Versuch M2 für Physiker
Gekoppelte Pendel

I. Physikalisches Institut, Raum HS102
Stand: 15. Dezember 2014

generelle Bemerkungen

- **bitte Versuchsaufbau (links/mitte/rechts) angeben**
- **bitte Versuchspartner angeben**
- **bitte Versuchsbetreuer angeben**
- **bitte nur handschriftliche Auswertung**

1 Einleitung

Gekoppelte Pendel sind zwei Pendel, die (z.B. durch eine Feder) verbunden sind und daher nicht unabhängig voneinander schwingen können. Haben die beiden Pendel dieselbe Schwingungsperiode T_0, so kann durch die Kopplung Schwingungsenergie von einer Feder auf die andere übertragen werden (und wieder zurück), und es kommt zu einer sogenannten Schwebung. Ein Festkörper (Kristall) besteht z.B. aus vielen gekoppelten Atomen, die um ihre Ruhelage schwingen können. Die Kopplung der Atome in dem Festkörper bewirkt eine effektive Wärmeübertragung.

2 Vorbereitung (zu Hause)

Die folgenden Stichpunkte und theoretischen Überlegungen sollen in Ihrem Heft schriftlich bearbeitet werden. Außerdem sollten Sie in der Lage sein, sie am Versuchstag im Antestat selbstständig wiederzugeben. Weitere Hinweise zum Vorgehen bei den Herleitungen finden Sie in Abschnitt 7. Literaturhinweise gibt es in Abschnitt 8.

1. Machen Sie sich mit folgenden Begriffen und Gesetzmäßigkeiten vertraut:
   (a) Allgemeine Begriffe: Harmonische Schwingung, Näherungsrechnung, Fehlerfortpflanzung
   (b) Gekoppelte Pendel: Grundschwingungen, Schwebungen
2. Mathematisches Pendel:
   (a) Leiten Sie die Bewegungsgleichung für ein Mathematisches Pendel (7) her.
   (b) Zeigen Sie, dass (8) diese Bewegungsgleichung löst und interpretieren Sie die Lösung physikalisch.
3. Gekoppelte Pendel:
   (a) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für zwei gekoppelte Pendel (10) und (11) her.
   (b) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen durch Entkoppeln der Differentialgleichungen.
   (c) Was bedeutet das Entkoppeln physikalisch?
   (d) Interpretieren Sie die Lösungen der Bewegungsgleichungen (23) und (24) physikalisch. Welche Bedeutung haben ω_S und ω?
   (e) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Amplituden der beiden Pendel. Erläutern Sie daran den Begriff der Schwebung.
   (f) Welche Kopplungsgrade gibt es? Leiten Sie die im Versuch verwendeten Kopplungsgrade (44) und (45) her.
   (g) Leiten Sie die Beziehungen (49), (53) und (54) für die relative Frequenzverschiebung her.

