-1}{k-1}$, $3\cdot\binom{9}{3}=\frac{3\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1}=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{2\cdot 1}=9\cdot\binom{8}{2}$

Aufgaben

Seiten 50–59	Zu erledigen bis	ging gut	war schwer	ging gar nicht
2				
3				
5bcd				
6				
8				
9a				
10				
18				
21				
24				

Q3 Mathematik GK Martin-Niemöller-Schule Stefan Krissel

Ungeordnete Stichproben – der Binomialkoeffizient

Bei einer Kombination aus anfangs n Elementen mit k Stufen ergeben sich beim „Ziehen ohne Zurücklegen“ und ohne Beachtung der Reihenfolge der einzelnen Stufen

$$\boxed{\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}}$$ Anordnungsmöglichkeiten.

Der Ausdruck oben wird noch oft vorkommen und heißt **Binomialkoeffizient.**

Beispiele und Rechenregeln zum Binomialkoeffizient

Vereinfachte Berechnung

Der Binomialkoeffizient ist nicht so schwer zu bilden, wie man aufgrund der Formel vielleicht annehmen könnte.

Beispiele: $\binom{15}{3}=\frac{15!}{3!\cdot(15-3)!}=\frac{15!}{3!\cdot 12!}=\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(3\cdot 2\cdot 1)\cdot(12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}=\frac{15\cdot 14\cdot 13}{3\cdot 2\cdot 1}$

$\binom{41}{7}=\frac{41\cdot 40\cdot 39\cdot 38\cdot 37\cdot 36\cdot 35}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$ $\binom{8}{2}=\frac{8\cdot 7}{2\cdot 1}$ $\binom{10}{4}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$

Rechenregeln, ggf. mit Beispielen

$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, $\binom{7}{5}=\binom{7}{2}$

$\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1$

$\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$, $\binom{11}{1}=\binom{11}{10}=\frac{11}{1}=11$

$k\cdot\binom{n}{k}=n\cdot\binom{n-1}{k-1}$, $3\cdot\binom{9}{3}=\frac{3\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1}=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{2\cdot 1}=9\cdot\binom{8}{2}$

Aufgaben

Seiten 50–59	Zu erledigen bis	ging gut	war schwer	ging gar nicht
2				
3				
5bcd				
6				
8				
9a				
10				
18				
21				
24				

Einführung in die Kombinatorik 3