Kapitel 3

Übertragungsverhalten

In der Systemtheorie kann jeder Prozess als so genannte ”black-box”, die nur durch die Relation ihrer Ein- und Ausgangsgrößen charakterisiert wird, dargestellt werden. Diese ”black-box” wird dann als System bezeichnet. Ein System wird stets durch die Abgrenzung zu seiner Umgebung und den daran gekoppelten Informationsaustausch gekennzeichnet (siehe Abbildung 3.1).

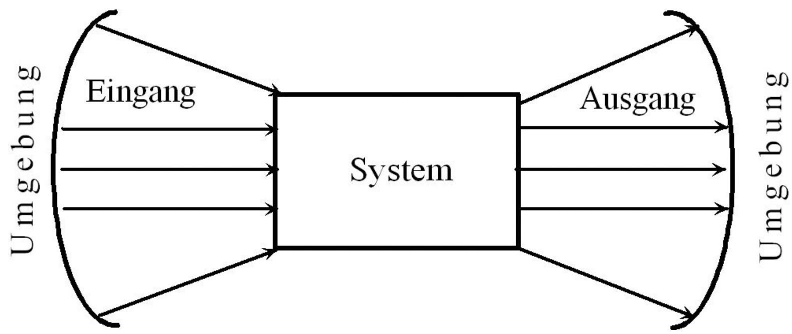

Abbildung 3.1: System mit seiner Beziehung zur Umgebung

In der Systemtheorie unterscheidet man zwischen konkreten und mathematischen Systemen. Ein konkretes System ist ein räumlich abgegrenzter Teil der Wirklichkeit. Dazu gehören noch einige ausgewählte Beziehungen zu seiner inneren materiellen Struktur und zu seiner Umgebung. Die mathematischen Systeme enthalten z.B. Variable, Gleichungen oder Operatoren.

Bei der Beschreibung von Systemen haben sich verschiedene Methoden herausgebildet. Dabei ist im Zusammenhang mit technischen Systemen am weitesten die Betrachtungsweise als **Übertragungssystem** verbreitet. Jedes System wird dabei durch eine Menge von Eingangsgrößen, der eine Menge von Ausgangsgrößen zugeordnet ist, gekennzeichnet. Der Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangsgrößen wird durch den **Übertragungsfaktor** beschrieben. Handelt es sich bei den Ein- und Ausgangsgrößen um physikalische Größen, so hat man es mit einem physikalischen, bei informationellen Größen mit einem kybernetischen System zu tun.

Liegt eine zeitliche Änderung solcher Größen vor, dann spricht man von **dynamischen** Systemen, ansonsten handelt es sich um **statische** Modelle. Von Interesse ist dabei die Einteilung in **lineare** (Ausgangsgrößen sind proportional den Eingangsgrößen) und **nichtlineare** Systeme. Im Allgemeinen wird davon ausgegangen, dass auf die Systeme nur eine Ein- und Ausgangsgröße wirkt. Wirken mehrere Größen, so sind sie entsprechend des Superpositionsprinzips an Mischstellen zu überlagern. Man beachte aber dabei, dass das Superpositionsprinzip nur für lineare Systeme gilt. Übertragungssysteme können an den verschiedensten Stellen des Messprozesses ausgegrenzt werden. Als System treten dabei der Sensor, die Wandler oder das Auswerteprogramm auf, aber auch wasserwirtschaftliche Prozesse, wie z.B. die Vorgänge in einem Klärbecken, lassen sich als solche Systeme darstellen.

Die Beschreibung der Systeme durch die an ihnen wirkenden Ein- und Ausgangssignale kann in verschiedensten Formen stattfinden. Die gebräuchlichsten sind die mathematische Gleichung, die grafische Darstellung des Zeitverhaltens und die Sprungantwortfunktion als LAPLACE-transformierte Beschreibung.

