

Inhaltsverzeichnis

1.	Einleitung und Einführung in das Themenfeld - Zahlen als Widerspiegelung formbildender Prinzipien	S. 3
1.1	Primzahlen im Besonderen	S. 4
1.2	Primzahlen: ein kurzer historischer Überblick	S. 5
1.3	Zahlenverhältnisse in Tonreihen und Stimmungen	S. 8
1.4	Zahlen formen Musik	S. 9
2.	Sonifikation - zwischen Wissenschaft und Kunst	S. 10
3.	<i>fremde räume - external spaces</i>	S. 11
3.1	Der Entstehungsprozess – Schritte zur Komposition	S. 12
3.1.1	Das Material	S. 12
3.1.2	Muster als erster Arbeitsschritt	S. 13
3.1.3	Erste Sonifikation: Zuordnung der Parameter	S. 14
3.1.4	Zweite Sonifikation: Segmente und Tonalität	S. 17
3.1.5	Die Ulam-Spirale – Muster und Klänge	S. 18
3.1.6	Einzelne Klänge	S. 20
3.1.7	Größere Primzahlen	S. 23

3.2.	Die Komposition	S. 23
3.2.1	<i>kanon</i>	S. 24
3.2.2	<i>nachtgewächse/pattern</i>	S. 25
3.2.3	<i>lightnings</i>	S. 26
3.2.4	Zeitstruktur/Ebenen	S. 27
3.3	Die Visualisierung	S. 27
3.4	Die Präsentation	S. 28
4.	MaxMSP – Die Patches	S. 29
4.1	main patch	S. 30
4.2	subpatch control	S. 32
4.3	subpatch zeta	S. 33
4.4	subpatch sign2sound	S. 34
4.5	subpatch nachtgewächse	S. 36
4.6	subpatch pattern	S. 37
4.7	subpatch singlesounds	S. 38
4.8	subpatch kanon	S. 39
4.9	subpatch lightnings	S. 42
5.	Schlussbemerkung	S. 45
6.	Quellennachweis	S. 46

Die verborgene Klanglichkeit der Primzahlen

Auf dem Weg zur installierten Komposition: *fremde räume - external spaces* (2014)

1. Einleitung und Einführung in das Themenfeld - Zahlen als Widerspiegelung formbildender Prinzipien

„Mathematik ist die Sprache der Natur.[...]Stellt man Zahlen eines beliebigen Systems grafisch dar, entstehen Muster.[...]Überall in der Natur existieren Muster.“¹

Muster sind Rhythmen in den Raum gemalt. Schon als Kind lag für mich in der Beobachtung der Abfolge von Umrissen und Kanten an den ungleich großen, aus schwerem Granit bestehenden, Alt-Berliner Gehwegplatten, ihrem Erscheinen und Verschwinden im Blickfeld beim Darübergehen, eine besondere Faszination. Auch heute betrachte ich die Fensteranordnung einer Häuserfassade nicht ohne gleichzeitiges Empfinden der rhythmischen Proportion. Als Musiker ist für mich das Generalbaßspiel - ein Spiel nach Zahlen, die die Akkordkonstellation über den Baßton als proportionale Größe angeben, selbstverständlich. Zahlen beschreiben Mengen, Proportionen, Punkte im Raum, schließlich den Raum selbst – die Zeit. Zahlen, der Beschreibung der Realität dienend, stehen grundsätzlich für mehr als nur für sich selbst. So sind die 1 als Einheit, als Ganzes, die 2 als Geteiltes, Hälftiges, Gegensätzliches und die 3 als das aus beiden Zusammengesetzte, das erste Flächenbildende, als Dimension Raumbildende, der Ausdruck universeller Grundformen. Symmetrien, als Konstruktionsprinzip der Natur, sind in den genetischen Bauplan von Lebewesen eingeschrieben und bieten so eine effiziente Form der Steuerung von Wachstum und Entwicklung. Im Aufbau von Pflanzenblüten repräsentieren sich häufig die Zahlen der Fibonacci-Reihe. Als nur *ein* Beispiel sei hier die Sonnenblume genannt, deren Blütenstände eine Doppelspirale bilden. Ursache hierfür ist die genetisch bedingte Anzahl der

¹ Darren Aronoffsky, & Darren Aronoffsky. 1998, *Pi*. USA: Harvest Filmworks.

Einzelblüten, von denen 34 den Spiralarm in die eine Richtung bilden und 55 in die entgegengesetzte. Beide Zahlen sind Glieder der Fibonacci-Reihe, deren Vorkommen in Proportionsverhältnissen in der Natur zahlreich beschrieben und nachgewiesen wurde. Für die Bildung von Kristallen sind Winkel und Kantenlängen bestimmende Größen. Auch die Obertonreihe ist eine Manifestation ganzzahliger Verhältnisse. Neben dem Grund- oder Fundamentaltone erscheinen Teiltonfrequenzen, die um ein Doppeltes, Drei- oder Vierfaches usw. schneller schwingen als der Grundton. Es stehen sogar Ladungszustände, bzw. Energieniveaus schwerer Atomkerne in vergleichbaren proportionalen Verhältnissen zueinander wie sich die Verteilung der Nullstellen der Riemannschen Zeta-Funktion im Diagramm abbildet.²

Im Rahmen des gegenwärtigen Studiums lernte ich das Thema Sonifikation kennen. Dabei ist eine wichtige Frage: kann dieses Verfahren eine objektivierbare, wissenschaftliche Aussagekraft erreichen und andererseits, inwieweit vermag die Sonifikation großer Datenmengen als Material für einen künstlerischen Prozess dienen?

Beiden Fragen möchte die vorliegende Arbeit nachgehen, durch Sonifikation von Primzahlen, in ihren Reihungen und Musterbildungen. Es ist der Versuch eine neue Anschauung von den Zahlen zu gewinnen und etwas zu erfahren, das nur durch Sonifikation erfahrbar ist.

Im Folgenden werde ich im ersten Teil, neben der Begründung der Themenwahl, eine geschichtliche Zusammenfassung des seit der Antike andauernden Versuchs, das Auftreten von Primzahlen vorauszusagen, geben. Der zweite Teil befasst sich mit der Sonifikation als Methode, der dritte beschreibt die Realisierung des künstlerischen Teils dieser Arbeit. Im abschließenden vierten Teil gebe ich einen Überblick über die Ausführung der Komposition im Programm *Max/MSP Jitter*.

„Alles ist Zahl“ ist nicht nur ein Aphorismus, denn fast alles kann in Form von Zahlen dargestellt werden.

1.1 Primzahlen im Besonderen

„Die Riemannsche Vermutung, das letzte Fermatsche Theorem, die Goldbach-Vermutung, der Hilbert-Raum, die Ramanujan-Tau-Funktion, Euklids Algorithmus [...], das Sieb des Eratosthenes, die Mersenne-Primzahlen, das Euler-Produkt, die Gaußschen ganzen Zahlen - sie allesamt sind Schätze, die bei der Untersuchung der Primzahlen zutage getreten sind“.³

Primzahlen gleichen Edelsteinen – faszinierend und geheimnisvoll. Sie sind die atomaren Kerne in der Menge der natürlichen Zahlen. Sich auf sie einzulassen, sich mit ihnen zu befassen ist ein Wagnis, nicht zuletzt da ihre Menge, als auch die Aspekte, sie zu betrachten,

² Marcus du Sautoy, *Die Musik der Primzahlen*, München: dtv, 2011, S. 323 ff.

³ Ebd., S. 29.

unendlich sind. Jedoch vermute ich, und hier reiht sich die Arbeit in die Folge weit in die Geschichte reichender Suche und Erkundungen ein, dass jene Muster, die dieses Zahlenuniversum bereithält, einen Schlüssel zu seinem tieferen Verständnis bieten – und sei es nur ein persönliches. Das Begreifen von Zahlenverhältnissen, die eine mehr oder weniger bewusste Kenntnis mathematischer Prinzipien voraussetzt, macht das Denken, die eigentliche Erkenntnis des Wahrgenommenen, möglich.

Die Annäherung an dieses Thema erfolgt im künstlerischen Teil der Masterarbeit in einem ersten Schritt über verschiedene Versuche einer grafischen Darstellung. Anschließend werden in besonderen, bzw. auffälligen Zusammenhängen stehende Zahlen sonifiziert, um den klanglichen Informationsgehalt kennen zu lernen, und schließlich wird aus dem gefundenen Material eine Komposition als *Max/MSP*-Patch entstehen.

1.2 Primzahlen: ein kurzer historischer Überblick

„Die Primzahlen sind wie Noten einer Tonleiter, und jede Kultur spielt diese Noten in einer für sie charakteristischen Art. Sie offenbart auf diese Weise mehr über ihre Geschichte und ihre Gesellschaft, als man zunächst erwarten würde.“⁴

Der griechische Mathematiker, Euklid von Alexandria, verfasste im 3. Jahrhundert v. Chr. eines der einflussreichsten Lehrbücher der Geschichte: *Die Elemente*.⁵ In dessen mittlerem Teil beschreibt er Eigenschaften von Zahlen und liefert den ersten fundamentalen Beweis über die Unendlichkeit der Menge der Primzahlen. Zur gleichen Zeit stellte Eratosthenes von Kyrene, Bibliothekar der berühmten Bibliothek von Alexandria, wahrscheinlich als erster eine Tabelle der Primzahlen auf. Er entdeckte „eine verhältnismäßig einfache Methode, die Primzahlen aus einer Liste der beispielsweise ersten 1000 Zahlen herauszufinden“⁶. So werden in einer beliebigen Zahlenmenge erst die geraden Zahlen, dann die Vielfachen aller ungeraden ausgestrichen. Übrig bleiben Primzahlen. Dieses „Sieb des Eratosthenes“, durch das die Primzahlen gefallen sind, ist im Prinzip das noch heute gültige systematische Verfahren zur Bestimmung von Primzahlen.

Ein solcher iterativer Prozeß ist mühsam und zeitaufwändig. Daher gibt es seitdem eine unermüdliche Suche nach Formeln, die Primzahlen finden lassen.

Der französische Jurist und Mathematiker Pierre de Fermat, er lebte im 17. Jahrhundert, glaubte eine solche gefunden zu haben. Er vermutete, „dass die 2^N -te Potenz von 2 plus 1

⁴ Marcus du Sautoy, *Die Musik der Primzahlen*, München: dtv, 2011, S. 50. Im Folgenden gebe ich eine kurze Zusammenfassung aus der Mathematikgeschichte, die sich hauptsächlich auf *Die Musik der Primzahlen* von Marcus du Sautoy bezieht, weil in dem Buch schon im Titel die Verbindung von Musik und Primzahlen hergestellt wird, die mich in weniger allegorischer Form auch in meiner Masterarbeit interessiert.

⁵ Ebd., S. 53.

⁶ Ebd., S. 36.

immer eine Primzahl sei.“⁷ Die Zahlen werden schnell sehr groß und nur die ersten vier Zahlen sind tatsächlich prim. Aber die Entdeckung dieser Formel war für Carl Friedrich Gauß von großer Bedeutung, ermöglichte sie ihm doch die Konstruktion eines regelmäßigen 17- aber auch 65.537-Ecks mittels einfacher Instrumente. 65.537 ist die 4. Fermatsche Zahl, nach weiteren wird bis heute gesucht.

Fermat stand mit dem Mönch und Mathematiker Marin Mersenne, der auch Verfasser einer ersten universelle Harmonielehre war, in Briefkontakt. Er war ebenso von der Leidenschaft getrieben, wenn schon keine Formel zur Erzeugung, so doch einen Hinweis auf irgendeine Ordnung der Primzahlen zu finden. So entdeckte er eine Formel, die sich als erfolgreicher zum Auffinden von Primzahlen erwies, als die Fermat's. Er addierte die 1 nicht zur Potenz von 2, sondern subtrahierte sie.

„Vielleicht spielte hierbei auch Mersennes musikalische Intuition eine Rolle. Eine Verdoppelung der Frequenz eines Tons bringt einen zur nächsten Oktave. Potenzen von 2 erzeugen also harmonische Töne. Man könnte daher vermuten, dass ein Ton unmittelbar neben einer höheren Oktave zu einem Grundton eher dissonant klingt. Seine Frequenz verträgt sich nicht mit einer der vorigen Frequenzen - man erhält eine *Primnote*“⁸

Wenn n nicht selber prim ist, ergibt $n^2 - 1$ aber keine Primzahl. Daher hat nur ein Teil der hiermit gefundenen Zahlen die gesuchte Eigenschaft.

Im 18. Jahrhundert lieferte der schweizer Mathematiker Leonhard Euler viele Erklärungen für die durch Fermat und Mersenne entdeckten Strukturen, die diese aber nicht beweisen konnten. Er entdeckte, dass die Formel x^2+x+q für $q = 2, 3, 5, 11, 17, 41$ und $x = 0$ bis $q-2$ immer Primzahlen ergibt. Allerdings eine Formel für *alle* Primzahlen fand auch Euler nicht. Carl Friedrich Gauß, der als größter Mathematiker seiner Zeit und darüber hinaus gilt, gelang mit Hilfe des natürlichen Logarithmus eine relativ genaue Vorhersage über das Auftreten von Primzahlen. Als dessen Nachfolger in Göttingen gelang es 1873 Peter Gustav Lejeune Dirichlet zu beweisen, dass sich alle Primzahlen in statistisch gleich großen Gruppen unter der Formel: $p = 4^n+1$ und $p = 4^n+3$, aufteilen. Diese Formel ist für den visuellen Aspekt meiner Komposition maßgebend. Alle Zahlen $p = 4^n+3$ erhalten einen Goldton, die übrigen, $p = 4^n+1$ einen Silberton.

Nach dem Tod Dirichlets wurde Bernhard Riemann auf dessen Stelle als Professor in Göttingen berufen. Ihm gelang, mit Hilfe der von Euler entdeckten Zeta-Funktion

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \dots,$$

eine noch genauere Voraussage über das Auftreten von Primzahlen.

Hatte Euler mit der Zeta-Funktion und unter Verwendung ganzer Zahlen gerechnet, kam Riemann auf die Idee, hierzu die von Gauß eingeführten komplexen Zahlen, die über einen

⁷ Ebd., S. 56.

⁸ Ebd.; S. 57.

Imaginär- und einen Realteil verfügen, zu verwenden. Dabei interessierte ihn mehr noch als die rechnerische, die graphische Darstellung, d.h. das Verhalten des Graphen. Dieser hatte in seinem Realteil in allen überprüften Fällen seine Nullstelle bei $x = 0,5$. Aus der Kenntnis der Nullstelle kann eine Vorhersage zum Verhalten des gesamten Graphen getroffen werden. So lässt sich das Erscheinen der Nullstellen im Diagramm als ein rhythmisches Gebilde lesen.

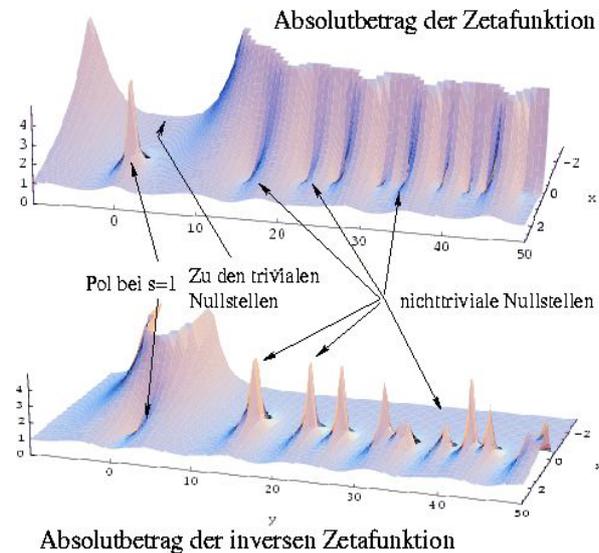


Abb. 1 Eine der landschaftsartigen Darstellungen der Zeta-Funktion.
Beide Diagramme zeigen den gleiche Sachverhalt unter jeweils umgekehrten Vorzeichen.

Diese und weitere Abbildungen der Funktion legten für mich den Versuch nahe, sich diesem Thema mit Hilfe der Sonifikation anzunähern.

Seine bedeutende Entdeckung hat Riemann in einer kleinen Schrift - *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe* - als Dankes- und Antrittsrede zur Berufung 1859 als Mitglied in die Preußische Akademie der Wissenschaften veröffentlicht. Einen Beweis für diese Vermutung konnte er noch nicht erbringen, hielt dies auch zum damaligen Zeitpunkt nicht für notwendig. In der Folge hat er sich, zumindest öffentlich, diesem Thema nie wieder zugewandt und weitere Veröffentlichungen hierzu unterlassen. Seine Haushälterin hatte, unmittelbar nach dem plötzlichen, frühen Ableben Riemanns, er litt an Tuberkulose, einen Großteil dessen nachgelassener Schriften und Skizzen, deren Bedeutung verkennend, kurzerhand im Kamin des Hauses verbrannt. Die Frage, wie weit er in seinem Erforschen der Voraussagbarkeit von Primzahlen, vielleicht gar eines Beweises seiner Zeta-Funktion, fortgeschritten war, bleibt daher unbeantwortet.

Der Beweis der Riemannschen Vermutung steht noch immer aus. Es wird angenommen, dass sie entweder nicht beweisbar ist oder aber, die entscheidenden Impulse zu einem Beweis nicht aus dem Bereich der Mathematik, sondern eher der Physik kommen könnten. Ein Hinweis hierzu ist die bereits erwähnte Ähnlichkeit zwischen dem Auftreten der Nullstellen und den Energieniveaus schwerer Atomkerne.

Die Riemannsche Vermutung gilt bis heute als eine der bedeutendsten offenen mathematischen Fragen. Ihr Beweis gäbe den Mathematikern ein Werkzeug zur schneller Bestimmung von Primzahlen zur Hand. Die Annahme der Gültigkeit der Riemannschen Vermutung ist das Fundament nachfolgender, sich auf sie stützende mathematischen Erkenntnisse.

Gegenwärtig beruht die Sicherheit der im Internet verwendeten RSA-Verschlüsselung darauf, dass Großcomputer jeden möglichen Teilungsschritt einer hohen Primzahl iterativ berechnen müssen, um deren Primcharakter zu ermitteln. Die bisherigen Kodierungsschlüssel beruhen lediglich auf der Geheimhaltung der jeweils verwendeten großen Primzahl. Ließe die sich mit einer Formel berechnen, wäre das gesamte Sicherheitssystem obsolet.

1.3 Zahlenverhältnisse in Tonreihen und Stimmungen

Zahlen stehen u.a. für Beziehungen von Mengen zueinander. Musikalisch gesehen: Töne erklingen immer in einem Spannungsverhältnis. Dies gilt sowohl vertikal, für eine Folge von Tönen, als auch horizontal, für einen Akkord. Klänge ähnlicher Obertonstruktur mischen sich leicht und erscheinen im Zusammenhang homogen. Instrumente, deren Obertonstrukturen teilweise nicht ganzzahlig sind, z.B. Glocken, stechen aus einem Ensemble mit Instrumenten mehrheitlich ganzzahliger Obertonreihen, heraus.

Ein Klang, als Repräsentanz eines Zahlenverhältnisses, führt meist zu einer unwillkürlichen emotionalen Reaktion. Eine Zahl hingegen steht zuerst als ein Zeichen oder Symbol, das kognitiv entschlüsselt werden muss, um eine emotionale Bewertung zu erfahren. In diesem Sinn bedeutet Zahlen zu sonifizieren, sie gewissermaßen zu emotionalisieren. Erkenntnis als ganzheitlicher Prozess von Kognition und Emotion erfährt hier vielleicht eine unmittelbare Unterstützung und Bereicherung.

