Stochastik
= Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Unterrichtsplanung für FTM1

Inhaltsverzeichnis

Lehrplanauszug 2
Sachlogische Analyse 3
Register 1
Wahrscheinlichkeitsrechnung 4
Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Ereignisses
W_Ub 1.1: Würfeln
Empirisches Gesetz der großen Zahl
Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten ..5
W_Ub 2.1: Fahrzeuge mit Lackfehlern
Darstellungen logischer Funktionen
Text
Boole'sche Logik
Wahrheitstabelle
Grafik
W-Baum
Multiplikationssatz
Additionssatz
Rechnen mit Baumdiagrammen
Register 2
Wahrscheinlichkeitsbaum 6
Zweck
AB Schleifmaschine
AB Getränkeabfüllanlage
W_Ub 2: W-Baum
W_Ub 3.1: Lotto II
Allgemeiner W-Baum
W_Ub 3.2: Eine Zockerparty
Vereinfachter W-Baum
Erwartungswert
W_Ub 4: Hepatitistest
Bayes'sche Formel
Verteilungsmodelle 7
Smarties-Versuche 1 und 2
Experimentelle Ermittlung von Verteilungen
Urwertliste
Histogramm
Einzelhäufigkeit
Summenhäufigkeit
Hypergeometrische Verteilung 7
Binomiale Verteilung 7
Berechnung mit dem W-Baum
Notwendige Parameter
Berechnung mit Tabellenkalkulationen
Anwendung
W_Ub 5: Große W-Bäume
Formeln
Register 3
Einfach-Stichproben-Anweisung 9
n-c-Anweisung
Arten von Risiken
Höhe des Risikos
Merkmale von n-c-Anweisungen
Auswahl von n-c-Anweisungen
oc-Funktionen
AQL-System
Sprunganweisungen (Skip-Lot-Verfahren)
Sonstiges
Register 4
Die Normal-Verteilung 10
Aussagen der „Glockenkurve“
X-Achse: Messwerte
Y-Achse: Wahrscheinlichkeitsdichte
Fläche: Wahrscheinlichkeiten
Parameter der Normalverteilung
Mittelwert μ bzw. x̄
Standardabweichung σ bzw. s
Berechnung der Parameter
mit Tabellenkalkulationen
mit Taschenrechner
mit W.-Netz
Anpassungstest nach DIN ISO 5479
ZSB: Grenzwerte der Normalverteilung ..11
ZSB Zufallsstreubereiche
Anteile aus Grenzwerten
Geg.: G; Ges.: P
Grenzwerte aus Anteilen
Geg.: P; Ges.: G
Unterschreitungsanteil
Überschreitungsanteil
Zwischenanteil (Gutteile)
Ausschussanteil
Zufallsstreubereiche ZSB der Messwerte x (alt) 12
Standardisierte Normalverteilung
Ermittlung der ZSB (x)
Einseitig abgegrenzt
Beidseitig abgrenzt
DGQ-Tabelle 11 Normalverteilung
Casio FX-880P
Wahrscheinlichkeitsnetz
Register 5
Begründung für SPC 13
Leitbeispiel: Fahrzeug auf Straße
Datenerfassung
Urwertliste
Verlaufsdiagramm
Reduzierung der Daten
Häufigkeitsverteilung im Histogramm
Normalverteilung
Bewertung einer Verteilung
Inhalte von SPC 14
6-Sigma-Fertigung, 6-σ-Fertigung
SPC:Fähigkeitsuntersuchungen
SPC: Qualitätsregelkarten
Warn- und Eingriffsgrenzen
Einzelmessungen
Stichproben von kleinem Umfang
Zweispurige Regelkarten
Vorteile von QRK
Register 6
SPC: Fähigkeitskennzahlen c 15
Ermittlung von c_m, c_p, c_{mk} und c_{pk}
Bedeutung einer Fähigkeitskennzahl c
Fähigkeitsuntersuchungen c_m, c_p
Maschinenfähigkeit c_m, c_{mk}
Prozessfähigkeit c_p, c_{pk}
SPC: Qualitätsregelkarten QRK 16
Markierungen in der QRK
Typen von QRK
Urliste
Urwertkarte (x-Karte)
x̃-R-Karte
x̄-s-Karte
Beispiel: 5, 4, 2, 1, 2
dynamische Regelkarten
Bewertung von QRK
Register 7
SPC: Grenzwerte für QRK 17
Wahrscheinlichkeiten für Stichproben
Mittelwert der Stichproben
Standardabweichung der Stichproben
Median der Stichproben
Spannweite der Stichproben
χ^2-Verteilung
Anwendung
Vertrauensbereich von Stichproben
Warn- und Eingriffsgrenzen von QRK
ZSB der Mittelwerte x̄
ZSB der Standardabweichungen s
ZSB der Mediane x̃
ZSB der Spannweiten R
Wahrscheinlichkeiten für die Parameter x̄ und s (alt) 18
nicht mehr unterrichten
Anwendung
ZSB der Mittelwerte x̄
Streuung $s_{\bar{x}}$ der Mittelwerte
Mittelwert $\mu_{\bar{x}}$ der Mittelwerte
ZSB der Standardabweichungen s
Streuung der Standardabweichungen s_s
Mittelwert der Standardabweichungen μ_s
Register 8
Häufigkeitsverteilung: Praktisches Beispiel 19
Beispiel XYZ
Klassenbildung
Strichliste
Histogramm
Wahrscheinlichkeitsnetz
Register 9
Wahrscheinlichkeitsnetz 19
Register 10