3.1 Grundübertragungsverhalten

Die Grundformen des Übertragungsverhaltens technischer Systeme sind **proportionales**, **integrales**, **differentielles**, **Verzögerungs-** und **Laufzeitverhalten** (siehe Abbildung 3.2).

Die Kennzeichnung der Systeme bezüglich des Übertragungsverhaltens geschieht durch den großgeschriebenen Anfangsbuchstaben des Verhaltens oder durch das grafische Sinnbild der Systemantwort auf ein Sprungsignal am Eingang, d.h. der Übergangsfunktion. Beispiele für die einzelnen Übertragungsverhalten sind in Tabelle 3.1 zusammengefasst.

Tabelle 3.1: Beispiele von Übertragungsverhalten

Übertragungsverhalten	**Beispiel**
proportional	Hebelanordnungen
integral	Füllung eines Behälters ($\dot{V} = const.$)
differential	
Verzögerungsverhalten	Füllung eines Behälters ($\dot{V} = f(t)$)
Laufzeitverhalten	Förderband Mischrohr

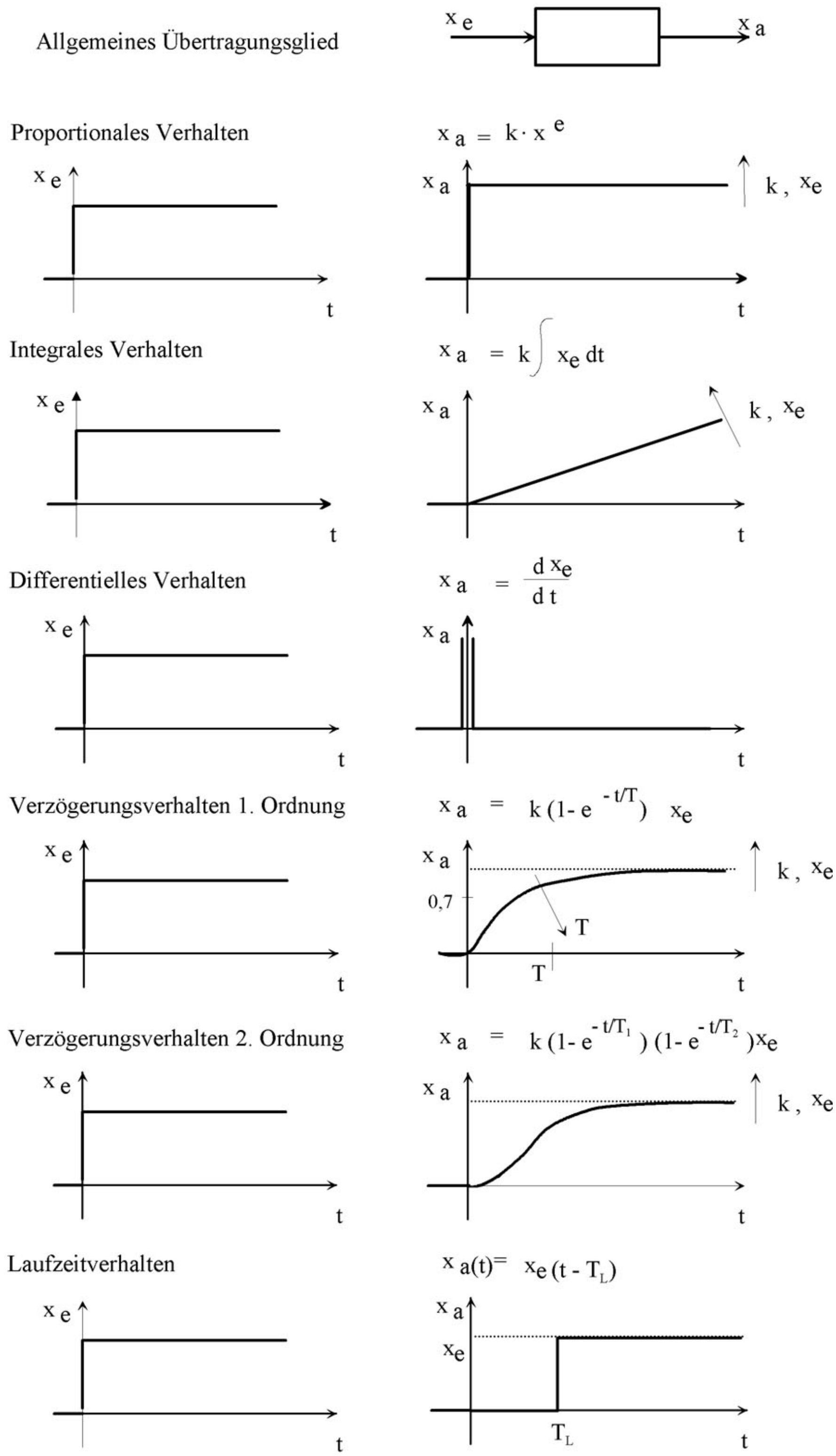

Abbildung 3.2: Grundformen des Übertragungsverhaltens

3.2 Übertragungsfunktionen

Eine **Übertragungsfunktion** ist die mathematische Beschreibung des Verhaltens eines Übertragungsgliedes. Mittels der Übertragungsfunktion wird das Verhalten des Systems aus den Eingangs- und Ausgangssignalen beschrieben.

Im Gegensatz dazu gibt es den Begriff der **Übergangsfunktion** . Dies ist eine Beschreibung von Übertragungsgliedern bei Anlegen eines Einheitssprungsignales am Eingang, also ein Spezialfall der Übertragungsfunktion. Übertragungsfunktionen können sowohl aus der experimentellen als auch aus der theoretischen Prozessanalyse gewonnen werden.

Bei der **theoretischen Prozessanalyse** wird an Hand des inneren Aufbaus der Übertragungsglieder versucht, die mathematischen Beschreibungen (Modelle) zwischen Ein- und Ausgangsgrößen zu finden. Übertragungsfunktionen, die mittels der theoretischen Prozessanalyse gefunden wurden, sind stets auf Naturgesetze begründet. Sie haben im Fall der wasserwirtschaftlichen Anwendung physikalische und/oder chemische Grundlagen.