Zahlen sind für das Begreifen und Festhalten, das Beschreiben, gerade auch nicht sichtbarer oder augenfälliger Phänomene, für das Erstellen von Theorien, grundlegend.

Bei der Darstellung harmonischer Gesetzmäßigkeiten spielen sie eine ebenfalls wichtige Rolle.

Beispielhaft sei hier auf das Tonsystem der griechischen Antike hingewiesen. Ihr lag eine Einteilung in Tetrachorde zugrunde. So entdeckte Pythagoras von Samos (ca. 580-500 v.Chr.), dass die besonders harmonisch empfundenen Intervalle an einer in kleinzahligen Längenverhältnissen (1:2, 2:3, 3:4, 4:5) geteilten Saite entstehen. Jedoch wurde ebenso erkannt, dass ein heptatonisches Tonsystem auf reinen Quinten aufbauend, in seinem letzten Tonschritt die Oktave um das sogenannte Pythagoräische Komma überdehnt.

Aristoxenos von Tarent (ca. 354-300 v.Chr.) veränderte dieses Tonsystem, in dem er dem Ganztonschritt 9:8, einen kleineren 10:9 beifügte, die zusammen $(9:8) \times (10:9)$ die reine Terz 5:4 ermöglichen. Dieses, für die abendländischen Musikgeschichte grundlegende Problem der Aufteilung der Oktave, ließ sich erst etwa 2000 Jahre später mathematisch begründen

und auf diese Weise lösen.

„Dennoch ist die Idee von Pythagoras, die Oktave gleichmäßig zu teilen, fundamental. Sie wird aber erst in der Neuzeit, nach der Erfindung der Potenzen und Logarithmen, in gültiger Form verwirklicht, nämlich in der gleichschwebenden Temperatur“.⁹

1.4 Zahlen formen Musik

Für zahlreiche Komponisten und Musikstile sind Zahlen maßgebliche Kompositionselemente. Im Folgenden sollen einige musikhistorische Stationen stellvertretend für viele weitere genannt werden:

In der isorhythmischen Motette des 14. und 15. Jahrhunderts (Dufay, Desprez, Machaut), deren wesentliches Konstruktionsmoment, neben der textbedingten Formvorgabe, die zahlenmäßig unterschiedliche „Datenmenge“ von Color und Talea war, laufen die Zahlenreihen von Color und Talea in großer Strenge, vergleichbar mit späterer minimal-music (Steve Reich, *clapping-music*), ab. Oft spielen zahlenmystische Vorstellungen, etwa die Dreiheit für alles Göttliche und die Zweiheit für das Weltliche, eine Rolle.

Die isorhythmische Motette lässt sich in gewisser Weise als Vorläufer der reinen seriellen Kompositionstechnik, der von Arnold Schönberg theoretisch begründeten *Methode der Komposition mit 12 nur aufeinander bezogenen Tönen*, begreifen. Hier gestattete erst die Abfolge aller übrigen 11 Töne dem Einzelton die Wiederkehr und garantierte somit die Gleichwertigkeit aller chromatischen Töne der Reihe. Somit wurde die Verwurzelung in eine Tonikalität wahrhaft und klar zu überwinden.

Die Reihen werden nach traditionellen kontrapunktischen Prinzipien - Grundgestalt, Umkehrung, Krebs und Krebsumkehrung - behandelt. Wobei die Reihe - selbst ein Zahlbegriff – hauptsächlich die Abfolge der Tonhöhen bestimmte. Bezüglich des Rhythmus, hier lag die wesentliche künstlerische, bzw. kompositorische Entscheidungsfreiheit, wirkte noch immer der Bezug auf die späte Romantik, bzw. die der Dodekaphonie vorangegangene freie Atonalität.

Das Bedürfnis Rhythmus, Dynamik und Spielweise ebenfalls in eine mathematisch begründete Folgerichtigkeit zu bringen, führte zur Seriellen Musik und in deren Konsequenz, zur Einführung algorithmischer Kompositionsverfahren. Endgültig hatte damit die Mathematik, mit ihrer Klarheit und Strenge, Einzug in die Kunstmusik gehalten. Auch ihr Gegenpol, der Zufall, wurde als künstlerisches Mittel entdeckt und kultiviert.

Die künstlerische Vorentscheidung für eine algorithmische Komposition beruht selbstverständlich auf der Entwicklung eines geeigneten Algorithmus. Dadurch hat sich das künstlerische Denken und das musikalische im Besonderen, von Grund auf gewandelt.

⁹ Manfred Reimer, *Der Klang als Formel*, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2010, S.4.

Die ästhetischen Positionen haben sich, infolge der Möglichkeiten algorithmischen Komponierens in Verbindung mit synthetischer, bzw. elektronischer Klangerzeugung, verändert. Sie haben die Musikgeschichte weiterentwickelt. Dem natürlichen Aufbau der Klänge kann ein künstlicher, künstlerisch erfundener entgegengesetzt werden. Selbst auf der Mikroebene des Granularen lässt dies nun die Einheit von Einzelem und Ganzem, von Element und Gestalt möglich werden.

„Die einzelnen Größen sind jeweils Vielfache einer gemeinsamen kleinsten Einheit, sie sind miteinander verwandt. Wie nun aus einer Reihe ein gesamtes Werk wächst, wie in Gruppenreihen Töne zu Klängen, Klänge zu untergeordneten Formeinheiten, diese wieder zu übergeordneten Formeinheiten und diese endlich zur gesamten Werkeinheit komponiert werden, so dass das ganze Werk die Vergrößerung der ursprünglichen Reihe ist [...] dieses Problem beschäftigt wohl zur Genüge jeden Komponisten.“¹⁰

Meine eigene Arbeit nimmt insofern auf diese musikgeschichtliche, wie künstlerische und ästhetische Entwicklung Bezug, als dass sie sich durch die ausschließliche Verwendung von Sinuswellen in einem ihr eigenen Klangraum bewegt. Die Ästhetik wird durch das Material, die Primzahlen, bestimmt und nicht umgekehrt, das Material durch die Ästhetik. So wird die Tonalität, um nur einen Aspekt herauszugreifen, nicht der vertrauten gleichschwebenden Temperatur angepasst, sondern die tatsächlichen Frequenzverhältnisse, die durch die Primzahlen gegeben sind, werden beibehalten.

2. Sonifikation – zwischen Wissenschaft und Kunst

Sonifikation bezeichnet das Hörbarmachen von Daten und wurde als Begriff zunächst im wissenschaftlichen Umfeld geprägt. Dabei ist umstritten, ob hierdurch lediglich die Verklanglichung von Daten zur Informationsgewinnung gemeint ist oder auch daraus resultierende künstlerische Werke mit einbezogen sind.

Sonifikation will „die Natur [in ihren] Messwerten sinnlich erfahrbar“ machen¹¹. Dieser eigentlich wissenschaftliche Aspekt reicht unmittelbar in den Bereich der Kunst hinein, da notwendige ästhetische Entscheidungen zur Realisierung einer Sonifikation gleichzeitig die Möglichkeit schaffen, „to discover ... a hidden, extraordinary new beauty“¹², Sonifikation dient als „Mustererkennungsmaschine“ und macht Dinge hörbar, die ohne sie einer sinnlichen, vielleicht sogar epistemischen Wahrnehmung vorenthalten blieben.

Eine neue, 2008 von Thomas Hermann auf der Internationalen Konferenz der *International Community for Auditory Display*, ICAD, vorgeschlagene Definition benennt Sonifikation als

¹⁰ Karlheinz Stockhausen, *TEXTE zur Musik* Band 1, DuMont, Köln 1963, S. 60.

¹¹ Florian Dombois, „Sonifikation“, in: *Acoustic turn*, hg. von Petra Maria Meyer, München: Wilhelm Fink Verlag, 2008, S. 98.

¹² Benoit Mandelbrot, zitiert nach Michele Emmer, *The Idea of Space in Art, Technology and Mathematics*, Applications of Mathematics in Models, Artificial Networks and Arts, V. Capecchi et al. (Hg), Heidelberg, Springer 2010, S. 506.

eine Technik, die Eingabedaten nutzt und Klänge erzeugt. Als Grundbedingungen für die Sonifikation als wissenschaftliches Verfahren müssen „die Klänge

- (1.) objektiv messbare Eigenschaften der Daten repräsentieren und
- (2.) die Transformationen systematisch sein.
- (3.) Der Vorgang muss reproduzierbar
- (4.) und das System mit anderen Daten ebenso nutzbar sein.“¹³

Nicht jede akustische Darstellung von Daten ist geeignet, die verborgenen Zusammenhänge dem Hörer deutlich zu machen. Sind es Cluster-Daten oder Daten linearer Abhängigkeit? Welche inneren Bezüge sollen erkennbar werden? Die Antworten auf diese Fragen bestimmen die Art der Sonifikation.

Die Daten für eine Sonifikation können prinzipiell aus drei verschiedenen Quellen stammen:

1. Reale Welt - Daten werden gemessen oder durch Beobachtung gewonnen.
2. Theoretische Welt - Daten werden auf der Grundlage mathematischer Modell berechnet.
3. Künstliche Welt - Daten werden entworfen, z.B. für Film, Kunst und Fernsehen¹⁴

Die Parameter der Sonifikation können folgende sein:

- Tonhöhe
- Tondauer
- Lautstärke
- Klangfarbe

Die Repräsentation der Daten erfolgt entweder statisch oder dynamisch, als ein Klangfeld oder in rhythmischer Bewegung.

Sonifikation wird in fünf grundlegenden Verfahren, bzw. Techniken unterschieden:

1. Audification,
2. Parameter Mapping,
3. Model Based Sonification sowie
4. Earcons und
5. Auditory Icons.¹⁵

Die vorliegende Arbeit hat abstrakte Zahlen zum Gegenstand, die synonym für Größen und Verhältnisse stehen und erst infolge ihrer Sonifizierung eine ihrer unendlich möglichen Manifestationen annehmen. Von den eben genannten Verfahren ist für diese Arbeit das *Parameter Mapping* relevant, das einzelne Datenattribute auf Klangattribute abbildet. Alle Zahlen werden als Frequenzen „gelesen“ und direkt als Sinuswellen wiedergegeben. Zwischen Tonhöhe und Primzahl besteht somit eine direkte Verbindung. Die rhythmische

¹³ Nach: Thomas Hermann, *Taxonomy and Definitions for Sonification and Auditory Display*, Bielefeld, 2008.

¹⁴ Nach: Heidrun Schumann, Wolfgang Müller, *Visualisierung - Grundlagen und allgemeine Methoden*, Berlin: Springer-Verlag, 2000, S. 27.

¹⁵ Florian Dombois, „Sonifikation“, in: *Acoustic turn*, hg. von Petra Maria Meyer, München: Wilhelm Fink Verlag, 2008, S. 93.

Struktur dieser Sonifikation entspricht ebenfalls der Primzahlabfolge. Eine ästhetisch begründete Entscheidung wird unmittelbar notwendig, wenn Frequenzen entstehen, die sich außerhalb des Hörbereichs befinden. Die Art der Skalierung, bzw. der Umfang der Transposition wird wesentlich ästhetisch begründet entschieden.

Demnach entspricht das reine *Parameter Mapping* dem wissenschaftlichen Verfahren, während schon die Festlegung des Grads der Skalierung und um vieles mehr die Auswahl der für die Komposition verwendeten Klänge und Tonfolgen, künstlerische Entscheidungen sind.

3. fremde räume - external spaces

In der künstlerischen Arbeit werden die in den vorigen Abschnitten dargelegten Erkenntnisse zu Primzahlen und Musterbildungen sinnlich dargestellt. Das geschieht in einer algorithmischen Komposition, deren Errechnungsprozess in Form eines Videos parallel zur Musik abläuft. Entscheidend ist also der oben im Abschnitt „Sonifikation“ dargestellte scheinbare Widerspruch von „wissenschaftlicher Objektivität“ und „künstlerischer Subjektivität“. Dem wurde in der „Offenlegung“ des Errechnungsprozesses als Video Rechnung getragen. Um dem Publikum eine bessere Verständnismöglichkeit des hör- und sichtbaren Prozesses zu geben, wird der audio-visuellen Installation ein kurzer erläuternder Text beigegeben.

Die künstlerischen Entscheidungen und Arbeitsschritte der Komposition sind im Folgenden dargestellt.

3.1 Der Entstehungsprozess – Schritte zur Komposition

Meine künstlerische Arbeit „*external spaces – fremde räume*“ entstand in einer Reihe von Arbeitsschritten, die aufeinander aufbauen und im folgenden erläutert werden. Präsentiert wird in der Ausstellung das Resultat dieser Entwicklungsarbeit, die sich über einen Zeitraum von 6 Monaten vollzog.

3.1.1 Das Material

Musterbildungen beschäftigen mich seit langem. Nicht zuletzt sind sie für einen Musiker, der beständig Rhythmen als Muster in die Zeit „malt“, immer gegenwärtig. Erste gedankliche Versuche über Bilder, wie sie in einem Kaleidoskop entstehen, führten mich zu figurierten Zahlen sowie Stellenwertsystemen.

Figurierte Zahlen sind Zahlen, die geometrisch, als regelmäßiges n -Eck angeordnet werden und durch gleichmäßige Größenveränderungen besondere Zahlenreihen ergeben. Ebenso entstehen für Zahlen in verschiedenen Stellenwertsystemen unterschiedliche Bezüge, da jedes die Zahlen in eigener Weise gruppiert.

Das Nachdenken über diese Themen gab mir, nach dem ich eine Diagramm-Darstellung der Riemannschen Zeta-Funktion (s. Abb. 1) sah und die mich fesselte, weil sie unmittelbar klangliche Assoziationen hervorrief, die Vorstellung von Primzahlen in einer räumlichen Gestalt. Primzahlen sind ein Klangraum.

Das Atomare, die Unteilbarkeit der Primzahlen, lässt sie als Einheiten, fast Monaden erscheinen, von denen die teilbaren Zahlen sich ableiten. Sie sind die Keimzellen in der Welt der natürlichen Zahlen. Wie jedes, auch jede musikalische Einheit, aus kleinsten Motiven und Motivzellen zusammengesetzt ist, entspricht eine Primzahl einem solchen musikalischen Grundmotiv.

3.1.2 Muster als erster Arbeitsschritt

Schnell wird beim Betrachten der Abfolge deutlich, dass viele Primzahlen mit einem zwei Zähl-schritte entfernten Nachfolger als sogenannte Zwillinge auftreten. Auch die Dichte der Aufeinanderfolge, trotzdem sie mit zunehmender Größe geringer wird, ist abschnittsweise doch überraschend groß. Infolge der unregelmäßigen Verteilung bilden sich immer wieder Inseln größerer Dichte, bis hin zu Zwillingen.

Zur ersten Überprüfung der Musterbildung begann ich die Primfolge als Punkte spiralförmig auf Millimeterpapier aufzutragen.

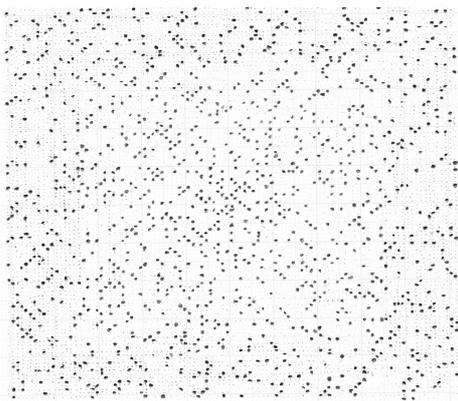


Abb. 2 Erster Versuch im Bereich 1 -10000 sämtliche Primzahlen von der Mitte aus, spiralförmig als Punkte aufzutragen.

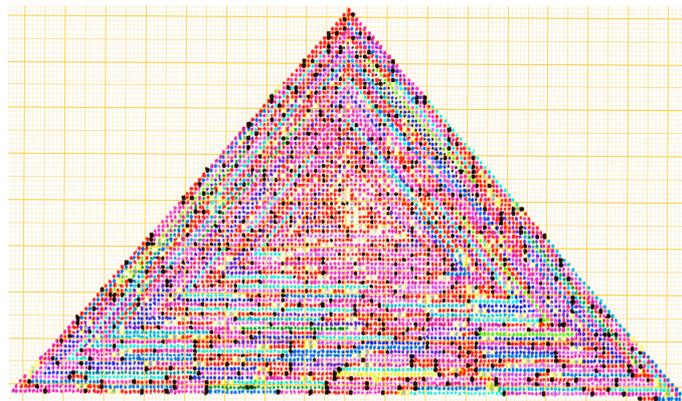


Abb. 3 Ein weiterer Versuch, diesmal in Form einer Dreieck-Spirale. Die Abstände zwischen den einzelnen Primzahlen werden farblich unterschieden

Nach ca. 10.000 Punkten, eine sehr zeitaufwändige Unternehmung, die optisch noch immer wenig hergab, entdeckte ich im Internet die bereits 50 Jahre zuvor realisierte gleiche Idee, die

nach ihrem Entdecker Stanislaw Ulam benannte Ulam-Spirale. Anlässlich ihrer Veröffentlichung auf dem Titelblatt der 1964-er März-Ausgabe des *Scientific American*¹⁶ hatte sie einiges Aufsehen erregt und wurde zum Gegenstand vieler Analysen. Auffällig an dieser Spirale ist die diagonal verlaufende Netzstruktur und dass Primzahlen auf bestimmten Diagonallinien gehäuft erscheinen, auf anderen hingegen seltener. Fast zwangsläufig begann ich diese Darstellung als eine Rhythmusnotation zu lesen. Beständig wiederkehrende Ähnlichkeiten, Abschnitte beinahe Wiederholungen lassen unweigerlich eine implizite Ordnung vermuten.

