Monomial and binomial ideals

Thomas Kahle

Aufgaben 3

Aufgabe 3.1

- Sei $f \in \Bbbk[\mathbf{x}]$ und $I \subset \Bbbk[\mathbf{x}]$ ein Ideal. Das *colon-Ideal* ist
$$(I : f) = \{g \in \Bbbk[\mathbf{x}] : fg \in I\}.$$
Zeigen Sie, dass (das Bild von) $f \in \Bbbk[\mathbf{x}]/I$ ein Nullteiler ist, genau dann wenn $(I : f) \neq I$.
- Die Kette
$$(I : f) \subset ((I : f) : f) \subset (((I : f) : f) : f) \subset \dots$$
stabilisiert (warum?) und das größte Ideal wird mit $(I : f^\infty)$ notiert.
- Sei $f \in \Bbbk[\mathbf{x}]$ beliebig und $s \in \mathbb{N}$ mit $(I : f^s) = (I : f^\infty)$. Zeigen Sie:
$$I = (I + \langle f^s \rangle) \cap (I : f^s).$$
Folgern Sie, dass jedes Ideal als Schnitt von primären Idealen geschrieben werden kann. Ein solcher Schnitt heißt *Primärzerlegung* von I (siehe `help primaryDecomposition`).
- Macaulay2 berechnet $(I : f)$ ohne Probleme (siehe M2-Hilfe zu `:`). Könnte man nun einen Algorithmus für Primärzerlegung implementieren?

Aufgabe 3.2

Sei $M \subset \Bbbk[\mathbf{x}]$ ein Monomideal und $\mathbf{x}^\mathbf{u} \in \Bbbk[\mathbf{x}]/M$ ein Monom. Geben Sie eine kombinatorische Charakterisierung von

- $\mathbf{x}^\mathbf{u}$ ist ein Nullteiler.
- $\mathbf{x}^\mathbf{u}$ ist nilpotent.

Finden Sie eine kombinatorische Charakterisierung von primären Monomidealen.

(*Kombinatorisch* = durch Lage von Gitterpunkten $\mathbf{u}$ ausgedrückt.)

Aufgabe 3.3

Zeigen Sie, dass für die Hilbertreihe von $\langle 0 \rangle \subset \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ gilt
$$HS_{\langle 0 \rangle}(t) = \frac{1}{(1-t)^n}$$

Die Hilbertreihe eines Quotienten $\Bbbk[\mathbf{x}]/I$ wird in Macaulay2 mit `hilbertSeries` berechnet, und mit `reduceHilbert` können gemeinsame Teiler entfernt werden.