Entwürfe oder alt

Verteilungen: Übersicht 20
Hypergeometrische Vtlg
Binomiale Verteilung
Normalverteilung
χ^2-Verteilung (CHI² – Vtlg)
Formel in Tabkal
Parameter ermitteln
Einzelhäufigkeit
Unterschreitungsanteil α
Überschreitungsanteil α
Zwischenanteile
Ausschussanteile
Formeln
DGQ
Taschenrechner
Kombinatorik (alt) 21
N verschiedene Elemente mit je n Möglichkeiten
n verschiedene Elemente auf N Plätzen
Sonderfall n = N
allgemeiner Fall n\N
n gleichart. Elemente auf N Plätzen
mehrere Elemente auf N Plätzen
Prüfplanung 22
nicht mehr unterrichten
Prüfmerkmal - was?
Prüfhäufigkeit - wie oft?
Prüfart
Prüfumfang - wie viel?
Prüfer und Prüfort
Prüfmittel - womit?
Dokumentation
Prüfschärfe
Literaturverzeichnis 23
Auswertung von Daten 23

Seitenumbruch

AB erstellen zum Thema: Fallstricke der Statistik
Einarbeiten: [Voigt 1997], [Hering 1993]; [EuroM]"Qualitätssicherung".
Quellen: [Beck-Bornholdt/Dubben 2002], [Dobelli 2011], [Dobelli 2012], [Mérö 1996]