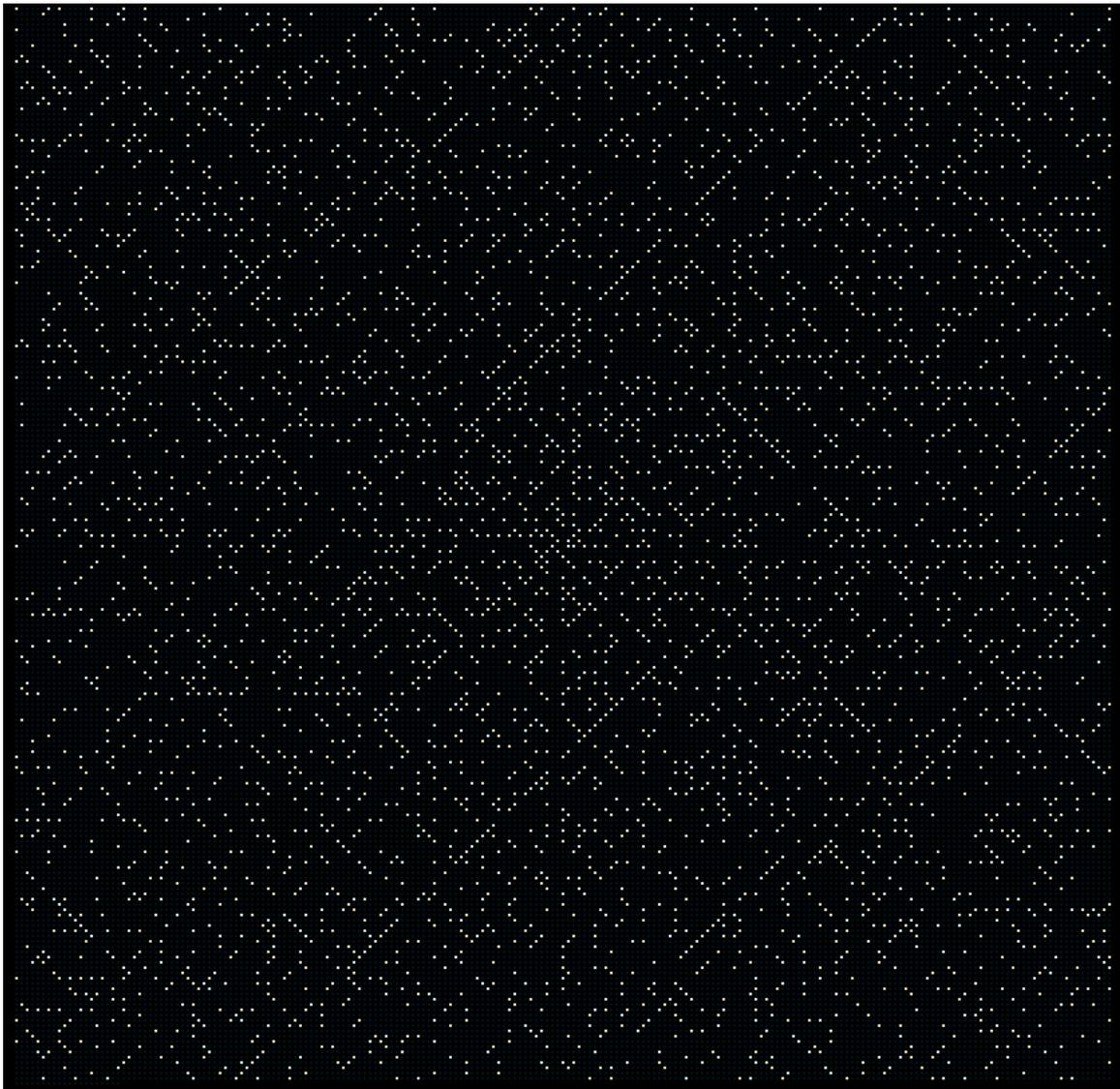


Abb. 4 Ulam-Spirale bis 41843

Auf eine dreidimensionale Darstellung dieses Zahlenkosmos⁸, wie sie mir ursprünglich vorschwebte, musste aus Zeitgründen verzichtet werden.

¹⁶ *Scientific American* Vol. 210 New York (März 1964)

3.1.2 Erste Sonifikation: Zuordnung der Parameter

Gegenstand der ersten Untersuchung war die Primzahlreihe selbst. In diesem ersten Schritt zur Sonifikation erfolgte eine Trennung der „normalen“ Primzahlen von den Zwillingen. Die Nicht-Zwillingszahlen wurden per Zufallsfunktion in einem schnellen Tempo, quasi als ein *staccato*, abgespielt und bildeten als Hintergrund ein Klangfeld, vor dem ruhende Klänge aus Zwillingzahlen, ebenfalls randomisiert, ein- bis achttimmig erscheinen und verklingen. Das Einbeziehen des Zufalls in dieser ersten Darstellungsform geschah um schnell und auf vielfältige Weise das Material durchzuhören, immer auch in der Hoffnung, per Zufall etwas zu entdecken, das andernfalls überhört oder übersehen worden wäre. In der späteren Arbeit erfolgte selbstverständlich eine wohlerrungene Auswahl der zu verwendenden Klänge. Das Einbeziehen von Zufallsfunktionen ist eine Möglichkeit dem automatisierten Prozess der klanglichen Realisierung des Datensatzes, den die Komposition darstellt, ein Element des Spontanen, nur diesem Augenblick gehörenden beizufügen. Denn eine von außen erfolgende Intervention ist nicht vorgesehen. Die reine Wiederholung von automatisierten Prozessen wäre künstlerisch unbefriedigend und soll daher durchbrochen werden. Eine prinzipielle Unwiederholbarkeit, die bei der „menschlichen“ Interpretation einer Partitur, bzw. eines Notentextes prinzipiell gegeben ist, kann im Falle einer Komposition, die als Programm geschrieben und durch dieses realisiert, d.h. „aufgeführt“ wird, mit Zufallskomponenten erreicht werden. Daher sind diese eine der Prämissen der späteren Komposition.

Zwillingzahlen, die in Gruppierungen zu je vier, dann fünf und sechs, nacheinander aufsteigend durch ein *bucket-object* „geschoben“ und als direkte Frequenzangabe durch die entsprechende Anzahl Oszillatoren, gelesen und somit als synthetische Klänge ausgegeben werden, ordnen sich häufig zu terzenhaltigen Klängen, die teilweise fast Dur-Dreiklangs-Charakter haben. Hinzu kommen die zwangsläufigen Schwebungen von 2 Hz, die sich aus dem Abstand von zwei Zählern ergeben. Diese erste auditive Annäherung sollte zeigen, welches Klangpotential sich auf diese einfache Weise offenbart und ob ästhetisch ansprechende Ergebnisse erwartet werden können. Dies hat sich unmittelbar bestätigt.

Den Gedanken eines Stellenwertsystems (siehe Abschnitt 3.1.1) wieder aufgreifend wurde die Primzahlfolge in verschiedenen Segmentlängen (1-100/101-200.. oder 1-55/56-110...) aufgeschichtet und auf ihre Musterbildung hin betrachtet. Die geschah in Anwendung des Programms *Max/MSP* in einem *lcd-Objekt*. In allen Fällen, mit Ausnahme eines, gab es keine erkennbaren Muster. Die Ausnahme war eine Darstellung, bei der nach jeweils 77 Zahlen ein Zeilenwechsel eingefügt wurde. Nach 76 Zeilenwechseln war ein Quadrat von 77x77 Zahlenpunkten abgebildet. Auf dem elektronischen „Millimeterpapier“ wurde dann ein goldener Punkt in die Zeile gezeichnet, wenn eine Primzahl auftrat. Für die übrigen Nicht-Primzahlen wurden blaue Punkte gesetzt. Unter der eigentlich irrtümlichen Einbeziehung der Null entstand ein überaus geordnetes, an den Stadtplan einer modernen Großstadt mit ihren Straßen und Avenuen erinnerndes Bild.

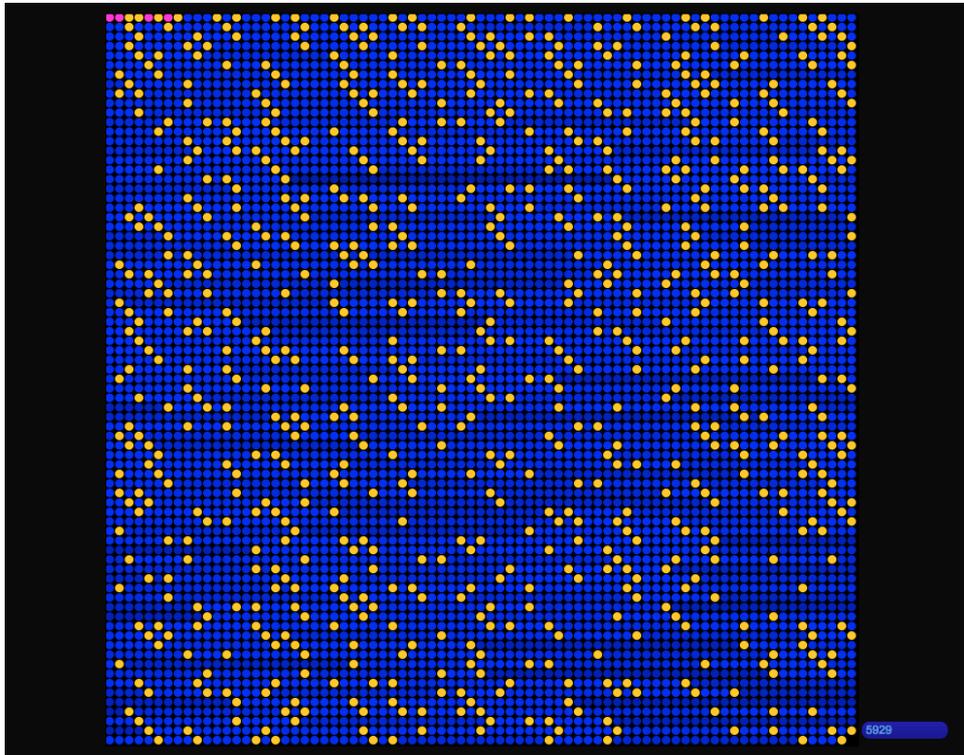


Abb. 5 Modulo77 – lineare Aufschichtung der Primreihe, gewissermaßen verkehrt herum, oben links beginnend und nach unten rechts gezählt. Schattierungen der Blautöne sind abhängig von der Entfernung einer Primzahl zu ihrem Nachfolger

In einem zweiten Schritt wurde der Vorgang wiederholt, es wurde also nach 5929 Punkten weitergezählt, aber auf dem Punkt links oben des Quadrats von vorne begonnen, so dass ein weiteres Bild auf das erste aufgeschichtet wurde. Dieser Prozess wurde neunmal wiederholt, bis 53.657. In keinem Fall fällt ein Punkt auf eine der Avenuen des ersten Bildes (vgl. Abb. 5 und 6). Diese Aufschichtung wurde anschließend in einem Max-Patch verklanglicht und fließt in die spätere kompositorische Gesamtdarstellung als ostinater „kanon“ ein.

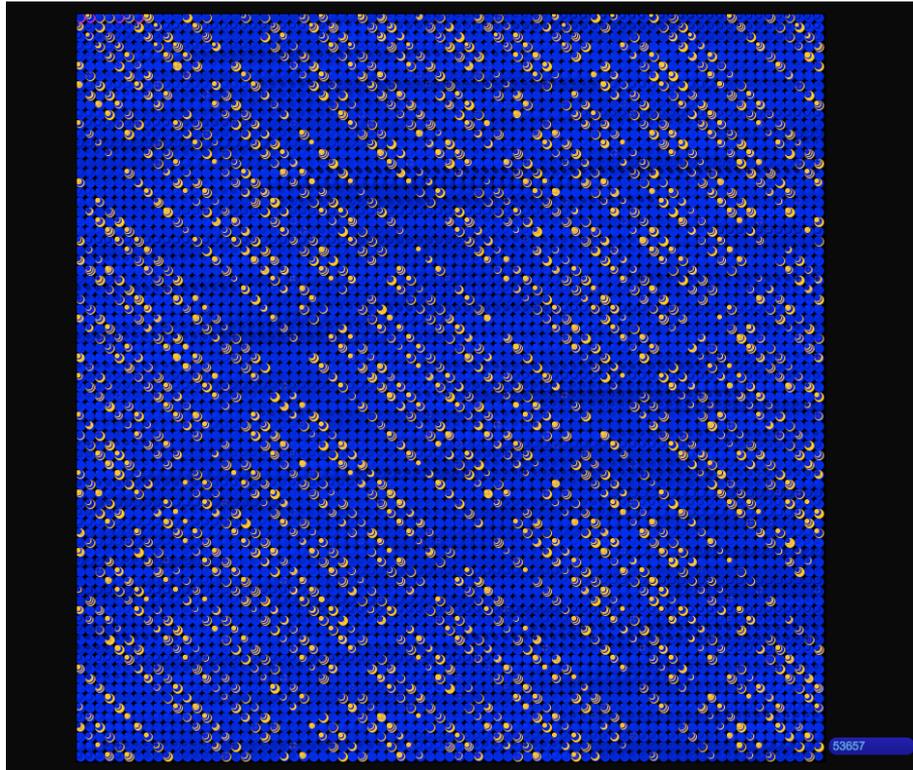


Abb. 6 Modulo77- nach der neunten Aufschichtung. Die Punkte werden mit jeder Schicht kleiner, so dass ein in einer vorigen Runde bereits gezeichneter Punkt nur angeschnitten und nicht gänzlich überdeckt wird. Dadurch bleiben alle Schichten sichtbar

3.1.4 Zweite Sonifikation: Segmente und Tonalität

In einem neuen Ansatz wurden die Reihen wiederum segmentiert, um die daraus folgenden Zusammenklänge zu prüfen. Standen bei der zuvor beschriebenen Stellenwert-Betrachtung die Zahlen in ihrer zählbaren Abfolge im Fokus, ging es nun um die relative Größe jedes einzelnen Segments, das zwei Zahlen miteinander bilden. Hier bot sich die 9 als die am wenigsten häufig wiederkehrende Endziffer als Ausgangspunkt an. Jedes Segment beginnt mit einer solchen Zahl, gefolgt von den weiteren Primzahlen bis zur nächsten Endziffer 9, die dann wiederum ein neues Segment begründet.

Die jeweils erste Zahl wurde als frei gewählte Ausgangsfrequenz gesetzt und die Folgezahlen entsprechend ihrem numerischen Abstand aufgeschichtet. Das Ergebnis ist eine Vielzahl von Klängen. Neben dissonanten Sekundschichtungen zeigen sie häufig Terz- bis Sextakkordbildungen.

Gleichzeitig beschreibt der jeweilige Abstand der Primzahlen mit gleicher Endziffer wiederum ein rhythmisches Gebilde und erinnert an das Eingangs beschriebene Bild der aufeinanderfolgenden Gehwegplatten. Bei einem internen Zähltempo von 300 ms pro Tick, bzw. Zählschritt, entsteht der Eindruck eines Grundschlags von etwa 112 Schlägen pro Minute. Dieser Rhythmus erscheint dann geradezu als Groove.

Nicht in die endgültige Komposition wurde die folgende Verklanglichung von Primzahlen aufgenommen: die rein numerischen Abstände der direkt aufeinanderfolgenden Primzahlen zueinander, wurden in einem weiteren Patch von einer einheitlichen Ausgangsfrequenz aus durchgehört. Dabei wurden die Abstände zweier aufeinanderfolgender Zahlen in temperierten Halbtonschritten „vermessen“, d.h. dem Abstand von benachbarten den Primzahlen 5 und 7 wurde ein Halbtonschritt zugeordnet, den benachbarten Primzahlen 13 und 17 ein Ganztonschritt. Beträgt der Abstand 24, entspricht das dem Intervall einer Oktave. Bis zur Zahl 22943 gibt es keinen Abstand größer als 3 Oktaven, respektive 36 Halbtonschritte, entsprechend 72 Zählschritten.

Dieser Ansatz, die „Melodie“ der Primzahlen mit feststehenden Frequenzen in gleichschwebender Temperatur hörbar zu machen, wurde aufgegeben, da dieser eine vorhandene Ästhetik bedient. Zudem steht das Intervall einer reinen Oktave, als der Verdopplung der Frequenz des Ausgangstones dem Phänomen der Primzahlen diametral entgegen. Tatsächlich vermitteln die schwebungsreichen und oktavfreien Klänge eine wirkliche Authentizität des fremden Klangraums, wie es die gleichschwebend temperierte Variante nicht vermag.

3.1.5 Die Ulam-Spirale – Muster und Klänge

Bis hierher betrafen die Untersuchungen eher kleinteilige Abschnitte und Darstellungsformen. So galt der nächste Schritt der Programmierung und klanglichen Ausleuchtung der Ulam-Spirale. Jeder Punkt der Bildschirmmatrix stellt dabei einen Zähler dar. Auf Grund der hohen Bildpunktdichte wird, um eine ausreichende und deutliche Sichtbarkeit der Strukturbildung zu gewährleisten, maximal jeder zweite Punkt angesteuert, da andernfalls das Bild zu dicht und „verklumpen“ würde. In der größten Bildschirmauflösung wird eine Darstellung von etwa 174.000 Punkten erreicht. Die Primzahlen erscheinen darin als Punkte in zwei Farbtönen, Gold und Silber. Diese Einteilung in zwei Klassen nimmt Bezug auf die im Abschnitt 1.2 erwähnte Formel von Dirichlet: $4n+1$ und $4n+3$. Die optische Opulenz dieses Bildes widerspiegelt allerdings eine für den Rahmen dieser Sonifikation zu große Datenmenge. Trotzdem wird sie Bestandteil der visuellen Darstellung in der künstlerischen Arbeit sein. Nur ein relativ kleiner Teil kann tatsächlich in die Sonifikation einfließen. Die höchste, direkt in die elektronische Klangerzeugung fließende Primzahl ist die 5077. Sie erscheint innerhalb eines Einzelklangs. *Lightnings* erreicht 44293 als höchsten Wert, der aber skaliert werden muss.

Die Ulam-Spirale wurde in Reihen in Nord/Süd- und West-Ost-Richtung sowie in beiden Diagonalen ausgelesen und anschließend durchgehört. Dabei erwiesen sich die in West-Ost-Richtung verlaufenden Reihen als die klanglich schöneren, während besonders die in Nord-Süd-Richtung angeordneten Zahlenkombinationen eher dissonantere Klänge hervorbringen.

Hier ist auffällig, dass beim nacheinander Durchspielen der Reihenabschnitte zur Mitte, also dem Zentrum bzw. Ausgangspunkt der Spirale hin, wie auch beim sich wieder Entfernen, deutlich zwei Skalen, bzw. Tonleitern auf- und abwärts gegeneinander laufen. Dieser Eindruck wird noch durch den Effekt verstärkt, dass Frequenzen des mittleren Hörbereichs stärker wahrgenommen werden, als die zum Rand hin gelegenen.

Sehr schwierig, bzw. fast unmöglich war es, aus den gezeichneten Punkten des Gesamtbildes deren jeweiligen Zahlenwert abzulesen, und somit einzelne Muster, kleinteilige Zahlenballungen zu ermitteln. Daher musste noch einmal eine Matrix auf Millimeterpapier aufgetragen werden.

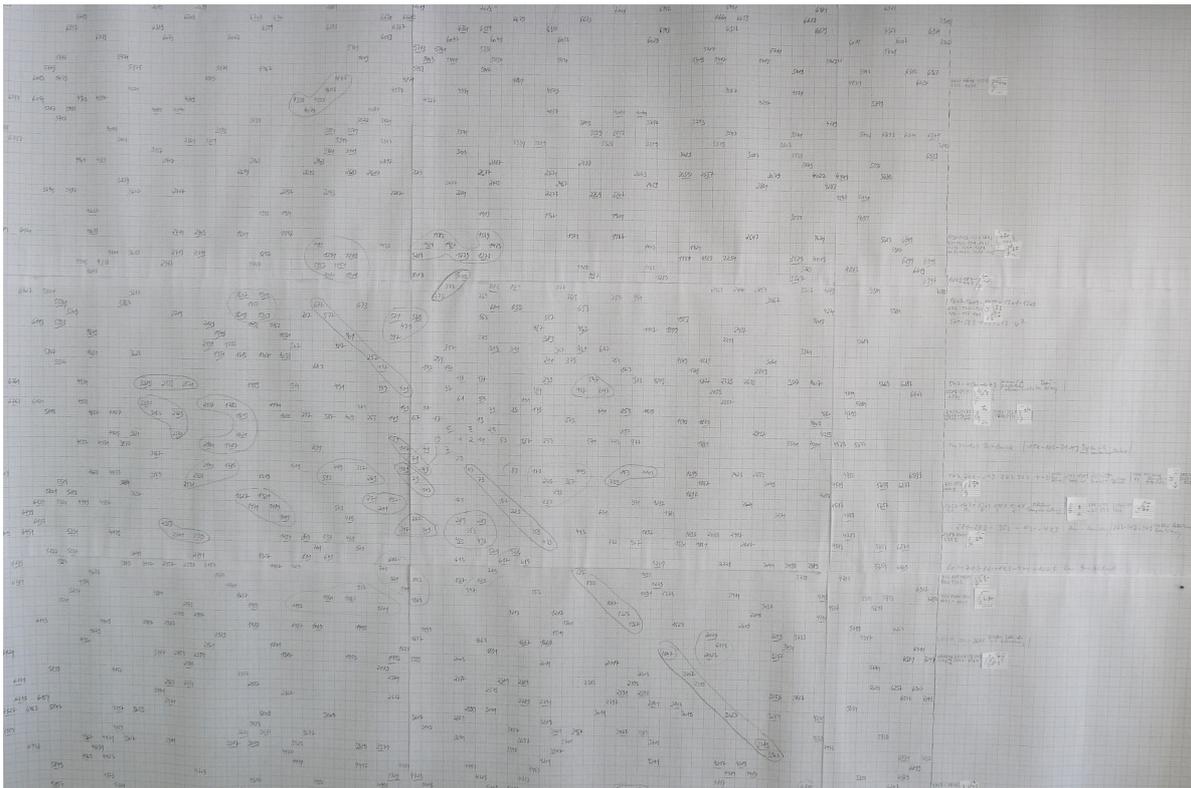


Abb. 7 Die Ulam-Spirale bis 7129 auf Millimeterpapier. Statt Punkte sind nun Zahlen eingetragen, um die Muster auslesen zu können. Entlang der rechten Seite wurden die Muster-Zahlen und deren Klänge notiert.