3 Versuchsaufbau und -beschreibung

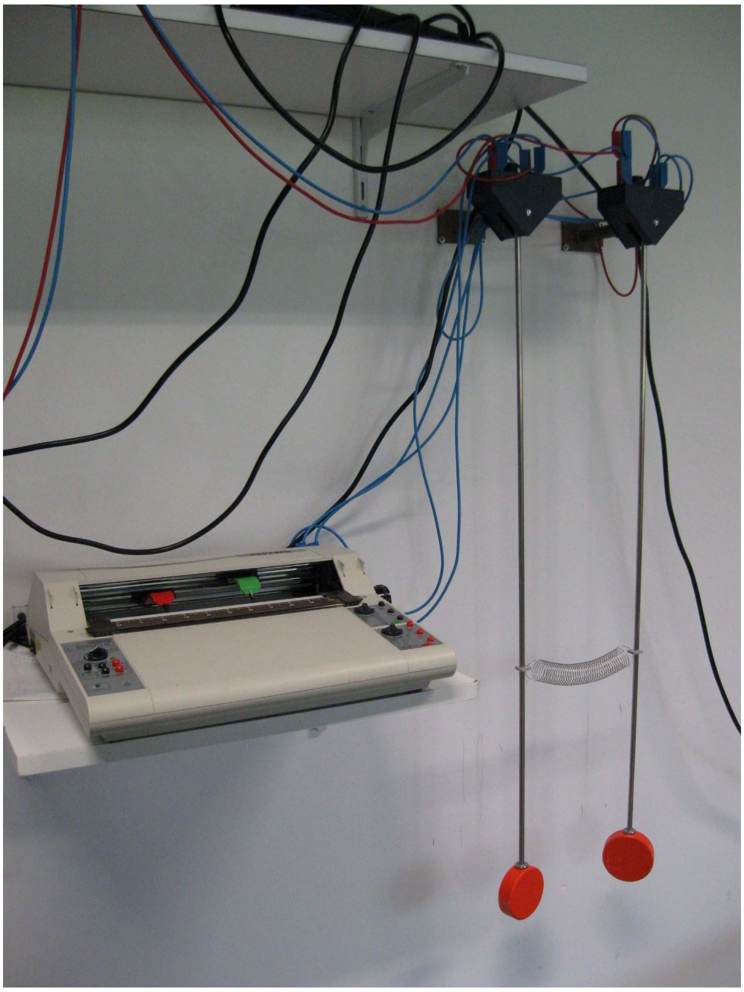

Abbildung 1: Foto des Versuchsaufbaus

Der Versuch besteht aus zwei Pendeln, die durch eine Feder gekoppelt sind. Die Stärke dieser Kopplung (sog. Kopplungsgrad) kann durch die Höhe der Feder eingestellt werden (Feder unten: hoher Kopplungsgrad, Feder weiter oben: kleiner Kopplungsgrad).
Zur Aufzeichnung der Pendelbewegungen im Schwebungsfall sind beide Pendel an einen Schreiber angeschlossen. Der Schreiber zeichnet bei fester Papierlaufgeschwindigkeit die momentane Auslenkung jedes Pendels auf, so dass man den zeitlichen Verlauf der Amplituden später rekonstruieren kann.

4 Benötigte Formeln

Hinweise zur Herleitung finden sich in Abschnitt 7 dieser Anleitung.

In diesem Versuch werden insgesamt fünf Schwingungsdauern T_i und die zugehörigen Frequenzen ω_i betrachtet. Die Bezeichnungen sind wie folgt:

freies Pendel:		$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$
Grundschwingungen:	gleichsinnig	$\omega_{gl} = \frac{2\pi}{T_{gl}} = \omega_0$
	gegensinnig	$\omega_{geg} = \frac{2\pi}{T_{geg}}$
Schwebungsfall:	Schwebung	$\omega_S = \frac{2\pi}{T_S}$
	Schwingung	$\omega = \frac{2\pi}{T}$

Aus diesen Größen kann man den Kopplungsgrad k auf zwei Arten berechnen - dynamisch und im Schwebungsfall:

$$k_{dyn} = \frac{T_{gl}^2 - T_{geg}^2}{T_{gl}^2 + T_{geg}^2} \ , \tag{1}$$

$$k_{schweb} = \frac{2T_S T}{T_S^2 + T^2} \ . \tag{2}$$

Aus dem Kopplungsgrad k kann man die relative Frequenzaufspaltung $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_{geg}-\omega_{gl}}{\omega_{gl}}$ berechnen als:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} - 1 \tag{3}$$

$$\approx k + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k^3 \ , \tag{4}$$

wobei die letzte Zeile eine Näherung für kleine Kopplungsgrade bis zur dritten Ordnung in k ist.
Um die relative Frequenzaufspaltung experimentell zu ermitteln gibt es wie bei k zwei Möglichkeiten:

$$\text{dynamisch:} \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{T_{gl}}{T_{geg}} - 1 \ , \tag{5}$$

$$\text{Schwebungsfall:} \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2T_0}{T_S} \ . \tag{6}$$