Die **Besonderheiten** der theoretischen Prozessanalyse bestehen darin, dass

- die Modellbildung bereits vor der praktischen Realisierung erfolgen kann
- die Analyseergebnisse auf Anlagen mit gleichem Prozesstyp übertragbar sind
- die Zusammenhänge zu den technologischen und konstruktiven Daten erhalten bleiben
- die prozessbestimmenden Größen im System erkannt werden
- wichtige Aussagen über die Modellstruktur gewonnen werden

Die **Schwierigkeiten** dieser Methode bestehen darin, dass

- der Aufwand sehr hoch ist und die Modelle kompliziert werden
- die notwendigen Prozessparameter oftmals sehr schwer und ungenau gewonnen werden können
- die Vorgehensweise schlecht algorithmierbar ist
- der ablaufende physikalisch-chemische Prozess ausreichend bekannt sein muss

Für das Aufstellen von mathematischen Modellen im Rahmen der theoretischen Prozessanalyse hat es sich bewährt, die großen Systeme in Teilsysteme zu zerlegen, die dann mittels Betrachtungen zu Bilanzgleichungen (Massen-, Energie- und Impulserhaltungsgesetze sowie Quell-/Senkenaktivitäten) analysierbar sind.

Die **experimentelle Prozessanalyse** geht im Gegensatz zur theoretischen von der Untersuchung der Ein- und Ausgangssignale des Übertragungsgliedes aus. Es werden künstliche Experimente am System durchgeführt, wobei der Wahl des Eingangssignals große Aufmerksamkeit gewidmet werden muss. Ist dies nicht möglich, können auch Naturereignisse (z.B. Hochwasserwellen) als Datenbasis benutzt werden. Man spricht auch davon, dass die experimentelle Prozessanalyse die Systeme von außen untersucht. Beide Methoden, die experimentelle und die theoretische Prozessanalyse, bilden eine Einheit und ergänzen sich sinnvoll, weil eine experimentelle Analyse ohne theoretische Vorinformation und eine theoretische Analyse ohne experimentelle Stützung kaum durchführbar sind.

