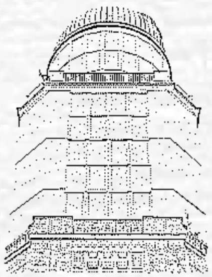
Übung für LA Physik

Astronomische Koordinatensysteme

Sergei A.Klioner

Lohrmann-Observatorium, Technische Universität Dresden



Kartesische und sphärische Koordinaten

Kartesisches Koordinatensystem und sphärische Koordinaten:

$$\boldsymbol{S} \quad \rightarrow \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \qquad\qquad \boldsymbol{S} \quad \rightarrow \quad (\boldsymbol{r}, \mu, \nu)$$

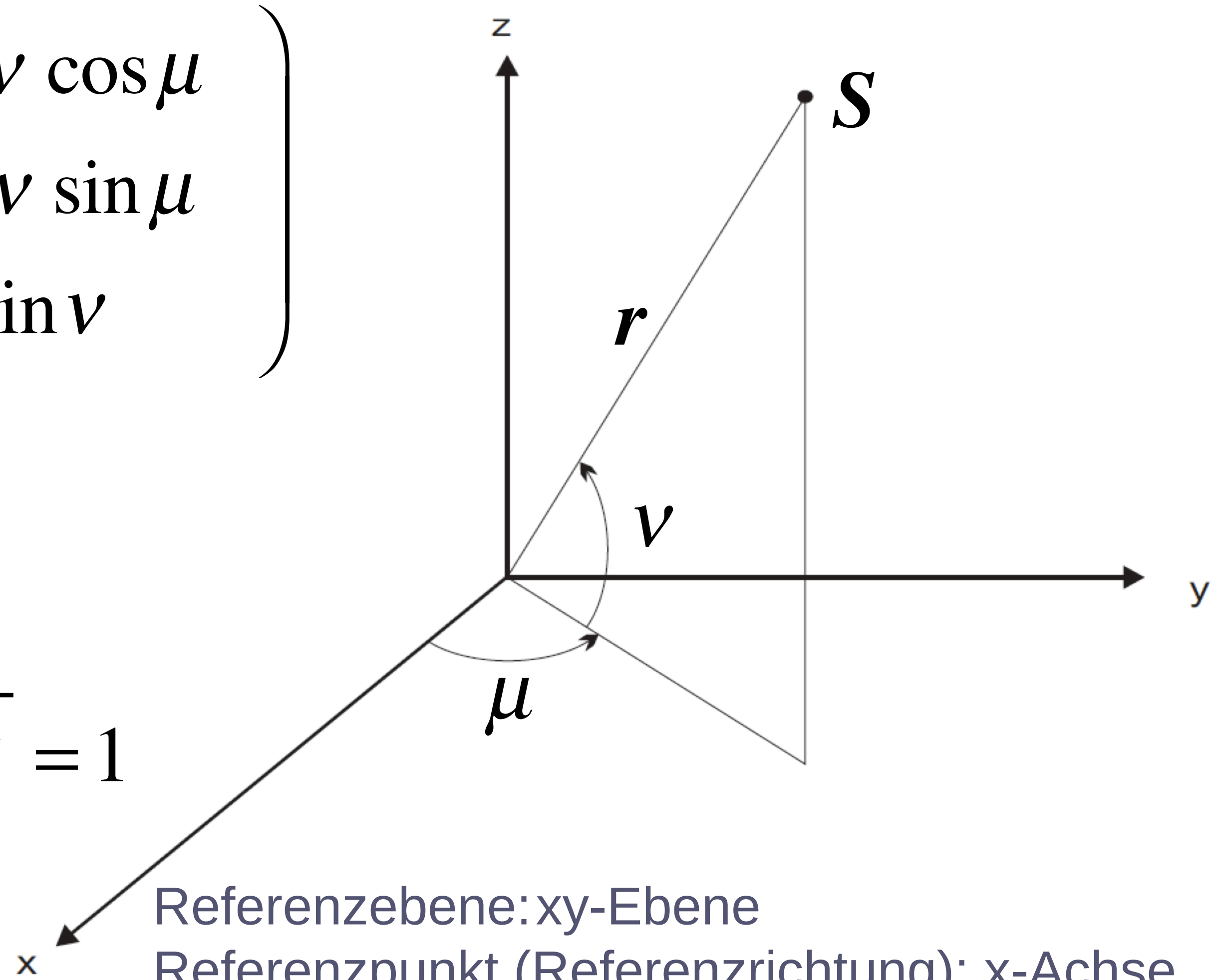
$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \boldsymbol{r} \begin{pmatrix} \cos\nu \cos\mu \\ \cos\nu \sin\mu \\ \sin\nu \end{pmatrix}$$

$$0 \leq \mu \leq 360^\circ$$

$$-90^\circ \leq \nu \leq 90^\circ$$

für Einheitsvektoren:

$$\boldsymbol{r} = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2} = 1$$



Referenzebene: xy-Ebene

Referenzpunkt (Referenzrichtung): x-Achse

Winkel in der Astronomie

1. Grad, Bogenminuten, Bogensekunden

Vollkreis: 360°

Ein Grad ist 60 Bogenminuten $1^\circ = 60'$

Eine Bogenminute ist 60 Bogensekunden $1' = 60''$

Man schreibt, z.B.: $23^\circ 33' 25.46''$

2. Winkel in Zeiteinheiten: $24^h = 360^\circ \quad \Rightarrow \quad 1^h = 15^\circ$

Vollkreis: 24^h

Eine Stunde ist 60 Minuten $1^h = 60^m$

Eine Minute ist 60 Sekunden $1^m = 60^s$

Man schreibt, z.B.: $11^h 33^m 34.56^s$ oder $11\mathrm{h}\,33\mathrm{m}\,34.56\mathrm{s}$

Horizont-Koordinaten

Horizont-Koordinaten

Horizont-Koordinaten: $S \rightarrow (A,a)$ oder $S \rightarrow (A,z)$

Referenzebene: Himmelshorizont
Referenzpunkt: Norden

Azimut: von Norden nach Osten

$$0 \le A \le 360^\circ$$

Höhe (über dem Horizont):

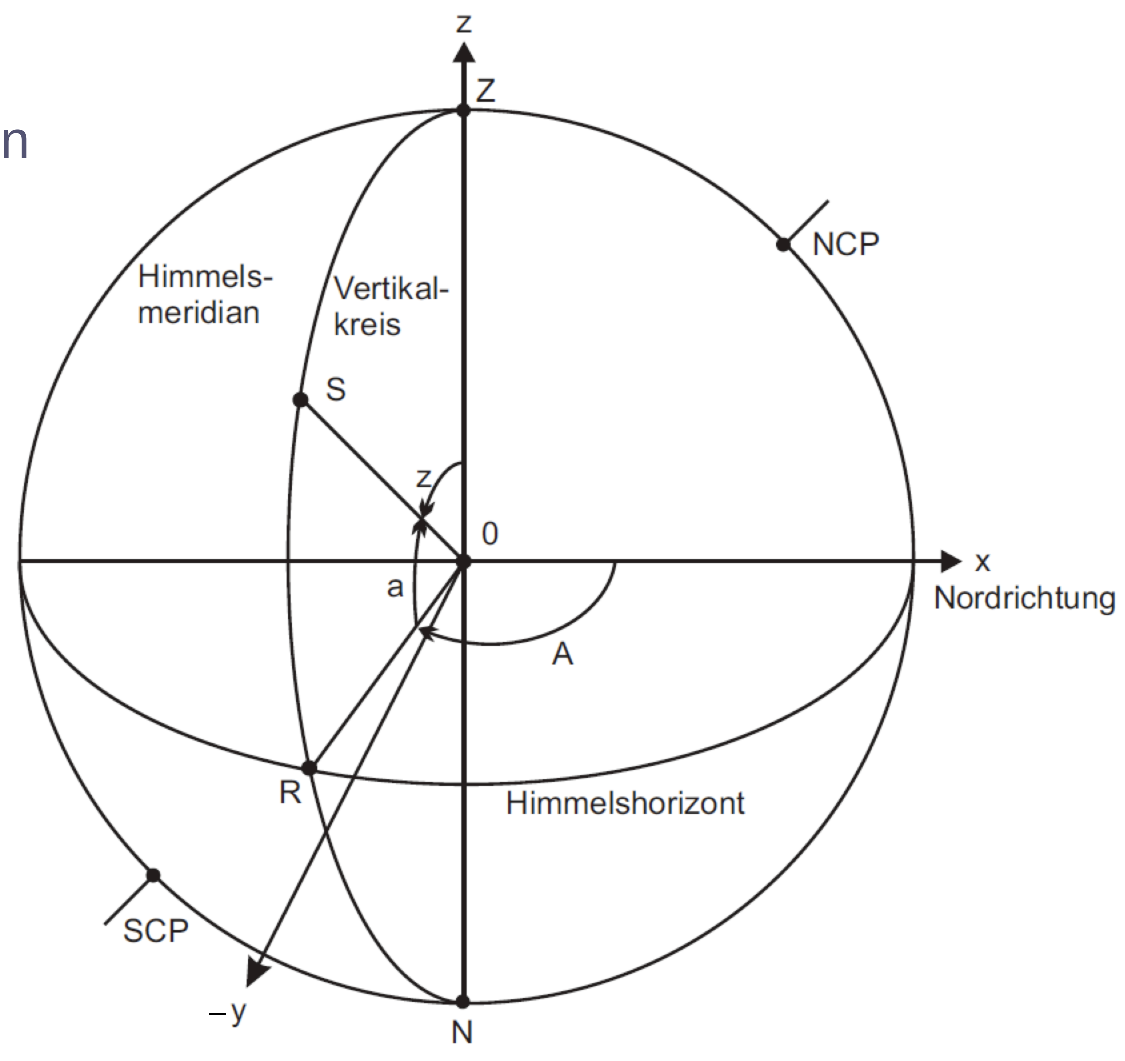
$$-90^\circ \le a \le 90^\circ$$

oder

Zenitdistanz:

$$z = 90^\circ - a$$

$$0 \le z \le 180^\circ$$



Zwei Definitionen des Azimuts

Horizont-Koordinaten: $S \rightarrow (A, a)$ oder $S \rightarrow (A, z)$

Referenzebene: Himmelshorizont
Referenzpunkt: Norden

Azimut:

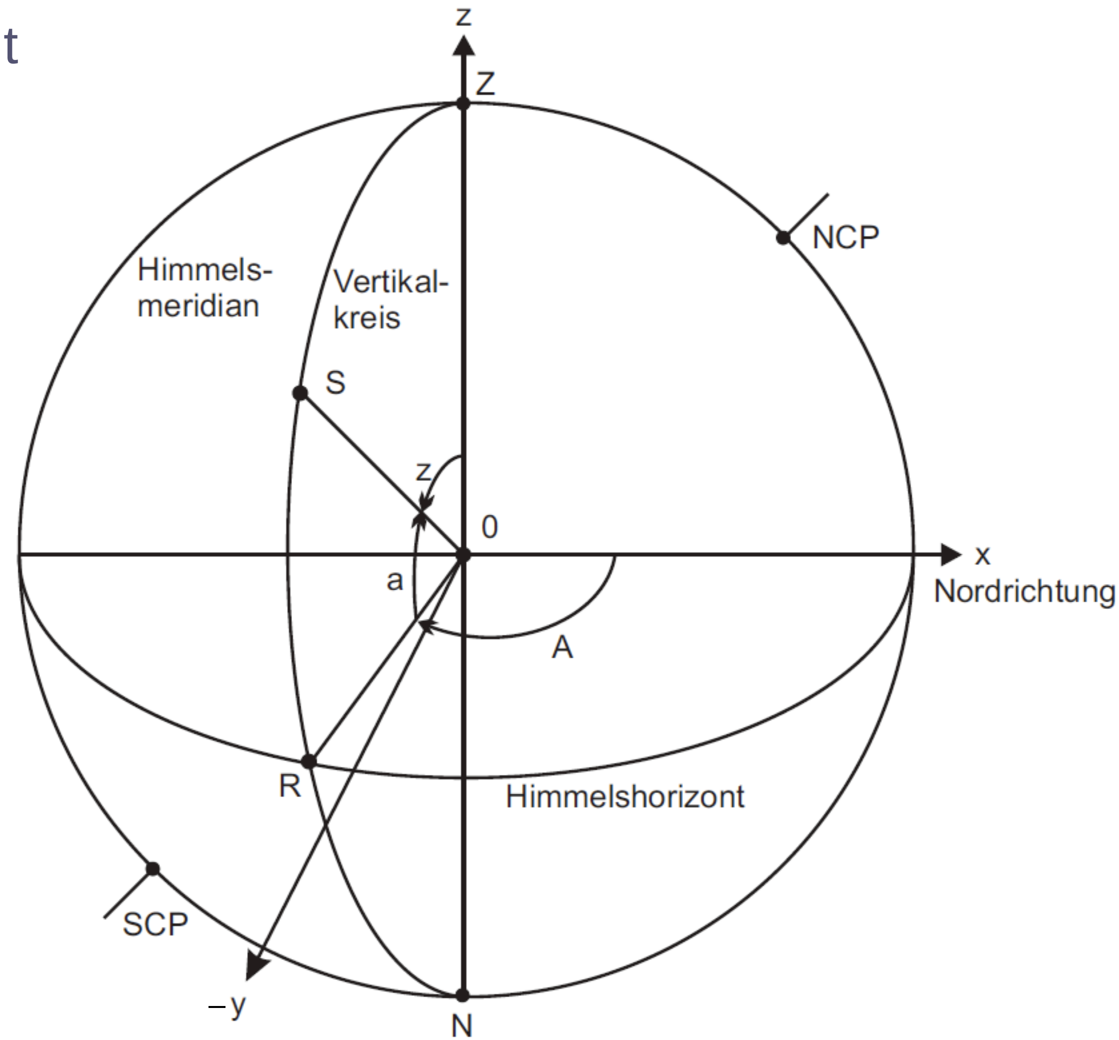
„geodätische“ Definition
von Norden nach Osten