Dies erwies sich in der künstlerischen Herangehensweise wiederholt als ein recht nützliches Verfahren, auf diese Weise dem Material in seiner „lebendigen Haptik“ zu begegnen. Überraschend häufig erwiesen sich die auffälligen Muster als Klänge von Terzenschichtungen in einer vorherrschenden Dur-Tonalität. Selbstverständlich ist kein Klang rein, dies würde ein ganzzahliges Teilungsverhältnis voraussetzen. Aber in jedem Fall sind die Klänge benachbarter oder sich in einem Muster zusammenfügender Zahlengruppen von überraschend ästhetischem Reiz.

3.1.6 Einzelne Klänge

Im Folgenden werden einige Muster, zu denen sich Primzahlen in der Ulam-Spirale zusammenschließen, gezeigt und deren klangliches Pendant in Notenschrift wiedergegeben. Allerdings kann die klassische Notenschrift die tatsächlichen Intervallverhältnisse, die gegenüber der traditionellen gleichschwebenden Stimmung mikrotonal abweichen, nur sehr ungenau wiedergeben. Daher ist die Notation der Klänge nur als eine grobe Näherung zu verstehen. Aber sie macht die Klangstruktur sichtbar, auch wenn die Anzahl der Noten nicht immer mit der Menge der Zahlen, bzw. deren klanglichen Entsprechungen übereinstimmt. Teilweise liegen die Frequenzen so eng beieinander, dass sie überhaupt nicht als getrennte Töne wahrgenommen werden, geschweige denn sinnvoll als einzelne Note aufgeschrieben werden können. Sie äußern sich als starke Schwebungen, die den Klängen eine fast rhythmische Struktur verleihen. Daher soll die Tilde hinter einzelnen Noten auf diese engen Frequenzballungen um einen Ton herum hinweisen. In erster Linie interessiert der Klangtypus. Die Beschreibung der Klangfarbe ist selbstverständlich subjektiv, wie auch die Typisierung unterschiedlich gesehen werden kann. Auffallend aber ist eine Tendenz zur Terzenstruktur oder Ganztönigkeit. Ich höre vorwiegend einen Dur-Charakter.



397, 479, 569, 571; verminderter Dreiklang, warm



739, 853, 1103; fast-moll Dreiklang,



937, 1061, 1068, 1193, 1201; Ganztonklang,



457, 547, 643; verminderter Dreiklang,



157, 211, 271; Quart- oder Quartsextakkord,



173, 227, 229, 293, 367, 449; moll-Dur-Akkord, stärkerer Dur-Anteil,



163, 281, 283, 353, 431, 433, 521, 613, 617, 619, 827, 829, 947;
„Die große 4“, septakkordisch, metallisch,



773, 887, 1009; weiter Ganztonklang, stark Dur, grell



1301, 1303, 1451, 1607, 1609; sehr starke Terz mit Sekunde, hell, Dur



1019, 1021, 1151, 1153, 1289, 1291, 1439; „nordwestlicher Rhombus“
Tritonus, 3 Ganztonschritte ausgefüllt, sehr strahlend



1499, 1657, 1823, 1997, 1999, 2179, 2371;
„südlicher Doppelhaken“, Sekund-Cluster,



281, 283, 353, 431, 433; „südliches Kreuz“,
Dur-Dreiklang mit zu kleiner Terz,



263, 331, 409; „kleines westliches Dreieck“, übermäßiger Dreiklang



191, 193, 251, 317; nördliche
Dreiecksdoppel“, großer Septakkord,



907, 1031, 1033, 1163, 1301, 1303, 1307, 1451, 1453,
1607, 1609, 1613, 1777, 1949, 1951, 2129, 2131;
„Große elliptische Figur“, gefüllte None, dissonant.

3.1.7 Größere Primzahlen

Immer mehr konzentrierte sich die klangliche Bewertung auf Primzahlen, deren lineare Repräsentanz innerhalb des Hörbereichs liegen. Für die auditive Darstellung und Bewertung höherer „Prim“-Frequenzen bieten sich grundsätzlich zwei Möglichkeiten an: eine lineare Skalierung in den Hörbereich hinein, oder die Umformungen in Brüche,

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \dots$$

wobei dann der Zahlenbereich von 0,6 bis 0,99999... den gesamten Darstellungsraum definiert. Daher muss auch hier eine besondere Skalierung erfolgen, denn alle Primzahlbrüche, wie

$$\frac{83777}{83791} = 0,9998329176,$$

liegen sehr dicht am Wert 1. Somit wären aber alle bekannten Primzahlen akustisch darstellbar.

Dieser Ansatz wurde, obwohl auch hier interessante Klangfolgen entstehen, nicht weiter verfolgt. Für die erste Sonifikation von Primzahlen ist die Menge, die nicht skaliert werden muss, also die Werte von 41 bis 12001 (Werte darüber hinaus sind zwar hörbar aber nicht mehr sinnvoll zu unterscheiden) hinreichend.

3.2 Die Komposition

Von Beginn an stand fest, dass die Sonifikation der Zwillingspaare für die Komposition grundlegend sein würde. Auffälligstes Charakteristikum der sich bei linearer Zuordnung der Frequenzen ergebenden Klänge, sind die, aufgrund des Abstandes von je 2 Hz, auftretenden Schwebungen, einer Pulsation von genau 2 Schlägen pro Sekunde. Aufgrund der Häufigkeit von Primzahlzwillingen war zu erwarten, dass diese Schwebungsklänge im gesamten Tonraum sehr präsent sein würden. Die Pulsation würde quasi auf natürlichem Wege einen Grundschatz von 120 Schlägen pro Minute manifestieren. Da das Ziel dieser Arbeit darin besteht, Strukturen innerhalb der Primzahlen hörbar zu machen, wurde dieses inhärente Metrum der Komposition zugrunde gelegt. Da 120 Schläge pro Minute für die Steuerung unnötig schnell erschien, wurde die Taktfrequenz für den zentralen Pulsgeber (s. Abschnitt 4.2) auf 60 Schläge festgelegt. Damit erscheinen die pulsierenden Töne aus den Primzahlzwillingen als eine Bewegung von Achtelnoten. Der zentrale Impulsgeber steuert den Ablauf der Komposition, in dem er aus einer Liste Daten ausliest und durch sie, zum festgelegten Moment, die entsprechende Aktion auslöst. Diese Liste ist, nach Fertigstellung des gesamten Max-Patches und seinen verschiedenen Sub-Patches, das eigentliche Kompositions-Medium. Sie ist gewissermaßen das Notenblatt. In sie sind alle Abläufe, Hüllkurven und Klangdauern eingeschrieben und über diese auch änderbar.

Bis auf wenige Ausnahmen, wie in den schnellen *glissandi* der *lightnings*, die im Irgendwo

der klanglichen Höhe beginnen oder enden und dabei im weiteren Verlauf des rhythmischen *kanons* den Hörbereich ganz verlassen, sind alle Töne Repräsentationen von Zahlen innerhalb des Hörbereichs. Eine Transposition findet hier nicht statt.

Obwohl es keine ursprüngliche Absicht war, ist diese Beschränkung auf den „Anfangsbereich“ der Primzahlen, schon in Anbetracht der sich darin befindenden Menge an möglichen Werten, eine notwendige Entscheidung. Leicht unterliegt man der Gefahr sich in der Unendlichkeit dieser Zahlen zu verlieren. Die Beziehungen zueinander, allein der ausgewählten Zahlen, erscheinen in vielfältiger Form. Sie sind gleichermaßen Elemente im *kanon*, treten gegebenenfalls als Zwillinge in den *nachtgewächsen* auf (diese Zahlen stehen hier als eigenständige Gruppe) und als Bestandteile der *pattern*, die oft auch Zwillinge enthalten. Schließlich sind auch das nur Teilaspekte ihrer möglichen klanglichen Realisierung.

Die Komposition besteht aus drei Teilen bzw. Abschnitten: *kanon*, *nachtgewächse/pattern* und *lightnings*. Die Satzbezeichnungen sind gleichfalls die Bezeichnungen der zugehörigen *Max/MSP*-Patches

3.2.1 **kanon**

Kanon bezieht seinen Tonvorrat aus der Gesamtmenge der Primzahlen (s. Abschnitt 4.8). Beginnend mit der 1 wird die Menge der natürlichen Zahlen in Schritten von 200 Millisekunden (ms) konsekutiv fortgezählt. Jede Primzahlstelle erscheint in ihrer klanglichen Repräsentanz als ein kurzer Ton, quasi im *staccato*. Er hat eine Hüllkurve von 8–10 ms. Durch diese äußerste Kürze sind die Klänge nicht als Akkorde erkennbar, sondern lediglich perkussive Impulse. Sie bilden den durchgehenden Rhythmus und Takt. Die wiederkehrende fehlende Endziffer 5 schafft als Pause automatisch eine Struktur. Der Pause folgt eine auftaktig wirkende Figur, jeweils aus Zahlen mit den Endziffern 7,9,1 und 3 gebildet. Es entsteht ein 5/4 Takt. Allerdings erscheint dieser nicht sehr stark, der Takt beginnt mit Zunahme der Stimmen, also deren Aufschichtung, scheinbar zu wechseln. Durch den „falschen“ Einsatz der neuen Stimme auf der geraden „und“-Zeit, der 78 der Vorgängerstimme (s. Abschnitt 3.1.2), fallen die Impulse zunehmend sowohl auf ungerade als auch gerade Taktzeiten. Jeder Impuls hat infolge des verschiedenen zeitgleichen Zusammentreffens von unterschiedlichen Zahlenrepräsentanzen, also Sinuswellen, eine eigene, um nicht zu sagen, einzigartige Klangfarbe. Ein variantenreiches, meist auftaktiges rhythmisches Gebilde von unterschiedlicher Länge im Grundtempo von 75 Schlägen pro Minute resultiert daraus. Damit steht der Grundsatz des *kanons* zu dem des gesamten Stücks im Verhältnis 5:4. Die besondere musikalische Kraft bezieht der Rhythmus aus dem Reichtum an Pausen, die trotz der am Ende 34 parallel laufenden Stimmen erscheinen. Dies ist die klangliche Entsprechung der bildlichen Darstellung *Modulo77*.

Im Gegensatz dazu führt ein Einsatz der Folgestimmen jeweils nach 100, besonders aber

nach 200 Schlägen zu einem größer erscheinenden Klangraum, bzw. -umfang. Denn weniger Töne klingen gleichzeitig, d.h. weniger dicht, jedoch weiter voneinander entfernt, und können damit leichter erfasst und unterschieden werden. (Wenn die letzte Stimme beginnt, befindet sich die erste schon außerhalb des musikalischen Hörbereichs.) Da hier alle geraden und ungeraden Werte parallel verlaufen (wenn die erste Stimme 201 zählt, beginnt die zweite im selben Moment mit 1), gibt es, im Unterschied zur Version *Modulo77* (die 78 der ersten Stimme ist die 1 der zweiten) hier keine Unterteilungen der Hauptschläge. Es klingen nur Viertel im 5/4 Takt und keine 8tel als „und“-Zwischenimpuls. Diese größere Gleichförmigkeit führt nach und nach zu einer ziemlichen Langeweile, da der Rhythmus unverändert als ta-ta-ta-tà--- (7- 9- 1- 3- -) erscheint. Während im ersten Beispiel, das im *Canon* angewandt wird, seltener Pausen vorkommen, aber die Einzelimpulse eine größere Variabilität unterschiedlichster Klangfarbe und -dichte aufweisen. Ästhetisch fällt die Entscheidung unbedingt auf diese.

3.2.2 nachtgewächse/pattern

Der Abschnitt und gleichzeitig das Patch *nachtgewächse* stellen die besondere Gruppe der Zwillinge vor (s. Abschnitt 4.5). Ihr leises, erst allmählich die Hörschwelle überschreitendes Auftauchen aus der Tiefe des fast noch nicht Hörbaren, gemahnt mich an jenen verblüffenden Effekt in dem Bild „*Nachtgewächse*“ von Paul Klee, das seinen eigentlichen Bildinhalt nur dem preisgibt, der für eine etwas längere Zeit, als nur einen kurzen Moment mit seinem Blick auf dem Bild verweilt. Allmählich heben sich, gleichsam aus der Tiefe des Wassers, dunkelblaue Rechteckgebilde vor dem fast schwarzen Hintergrund ab. Übertragen auf diese Komposition: wenn das Patch tatsächlich unterhalb der Hörschwelle, etwa mit dem ersten Zwillingenpaar 3 und 5 beginnt und die nachfolgenden Töne erst allmählich erkennbar werden entsteht ein ähnlicher Eindruck. In dieser Komposition beginnt das Aufsteigen der Zwillinge mit dem Zahlenpaar 41, 43. Tiefere Frequenzen kamen nicht in Betracht, da unbedingt von Beginn des Abschnitts an ein konkreter Ton erkennbar sein soll. Sehr leise steigen die Töne als ruhende Klänge auf.

Um die Gleichförmigkeit von beständigen 2 Hz-Intervallen, bzw. die sich ergebenden Schwebungen zu vermeiden, wurde diese Zahlenreihe in 2 Stränge aufgeteilt, in die je untere und obere Zwillingenanzahl ($6n-1$ und $6n+1$). Beide Stränge werden mittels einer Zufallsfunktion (*decide*-Objekt) nur ungefähr parallel durchgezählt. Durch verschiedenes nacheinander Aufrufen, mal des einen, dann des anderen Stranges, entstehen geringfügige Verschiebungen. Dadurch werden nicht immer benachbarte aber immer relativ nahe Zahlen gleichzeitig in Töne umgewandelt. So entsteht eine größere klangliche Variabilität. Die Dauer der Klänge wird nach der jeweils verfügbaren Zeit bis zum nächsten Impuls durch die „Steuereinheit“ ausgerichtet.

Das zweite Element dieses Abschnitts beruht auf den Mustern die die Spirale zeigt. Es wurde

eine Auswahl an Einzelklängen nach ästhetischen Kriterien getroffen. Insgesamt 77 Klänge stehen diesem Subpatch zur Verfügung, aus denen es bei jedem Stückdurchlauf 56 Klänge auswählt. (Diese Angaben können sich bis zur endgültigen Präsentation der Arbeit geringfügig verändern.)

Die Zwillingssklänge der *nachtgewächse* steigen ausschließlich in aufwärtiger Richtung auf. Die Einzelklänge der *pattern* hingegen durchschreiten den Klangraum in willkürlichen, von der auswählenden Zufallsfunktion gesteuerte Richtungen. Sie sind mit einer Dauer von etwas mehr als 4 Sekunden auch kürzer artikuliert.

3.2.3 lightnings

Das dritte Element des Stückes sind die Tonlinien des Abschnitts *lightnings* (s. Abschnitt 4.9). Hierzu wurden die Zahlenpositionen innerhalb der Ulam-Spirale in Reihen in vertikaler und diagonaler Richtung ausgelesen. Sie bilden somit zwei Stimmen: vertikal und diagonal. In hohem Tempo werden, in der Reihenfolge ihres Erscheinens, die einzelnen Primzahlen als Sinustöne abgespielt. Welche der beiden Reihen im jeweiligen Moment aufgerufen wird, entscheidet wiederum ein *decide*-Objekt. Die Anzahl der in der jeweiligen vertikalen oder diagonalen Linie sich befindenden Primzahlen beeinflusst die Dauer der Einzeltöne und damit die Schnelligkeit der Abfolge, bzw. „Spielfigur“. Dadurch entstehen glissandohafte, irrisierende Klanglinien, die durch ihre Schnelligkeit eine eigene, fast metallische Klangfarbe erhalten.

Die Spirale wird dabei in unterschiedlich großen Schritten von links nach rechts, jetzt auch in Bereichen, die bisher nicht in Betracht kamen, durchlaufen.

Zwei Abweichungen von den bisher geltenden Prinzipien, die Verwendung obertonfreier Sinuswellen sowie die ausschließliche Berücksichtigung von Primzahlen, die per se im Hörbereich liegen, waren hier für die Hörbarkeit als Klangkomposition notwendig. Die meisten der in diesem Abschnitt auftretenden Zahlen liegen, da die Ulam-Spirale „großflächig“ durchschritten wird, um eine Vielfaches oberhalb des Hörbereichs. Insbesondere das Eintreten in den Hörbereich liefert unangenehme und unzumutbare Klänge. Andererseits sind die hier entstehenden Klangmuster von großer Schönheit. Daher wurden, als Kompromiss, die Frequenzen auf ihr Zehntel reduziert, was noch immer hohe Töne ergibt. Zusätzlich, um eine trotzdem vorhandene Schärfe aufzuweichen, wurden den Tönen Oberfrequenzen von 3 Oktaven und einer Terz subtil beigemischt. Diese Regelveränderung ist aber insofern gerechtfertigt, da hier nicht Einzeltöne oder -klänge im Fokus stehen, sondern ornamentale Gestalten.

3.2.4 Zeitstruktur/Ebenen

Es gibt drei Ebenen in dieser Komposition. Der *kanon* bildet die erste, untere Zeitebene der Komposition. Der Abschnitt *nachtgewächse/pattern* schichtet eine zweite auf.

Diesem ist eine Primzahlfolge, rückwärts laufend von 500 bis 1, zugrunde gelegt. Auch hier wird im Sekunden-Takt gezählt und jede Primzahlstelle triggert einen Klang. Da die Dauern der Klänge mindestens 4 s betragen, werden alle Abstände der Prim-Folge ≤ 4 als „Brücke“ benutzt, d.h. die Impulse werden entweder zu den Zwillingen- oder den Musterklängen gegeben. Dies ist in der oben erwähnten Steuer-Liste exakt festgelegt.

So sind bspw. die Impulse an den Stellen 449 und 443 den *pattern* zugeordnet. Da der nächste Impuls, es wird rückwärts gezählt, bei 439 und damit für die Dauer des gerade stehenden Klanges zu kurz ist, gehen die Impulse 439 und 433 an die *nachtgewächse* und 431 und 421 wieder zurück an die *pattern*.