5 Durchführung (im Praktikum)

Bitte führen Sie die nachfolgenden Punkte nacheinander durch:

1. **Eingewöhnung und Justage**
   Spielen Sie mit der Versuchsanordnung, wobei Sie sich mit der Beobachtungstechnik vertraut machen und Fehlerquellen erkennen sollten.
   Bei dem Versuch sollten beide Pendel die gleiche Schwingungsdauer T_0 haben. Nehmen Sie die Kopplungsfeder ab und lassen Sie beide Pendel schwingen. Justieren Sie die Länge eines Pendels so lange, bis die Schwingungsdauern übereinstimmen.
   Zeichnen Sie eine Versuchsskizze in Ihr Protokollheft. Überprüfen Sie, ob beide Schreiberstifte die Pendelbewegung einwandfrei aufzeichnen, wenn nicht kontaktieren Sie Ihren Betreuer.

2. **Messung**
   Geben Sie für alle gemessenen Größen die zugehörigen Fehler an.

   (a) **Bestimmen Sie die Schwingungssdauer T_0 eines Pendel ohne Kopplung.**
   Messen Sie dazu 5 Mal die Zeit für 20 Schwingungen für ein Pendel und berechnen Sie daraus T_0 inklusive Fehler.

   (b) **Messen Sie für drei verschiedene Kopplungen der Pendel (schwach - mittel - stark) jeweils folgende Schwingungsdauern:**
   Verschiedene Kopplungen der Pendel erhalten Sie durch verschiedene Höheneinstellungen der Kopplungsfeder. Wichtig: Justieren Sie die Feder nie ganz oben und nie ganz unten. Für jede der drei von Ihnen gewählten Kopplungen führen Sie die folgenden Messungen durch (gehen Sie die Punkte 2(b)i. bis 2(b)iii. für eine feste Kopplung durch, bevor Sie die Kopplung ändern). *Achten Sie bei allen Versuchsteilen darauf, dass die Kopplungsfeder nicht überdehnt wird.*

      i. **Gleichsinnige Schwingung:**
      Bestimmen Sie die Schwingungsdauer für die gleichsinnige Schwingung T_{gl} entweder aus den Ergebnissen zu 2a oder durch Messung analog zu 2a.

      ii. **Gegensinnige Schwingung:**
      Regen Sie das Pendelsystem zur gegensinnigen Grundschwingung an. Messen Sie die Zeit mit der Stoppuhr für 20 Schwingungen fünf Mal, um die Schwingungsdauer der gegensinnigen Schwingung T_{geg} (inkl. Fehler) bestimmen zu können.

      iii. **Schwebung:**
      Lenken Sie nur ein Pendel aus und versetzen Sie so das Pendelsystem in den Schwebungsmodus. Benutzen Sie für diese Teilaufgabe den angeschlossenen Schreiber. Lassen Sie den Schreiber für die starke und die mittlere Kopplung jeweils einen Bereich über 5 Schwebungen aufzeichnen, für die schwache Kopplung genügen 1 - 2 Schwebungen.
      Notieren Sie sich die Geschwindigkeit des Papiers, um daraus die Perioden T_S und T bestimmen zu können.

6 Auswertung und Diskussion (zu Hause)

Bitte führen Sie zu jedem Wert eine Fehlerrechnung durch. Geben Sie alle verwendeten Formeln an und erläutern Sie kurz, was Sie tun und warum. Zeichnen Sie Ihre Diagramme auf Millimeterpapier und beschriften Sie sie vollständig (zu welcher Aufgabe gehört das Diagramm?, was ist auf den Achsen aufgetragen?). Die korrekte Form zur Angabe von Ergebnissen, sowie Hinweise zur Fehlerrechnung entnehmen Sie bitte der *Allgemeinen Praktikumsanleitung*.