Die **Übertragungsfunktionen** können als funktioneller Zusammenhang zwischen der Aus- und der Eingangsgröße dargestellt werden. Dabei unterscheidet man zwischen dem Zeit- (Original-)Bereich und dem Bild-Bereich, bei denen die Signale, und damit auch die Übertragungsfunktion, einer Transformation unterworfen werden. Die bekanntesten Integraltransformationen sind die FOURIER- und die LAPLACE-Transformation. Der Vorteil der Anwendung von Transformationen besteht darin, dass komplizierte Rechenoperationen bei der Arbeit mit Übertragungsfunktionen im Bildbereich meist auf die vier Grundrechenarten reduziert werden. Der Nachteil besteht in der geringen Anschaulichkeit des Bildbereiches für den ungeübten Fachmann und in dem Aufwand, die Signale und mathematischen Modelle in den Bildbereich und nach der Lösung des Übertragungsproblemes wieder zurück (inverse Transformation) zu transformieren. Während für den Hinweg meist vorgefertigte Korrespondenzen existieren, erweist sich die Rücktransformation oft als sehr kompliziert. Die Kennzeichnung von Signalen und Übertragungsfunktionen erfolgt im Zeitbereich mit Kleinbuchstaben, im Gegensatz dazu im Bildbereich mit großen Buchstaben (siehe Abbildung 3.3).

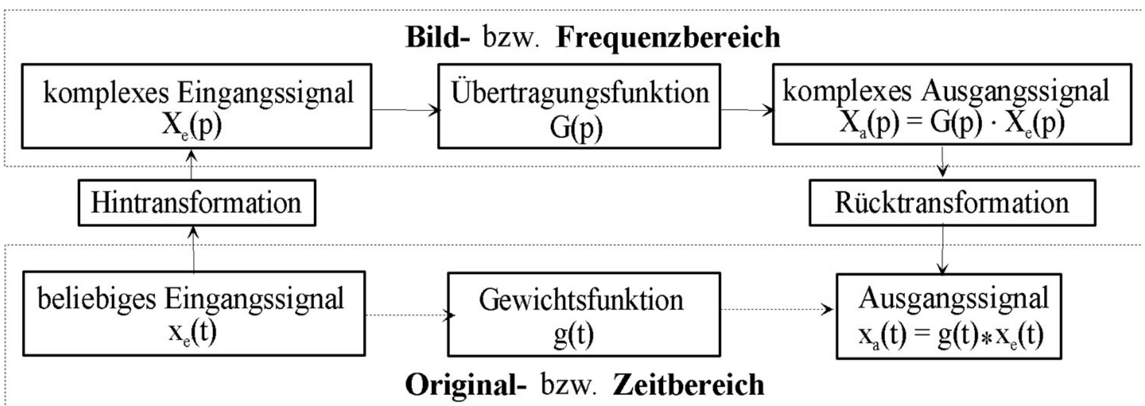

Abbildung 3.3: Zusammenhang zwischen Zeit- und Bildbereich

Die FOURIER-**Transformation** und ihre Rücktransformation:

$$X(j\omega) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} (t)e^{-j\omega t}dt \tag{3.1}$$

$$x(t) = F^{-1}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{3.2}$$

Die LAPLACE-**Transformation** wird definiert zu:

$$X(p) = L\{x(t)\} = \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-pt}dt \tag{3.3}$$

$$x(t) = L^{-1}\{X(p)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p)e^{pt}dp \tag{3.4}$$

Die verschiedenen Darstellungsformen der Übertragungsfunktionen ergeben sich für die Grundübertragungsglieder wie in Tabelle 3.2 dargestellt.