Mit Erreichen der 2 als letztem Impuls, der auch als einziger beiden Klangarten gegeben wird, ist der Hauptteil des Stückes beendet und es erscheint als „Coda“ der visuelle Zustand des *kanons*. Die erreichten Positionen der 34 parallel laufenden Stimmen, die jeweils die Primreihe vom Beginn aufwärts zählen, werden noch einmal im Bild gezeigt. Dabei hat die erste Stimme 2671 als höchste Primzahl erreicht, die 34. Stimme spielte als letzten einen Ton von 53 Hz. Mit dem folgenden Überblenden vom Bild des *kanons* in die Totale der Ulam-Spirale erfolgt mit dem Verstummen des *kanons* ein abschließender Rückgriff auf den Beginn des Stückes.

Die Einsätze des dritten Abschnitts *lightnings* sind in der Steuer-Liste für die Parameter Beginn und Dauer festgelegt. Sie sind das Element der Bewegung und erscheinen zweimal als Höhepunkt einer Entwicklung. Sie unterliegen keiner rhythmischen Reihenordnung.

3.3 Der visuelle Teil

Mit der Vorbereitung auf das Thema der vorliegenden Arbeit begann meine intensivere Beschäftigung mit der grafischen Programmieroberfläche *MaxMSP*. Die ersten bildliche Darstellungsmöglichkeit stellt das sogenannte *lcd*-Objekt bereit, mit dem ich begann, Primzahlen, wie schon zuvor auf Papier, als Punkte linear, d.h. Zeile für Zeile aufzuzeichnen. Dies führte zu der Darstellung *Modulo77*, die als Sonifikation die Grundlage des *kanons* ergab. Die Möglichkeiten der Matrixdarstellung in einem *jit.window*-Objekt der Programmerweiterung *Jitter* sind bezüglich Qualität und Darstellungsmenge wesentlich größer. Daher wird der visuelle Teil der Komposition mit diesem Programms realisiert. Abhängig von der jeweiligen Auflösungskapazität wird der Mittelpunkt der Bildschirmmatrix ermittelt und von diesem aus die Ulam-Spirale gezeichnet. Jeder Zählschritt wird einzeln berechnet und für jede Primzahl ein Punkt gesetzt. Zu Beginn des Stückes erfolgt nach der einleitenden Gesamtdarstellung der vollen Matrix (die Primzahlen bis 174000) eine

Überblendung in das Zeichnen des *kanons*, bevor die Einzeldarstellung der Muster beginnt. Gleiches geschieht umgekehrt am Ende, wenn die Darstellung des Zählstandes der 34 Stimmen, den Weg den jede Stimme durch die Spirale nimmt, in das Gesamtbild wieder zurückgeht. Spirale und *kanon* ergeben eine Cluster-Darstellung, *nachtgewächse*, *pattern* und *lightnings* kleinteilige Punktmuster und Linien.

Die Zeichnungsdichte der Punkte wird im Stückverlauf programmatisch verändert. Zu Beginn erfolgt die Darstellung der gesamten Spirale in der höchsten Stufe. Jeder zweite Bildpunkt steht für einen Zähler. Eine denkbare Halbierung der Abstände wäre, wie schon erwähnt, nicht mehr sinnvoll. Zu Beginn des Hauptteiles, dem Erscheinen der *nachtgewächse*, werden die Punkte in 9-fach vergrößertem Abstand gezeichnet, um eine stärkere Nähe und Deutlichkeit zu erhalten. Da die Frequenzen sich im Hunderterbereich, somit nahe am Mittelpunkt bewegen, würde hier die maximale Auflösung ein zu kleines und ausschließlich zentriertes Bild ergeben. Mit der Ausweitung des Frequenzraumes, nimmt die Vergrößerung wieder stufenweise ab, um im Schlussteil, dem erneuten *kanon*-Bild die kleinstmögliche Darstellungsgröße, also höchste Auflösung zu erreichen.

Die Ulam-Spirale wird in den Farbtönen Gold und Silber gezeichnet, die Einzelmuster in einem hellen Weißgrün. Die visuelle Darstellung verläuft grundsätzlich synchron zur auditiven Erscheinung der repräsentierten Primzahlen. Denn beide, die auditive, wie die visuelle Darstellung, repräsentieren jeweils die gleiche Primzahl. Einzige Ausnahme ist selbstverständlich das Bild der gesamten Spirale, schließlich wird dieses auch nicht sonifiziert.

3.4 Die Präsentation

Diese Arbeit soll als Komposition mehrkanalig über Lautsprecher wiedergegeben und gleichzeitig das Ergebnis der Errechnung der Kompositionsdaten auf einem Bildschirm abgebildet werden, so dass in einem akustisch abgeschlossenen und abgedunkelten Raum eine installierte audio-visuelle Komposition als Loop läuft.

Die Komposition besteht aus den beiden figurierten Zahlenformen, der geschichteten Primzahlreihe in *Modulo77* und den, der Ulam-Spirale entnommenen Zahlenfolgen. Ihre Verarbeitung sowie klangliche und bildliche Realisierung geschieht mit Hilfe eines umfangreichen *Max/MSP Jitter*-Patches. Dieses soll in der Präsentation vorgeführt werden. Zur technischen Absicherung für die Dauer der Ausstellung wird versucht, das Patch als einen Quicktime-Film zu rendern, das heißt, die Daten würden während der Ausstellungsdauer nicht in Echtzeit errechnet, sondern als Video-Dokumentation abgespielt werden. Da gegenwärtig nicht klar ist, ob dabei auch die notwendige Bildpunktdarstellung erreicht werden kann, bleibt dieser Punkt vorerst offen.

Die Präsentation, respektive Wiedergabe, erfolgt mehrkanalig durch fünf, voraussichtlich an der Decke des Ausstellungsraumes kreisförmig aufzuhängende Lautsprecher (Fostex 6301B) und eines zusätzlichen Subwoofers am Boden. Ein spezielles Surround-Sound-Format ist nicht beabsichtigt. Die Lautsprecher werden auf einen Bildschirm, mit mindestens 49" Bilddiagonale, ausgerichtet. Die Umgebung soll während der etwa 9-minütigen Vorführung ruhig sein. Der Raum sollte für die Bildprojektion abgedunkelt sein.

4. MaxMSP – Die Patches

Die Zeit des Entstehens dieser Masterarbeit war zugleich eine Zeit des intensiven Lernens des Programms *MaxMSP/Jitter*, das hauptsächlich darin bestand, zahllose Tutorials im Programm und Blogbeiträge im Internet zu studieren. Die Bewegung durch dieses Themenfeld geschah in einem andauernden try-and-error-Modus. Nachfolgend gebe ich kurz einen Überblick über das Patch, das aus vielen Anfangsversuchen und ursprünglichen „Untersuchungsinstrumenten“, sich bausteinartig zur Partitur und zum Interpretieren der Komposition „*fremde räume - external spaces*“ wurde.

4.1 main patch

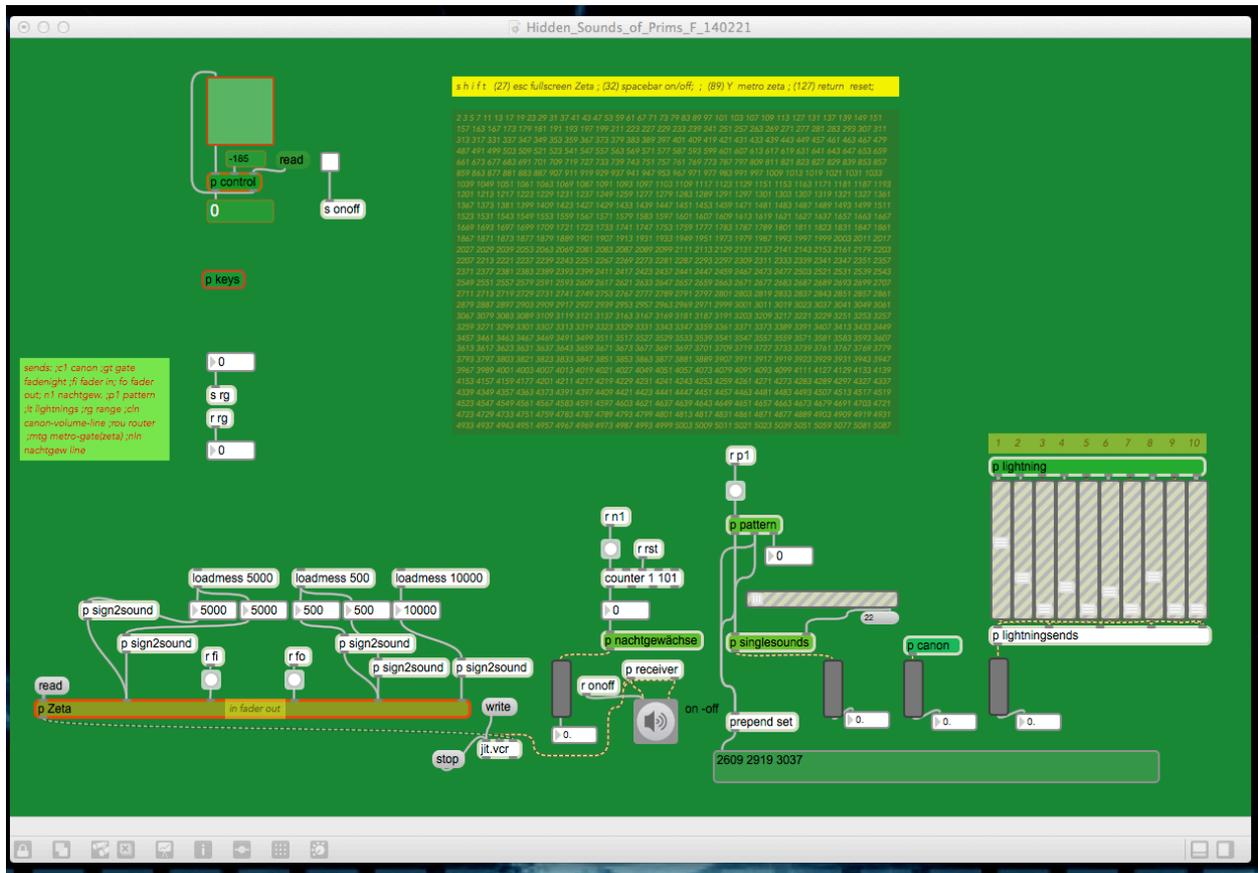


Abb.9 main patch

Das main-patch beinhaltet alle Teile, bzw. Instrumente des Stücks. Die zentral sichtbaren Textfelder dienen der Übersicht über shortcuts und die wichtigsten Primzahlen zur Kontrolle, sowie, auf der linken Seite, über send-receive-Verbindungen.

Oben links befindet sich mit dem *toggle*-Objekt, das den Gesamttaufbau startet, das subpatch *control*, die eigentliche Steuerzentrale. Das subpatch *zeta*, unten links, generiert, aus den von den klangerzeugenden subpatches eintreffenden Primzahlen, die visuelle Darstellung. Die fünf identischen subpatches *sign2sound* wandeln die Klangdaten in Bildpunkte, Farben und Leuchtdauern um. Unten mitte bis unten rechts folgen die Ebenen, bzw. Teile der Komposition als separate subpatches.

Mehrere *meter*-Objekte dienen der Kontrolle, die zehn *gain*-Objekte regeln die Obertonmischung in *lightnings*. Unten mitte empfängt das *ezdac*-Objekt über das subpatch *receiver* auf 5 Kanälen die Audiodaten. *Jit.vcr* dient der Aufzeichnung als Quicktime-Film.

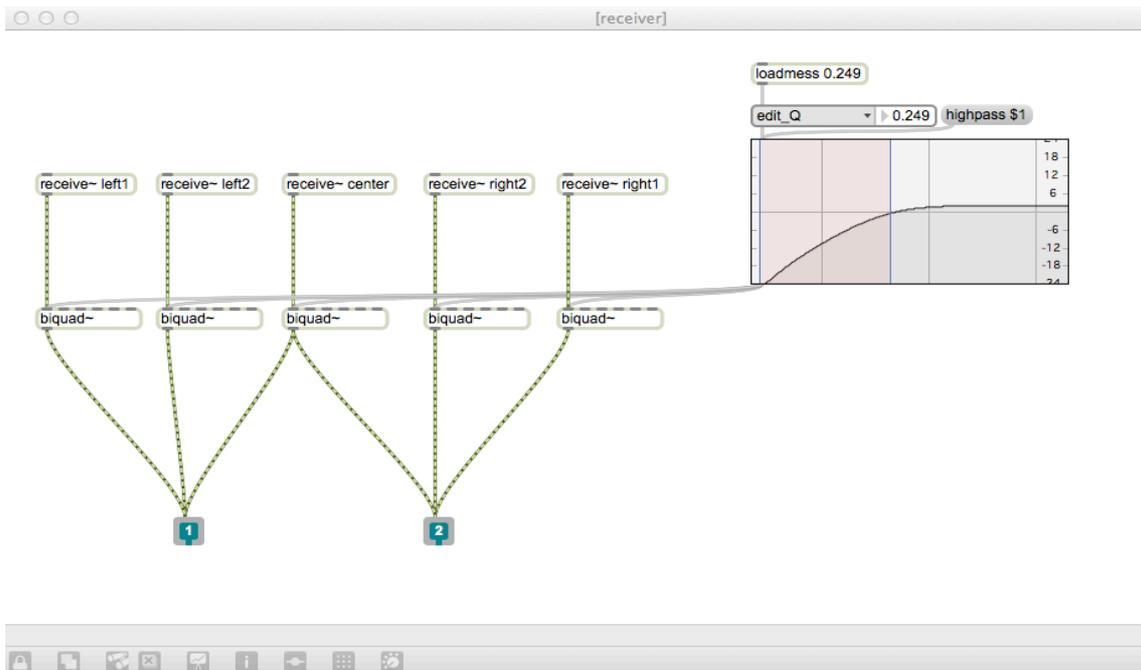


Abb.10 receiver

Das subpatch *receiver* bündelt die 5 Kanäle auf 2 Kanäle und schützt mit einem Hochpassfilter vor zu starken Baßfrequenzen. Für die Präsentation wird diese Bündelung allerdings nicht mehr benötigt und daher abgeschaltet werden.

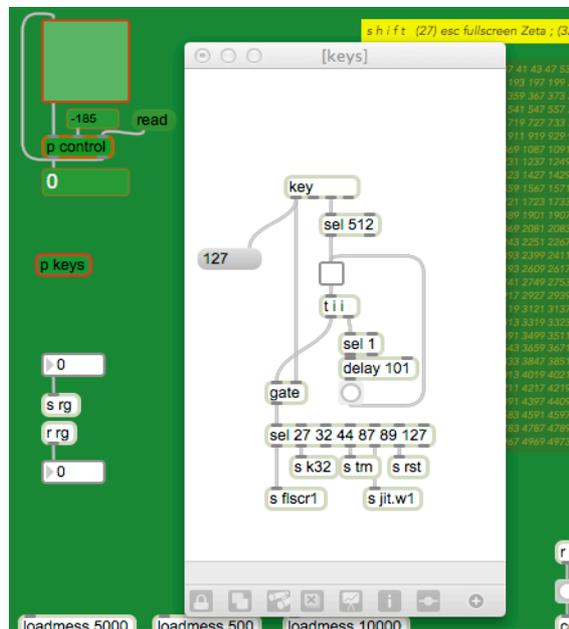


Abb.11 keys

Das Subpatch *keys* steuert alle shortcuts.

4.2 subpatch control

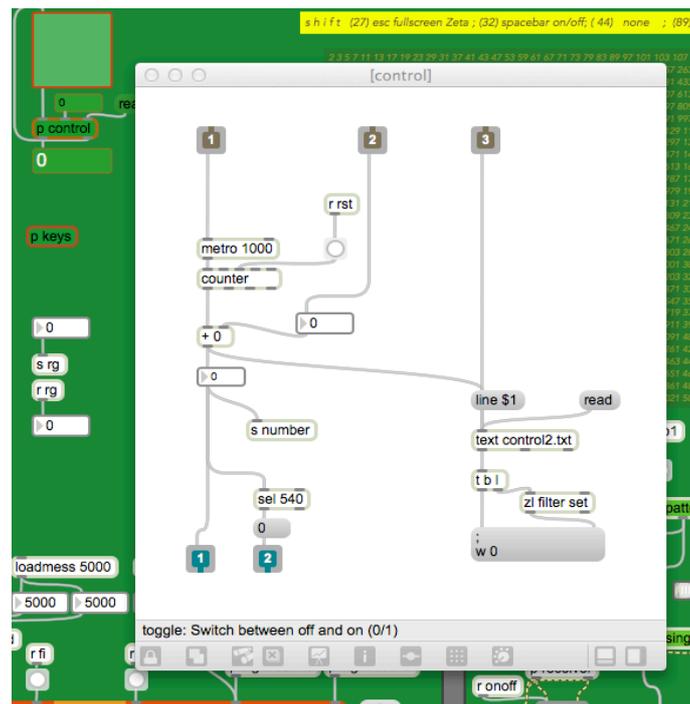


Abb.12 control

Dieses subpatch beinhaltet die zentrale Steuerung. Es zählt durch das *metro*-Objekt den Sekunden-Takt und triggert sämtliche Ereignisse. Die Daten zu den Start- und Endpunkten, Einzelklängen, Hüllkurven und Bildschirmauflösungen befinden sich auf einer Liste, die in *text control2.txt* eingelesen wird.

4.3 subpatch zeta

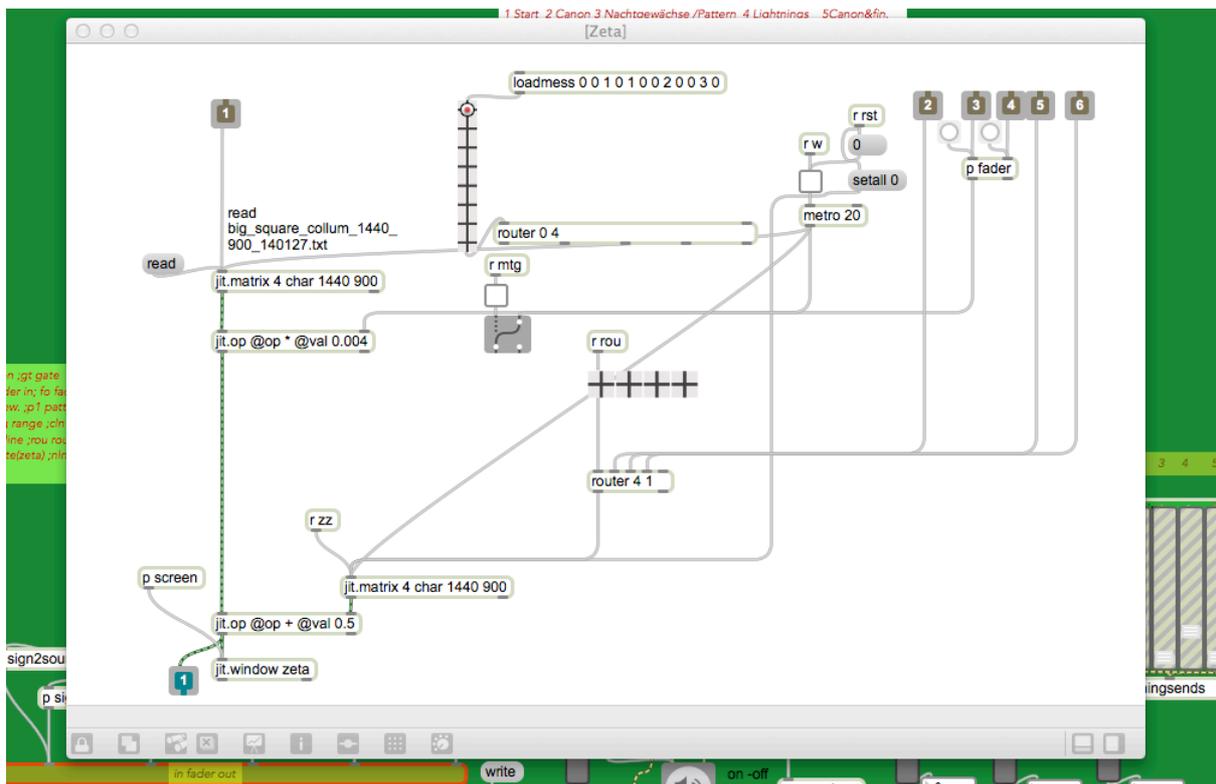


Abb.13 zeta

Hier werden die empfangenen Bilddaten über *jit.matrix*- in die Matrix des Bildschirms, für den das *jit.window zeta*-Objekt steht, eingeschrieben. Das *metro*-Objekt liefert die Bildfrequenzrate, beide *router* steuern die Verbindung von Datenquelle (*sign2sound*) *jit.matrix*.