$$0 \leq A \leq 360^{\circ}$$

„astronomische“ Definition
von Süden nach Westen

$$0 \leq A_a \leq 360^{\circ}$$

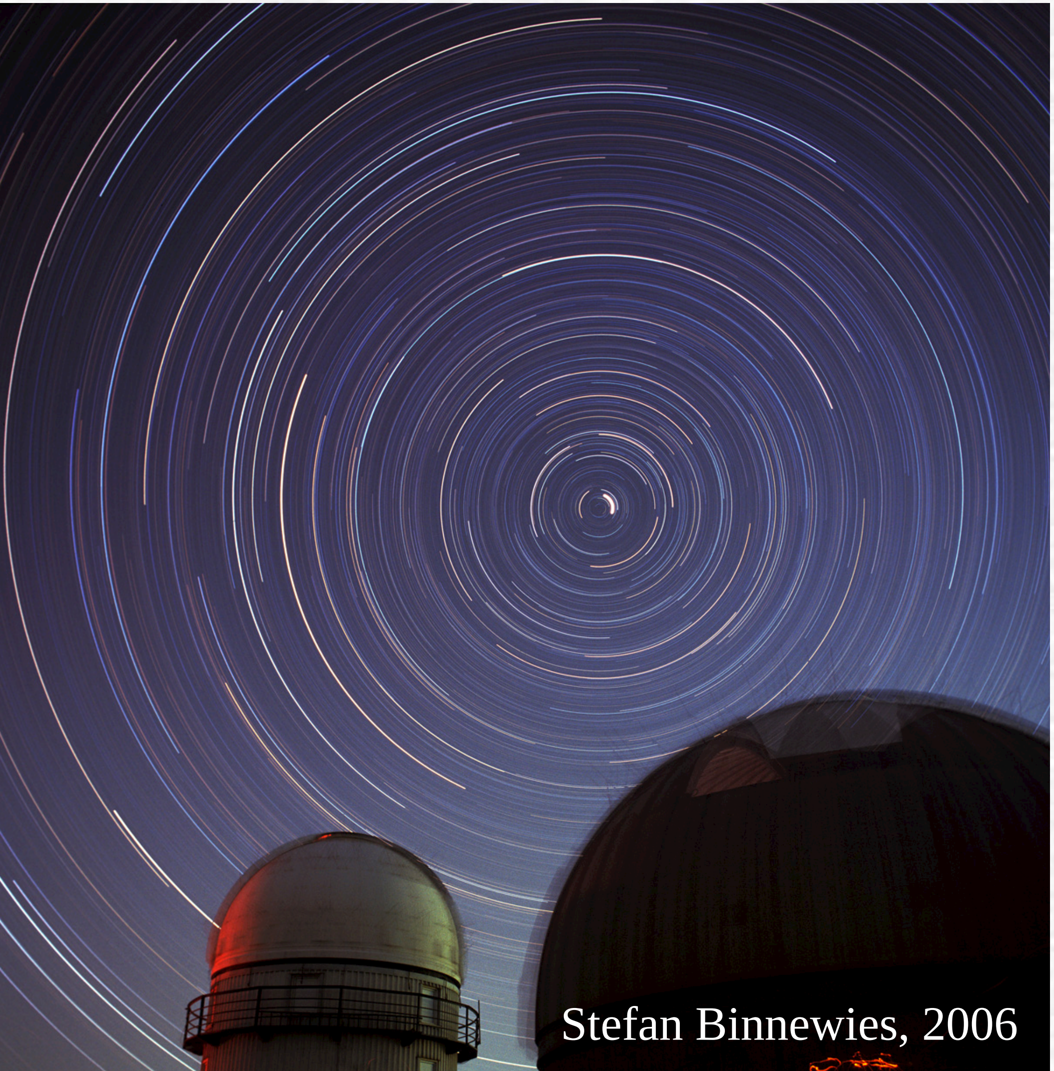
$$\boxed{A_a = A + 180^{\circ}}$$



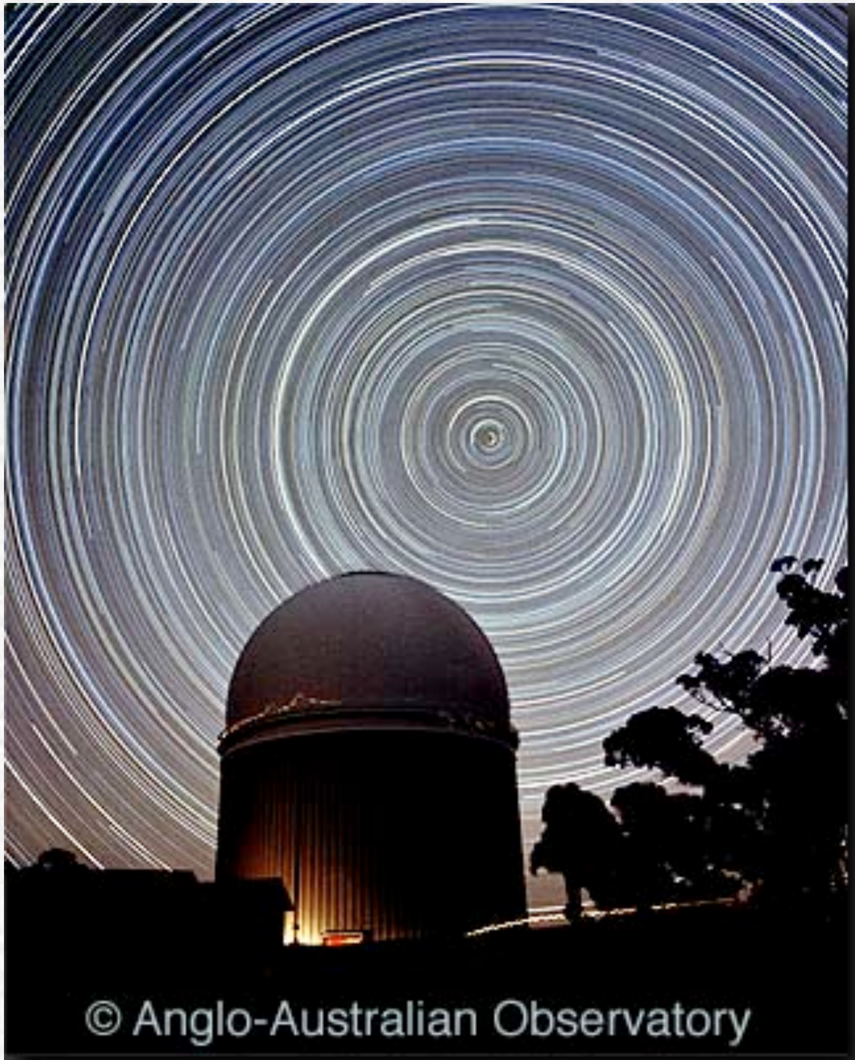
Äquatoriale Koordinaten

In diesen Koordinaten bewegen sich die Sterne

Norden:

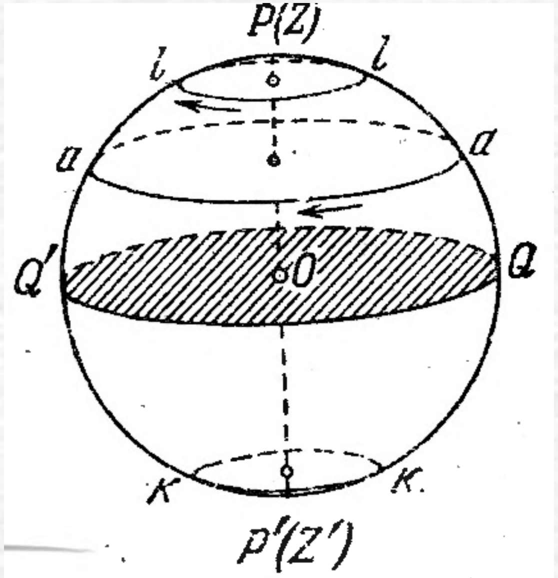


Süden:

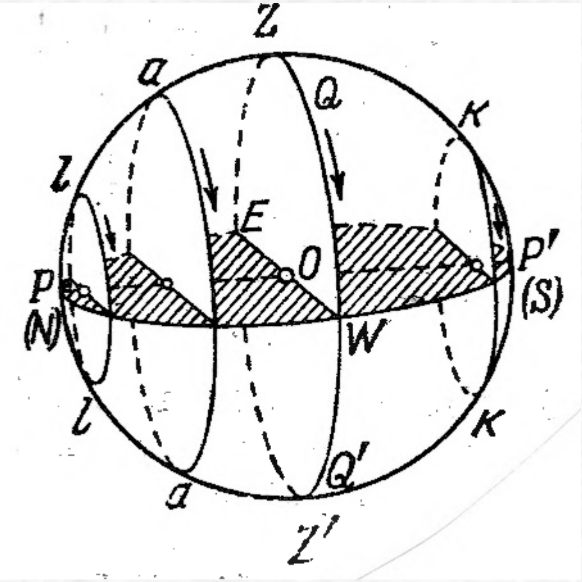


Die Sterne bewegen sich...

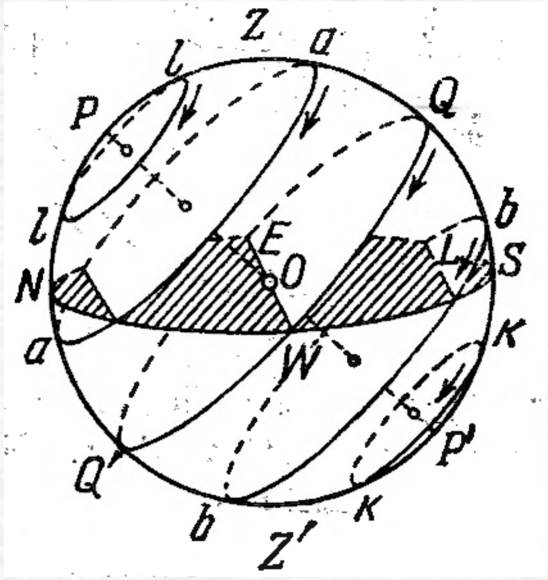
Nordpol:



Am Äquator:



In der nördlichen Halbkugel:



Äquatoriales Koordinatensystem: Stundenwinkel

Das Äquatorsystem der ersten Art: $\boldsymbol{S} \quad \rightarrow \quad (\boldsymbol{H}_a, \delta)$

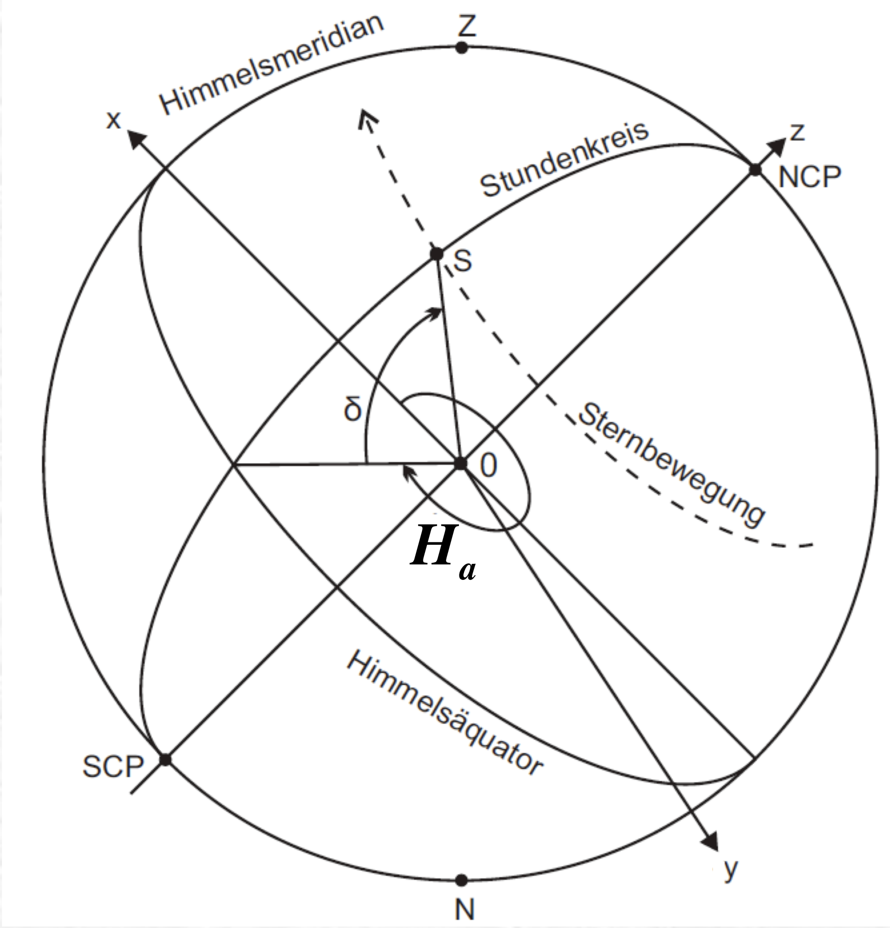
Referenzebene: Himmelsäquator
Referenzpunkt: Süden