Lehrplanauszug

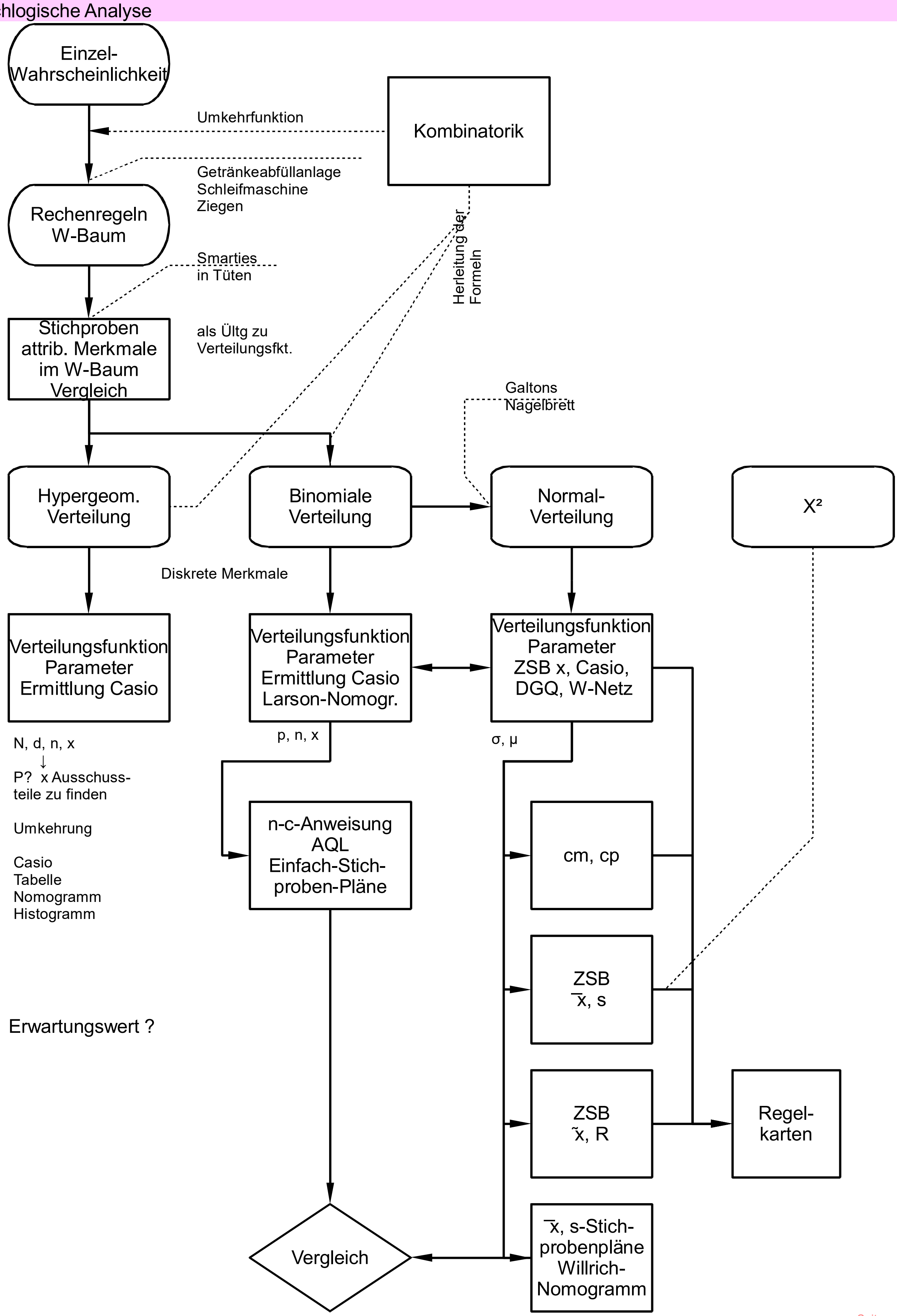
1	**Einführung in die Qualitätslehre**		**15 Stunden**
1.1	Bedeutung der Qualität erkennen	Wettbewerbsfaktoren Maßnahmen zur Erhaltung der Wettbewerbsfähigkeit	Exemplarische Bearbeitung der Inhalte
1.2	Grundbegriffe zum Wettbewerbsfaktor Qualität kennen und anwenden	Qualitätsbegriff Zuverlässigkeit, Verfügbarkeit Merkmalsarten, Merkmalsausprägungen Sollwert, Grenzwert, Toleranz, Abweichung, Fehler, Fehlerklassen	
1.3	Bewusstsein für die Qualitätsverantwortung entwickeln	Qualitätskreis Produkthaftung, Deliktshaftung, Vertragshaftung Sicherung der Arbeitsplätze Verantwortung des Managements und des Mitarbeiters Geschichtliche Entwicklung der Qualitätssicherung	Vgl. Lehrplan Wirtschaft und Recht
1.4	Ziel der Qualitätsmanagements erläutern	Unternehmenspolitik Verringerung des Fehlleistungsaufwandes Verbesserung des Images Verhütung von Produkthaftungsfällen Gewinn von Marktanteilen	
1.5	Aufbau und Elemente eines Qualitätsmanagementsystems unterscheiden	Aufbau- und Ablauforganisation für ein mittleres Unternehmen	Qualitätsmanagementhandbuch DIN 55350, DIN ISO 9000 bis 9004 Aufbau nach DGQ-Schrift Nr. 12-61 Vgl. Produktorganisation, LPE 1.1 und 1.2
1.6	Informationsquellen zur Feststellung der Ist-Qualität nutzen	Wareneingangsprüfung Fertigungsprüfung Endprüfung,	Prüfungsarten nach DIN 55350 Teil 1 Musterprüfung, Kundendienstberichte, Kundenbeanstandungen
1.7	Prüfdaten darstellen, auswerten und deuten	Häufigkeitsverteilung nach quantitativen Merkmalen	Kreuzliste, Strichliste, Stabdiagramm, Histogramm Paretoanalyse (= ABC-Analyse) <GU>
2	**Wahrscheinlichkeitsrechnung und beurteilende Statistik**		**20 Stunden**
2.1	Mess- bzw. Zählergebnisse darstellen und auswerten	Urliste Strichliste, Histogramm Ursache-Wirkungs-Diagramm Pareto-Analyse	Häufigkeitsverteilungen von quantitativen und qualitativen Merkmalen
2.2	Wahrscheinlichkeitsrechnung und Verteilungsmodelle anwenden	Normalverteilung Einzel- und Summenwahrscheinlichkeiten	Häufigkeitsbereiche Am Beispiel der Stichprobenprüfung unter Verwendung von Nomogrammen und Tabellen
2.3	Stichproben im Wahrscheinlichkeitsnetz auswerten und damit die Grundgesamtheit beurteilen	Wahrscheinlichkeitsnetz der Normalverteilung Prozessanalyse	Überschreitungsanteile Vertrauensbereiche Maschinen- und Prozessfähigkeitsuntersuchung
2.4	Qualitätsregelkarten für normalverteilte Merkmalswerte unterscheiden und Eingriffsgrenzen bestimmen	$\tilde{x}$ -Karte R-Karte s-Karte	Zweispurige Darstellung
2.5	Grundlagen der Einfachstichprobenprüfung anwenden	Stichprobenanweisung Annahmewahrscheinlichkeit Lieferanten- und Abnehmerrisiko	Grafischen Ablaufplan ergänzen
3	**Fertigungsprüftechnik**		**25 Stunden**
3.1	Längenprüftechnik abgrenzen, Begriffe erläutern, unterscheiden und zuordnen	Prüfmittel Messunsicherheit Prüftechnische Grundsätze	Nur Überblick Basiseinheiten, Kalibrierung Justierung, Eichung Abbesches Prinzip; Taylor Grundsatz
3.2	Prüfmittel und Prüfverfahren beschreiben und den zweckmäßigen Einsatz bestimmen	Maßverkörperungen; Lehren Längenmessgeräte Computereinsatz in der Längenprüftechnik	
3.3	Prüfmittelüberwachung nach Prüfanweisung durchführen	Maßverkörperungen Lehren Längenmessgeräte	Erweiterung Prüfmittelverwaltung
3.4	Prüfplan erstellen. Qualitätsmerkmale prüfen und Prüfergebnisse bewerten	Prüfplanaufbau Prüfmittelauswahl Prüfberichte	Z.B. einfache prismatische Teile oder Rotationsteile
3.5	Informationsquellen zur Feststellung der Ist-Qualität nutzen	Eingangsprüfung Fertigungsprüfung Endprüfung	Z.B. Musterprüfung, Kundenbeanstandungen