Führen Sie die Aufgaben 1. **bis** 3. **für alle drei von Ihnen gewählten Kopplungsgrade aus. Fassen Sie die Ergebnisse zu** 1. **bis** 3. **in einer Wertetabelle zusammen.**

1. **Schwingungsdauern**

   Tragen Sie die Schwingungsdauern T_{gl}, T_{geg}, T_s und T zusammen mit ihren Fehlern in die Tabelle ein.

2. **Bestimmen Sie den Kopplungsgrad.**

   (a) Bestimmen Sie den dynamischen Kopplungsgrad nach Gl. (1) aus den Schwingungsdauern der Grundschwingungen T_{gl} und T_{geg}.

   (b) Bestimmen Sie den Kopplungsgrad k_{schweb} nach Gl. (2) aus den Periodendauern T_S und T.

3. **Bestimmen Sie die relative Frequenzaufspaltung.**

   (a) Bestimmen Sie die relative Frequenzaufspaltung nach Gl. (5) aus den Schwingungsdauern der Grundschwingungen T_{gl} und T_{geg}.

   (b) Bestimmen Sie die relative Frequenzaufspaltung nach Gl. (6) aus der Schwebungsdauer T_S und der Schwingungsdauer des freien Pendels T_0.

4. **Überprüfen Sie die Gültigkeit der Näherungsfunktion für die relative Frequenzaufspaltung.**
   Vergleichen Sie graphisch die Näherungsfunktion für die Abhängigkeit der relativen Frequenzaufspaltung vom Kopplungsgrad (4) mit ihrem exakten Verlauf (3). Fertigen Sie dazu eine Wertetabelle für die beiden Funktionen im Bereich $0 \leq k < 1$ an und zeichnen Sie damit die beiden Funktionsverläufe in *ein* Diagramm.

5. **Vergleichen Sie Ihre Messergebnisse für die relative Frequenzaufspaltung mit der Theorie.**
   Überprüfen Sie dazu graphisch den Zusammenhang zwischen relativer Frequenzaufspaltung und Kopplungsgrad für Ihre Messergebnisse im Vergleich zur Vorhersage. Zeichnen Sie also die Wertepaare $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}(k)$ (zu beiden Methoden) aus Ihrer Ergebnistabelle in *ein* Diagramm ein. Zusätzlich berechnen Sie für den Bereich von k, den Ihre

Messungen abdecken, einige Punkte auf dem vorhergesagten Verlauf $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}(k)$ nach (4) und zeichnen Sie in dasselbe Diagramm. Fertigen Sie für diese Wertepaare ebenfalls eine Tabelle an.

6. **Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.**
   In welchem Bereich von k halten Sie die Näherung (4) für sinnvoll? Fallen Ihre Messwerte in diesen Bereich? Welche Wertepaare für $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}(k)$ erlauben es, die Qualität der Messung zu beurteilen - die, die auf der dynamischen Methode beruhen, oder die nach der Schwebungsmethode ermittelten? Beachten Sie hierzu, welche Messwerte Sie jeweils in $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ und k einsetzen und ob diese unabhängig voneinander sind. Wie gut stimmen die Wertepaare mit der Vorhersage überein? Für welche Methode würden Sie die bessere Übereinstimmung erwarten? Welche Fehlerquellen gibt es in diesem Versuch?

7 Anhang: Hinweise zur Herleitung der Formeln

Zur Herleitung der für den Versuch benötigten Beziehungen machen wir folgende Annahmen:

1. Beide Pendel schwingen in parallelen Ebenen.
2. Sie haben die gleiche Masse m.
3. Sie schwingen einzeln (als freie Pendel) mit der gleichen Eigenfrequenz ω_0.
4. Die Auslenkwinkel φ aus der Ruhelage seien stets so klein. dass $\sin\varphi = \varphi$ gesetzt werden kann und die Projektion der Pendelbewegung auf eine Koordinatenachse (z.B. x) anstelle des Auslenkwinkels betrachtet werden kann: $x = L\sin\varphi = L\varphi$.