Stundenwinkel:
in der Himmelsäquatorebene
von Süden
nach Westen

$$0 \leq \boldsymbol{H}_a \leq 360^\circ$$

Deklination:
vom Himmelsäquator
positiv nach Norden

$$-90^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$$



Äquatoriales Koordinatensystem: Rektaszension

Das Äquatorsystem der zweiten Art: $S \quad \rightarrow \quad (\alpha, \delta)$

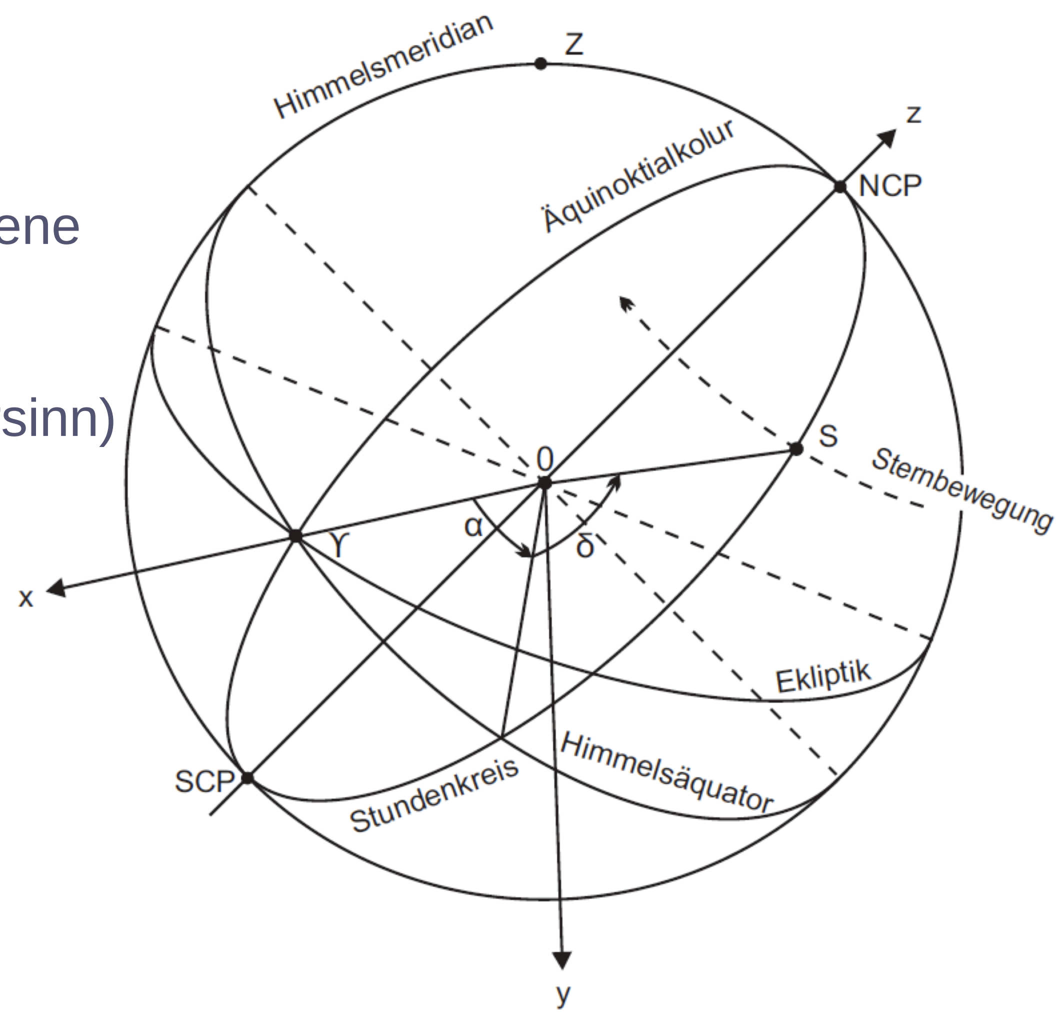
Referenzebene: Himmelsäquator
Referenzpunkt: Frühlingspunkt

Rektaszension:
in der Himmelsäquatorebene
vom Frühlingspunkt
nach Osten
(entgegen dem Uhrzeigersinn)

$$0 \leq \alpha \leq 360^\circ$$

Deklination (wie vorher):
vom Himmelsäquator
positiv nach Norden

$$-90^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$$

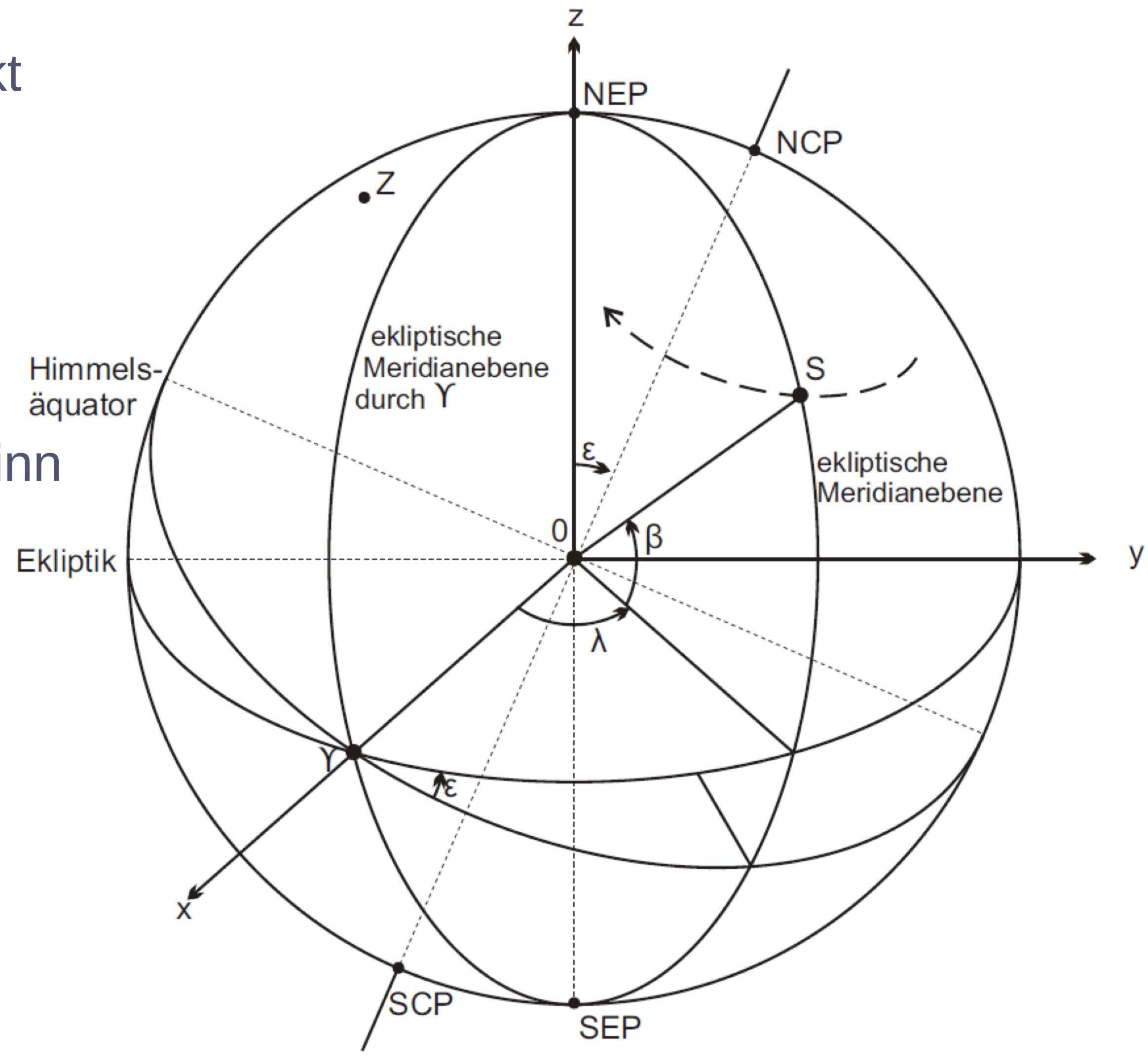


Andere Koordinatensysteme

Beispiel: Ekliptisches Koordinatensystem

Ekliptische Koordinaten: $\boldsymbol{S} \rightarrow (\lambda, \beta)$

Referenzebene: Ekliptik
Referenzpunkt: Frühlingspunkt



Ekliptische Länge:
in der Ekliptikebene
vom Frühlingspunkt
entgegen dem Uhrzeigersinn