In Tabelle 3.3 sind die bestehenden Zusammenhänge zwischen den einzelnen Darstellungsarten des Übertragungsverhaltens auf Grund der Transformationsgesetze und der Signaldarstellungen aufgezeigt.

Tabelle 3.2: Übertragungsfunktionen

Verhalten	**Abkürzung**	**Übergangs-funktion** $h(t) = x_a/x_e$	**Gewichts-funktion** $g(t) = x_a/x_e$	**Übertragungs-funktion** $G(p) = X_a/X_e$
Anregung $\mathbf{x}_e(\mathbf{t})$		Einheitssprung $\mathbf{1}(t)$	Dirac-Impuls $\delta(t)$	Einheitssprung $\frac{1}{p}$
proportional	**P**	K	$K \cdot \delta(t)$	K
integral	**I**	$K \cdot t$	K	$\frac{K}{p}$
differential	**D**	$K \cdot \delta(t)$		$K \cdot p$
Verzögerungsv.	$\mathbf{T}_1$	$K\left(1 - e^{-t/T_1}\right)$	$\frac{K}{T_1} e^{-t/T_1}$	$\frac{K}{1 + pT_1}$
Verzögerungsv.	$\mathbf{T}_2$	$K\left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right)\left(1 - e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$	$K\left(\frac{e^{-\frac{t}{T_1}}}{T_1} + \frac{e^{-\frac{t}{T_2}}}{T_2}\right)$	$\frac{K}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)}$
Laufzeitverh.	$\mathbf{T_L}$	$K \cdot (t - t_L)$	$\delta \cdot (t - t_L)$	$K \cdot e^{-pt_L}$

Tabelle 3.3: Zusammenhang zwischen den verschiedenen Übertragungsfunktionen

	$\mathbf{h(t)}$	$\mathbf{g(t)}$	$\mathbf{G(p)}$
$\mathbf{h(t)}$		$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$	$h(t) = L^{-1}\{\frac{1}{p}G(p)\}$
$\mathbf{g(t)}$	$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}$		$g(t) = L^{-1}\{G(p)\}$
$\mathbf{G(p)}$	$G(p) = pL\{h(t)\}$	$G(p) = L\{g(t)\}$	

3.3 Kombiniertes Übertragungsverhalten

Die Zusammenschaltung von linearen Übertragungsgliedern lässt sich auf drei Grundtypen, die Reihen-, die Parallel- und die Kreisschaltung, zurückführen. Dafür ergeben sich die in Abbildung 3.4 dargestellten Übertragungsfunktionen. Die mathematische Beschreibung ist in Tabelle 3.4 dargestellt.