4.4 subpatch sign2sound

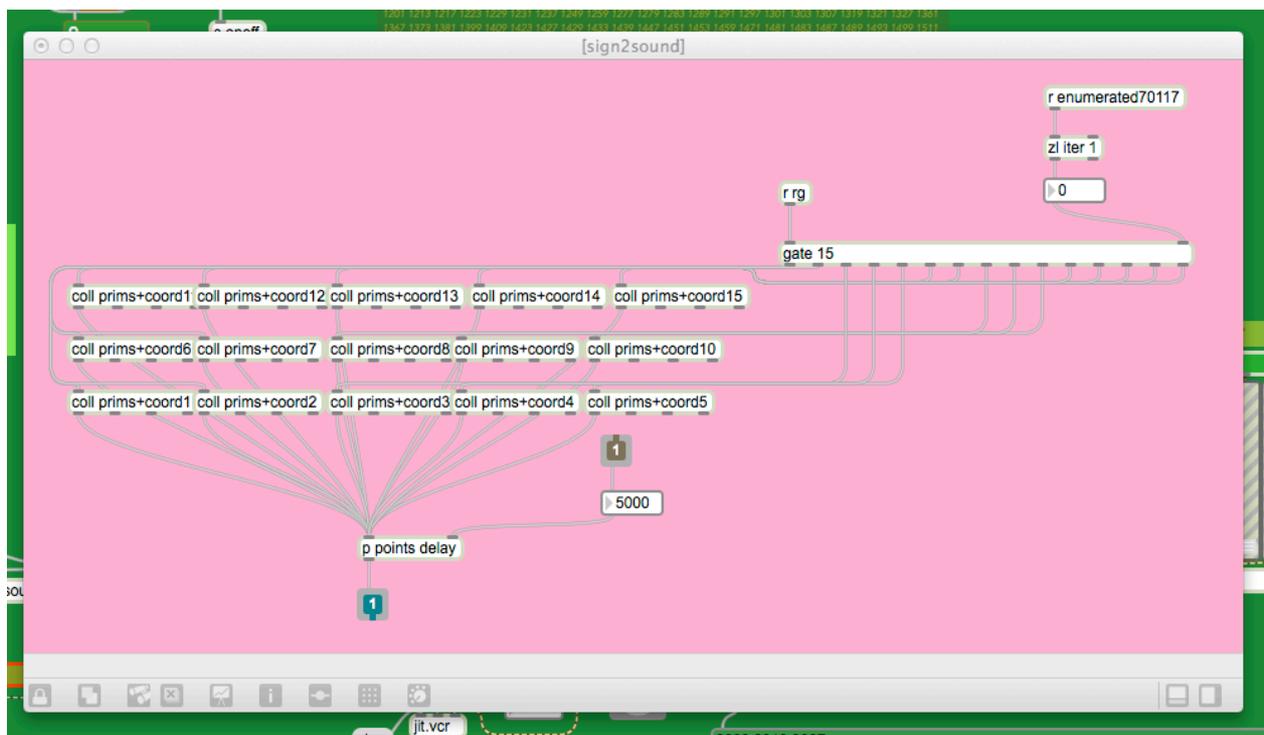


Abb. 14 sign2sound

Dieses subpatch verteilt die von den patches der Kompositionsteile *kanon*, *nachtgewächse*, *pattern* und *lightnings* empfangenen Primzahlen über *gate* auf die *coll*-Objekte. Darin befinden sich sämtliche zu verwendenden Primzahlen mit den entsprechenden Koordinaten, wobei die Ziffer im Objekt-Namen für die Vergrößerungsrate steht. Die 1 steht für die kleinste, die 15 für die 15-fache Vergrößerung der Gesamtdarstellung. Jede Vergrößerungsstufe benötigt einen kompletten Koordinatensatz, der aus der Primzahl und den Werten auf der x- und der y-Achse besteht. Jeder Kompositionsabschnitt nutzt ein ihm zugewiesenes und gleichermaßen repräsentierendes patch. Daher werden fünf identische Kopien benötigt. Da *lightnings* zwei Stimmen erzeugt, sendet es auch an zwei patches.

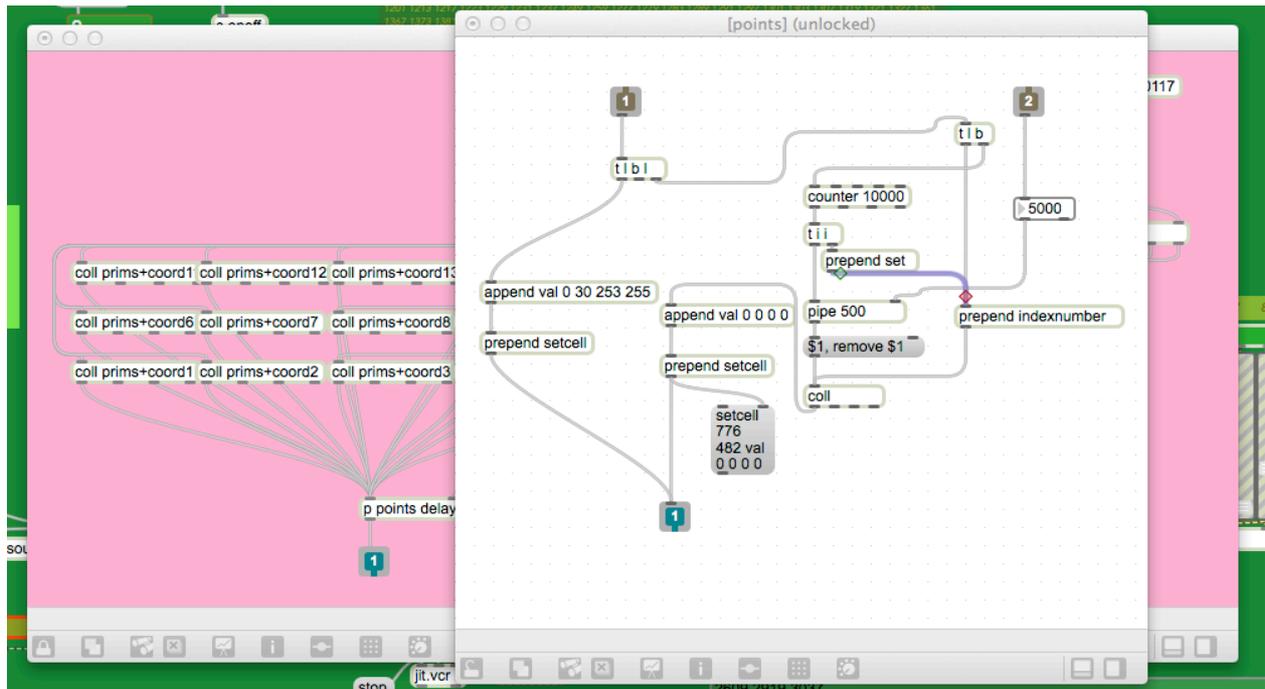


Abb.15 subpatch points delay

In *points delay* wird die ankommende Liste der Primzahlkoordinaten im linken *append*-Objekt um die RGB-Farbwerte ergänzt und zu *zeta* geschickt. Das *pipe*-Objekt rechts verzögert die ebenfalls empfangene Liste, um sie anschließend, mit den Farbwerten jeweils 0 ergänzt, auszugeben. Die Punkte auf dem Bildschirm werden daraufhin wieder gelöscht.

4.5 subpatch nachtgewächse

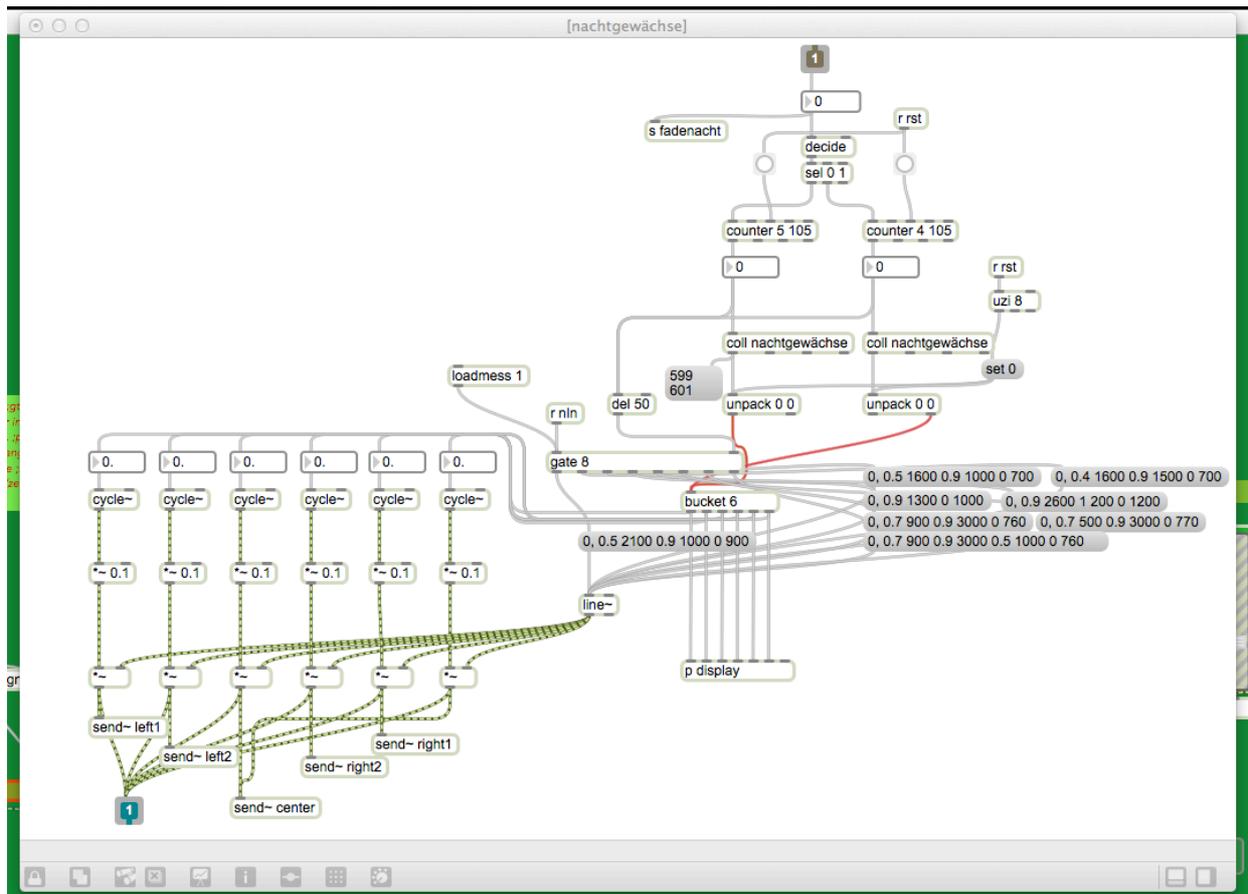
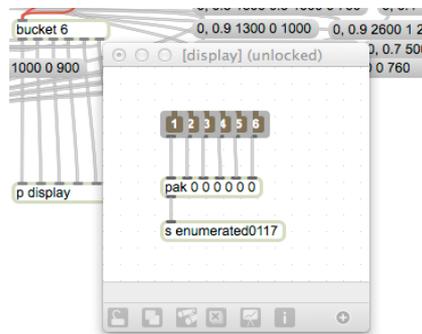


Abb.16 nachtgewächse

Die in den beiden Objekten *coll nachtgewächse* sich befindenden identischen Listen von Primzahl-Zwillingen erhalten einen vom *decide*-Objekt zufällig zugewiesenen Impuls und schicken die jeweils nächste Zwillingszahl zu *bucket6*. Darin werden die Zahlen aufgereiht und wandern schrittweise durch die Oszillatoren, den 6 *cycle~*-Objekten. Das Audiosignal erhält seine jeweilige Hüllkurve. Deren Varianten sind in den *message*-Objekten festgelegt und werden von der oben genannten zentralen Steuer-Liste über *gate8* getriggert.



(Abb.17 subpatch display)

Das Subpatch *display* sendet die jeweils aktuelle Liste der Primzahlen, die sich in *bucket* bzw. den *cycle~*-Objekten befindet, über ein *send*-Objekt an *sign2sound*.

4.6 subpatch pattern

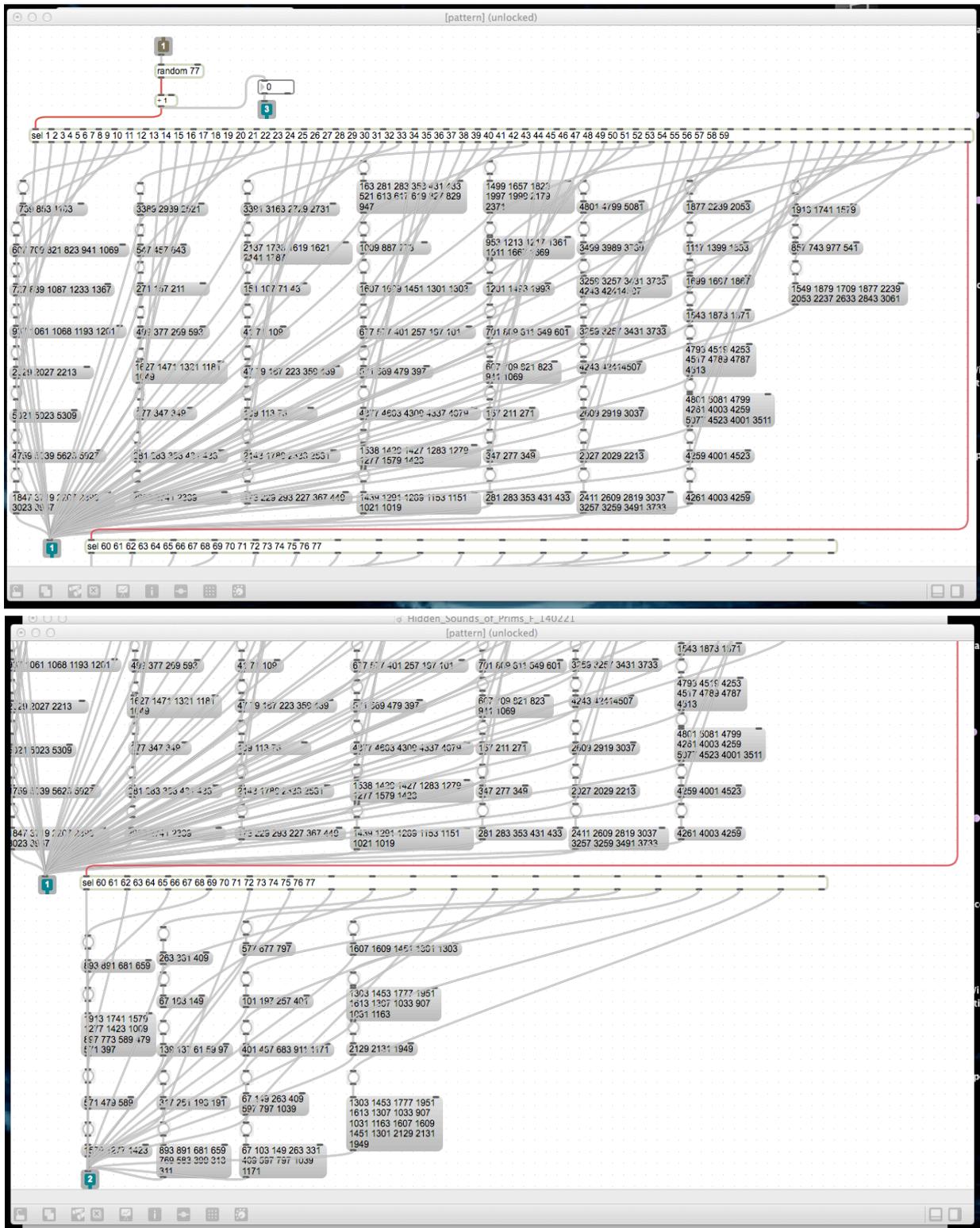


Abb.18 u. 19 pattern

Pattern erhält aus der Steuer-Liste einen Impuls der in *random 77* eine Zufallszahl auslöst, die über zwei *select*-Objekte an eine von siebenundsiebzig, aufgrund ihrer Musterbildung ausgewählte, Primzahlgruppen geschickt wird. Anschließend wandert diese über die *outlets* in das angeschlossene subpatch *singlesounds*. *Outlet3* schickt zusätzlich die aktuelle Musternummer zur Kontrollanzeige zum *main-patch*.