$$0 \leq \lambda \leq 360^\circ$$

Ekliptische Breite:

$$-90^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$$

Astronomische Koordinatensysteme: Überblick

System	Reference Plane		Parameters Measured from the Reference Plane	
	Primary	Secondary	Primary	Secondary
Horizon	Celestial horizon	Celestial meridian (half containing north pole)	Altitude $-90° \leq a \leq +90°$ (+ toward zenith)	Azimuth $0° \leq A \leq 360°$ (+ east)
Hour angle	Celestial equator	Hour circle of observer's zenith (half containing zenith)	Declination $-90° \leq \delta \leq +90°$ (+ north)	Hour angle $0^h \leq h \leq 24^h$ $0° \leq h \leq 360°$ (+ west)
Right ascension	Celestial equator	Equinoctial colure (half containing vernal equinox)	Declination $-90° \leq \delta \leq +90°$ (+ north)	Right ascension $0^h \leq \alpha \leq 24^h$ $0° \leq \alpha \leq 360°$ (+east)
Ecliptic	Ecliptic	Ecliptic meridian of the equinox (half containing vernal equinox)	(Ecliptic) Latitude $-90° \leq \beta \leq +90°$ (+ north)	(Ecliptic) Longitude $0° \leq \lambda \leq 360°$ (+ east)

Die Transformationen zwischen den Koordinaten

Rektaszension und Stundenwinkel

Transformation: $(\alpha,\delta)\leftrightarrow(H_a,\delta)$

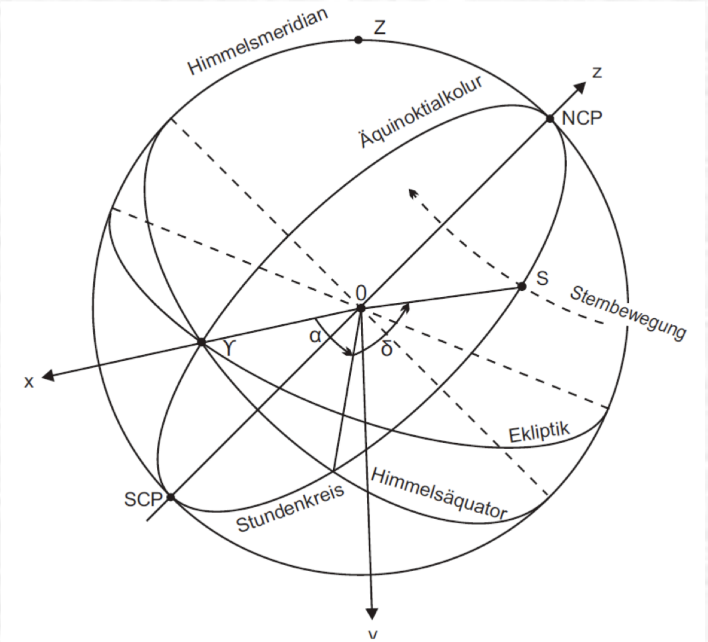
$$H_a = \theta - \alpha$$

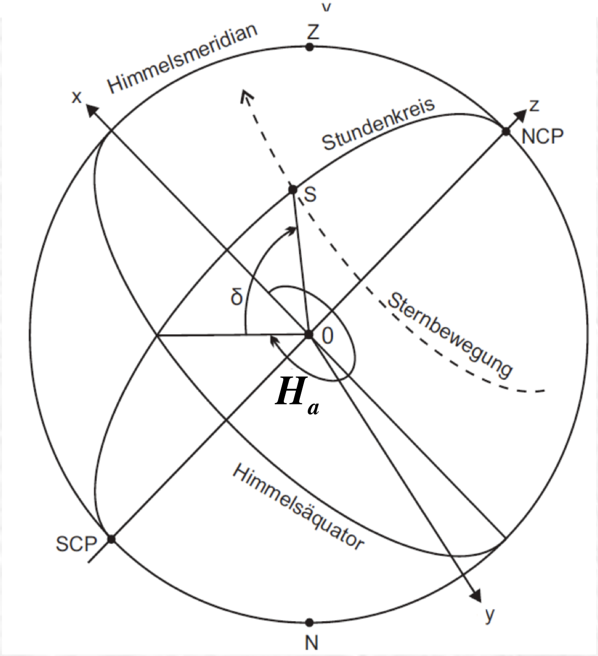
θ ist die lokale siderische Zeit
am Beobachtungsort:

(lokale Sternzeit)

θ ist der Stundenwinkel des
Frühlingspunktes γ

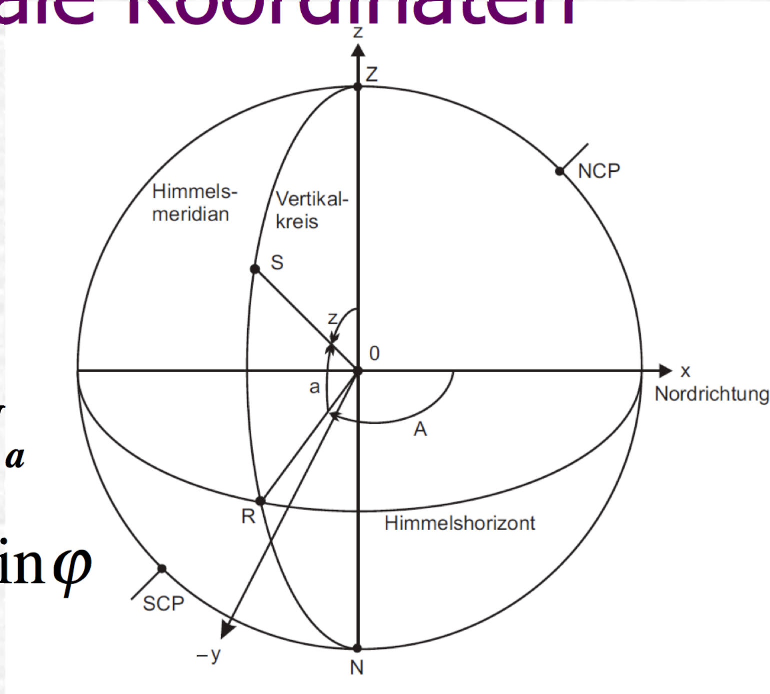
θ ist die Rektaszension α der Gestirne,
die gerade im Süden stehen $H_a = 0$





Horizontale und äquatoriale Koordinaten

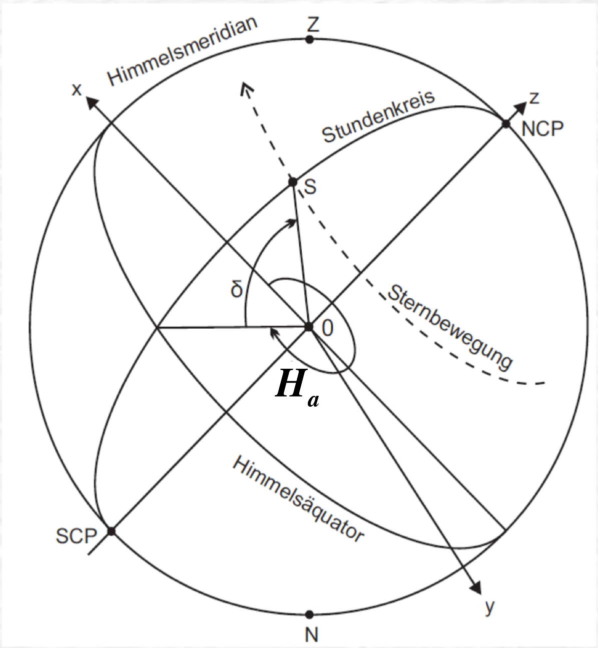
Transformation: $(A_a, a) \leftrightarrow (H_a, \delta)$



Sphärische Trigonometrie oder räumliche Drehung:

$$\sin a = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H_a$$
$$\cos a \sin A_a = \cos\delta \sin H_a$$
$$\cos a \cos A_a = -\sin\delta \cos\varphi + \cos\delta \cos H_a \sin\varphi$$

Zenitdistanz: $z = 90^\circ - a$



φ ist die geographische Breite:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \varphi > 0 & \text{nördlich} \\ \varphi < 0 & \text{südlich} \end{array}}$$

Astronomische Zeitskalen

Astronomische Zeitskalen

A) Sternzeit – gemessen durch die scheinbare Bewegung der Sterne

θ_0 – Greenwich Sternzeit: Stundenwinkel des Frühlingspunktes in Greenwich

$\theta = \theta_0 - \lambda$ - Ortssternzeit

„mittele“ Sternzeit – „wahre“ Sternzeit:
Periodische Schwankungen der Erdrotation (Nutation)
<1s