7.1 Freies Pendel

Die Bewegungsgleichung für ein freies mathematisches Pendel lautet:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\frac{mg}{L}x = -D_0 x \\ \Leftrightarrow \ddot{x} &= -\frac{g}{L}x \ , \end{aligned} \tag{7}$$

wobei g die Erdbeschleunigung ist und L die Pendellänge. Die Zusammenfassung der Konstanten zu D_0 geschieht hier als Vorbereitung für die Betrachtung der gekoppelten Pendel. Die Lösung der Bewegungsgleichung lautet:

$$x(t) = a\sin(\omega_0 t) + b\cos(\omega_0 t) \ , \tag{8}$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{D_0}{m} \ , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{9}$$

wobei ω_0 die Kreisfrequenz des freien Pendels ist und T_0 seine Schwingungsdauer.

7.2 Gekoppelte Pendel

Zusätzlich zur Erdbeschleunigung übt nun auch die Kopplungsfeder eine Kraft auf die Pendel aus. Diese Kraft hängt ab von der Richtgröße D_F der Feder und der Länge um die die Feder gestaucht bzw. ausgedehnt wurde $(x_1 - x_2)$, wobei x_i die Auslenkung von Pendel P_i aus der Ruhelage bezeichnet. Damit ergibt sich die Bewegungsgleichung der gekoppelten Pendel zu:

$$P_1: \quad m\ddot{x}_1 = -D_0 x_1 - D_F(x_1 - x_2) \ , \tag{10}$$

$$P_2: \quad m\ddot{x}_2 = -D_0 x_2 + D_F(x_1 - x_2) \ . \tag{11}$$

Diese gekoppelten Differentialgleichungen lassen sich mit Hilfe der Substitutionen

$$z_1 = x_1 - x_2 \ , \tag{12}$$

$$z_2 = x_1 + x_2 \tag{13}$$

entkoppeln und man erhält die unabhängigen Differentialgleichungen

$$\left(\omega_0^2 + \frac{2D_F}{m}\right) \cdot z_1 + \ddot{z}_1 = 0 \ , \tag{14}$$

$$\omega_0^2 \cdot z_2 + \ddot{z}_2 = 0 \ . \tag{15}$$

7.2.1 Grundschwingungen

Die Variablen z_1 und z_2 beschreiben die beiden Grundschwingungen der gekoppelten Pendel. Die zugehörigen Frequenzen kann man aus den Differentialgleichungen (14) und (15) unmittelbar ablesen:

1. **Gegensinnige Bewegung:**
   Beide Pendel schwingen mit gleicher Amplitude, aber mit um π verschobener Phase. Es ist $x_1 = -x_2$ und folglich $z_2 = 0$. Aus Gleichung (14) ergibt sich für die Frequenz:

$$\omega_{geg} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2D_F}{m}} \tag{16}$$

$$= \omega_0 \sqrt{1 + \frac{2D_F}{D_0}} \ . \tag{17}$$

   Im Folgenden gehen wir immer von schwacher Kopplung aus, d.h. $D_F \ll D_0$. Die Frequenz wird damit zu:

$$\omega_{geg} \approx \omega_0 \left(1 + \frac{D_F}{D_0}\right) \tag{18}$$

2. **Gleichsinnige Bewegung:**
   Beide Pendel schwingen mit gleicher Amplitude und gleicher Phase. Es ist $x_1 = x_2$ und folglich $z_1 = 0$. Aus Gleichung (15) ergibt sich für die Frequenz:

$$\omega_{gl} = \omega_0 \ , \tag{19}$$

   d.h. das System schwingt mit der Eigenfrequenz der freien Pendel.

Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung erhält man als Linearkombination zweier linear unabhängiger spezieller Lösungen. Für die Grundschwingungen ergibt sich damit:

$$z_1 = a_{geg} \sin(\omega_{geg} t) + b_{geg} \cos(\omega_{geg} t) \ , \tag{20}$$

$$z_2 = a_{gl} \sin(\omega_{gl} t) + b_{gl} \cos(\omega_{gl} t) \ . \tag{21}$$

Die Differenz zwischen den Frequenzen der beiden Grundschwingungen bezeichnet man als Frequenzaufspaltung:

$$\Delta\omega = \omega_{geg} - \omega_{gl} \tag{22}$$

7.2.2 Schwebung

Als Schwebung bezeichnet man eine Pendelbewegung, die Anteile beider Grundschwingungen z_1 und z_2 enthält. Die Bewegung der Pendel x_i ergibt sich aus den Grundschwingungen zu:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{2}(z_2 + z_1) \\ &= \frac{1}{2}\left[a_{geg}\sin(\omega_{geg}t) + b_{geg}\cos(\omega_{geg}t) + a_{gl}\sin(\omega_{gl}t) + b_{gl}\cos(\omega_{gl}t)\right] \ , \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{1}{2}(z_2 - z_1) \\ &= \frac{1}{2}\left[-a_{geg}\sin(\omega_{geg}t) - b_{geg}\cos(\omega_{geg}t) + a_{gl}\sin(\omega_{gl}t) + b_{gl}\cos(\omega_{gl}t)\right] \ . \end{aligned} \tag{24}$$

Wählt man nun die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_0 \quad , \qquad x_2(0) = 0 \ , \\ \dot{x}_1(0) &= 0 \quad \text{und} \quad \dot{x}_2(0) = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

so folgt:

$$\begin{aligned} b_{geg} &= b_{gl} = x_0 \ , \\ a_{geg} &= a_{gl} = 0 \ . \end{aligned} \tag{26}$$

Damit werden (23) und (24) zu:

$$x_1(t) = \frac{1}{2}x_0\left[\cos(\omega_{geg}t) + \cos(\omega_{gl}t)\right] \ , \tag{27}$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}x_0\left[\cos(\omega_{geg}t) - \cos(\omega_{gl}t)\right] \ . \tag{28}$$

Das kann man mithilfe zweier Additionstheoreme weiter vereinfachen. Es gilt nämlich:

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \ , \tag{29}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \ . \tag{30}$$

Damit ergibt sich:

$$x_1(t) = x_0\cos(\omega_S t)\cos(\omega t) \ , \tag{31}$$

$$x_2(t) = -x_0\sin(\omega_S t)\sin(\omega t) \ , \tag{32}$$

mit

$$\omega_S = \frac{\omega_{geg} - \omega_{gl}}{2} \ , \tag{33}$$

$$\omega = \frac{\omega_{geg} + \omega_{gl}}{2} \ . \tag{34}$$

Bei schwacher Kopplung gilt $D_F \ll D_0$. Daher unterscheiden sich ω_{geg} und ω_{gl} nur geringfügig und es gilt $\omega_S \ll \omega$. Die Faktoren

$$\cos(\omega_S t) \quad \text{und} \quad \sin(\omega_S t) \tag{35}$$

ändern sich nur langsam mit der Zeit und beschreiben die Oszillation der Amplitude (Einhüllende), während die jeweils anderen Faktoren die normale Schwingung der Pendel mit der Fequenz ω beschreiben. Aus den Frequenzen ω_S und ω ergeben sich die

$$\text{Schwingungsdauer:} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{36}$$

und die

$$\text{Schwebungsdauer:} \quad T_S = \frac{2\pi}{\omega_S} \ . \tag{37}$$

7.2.3 Kopplunggrad

Der Kopplungsgrad ist definiert als

$$k = \frac{D_F}{D_0 + D_F} \in [0, 1] \tag{38}$$

Er kann aus den Grundschwingungen bestimmt werden oder aus der Schwebung. Es gilt (vgl. (17) und (19) bzw. (9)):

$$m\omega_{geg}^2 = D_0 + 2D_F \tag{39}$$

$$m\omega_{gl}^2 = D_0 \tag{40}$$

Addition bzw. Subtraktion dieser beiden Gleichungen liefert:

$$m\left(\omega_{geg}^2 - \omega_{gl}^2\right) = 2D_F \tag{41}$$

$$m\left(\omega_{geg}^2 + \omega_{gl}^2\right) = 2\left(D_0 + D_F\right) \tag{42}$$