4.7 subpatch singlesounds

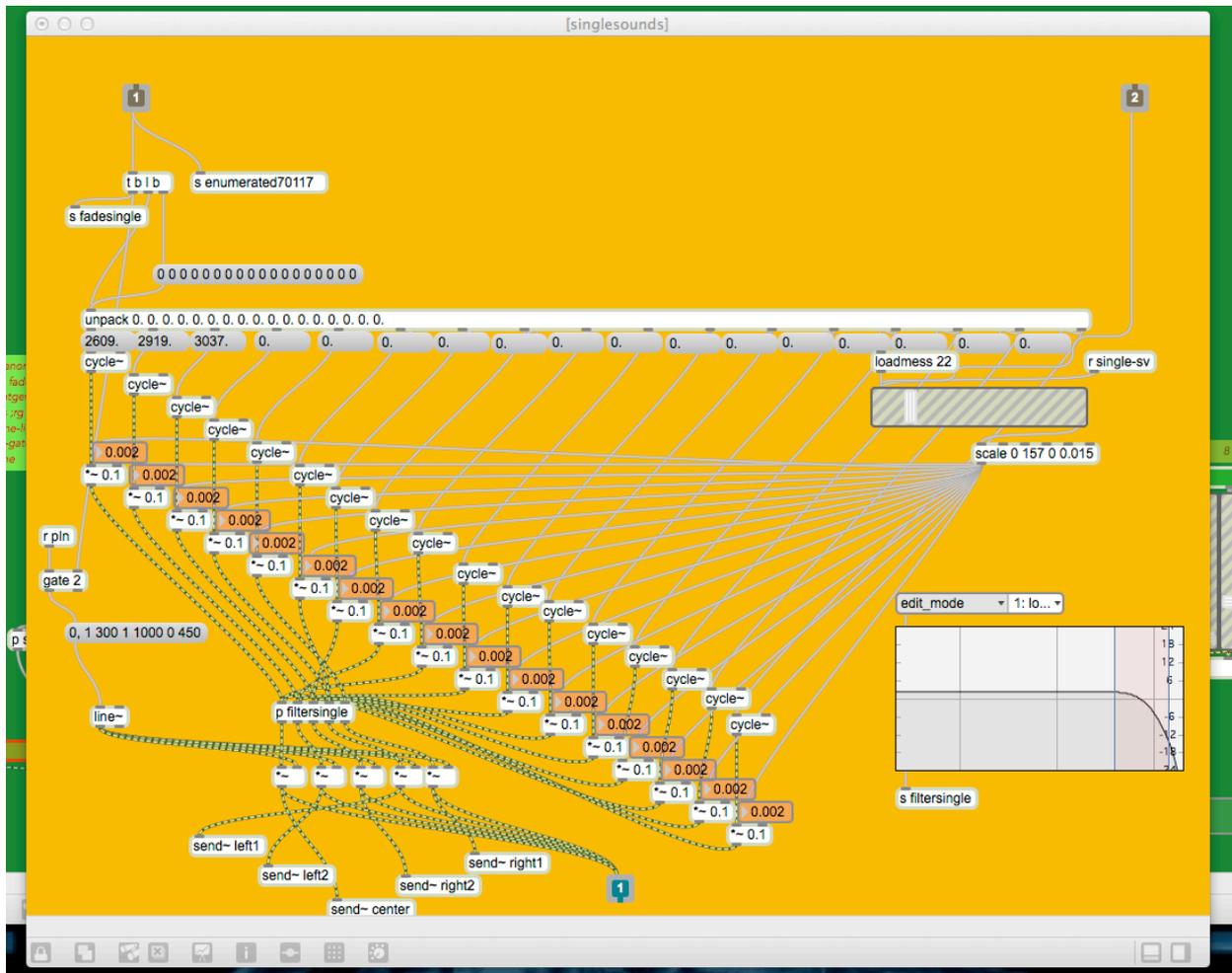


Abb.20 singlesounds

Singlesounds erhält von *pattern* bis zu 17 Primzahlen gleichzeitig und verteilt diese auf die *cycle~*-Objekte. Vor Empfang einer Liste werden die alten Werte durch Nullen ersetzt, da die Listen unterschiedlich groß sind und damit nicht alle alten Werte überschrieben werden. *Line~* fügt den Audiowerten eine feststehende Hüllkurve hinzu.

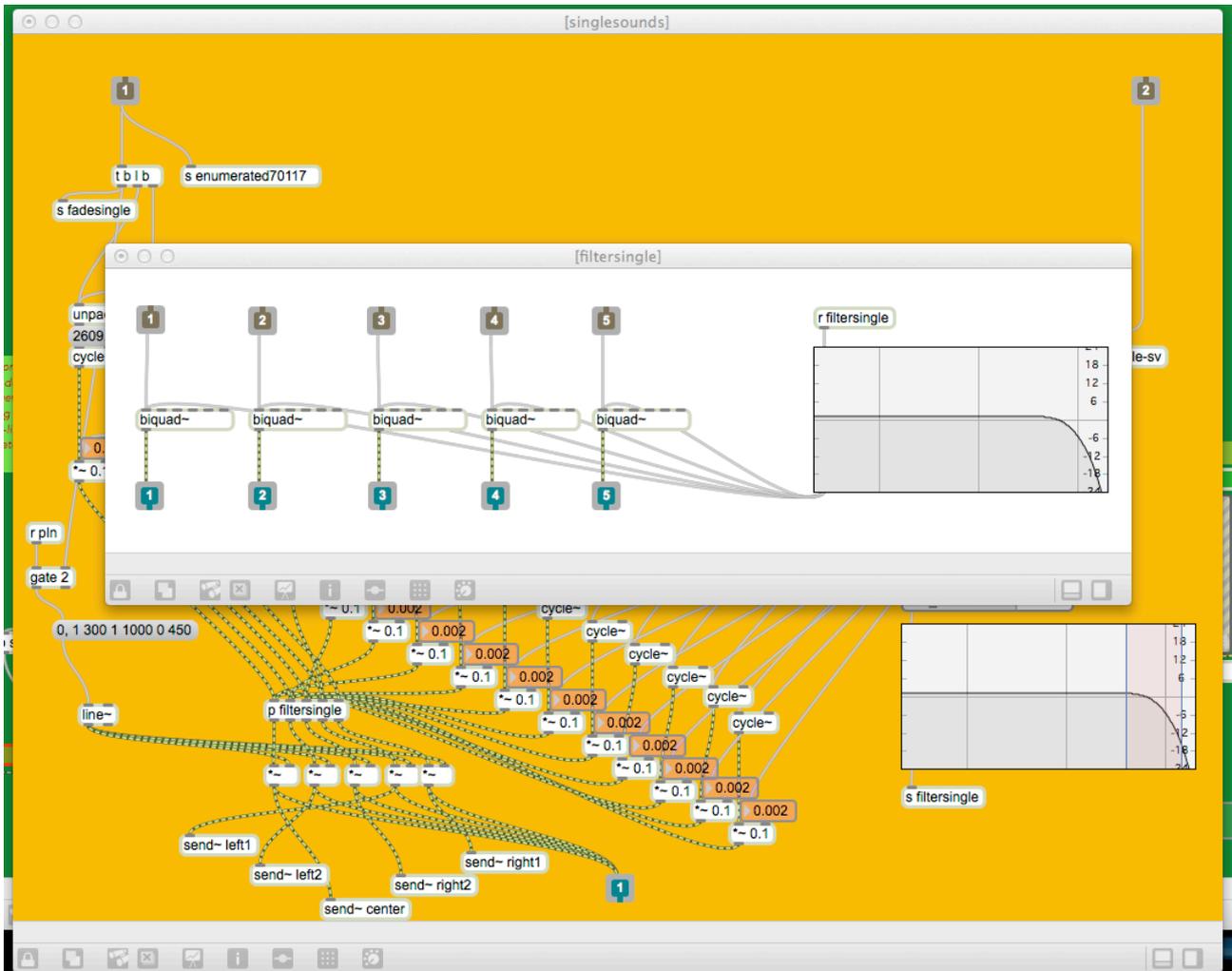


Abb.21 singlesounds

Alle Audiodaten werden auf 5 Ausgänge verteilt die ihrerseits in *filtersingle* je ein Tiefpass-Filter durchlaufen.

4.8 subpatch kanon

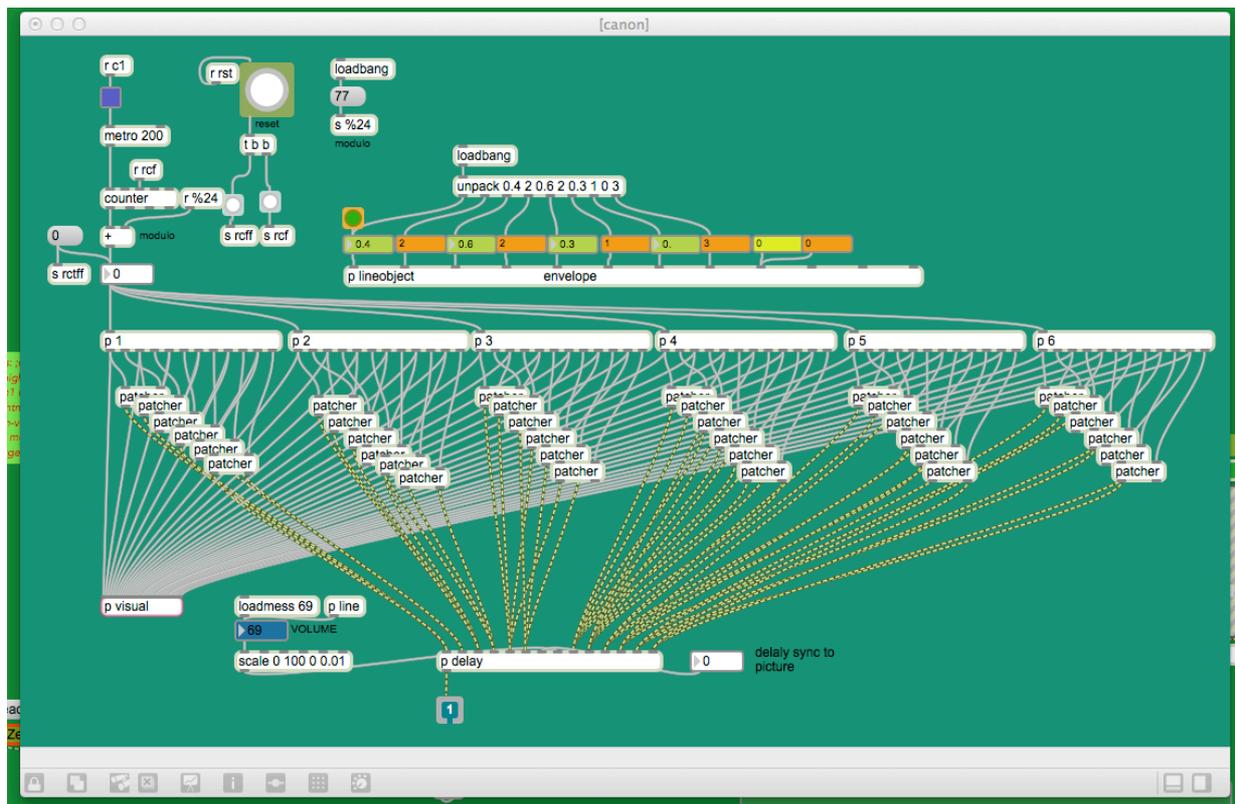


Abb.22 kanon

Kanon ist das umfangreichste und aufwändigste Patch. Links oben befindet sich der interne Impulsgeber. Dieses Patch erhält den Startbefehl aus der Steuer-Liste und läuft von da an unabhängig bis zum End-Befehl. Das *Counter*-Objekt zählt von 0 an. Die hinzuaddierte Modulo-Zahl (77) dient der Festlegung des Startpunkts der einzelnen Stimmen. Die farblich hervorgehobenen *flonum*-und *integer*-Objekte repräsentieren die (veränderbaren) Daten der Hüllkurve, die *p lineobject* an *p line* (unten links) sendet. *Unpack* lädt default-Werte in die Zahlenfelder.

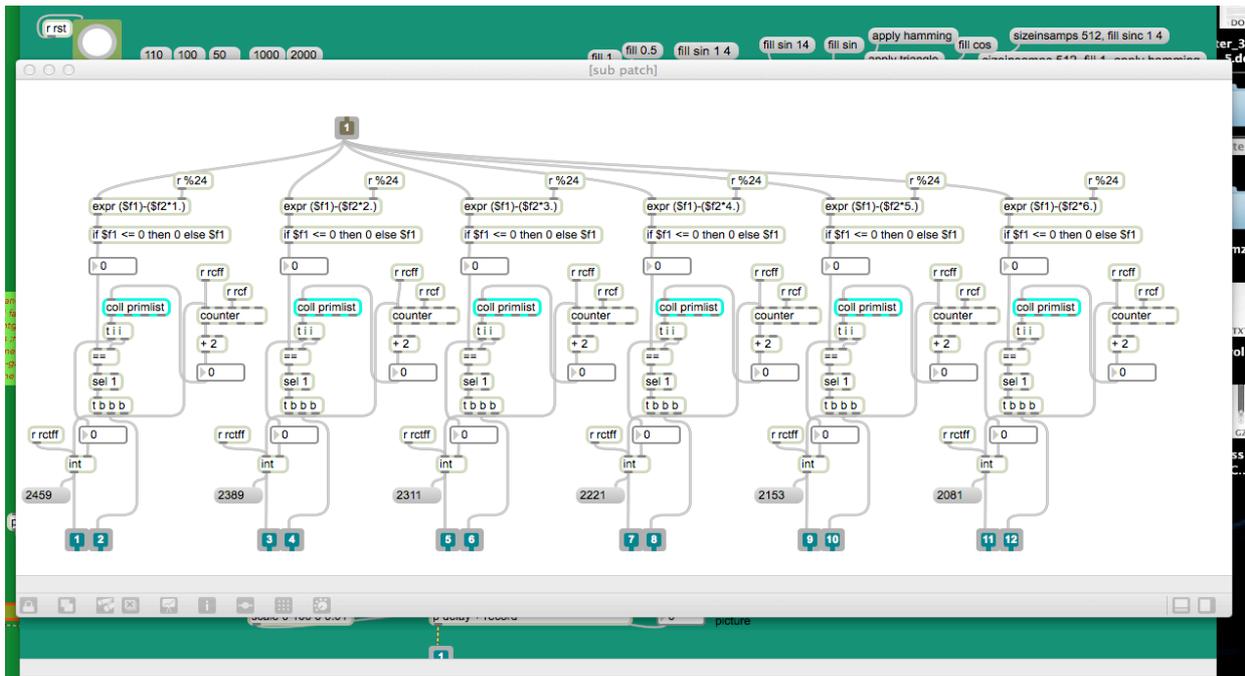


Abb.23 subpatch1 canon

Die jeweils identischen Subpatches *p1-p6* enthalten, wiederum sechsfach die in *coll primlist* befindliche Primzahlreihe. Der zentrale *counter* zählt konsekutiv, das jeweilige *expr*-Objekt multipliziert seine Stimmnummer mit dem Modulo-Wert (für die 2. Stimme: 2×77) und setzt das Produkt als negativen Wert, von dem an das Zählen beginnt. Das *if*-Objekt filtert alle Werte unter 0 aus, so dass *coll* seinen ersten Impuls ab erreichter interner 1 erhält (die 2. Stimme setzt 1 wenn *counter* 155 erreicht).

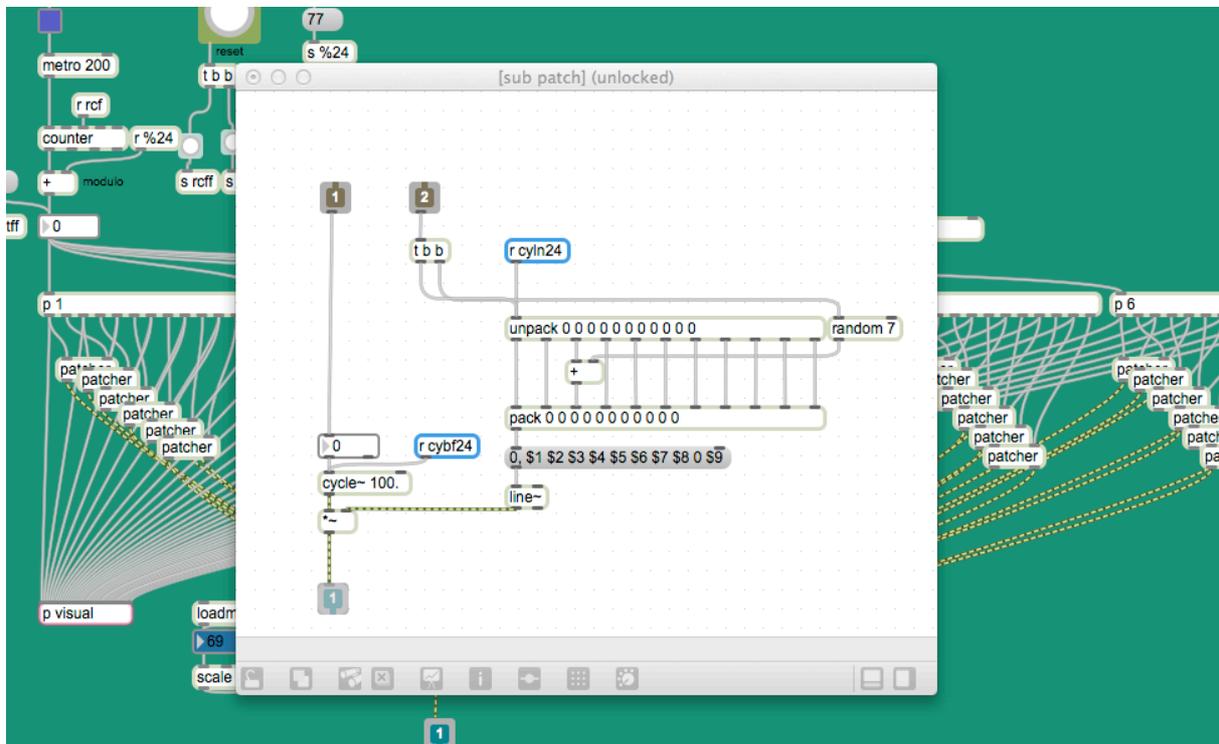


Abb.24 subpatch2 canon

In *patcher* wird die jeweilige Primzahl in eine Sinuswelle umgewandelt und über *line~* mit einer Hüllkurve versehen, deren Daten für alle 36 *patchers* gleich sind. *Random7* variiert

jedes Decay um max. 7 ms, um eine minimale Abweichung im Klangverlauf der Akkordtöne zu erreichen und damit die Durchhörbarkeit etwas zu erleichtern.

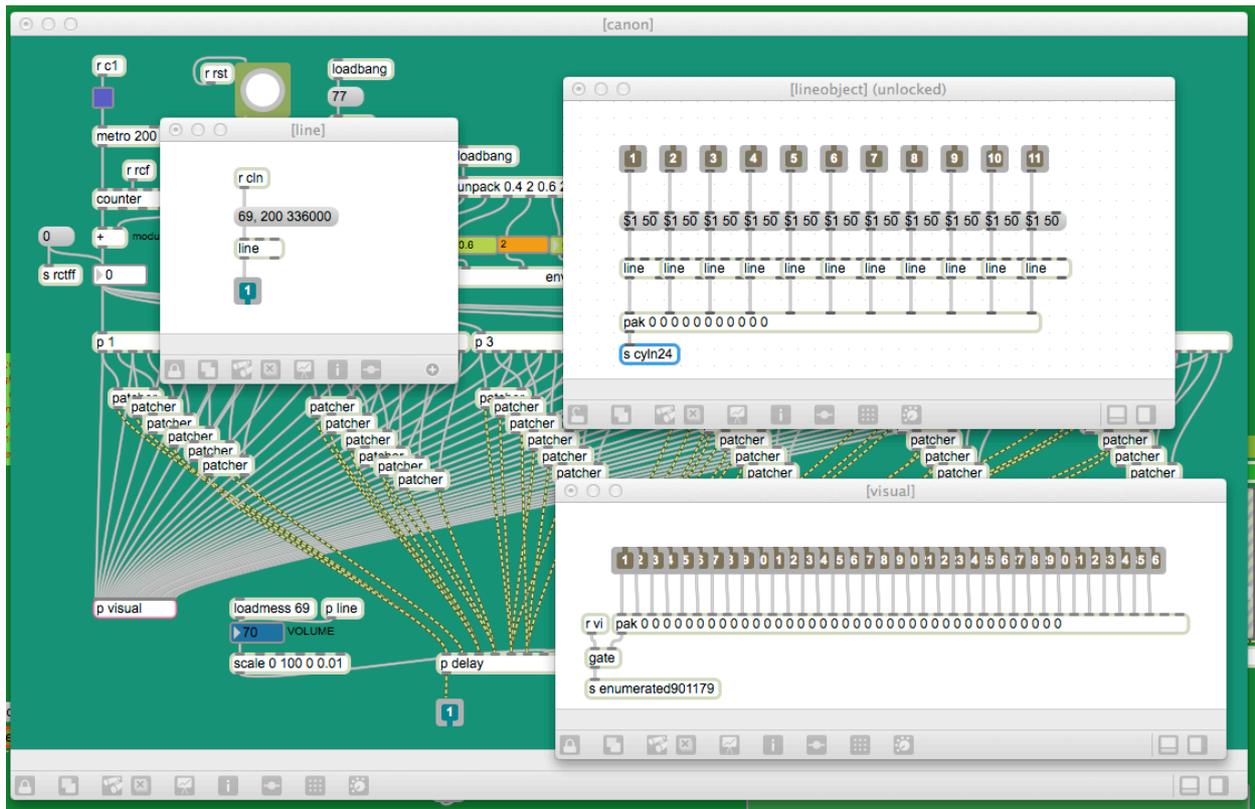


Abb.25 subpatches line, lineobject, und visual

P lineobject bündelt die einzelnen Zahlenfelder der HüllkurvenEinstellung zu einer Liste, die an *patcher* gesendet wird. Die zusätzlichen *line*-Objekte verhindern Knackgeräusche beim Verstellen der Hüllkurvenparameter.