B) Sonnenzeit – gemessen durch die scheinbare Bewegung der Sonne

Stundenwinkel der Sonne + 12h

„mittlere“ Sonnenzeit– „wahre“ Sonnenzeit:
die Bewegung der Sonne ist nicht gleichmäßig
(z.B., elliptische Bahn der Erde)
Zeitgleichung: <15m

Sonnenzeit und Sternzeit

Ein Sterntag: 23h 56m 04s
Ein Sonnentag: 24h

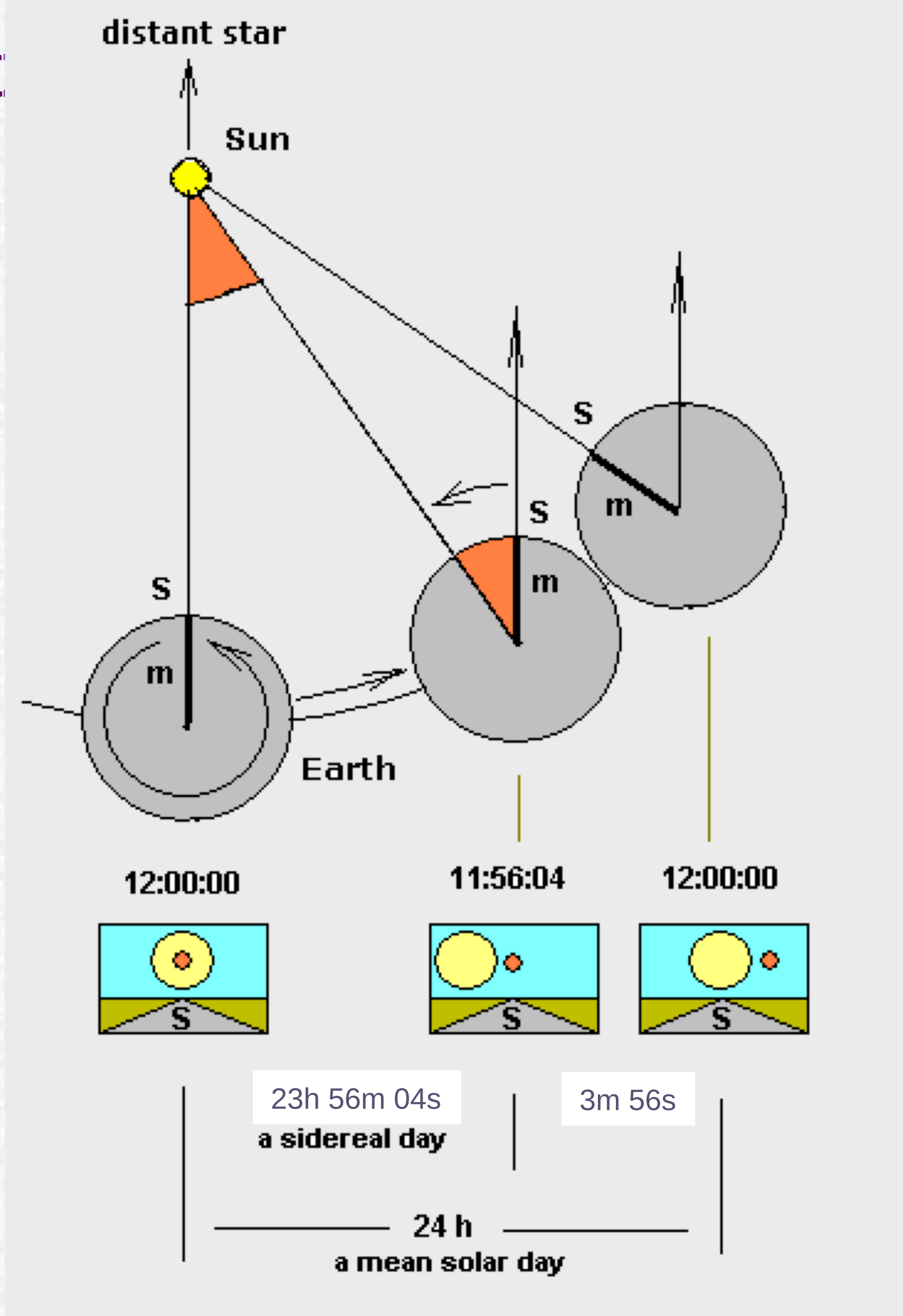


Bild: Wikipedia

Astronomische Zeitskalen

C) Weltzeit UTC – Mittlere Sonnenzeit in Greenwich

D) Unsere Uhren zeigen:

UTC+ Zeitzone + Sommer/Winter Zeitumstellung

Zeitzone in Deutschland: +1h

Julianisches Datum

Julianisches Datum: Definition

Das Julianische Datum (JD) ist eine kontinuierliche Zeitzählung, die jedem beliebigen Zeitpunkt eine eindeutige Gleitkommazahl, mit der Anzahl der verflossenen Tage als ganzzahligen Anteil und dem verflossenen Tagesbruchteil in den Nachkommastellen, zuordnet.

JD=0 entspricht Montag, dem 1. Januar 4713 vor Chr., 12:00.

- frei von Unregelmäßigkeiten (Schalttagen, unterschiedlich langen Monaten usw.).

- wird daher in der Astronomie zur Beschreibung zeitabhängiger Größen verwendet, da mit JD sehr leicht Zeitdifferenzen berechnet werden können.

- Julianischer Tag beginnt am **Mittag** (bei UTC in Greenwich)

Julianisches Datum: Der Meeus Algorithmus

Eingabe: Jahr, Monat, Tag, Stunde, Minute, Sekunde

1. wenn Monat > 2 dann Y = Jahr, M = Monat
   sonst Y = Jahr-1, M = Monat+12
2. D = Tag

3. H = Stunde/24 + Minute/1440 + Sekunde/86400

4. Wenn ein Datum zwischen dem 04.10.1582 und dem 15.10.1582 angegeben wird, ist es ein Fehler:
   Auf den 04.10.1582 (Julianischer Kalender) folgte unmittelbar der 15.10.1582 (Gregorianischer Kalender).

Julianisches Datum: Der Meeus Algorithmus

5. wenn >= 15.10.1582, dann Gregorianischer Kalender:

   A = int(Y/100), B = 2 - A + int(A/4)

6. wenn <= 04.10.1582, dann Julianischer Kalender:

   B = 0

7. JD = int(365.25*(Y+4716)) + int(30.6001*(M+1)) +
   D + H + B – 1524.5

Die Funktion “int“ schneidet die Nachkommastellen einer Zahl ab.
Der Algorithmus gilt für positives JD.

Ausgabe: JD

Die Berechnung

Sternzeit in Greenwich

1. Eine fertige Formel für die Sternzeit in Greenwich um Mitternacht:

$$\theta_0(0^h\ \boldsymbol{UTC}) = 6^h 41^m 50.54841^s + 8640184.812866^s\ \boldsymbol{T} + 0.093104^s\ \boldsymbol{T}^2 - 0.0000062^s\ \boldsymbol{T}^3$$

T ist die Zeit von 1 Jan 2000, 12h UTC (*JD*=2451445.0) in Jahrhunderten:

$$\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{JD} - 2451545.0}{36525}$$

Hier soll „JD“ nur für die Mitternacht benutzt werden!

2. Umrechnung Sonnenzeitintervall nach Sternzeitintervall

$$\theta_0(\boldsymbol{t}^h\ \boldsymbol{UTC}) = \theta_0(0^h\ \boldsymbol{UTC}) + \boldsymbol{t}\, 1.00273790395$$

t ist die Zeit vom 0h UTC in Stunden

Stundenwinkel am Beobachtungsort

3. $$\boldsymbol{H_a} = \theta - \alpha = \theta_0 - \lambda - \alpha$$

λ ist die geographische Länge: $\boxed{\begin{array}{ll} \lambda > 0 & \text{westlich von Greenwich} \\ \lambda < 0 & \text{östlich von Greenwich} \end{array}}$

α ist die Rektaszension des Sternes

$\theta_0 = \theta_0(\boldsymbol{t^h\ UTC})$ ist die Sternzeit in Greenwich

Horizontale und äquatoriale Koordinaten

4. **Transformation:** $(A_a, a) \leftrightarrow (H_a, \delta)$

$$\sin a = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H_a$$
$$\cos a \sin A_a = \cos\delta \sin H_a$$
$$\cos a \cos A_a = -\sin\delta \cos\varphi + \cos\delta \cos H_a \sin\varphi$$

φ ist die geographische Breite:
$$\boxed{\begin{array}{ll} \varphi > 0 & \text{nördlich} \\ \varphi < 0 & \text{südlich} \end{array}}$$

δ ist die Deklination des Sternes

Zusammenfassung des Algorithmus

1. „unsere Zeit“ $\rightarrow$ UTC

2. JD für „heute“ 0^h (Nicht für die Beobachtungszeit!)

3. Sternzeit in Greenwich für ***0^h^ UTC***: JD $\rightarrow$ $\theta_0(0^h\ \boldsymbol{UTC})$

4. Sternzeit in Greenwich für ***t^h^ UTC***:

$$\theta_0(\boldsymbol{t}^h\ \boldsymbol{UTC}) = \theta_0(0^h\ \boldsymbol{UTC}) + 1.0027\ldots\ \boldsymbol{t}$$

5. Sternzeit am Beobachtungsort $\theta = \theta_0 - \lambda$

6. Stundenwinkel des Sternes $\boldsymbol{H_a} = \theta - \alpha$

7. Koordinatentransformation $\boldsymbol{H_a}, \varphi, \delta \rightarrow \boldsymbol{A_a}, \boldsymbol{a} \rightarrow \boldsymbol{A}, \boldsymbol{a}$

Die Berechnung der Winkel

Wie bestimmt man die Winkelkoordinaten?

