TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. Dr. Martin Schneider, Dr. Christian Zschalig

Lineare Algebra - Grundlegende Konzepte (Modul LA10), Wintersemester 2019/20

4. Übungsblatt für die Übungen vom 4.11.-8.11.2019

Mächtigkeit von Mengen, Induktionsbeweise

N4.1 **Hausaufgabe (Nachbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**

(a) Es sei $\mathbb{S} := \{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N} : m^2 = n\}$ die Menge der Quadratzahlen. Weiter seien

$$g : \mathbb{N} \cup \{-1\} \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto x+1 \qquad \text{und} \qquad f : \mathbb{N} \to \mathbb{S}, \quad x \mapsto x^2$$

Abbildungen. Bestimmen Sie, falls möglich (dazu müssen Sie prüfen, ob die Funktionen bijektiv sind), die Abbildungen $(f \circ g)^{-1}$ und $g^{-1} \circ f^{-1}$.

(b) Es seien $g : A \to B$ und $f : B \to C$ bijektive Funktionen. Beweisen Sie:

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Hinweis: Am einfachsten ist der Beweis, in dem Sie für ein beliebiges Element c (aus welcher Menge?) zeigen, dass $(f \circ g)^{-1}(c) = (g^{-1} \circ f^{-1})(c)$ gilt.

V4.2 **Hausaufgabe (Vorbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**

(a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $z \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $\sum\limits_{i=0}^{n} z^i = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$ gilt.

Ü4.3 In dieser Aufgabe betrachten wir den zu $k, n \in \mathbb{N}$ durch

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & 0 \le k \le n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definierten Binomialkoeffizienten.

(a) Zeigen Sie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

(c) Beweisen Sie: Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ist gleich der Anzahl der k-elementigen Teimengen einer n-elementigen Menge an.

Hinweis: Sie können dazu den Teil (b) verwenden, müssen aber nicht.

Ü4.4 Aus Vorlesung 1.3(a) ist bekannt, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer endlichen Menge M die Mächtigkeit $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$ hat. Beweisen Sie diese Aussage nun mittels vollständiger Induktion.

Finden Sie auch einen Beweis, der ohne Induktion auskommt?

Ü4.5 Beweisen Sie z.B. per vollständiger Induktion, dass folgende Gleichungen für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ gelten:

(a) $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(b) Gilt zusätzlich $n \geq 4$, dann ist $2^n \geq n^2$.

(c) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$

H4.6 *Hilberts Hotel* (nach David Hilbert) ist ein Hotel mit $\mathbb{N}$ Zimmern, durchnummeriert mit natürlichen Zahlen bei 1 beginnend. Das Hotel ist voll belegt, aber die Insassen können beliebig innerhalb des Hotels umquartiert werden. Nun kommt ein weiterer Gast an, der im Hotel übernachten möchte. Wie können die anderen Bewohner umziehen, so dass ein Zimmer für ihn frei wird? Wie kann verfahren werden, wenn

(a) ein Bus mit n Gästen,

(b) ein großer Bus mit $\mathbb{N}$ Gästen

(c) n große Busse mit je $\mathbb{N}$ Gästen

(d) $\mathbb{N}$ große Busse mit je $\mathbb{N}$ Gästen

ankommen?

Hinweis: Wenn Ihnen keine Lösung einfällt, dann suchen Sie nach *Hilberts Hotel*.

H4.7 (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gleichmächtig sind.

(b)* Haben die Mengen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ die gleiche Mächtigkeit? Wie könnte eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ konstruiert werden?

(c) Zeigen Sie mit (b), dass die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ gleichmächtig sind.

Hinweis: Falls Sie für (b) auch nach reiflicher Überlegung keine Lösung finden, dann suchen Sie in der Literatur nach dem *ersten Cantorschen Diagonalargument*.

H4.8 Mit $H(n)$ bezeichnen wir folgende Aussage: Ist in einer Menge von n Maschinen eine kaputt, dann sind alle n Maschinen aus der Menge kaputt

Wo steckt der Fehler im folgenden „Beweis“ durch vollständige Induktion?

Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : H(n)$.

„Beweis“:

(a) Induktionsanfang: $H(1)$ ist offenbar richtig.

(b) Induktionsschritt: $H(n)$ sei wahr für ein $n \in \mathbb{N}$, wir zeigen die Richtigkeit von $H(n+1)$: Wir betrachten $n+1$ Maschinen (bezeichnet mit $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$), von denen eine ($M_1$) kaputt sein soll. Die beiden Mengen $\{M_1, \ldots, M_n\}$ und $\{M_1, \ldots, M_{n-1}, M_{n+1}\}$ enthalten jeweils die Maschine M_1 und besitzen je n Elemente, bestehen also nach Induktionshypothese aus lauter kaputten Maschinen. Da alle Maschinen in einer der Mengen vorkommen, sind also alle Maschinen kaputt.

H4.9 Beweisen Sie 1.11(e) aus der Vorlesung: Ist R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A, dann ist die Abbildung

$$\pi_R : A \to A/R, \quad x \mapsto [x]_R$$

surjektiv und es gilt $\ker(\pi_R) = R$.