P line generiert ein *Crescendo* vom Startzeitpunkt an über 5,6 Minuten.

P visual fasst sämtliche Primzahlen, die aus den *coll*-Objekten aktuell ausgegeben werden, zu einer Liste zusammen und schickt diese zum entsprechenden *sign2sound*.

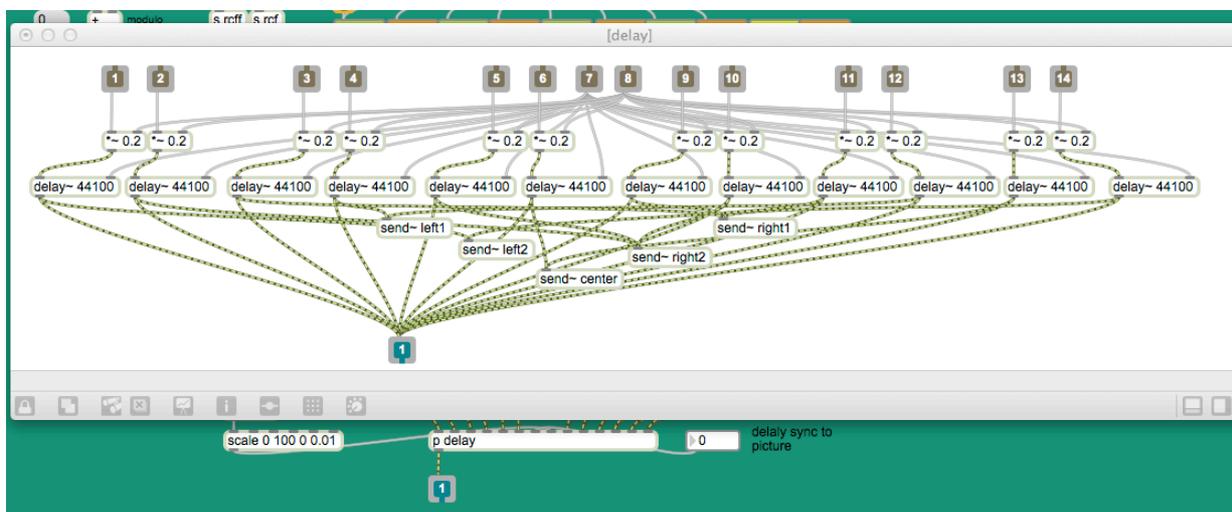


Abb.26 subpatch delay

Delay verzögert, bei Bedarf von außen regelbar, die Weitergabe der Audio-Daten, um eine

gegebenenfalls eintretende Asynchronizität mit den Bilddaten auszugleichen. *Outlet1* schickt alle Audio-Daten zum *meter~*-Objekt in *canon*.

4.9 subpatch lightnings

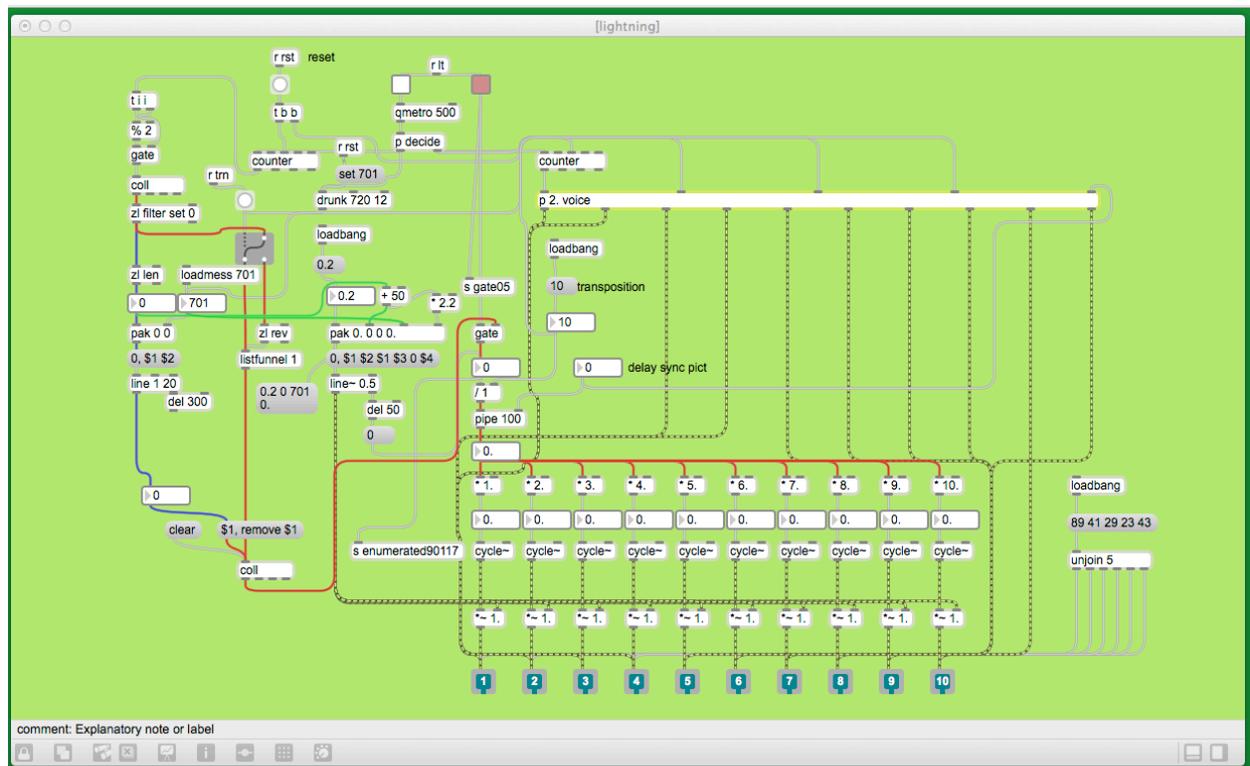


Abb.27 lightnings

In *Lightnings* geschieht das sehr schnelle Auslesen der Listen mit Primzahlen, aus den horizontalen Spalten der Ulam-Spirale, bzw. in *p2.voice*, aus den Diagonalen. Über *r It* erhält dieses Patch seine Start- und Stop-Befehle. *Qmetro500* liefert 2 Ticks pro Sekunde, die *decide* verschieden auf die *counter* und damit auf die beiden Stimmen, verteilt.

Aus *coll* (oben links) werden die Primreihen jeweils als Liste ausgesendet. Nachfolgend werden alle Nullen herausgefiltert, die Länge der verbleibenden Liste ermittelt und diese anschließend an die *cycle~*-Objektkaskade geschickt. Der Längenwert dient zur Anpassung der Durchlaufgeschwindigkeit. Eine lange Liste erzeugt damit kürzere Einzelwerte, bzw. -töne, eine kurze hingegen längere.

Zl rev und *listfunnel 1* kehren bei entsprechender Stellung des *gswitch2*-Schalters oberhalb, die Leserichtung der Liste, damit die Richtung der Tonfolge, um. *Drunk720 12* variiert zusätzlich die Lesegeschwindigkeit.

Die roten Linien zeigen den Verlauf der Daten zu den Klangerzeugern, die blaue die zeitliche Steuerung. Im Verlauf der blauen Linie erzeugt das *line~*-Objekt Indexzahlen, passend zur Listenlänge für das untere *coll*-Objekt, die dort mit den in entsprechender Reihenfolge eintreffenden Primzahlen verbunden und eingeschrieben werden. Unmittelbar nach dem sofortigen Wiederauslesen werden die Daten gelöscht. Die grüne Linie zeigt den Weg des

Betrags der Listengröße als Berechnungsgrundlage für die Verlaufsduer der Hüllkurve. In der Mitte des Patches erfolgt in einem *divide*-Objekt die Transposition der eigentlich nicht mehr hörbaren Frequenzen auf ein Zehntel ihres Wertes. Jede Primzahl wird gleichzeitig an alle zehn *cycle~*-Objekte geschickt. Durch Multiplikation werden so der Grund- und neun Obertöne erzeugt, die durch die *gain~*-Objekte im main-patch angesteuert werden. Die Voreinstellung liefert die Liste *unjoin5*. *Pipe100* verzögert bei Bedarf wiederum den Ausgang der Audiodaten zur Synchronisation mit der bildlichen Darstellung.



Abb.28 subpatch decide

P decide erzeugt per Zufallsfunktion eine 0 oder 1, die in *gate2* den rechten oder linken Ausgang öffnen und dadurch den Tick von *Qmetro500* auf den jeweiligen *counter* verteilen.

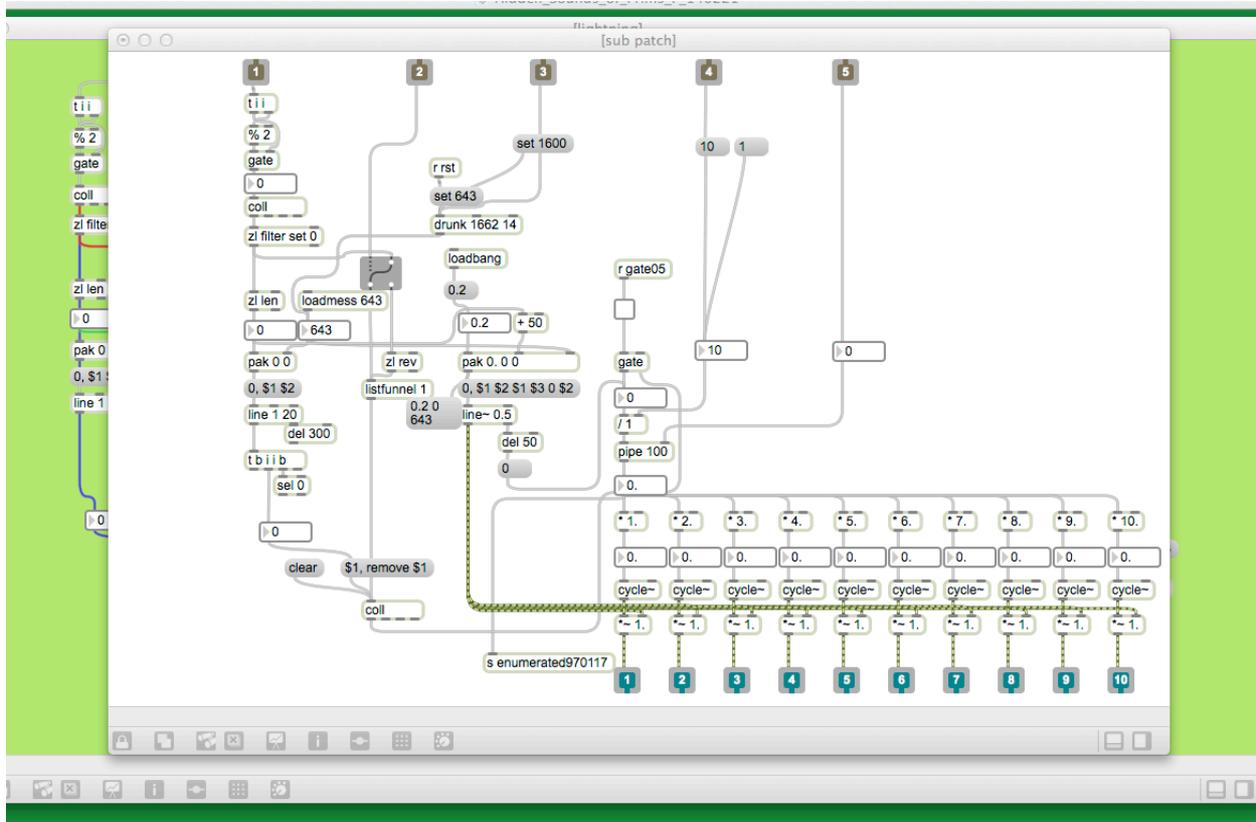


Abb.29 subpatch 2.voice

P 2.voice ist in der Funktionsweise identisch mit *lightnings*.

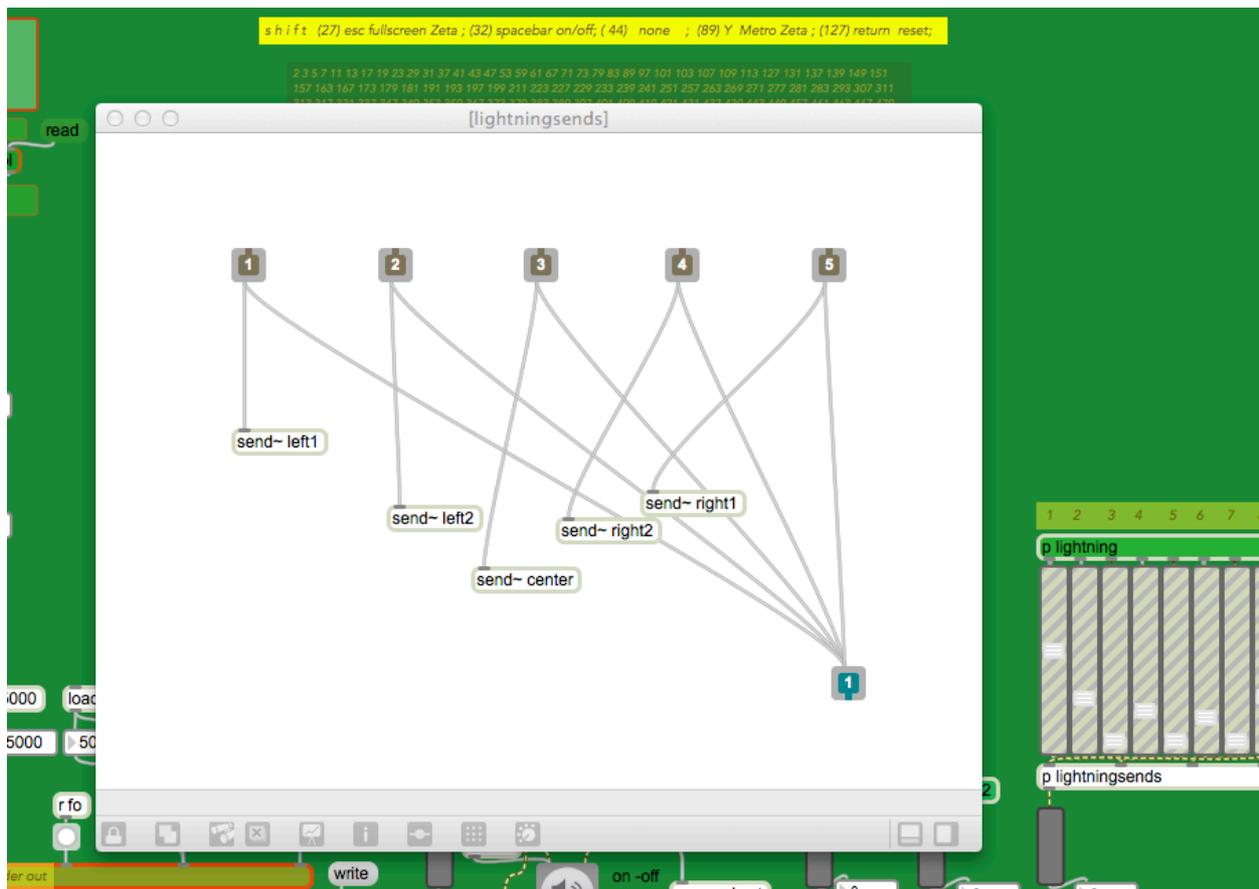


Abb.30 lightningsends

P *lightningsends* verteilt die Audiosignale auf 5 Ausgänge sowie *meter~* zur Kontrolle.

5. Schlussbemerkung

Welchen praktischen Wert hat die Sonifikation von Primzahlen? Lassen die Klänge Rückschlüsse auf Musterfolgen zu? Dies kann man ohne weiteres bejahen.

Die Primzahlen, stellvertretend für jede Art von numerischen Daten, können in der hier beschriebenen Weise in großer Menge und sehr schnell auf ein ihnen zugewiesenes Attribut überprüft werden.

Ob Sonifikation zur Frage nach der Voraussagbarkeit und der Struktur von Primzahlen einen Beitrag leisten kann, bleibt meines Erachtens ungewiss.

Im Rahmen dieser Arbeit erfolgte die Suche und Darstellung der Muster durch Sonifikation unter ästhetischen Gesichtspunkten. Eine wissenschaftliche Aussage treffen zu wollen ist mir nicht möglich. Vielleicht vermag diese Arbeit einen emotional ansprechenden Eindruck von der Struktur dieser Folge zu vermitteln. Denn es bedarf wohl immer auch Inspiration um wissenschaftlichen Fragestellungen eine weitere Erkenntnis zufügen zu können. Sonifikation eröffnet einen ergänzenden, vielleicht der Inspiration helfenden Kanal der Wahrnehmung dieses letztlich abstrakt bleibenden Phänomens der Primzahlen.

6. Quellennachweis

Literatur

- Emmer, M. (2010). The Idea of Space in Art, Technology and Mathematics. In V. Capecchi et al. (Hg.) *Applications of Mathematics in Models, Artificial Networks and Arts* (S.505-518). Heidelberg: Springer
- Dombois, F. (2008). Sonifikation. In: P. M. Meyer (Hg.), *Acoustic turn* (S.91-100). München: Wilhelm Fink Verlag
- Gardner, M. (1964) Mathematical Games. *Scientific American Vol. 210* (3), 122- 131
- Hermann, T. (2008). *Taxonomy and Definitions for Sonification and Auditory Display*. Zugriff am 23.02.2014 unter <http://pub.uni-bielefeld.de/publication/2017235>
- Reimer, M. (2010). *Der Klang als Formel*. München: Oldenbourg Wissenschaftsverlag
- du Sautoy, M. (2011) *Die Musik der Primzahlen*, München: dtv
- Schumann, H., Müller, W. (2000) *Visualisierung - Grundlagen und allgemeine Methoden*. Berlin: Springer-Verlag,

Film

- Aronoffsky, D. (1998). *Pi*. USA: Harvest Filmworks.

Abbildungen

- Abb. 1 - Matroids Matheplanet. Zugriff am 22.02.2012 unter <http://www.matheplanet.com/default3.html?call=article.php?sid=669&ref=http%3A%2F%2Fwww.google.de%2Fimgres%3Fclient%3Dsafari%26sa%3DX%26rls%3Den%26biw%3D1204%26bih%3D804%26tbnid%3D5ZIWbRmp6qdB-M%253A,%202>

Alle übrigen Abbildungen stammen vom Verfasser.