Gegeben sei die Werte $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, die mit zwei Winkeln in Kugelkoordinaten durch die folgenden Gleichungen zusammenhängen:

$(\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2 = 1)$

$$\cos\nu \cos\mu = \boldsymbol{x}$$

$$\cos\nu \sin\mu = \boldsymbol{y}$$

$$\sin\nu = \boldsymbol{z}$$

Die Winkel μ und ν sollen berechnet werden.

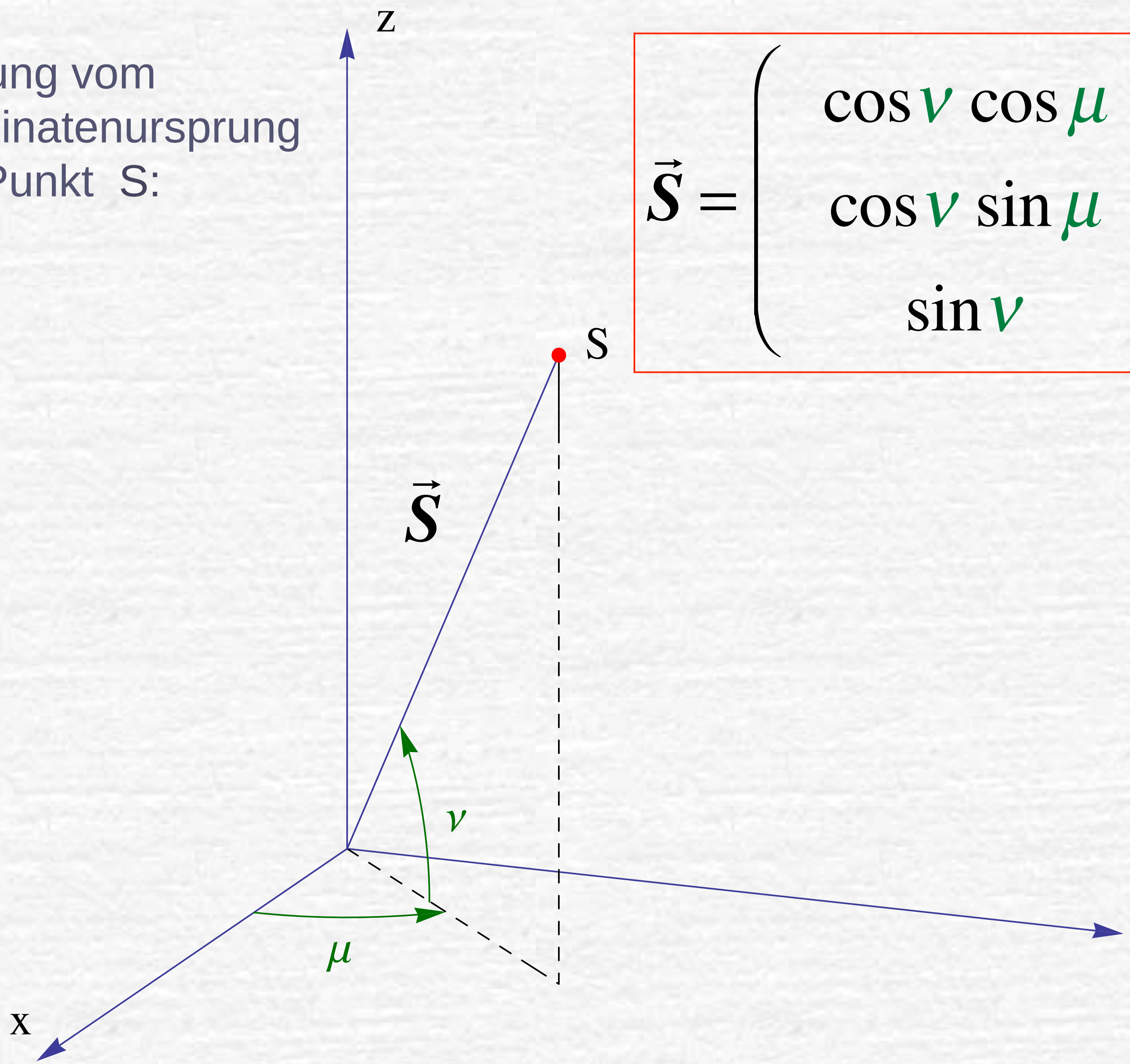
Beispiel der Anwendung: Berechnung von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{a}}$ aus den Formeln:

$$\cos\boldsymbol{a}\cos\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{a}} = -\sin\delta\cos\varphi + \cos\delta\cos\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{a}}\sin\varphi \equiv \boldsymbol{x}$$
$$\cos\boldsymbol{a}\sin\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{a}} = \cos\delta\sin\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{a}} \equiv \boldsymbol{y}$$
$$\sin\boldsymbol{a} = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{a}} \equiv \boldsymbol{z}$$

Die Winkel in Kugelkoordinaten

Richtung vom Koordinatenursprung zum Punkt S:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} \cos\nu \cos\mu \\ \cos\nu \sin\mu \\ \sin\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



Wie bestimmt man die Winkelkoordinaten?

Das System der drei Gleichungen:

$$\cos v \cos\mu = x$$

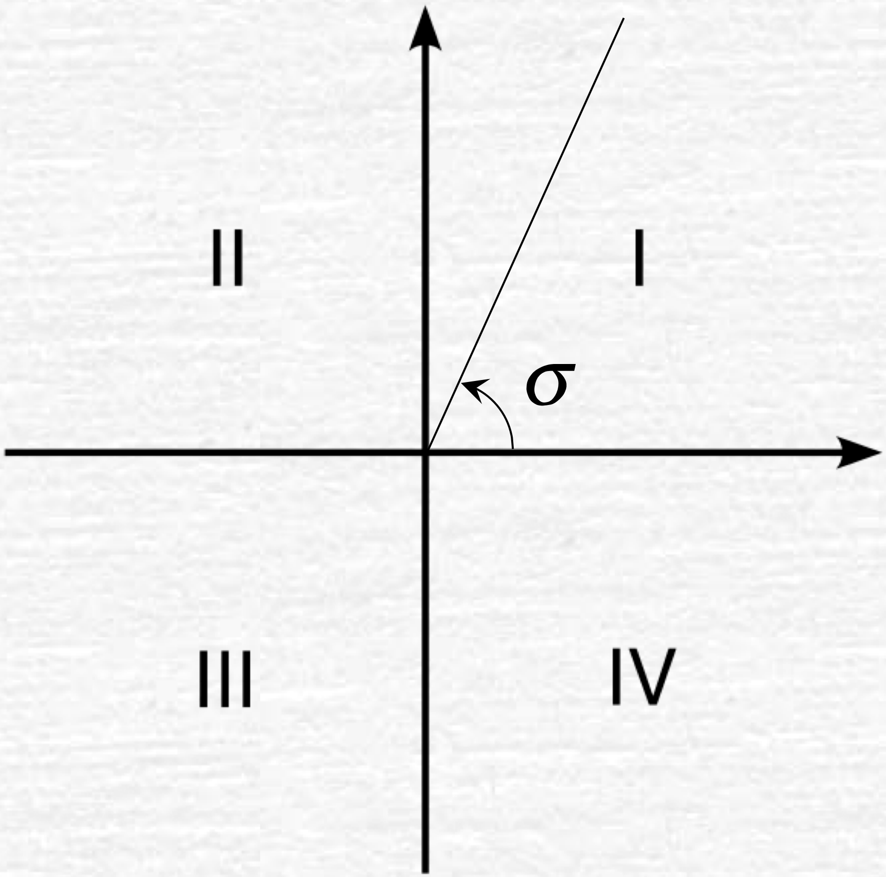
$$\cos v \sin\mu = y$$

$$\sin v = z$$

1. Da $-90^\circ \le v \le 90^\circ$ wird v einfach als $v = \arcsin z$

2. Da $0 \le \mu \le 360^\circ$ können nur $\cos\mu$ und $\sin\mu$ zusammen den Winkel bestimmen. Sonst fehlt die Information über Quadranten!

