KOMMUTATIVE ALGEBRA – BLATT 1

1. Invariantentheorie

Aufgabe 1. Betrachte die quadratische binäre Form

$$F = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Die spezielle lineare Gruppe $SL_2(\mathbb{C})$ wirkt durch lineare Transformation der Koordinaten $(g,(x,y)) \mapsto g \cdot (x,y)$ auf dem Polynomring $\mathbb{C}[a,b,c]$. Zeigen Sie, dass die *Diskriminante* $b^2 - ac$ eine Invariante ist.

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{k}$ ein Körper der Charakteristik ungleich 2. Der Erzeuger der Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ wirkt auf $\mathbb{k}[x,y]$ via $x \mapsto -x, y \mapsto -y$. Zeigen Sie, dass der Invariantenring $\mathbb{k}[x^2, xy, y^2]$ ist. Zeigen Sie weiter, dass $\mathbb{k}[x^2, xy, y^2] \equiv \mathbb{k}[u,v,w]/(uw - v^2)$, und das dieser Ring keinen Isomorphismus zu einem Polynomring zulässt.

2. Noethersche Moduln

Aufgabe 3. Sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- M ist Noethersch, d.h. jeder Untermodul ist endlich erzeugt.
- Jede aufsteigende Kette von Untermoduln stabilisiert.
- Jede Menge von Untermoduln enthält ein inklusionsmaximales Element.
- Seien $f_1, f_2, \dots \in M$. Es gibt eine Zahl m so dass für alle $n > m$ sich f_n schreiben lässt als $f_n = \sum_{i=1}^m a_i f_i$ mit $a_i \in R$.

Aufgabe 4. Sei R ein Noetherscher Ring, und $I \subset R$ ein Ideal. Betrachte die Menge der Primideale von R die I enthalten. Zeigen Sie, dass es in dieser Menge nur endlich viele minimale Elemente (unter Inklusion gibt). Man nennt sie die *minimalen Primideale* von I. Eine mögliche Vorgehensweise ist die folgenden Aussagen zu zeigen:

- Angenommen die Aussage ist falsch, dann gibt es ein maximales Ideal I für das die Aussage fehlschlägt.
- Dieses I kann kein Primideal sein.
- Seien $f, g \in R \setminus I$ mit $fg \in I$.
- Jedes minimale Primideal von I ist minimal über (I, f) oder (I, g).

3. Gradierte Ringe

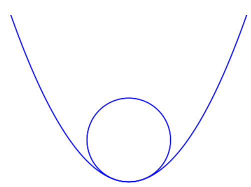
Aufgabe 5. Wir haben gesehen, dass jede endlich erzeugte Algebra über einem Noetherschen Ring Noethersch ist. Andererseits gibt es viele wichtige Ringe die Noethersch, aber nicht endlich erzeugt sind (Lokalisierungen, Vervollständigungen, ...). Im folgenden betrachten wir eine Umkehrung für gradierte Ringe.

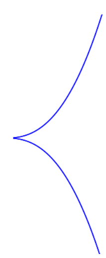
Sei $R = \bigoplus_i R_i$ ein gradierter Ring mit einem Körper R_0. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- R ist Noethersch
- R_0 ist Noethersch und das *maximale homogene Ideal* $R_1 \oplus R_2 \oplus \dots$ ist endlich erzeugt.
- R_0 ist Noethersch und R ist eine endlich erzeugte R_0-Algebra.

4. Algebra und Geometrie

Aufgabe 6. Finden Sie Ringe die die folgenden Zeichnungen abbilden:





Wie könnte der Ring $\Bbbk[x, y]/(xy, y^2)$ möglichst akkurat abgebildet werden?