ALBERT-LUDWIGS-
UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. Andreas Podelski
Matthias Heizmann
Alexander Nutz
Christian Schilling

12.12.2013
Abgabe: Dienstag 17.12.2013, 16 Uhr
zu Beginn der Vorlesung

8. Übungsblatt zur Vorlesung
Theoretische Informatik

Aufgabe 1: Chomsky-Normalform 3 Punkte

Konvertierung in Chomsky-Normalform

Eingabe: ε-freie kontextfreie Grammatik G

Ausgabe: Kontextfreie Grammatik G' in Chomsky-Normalform

1. Füge für jedes Terminalsymbol a ein neues Nichtterminalsymbol X_a und die Regel $X_a \to a$ ein. Ersetze jedes Vorkommen von a durch X_a in den ursprünglichen Regeln.

2. Sind auf der rechten Seite einer Produktion mehr als zwei Nichtterminale, so werden zwei benachbarte Nichtterminale AB durch ein neues Nichtterminal Y_{AB} ersetzt und die Produktion $Y_{AB} \to AB$ zur Grammatik hinzugefügt. Wiederhole dies, bis keine Produktion mehr als zwei Nichtterminale erzeugt.

3. Eliminiere alle Schleifen (Regeln der Form $A_1 \to A_2, \ldots, A_{n-1} \to A_n, A_n \to A_1$) indem man jedes Vorkommen der Nichtterminale $A_2, \ldots, A_n$ in allen Regeln (sowohl auf der linken als auch auf der rechten Seite) durch das Nichtterminal A_1 ersetzt. Lösche anschließend die dadurch entstandenen überflüssigen Regeln der Form $A_1 \to A_1$.

4. Füge für jede Regel der Form $A \to B$ und allen Regeln der Form $B \to w$ die Regel $A \to w$ hinzu. Lösche anschließend die Regeln der Form $A \to B$.

Betrachten Sie die folgende kontextfreie ε-freie Grammatik $G = (N, T, P, S')$, mit der Menge der Nichtterminalsymbole $N = \{S', S, A, B\}$, der Menge der Terminalsymbole $T = \{a, b\}$ und den folgenden Regeln:

$$
\begin{aligned}
P = \{&S' \to \varepsilon \mid S,\\
&S \to A \mid B,\\
&A \to a \mid aA \mid aB \mid aAB,\\
&B \to S \mid b \mid bA\}
\end{aligned}
$$

Verwenden Sie den obigen Algorithmus, um G in eine Grammatik G' in Chomsky-Normalform zu transformieren:

Aufgabe 2: Kontextfreie Sprachen und Pumping Lemma 2+2 Punkte

Sind die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ kontextfrei?

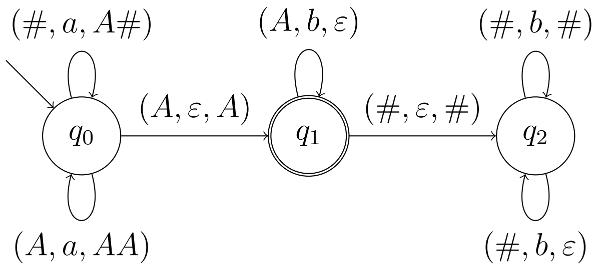
(a) $L_1 = \{a^n b^m b^n a^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

(b) $L_2 = \{a^{i^2} \mid i \in \mathbb{N}\}$

Beweisen Sie Ihre Behauptung mit Hilfe des Pumping Lemmas, falls die Sprache nicht kontextfrei ist. Geben Sie sonst mit einer kurzen Begründung eine kontextfreie Grammatik an, die die Sprache erzeugt.

Aufgabe 3: Kellerautomaten I 1+1.5+1.5 Punkte

Betrachten Sie folgenden Kellerautomaten $\mathcal{K} = (\Sigma, Q, \Gamma, \to, q_0, Z_0, F)$ mit dem Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b\}$, der Menge von Zuständen $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, dem Kelleralphabet $\Gamma = \{\#, A\}$, dem Startsymbol des Kellers $Z_0 = \#$ und der Menge von Endzuständen $F = \{q_1\}$. Im folgenden Zustandsdiagramm von $\mathcal{K}$ sind Beschriftungen (Z, z, γ) von Transitionen für $Z \in \Gamma$, $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ und $\gamma \in \Gamma^*$ folgendermaßen zu lesen: Z ist das oberste Kellersymbol, z das Eingabesymbol, und Z wird nach Ausführung der Transition durch γ an der Spitze des Kellers ersetzt.



In der Vorlesung haben Sie zwei Varianten der Sprach-Akzeptanz für Kellerautomaten kennengelernt: Akzeptanz (mit Endzustand) und Akzeptanz mit dem leeren Keller. Begründen Sie ihre Behauptungen.

(a) Akzeptiert $\mathcal{K}$ das Wort *aabbb* mit Endzustand? Akzeptiert $\mathcal{K}$ das Wort *aabbb* mit dem leeren Keller?

(b) Was ist die von $\mathcal{K}$ erkannte Sprache $L(\mathcal{K})$?

(c) Was ist die von $\mathcal{K}$ mit dem leeren Keller erkannte Sprache $L_\varepsilon(\mathcal{K})$?

Aufgabe 4: Kellerautomaten II 2 Punkte

Konstruieren Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{K} = (\Sigma, Q, \Gamma, \rightarrow, q_0, Z_0, F)$, der die folgende kontextfreie Sprache erkennt.

$$L = \{a^n b^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Geben Sie jede Komponente der Struktur $\mathcal{K} = (\Sigma, Q, \Gamma, \rightarrow, q_0, Z_0, F)$ an. Sie dürfen die Transitionsrelation $\rightarrow$ durch ein Zustandsdiagramm wie in Aufgabe 3 darstellen.

Hinweis: Beachten Sie, dass Akzeptanz ohne den Zusatz *"mit leerem Keller"* immer die Akzeptanz mit Endzustand bezeichnet.