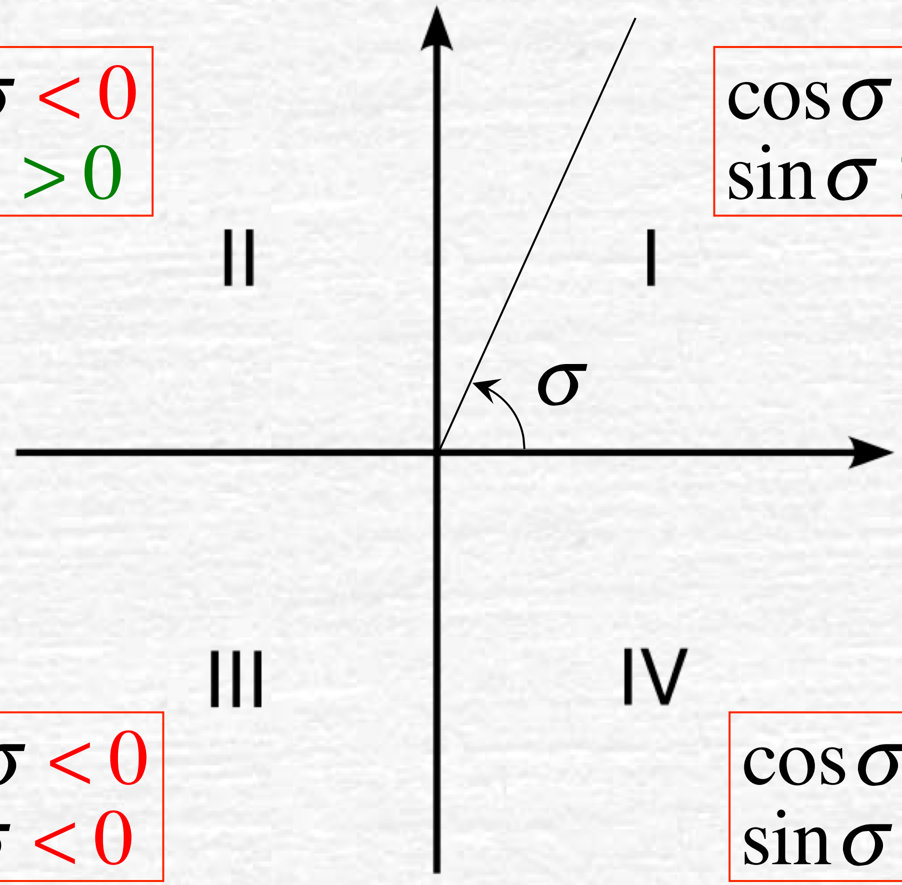
Die vier Quadranten



In welchem Quadranten liegt den Winkel?

Das können Sie anhand der Vorzeichen von Sinus und Cosinus entscheiden:

$$\cos\sigma < 0 \qquad \cos\sigma > 0$$
$$\sin\sigma > 0 \qquad \sin\sigma > 0$$



$$\cos\sigma < 0 \qquad \cos\sigma > 0$$
$$\sin\sigma < 0 \qquad \sin\sigma < 0$$

In welchem Quadranten liegt den Winkel?

Das können Sie anhand der Vorzeichen von Sinus und Cosinus entscheiden:

$$\cos\nu \cos\mu = \boldsymbol{x}$$

$$\cos\nu \sin\mu = \boldsymbol{y}$$

$$\sin\nu = \boldsymbol{z}$$

Es ist ein Fehler, den Winkel so zu berechnen:

$$\mu = \arccos\frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\mu = \arcsin\frac{\boldsymbol{y}}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\mu = \arctan\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}}$$

Wie bestimmt man die Winkelkoordinaten?

Das System der drei Gleichungen:

$$\cos\nu\,\cos\mu = \boldsymbol{x}$$

$$\cos\nu\,\sin\mu = \boldsymbol{y}$$

$$\sin\nu = \boldsymbol{z}$$

1. Da $-90^\circ \le \nu \le 90^\circ$ wird ν einfach als $\nu = \arcsin \boldsymbol{z}$

2. Da $0 \le \mu \le 360^\circ$ können nur $\cos\mu$ und $\sin\mu$ zusammen den Winkel bestimmen. Sonst fehlt die Information über Quadranten!

Bei manuellen Berechnungen: Sinus und Cosinus berechnen, die Vorzeichen prüfen, den richtigen Quadranten auswählen.

Einfache praktische Methode mit Computer: $\boxed{\mu = \arctan(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}$

Das Maple-Programm

Das Maple-Programm

```
> Digits:=16:
  DEC2DMS:=proc(x)  print(trunc(x),trunc((x-trunc(x))*60),((x-trunc
  (x))*60-trunc((x-trunc(x))*60))*60) end:
  DMS2DEC:=proc(d,m,s) RETURN(d+m/60.0+s/3600.0): end:
  COS:=proc(x) RETURN(evalf(cos(x*Pi/180))); end:
  SIN:=proc(x) RETURN(evalf(sin(x*Pi/180))); end:
  TAN:=proc(x) RETURN(evalf(tan(x*Pi/180))); end:
  ASIN:=proc(x) RETURN(evalf(arcsin(x)/Pi*180)); end:
  ATAN:=proc(x) RETURN(evalf(arctan(x)/Pi*180)); end:
  ATAN2:=proc(x,y) RETURN(evalf(arctan(x,y)/Pi*180)); end:
```

```
> lambda:=-DMS2DEC(13,43,46)/15;
  phi:=DMS2DEC(51,1,52.0);
  ZONE:=-1;
```

$$\lambda := -0.9152962962962967$$

$$\phi := 51.03111111111111$$

$$ZONE := -1 \tag{1}$$

```
> y:=2005;
  m:=1;
  d:=27;
  t:=19;
```

$$y := 2005$$

$$m := 1$$

$$d := 27$$

$$t := 19 \tag{2}$$

```
> alpha:=DMS2DEC(18,36,56.30);
  delta:=DMS2DEC(38,47,1);
```

$$\alpha := 18.61563888888889$$

$$\delta := 38.78361111111111 \tag{3}$$

Das Maple-Programm

```
> UTC:=t+ZONE;
```

$$UTC := 18 \tag{4}$$

```
> if m=1 or m=2 then y:=y-1; m:=m+12; fi:
  m;
  y;
  A:=trunc(y/100);
  B:=2-A+trunc(A/4);
  JD:=trunc(365.25*(y+4716))+trunc(30.6001*(m+1))+d+B-1524.5;
```

$$13$$

$$2004$$

$$A := 20$$

$$B := -13$$

$$JD := 2.4533975\ 10^{6} \tag{5}$$

```
> T:=(JD-2451545.0)/36525;
```

$$T := 0.05071868583163 \tag{6}$$

Das Maple-Programm

```
> theta0:=(DMS2DEC(6,41,50.54841)+8640184.812866/3600*
  T+0.093104/3600*T^2-0.0000062/3600*T^3);

  theta0t:=theta0+UTC*1.00273790395;

  theta0t:=(theta0t-trunc(theta0t/24)*24);

  DEC2DMS(theta0t);
```

$$\theta 0 := 128.4248243612417$$

$$theta0t := 146.4741066323417$$

$$theta0t := 2.4741066323417$$

$$2, 28, 26.783876430120 \qquad (7)$$

```
> theta:=theta0t-lambda;

  DEC2DMS(theta);
```

$$\theta := 3.389402928637997$$

$$3, 23, 21.85054309679 \qquad (8)$$

```
> Ha:=theta-alpha:
  if Ha<0 then Ha:=Ha+24; fi:
  Ha;
  DEC2DMS(Ha);
```

$$8.77376403974911$$

$$8, 46, 25.55054309680 \qquad (9)$$

Das Maple-Programm

```
> a:=ASIN(SIN(phi)*SIN(delta)+COS(phi)*COS(delta)*COS(Ha*15));

  DEC2DMS(a);
```

$$a := 9.292856412686329$$

$$9, 17, 34.28308567078 \qquad (10)$$

```
> # Faktor COS(a) spielt für ATAN2 keine Rolle!

  Aa:=ATAN2(COS(delta)*SIN(Ha*15)/COS(a),(COS(Ha*15)*SIN(phi)*COS
  (delta)-SIN(delta)*COS(phi))/COS(a)):
  if Aa<0 then Aa:=Aa+360; fi:

  DEC2DMS(Aa);
```

$$143, 47, 57.7691066440 \qquad (11)$$

Was wird hier vernachlässigt?

1. Atmosphärische Refraktion: 0 im Zenit, 1‘ am Horizont

2. Präzession der Rotationsachse der Erde: bis 50“ pro Jahr

3. Nutation der Rotationsachse der Erde: < 20“ (periodisch)

4. Aberration: <20“

5. Parallaxe der Sterne: < 1“

6. Eigenbewegungen der Sterne: <10“/Jahr (typischerweise << 1“/Jahr)

7. Alle Unterschiede zwischen astronomischen Zeitskalen
   mit Ausnahme von dem Unterschied zwischen
   der mittleren Sternzeit und der mittleren Sonnenzeit.

8. Geographischen Länge und Breite vs. astronomischen Länge und Breite