Durch Division ergibt sich daraus:

$$k = \frac{D_F}{D_0 + D_F} = \frac{\omega_{geg}^2 - \omega_{gl}^2}{\omega_{geg}^2 + \omega_{gl}^2} \tag{43}$$

Dies kann man umformen, so dass man den Kopplungsgrad dynamisch aus den Schwingungsdauern der Grundschwingungen T_{gl} und T_{geg} oder im Schwebungsfall aus den Perioden T_S und T berechnen kann:

$$k_{dyn} = \frac{T_{gl}^2 - T_{geg}^2}{T_{gl}^2 + T_{geg}^2} \ , \tag{44}$$

$$k_{schweb} = \frac{2\omega_S\omega}{\omega_S^2 + \omega^2} = \frac{2T_S T}{T_S^2 + T^2} \ . \tag{45}$$

7.2.4 Relative Frequenzaufspaltung

Um die relative Frequenzaufspaltung $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ zu berechnen, stellen wir sie zunächst als Funktion des Kopplungsgrades dar. Man kann Gleichung (43) umformen zu:

$$k\omega_{geg}^2 + k\omega_{gl}^2 = \omega_{geg}^2 - \omega_{gl}^2 \ , \tag{46}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\omega_{geg}}{\omega_{gl}} = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \ . \tag{47}$$

Damit folgt für die relative Frequenzaufspaltung:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_{geg} - \omega_{gl}}{\omega_{gl}} = \frac{\omega_{geg}}{\omega_{gl}} - 1 \ , \tag{48}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} - 1 \ . \tag{49}$$

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen nutzt man zwei Taylor-Entwicklungen für kleine Kopplungsgrade $k \ll 1$:

$$\sqrt{1+k} = 1 + \frac{1}{2}k - \frac{1}{8}k^2 + \frac{1}{16}k^3 + \ldots \tag{50}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+k}} = 1 + \frac{1}{2}k + \frac{3}{8}k^2 + \frac{5}{16}k^3 + \ldots \tag{51}$$

Als Näherung für die relative Frequenzaufspaltung bis zur dritten Ordnung in k erhält man damit:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx k + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k^3 \tag{52}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man nun die relative Frequenzaufspaltung für verschiedene Kopplungsgrade vorhersagen. Im Experiment bestimmt man sie allerdings direkt aus den gemessenen Schwingungsdauern. Hier unterscheidet man - wie beim Kopplungsgrad - den dynamischen Fall und den Schwebungsfall. Aus der Definition (48) folgt für den dynamischen Fall:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{T_{gl}}{T_{geg}} - 1 \ . \tag{53}$$

Für den Schwebungsfall erhält man einen ähnlichen Ausdruck

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2T_0}{T_S} \ , \tag{54}$$

mit der Schwingungsdauer des freien Pendels T_0 und der Schwebungsdauer T_S.

8 Literatur

- Fehlerrechnung:
  http://www.astro.uni-koeln.de/teaching_seminars/AP/
  http://www.ph2.uni-koeln.de/fileadmin/Lehre/Anfaengerpraktikum/Fehler.pdf
- Demtröder: Experimentalphysik 1, Springer, 2008, Kapitel 11
  http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html
- Meschede und Gerthsen: Physik, Springer, 2006, Kapitel 4
  http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html
- Tipler: Physik, Heidelberg, Spektrum, Akad. Verlag, 1994
- Walcher: Praktikum der Physik

9 Sicherheitshinweise

Dieser Versuchsaufbau enthält ein Netzteil und einen elektrisch betriebenen Schreiber, es gelten also die üblichen Verhaltensregeln für den Umgang mit Strom.
Informieren Sie bei Defekten an Bestandteilen des Aufbaus Ihren Betreuer und versuchen Sie nicht selbst Teile zu demontieren.