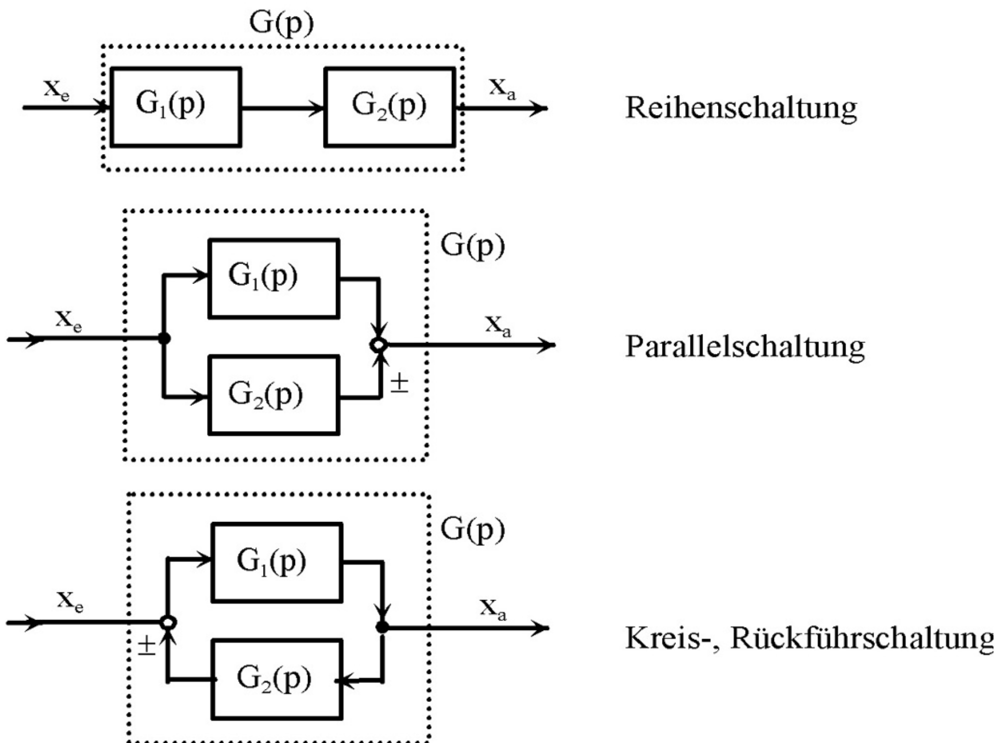

Abbildung 3.4: Zusammenschaltung linearer Übertragungsglieder

Tabelle 3.4: Zusammengesetzte Übertragungsglieder

Schaltungsart	**Differential-gleichung**	**Gewichts-funktion**	**Übertragungs-funktion**
Reihe	$A1(D)A2(D)x_a(t) = B1(D)B2(D)x_e(t)$	$g1(t) \cdot g2(t)$	$G1(p) \cdot G2(p)$
Parallel	$A1(D)A2(D)x_a(t) = [B1(D)A2(D) \pm B2(D)A1(D)]x_e(t)$	$g1(t) \pm g2(t)$	$G1(p) \pm G2(p)$
Kreis			$\dfrac{G_1(p)}{1 \pm G_1(p) \cdot G_2(p)}$

Bei linearen Übertragungsgliedern kann das kombinierte Übertragungsverhalten aus der additiven Mischung des Grundübertragungsverhaltens einzelner Übertragungsglieder erzeugt werden. Dabei werden die Grundübertragungsglieder mit dem gleichen Eingangssignal belegt und ihre Ausgänge an einer Mischstelle addiert, d.h. die Glieder sind parallel geschaltet (siehe Abbildungen 3.5 und 3.6).

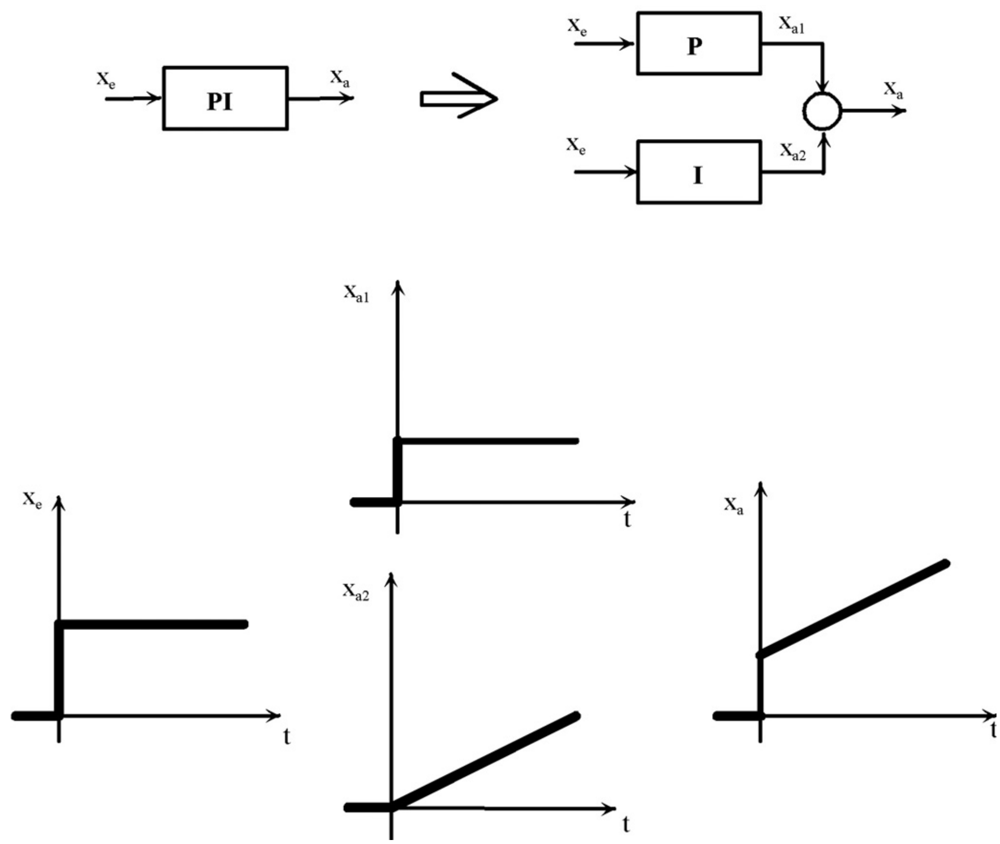

Abbildung 3.5: Realisierung eines PI-Gliedes

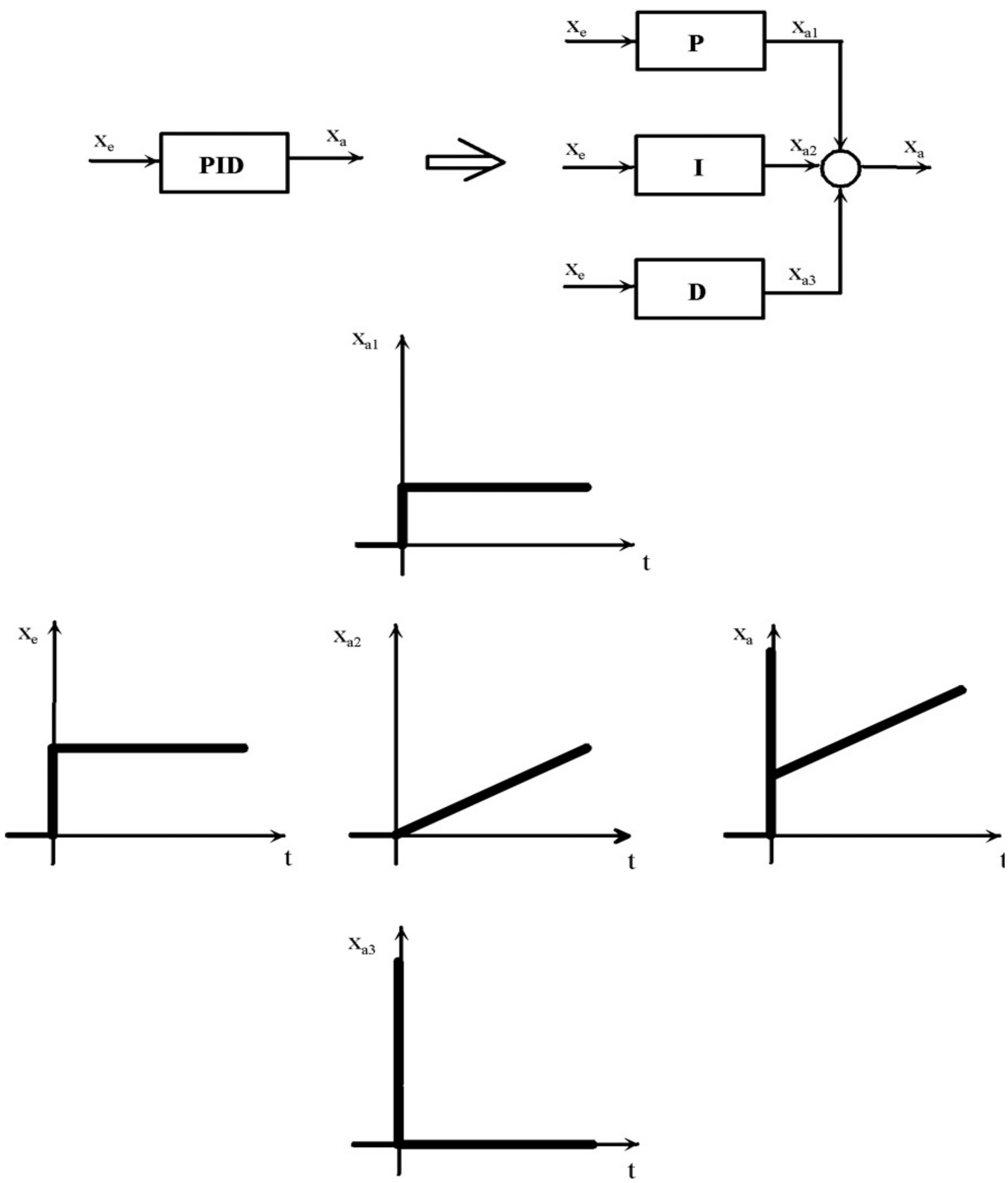

Abbildung 3.6: Realisierung eines PID-Gliedes

3.4 Übungsaufgaben

1. Welche Grundformen des Übertragungsverhaltens kennen Sie?

2. Welche Methoden benutzt man zur Ermittlung des Übertragungsverhaltens?
   Nennen Sie dazu Beispiele!

3. Eine Ausgangsgröße ändert sich in Abhängigkeit von der Eingangsgröße wie folgt (Abbildung 3.7):

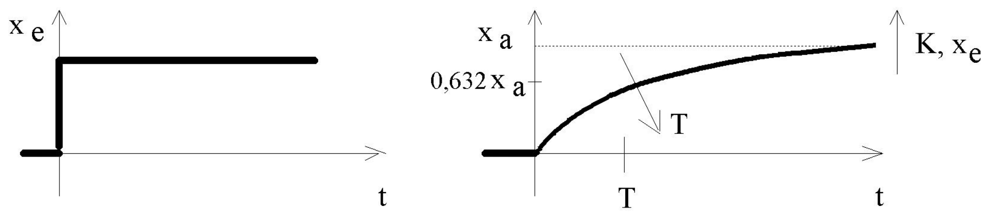

Abbildung 3.7: Übertragungsverhalten

   Zu welcher Art von Grundübertragungsverhalten können Sie diesen Prozess zuordnen?
   Geben Sie die Kurzbezeichnung und die Übergangsfunktion an.
   Welcher Zusammenhang besteht zwischen Übergangs-, Gewichts- und Übertragungsfunktion?

4. Welche Prozesse können vorteilhafterweise durch ein Verzögerungsverhalten 2. Ordnung beschrieben werden?

5. Zeichnen Sie das Antwortsignal, das sich ergibt, wenn eine Gleichgröße ($1V$) mit einer überlagerten Sinusspannung ($100mV$) durch ein I-Übertragungsglied mit vorgeschalter Quantisierung ($0,05V$) geht.

6. Welche Methoden benutzt man zur Ermittlung des Übertragungsverhaltens?
   Nennen Sie dazu wasswerwirtschaftliche Beispiele!

7. Konstruieren Sie den Verlauf des Signales, wenn folgender Funktion (Abbildung 3.8) durch eine PID-Regeleinrichtung geht!

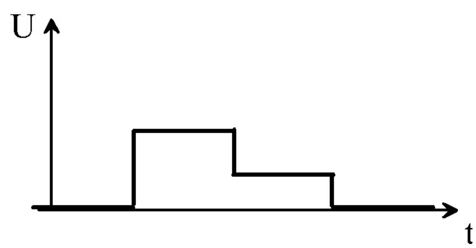

Abbildung 3.8: Reglersignal