Die Klassenschnitte liegen 2012 schon unter der Note 2, die Aufgaben müssen also nicht mehr einfach gemacht werden werden.

– Zusammenfassen von Unteraufgaben zu einer, z.B. ermitteln sie die Fähigkeitskennzahl statt Standardabweichung, Mittelwert, Fähigkeitskennzahl usw.

Seitenumbruch

Sachlogische Analyse



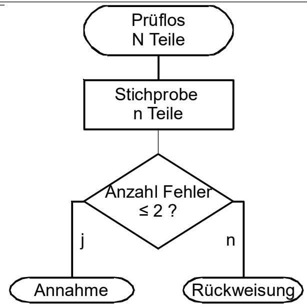
Seitenumbruch

Register 1

Wahrscheinlichkeitsrechnung

W. heißt das Gebiet der Mathematik, in dem rechnerische Methoden zur Beschreibung zufälliger Ereignisse entwickelt werden. Ein Ereignis ist zufällig, wenn es bei einem Versuch auftreten kann, ohne dass man vorhersagen könnte, ob es eintritt oder nicht

Einfachstichproben- oder n-c-Anweisung



1) *Ein: Da steht er nun, der Container mit 50000 Schrauben. Entwerfen Sie eine einfache Prüfvorschrift, nach der der Wareneingang die Gewinde der Schrauben prüfen und u.U. zurückweisen soll.*
2) *Prinzipielle Vorgehensweise*

Kaufleute: es kommt nur Gewindegrenzlehre in Frage
n-c-Anweisungen enthalten den Stichprobenumfang n, die maximal zulässige Anzahl c fehlerhafter Teile in der Stichprobe und die Maßnahmen bei Überschreiten der maximal zulässigen Anzahl von Fehlern. Dies kann sein: Zurückweisen des Loses, Informieren der Fertigungsplanung usw.
„Stichprobe“ werden mit spitzen Halbrohren aus Säcken entnommen. Auch heutzutage nimmt man die Probe nicht von oben, sondern zufällig von jeder Palette. Um Bequemlichkeit und Vorlieben auszuschließen, werden vom Computer Zufallszahlen vorgegeben.
Programmablaufplan zur Einfachstichprobenprüfung nach DIN 40080

Ültg.: Nun zu den Grundlagen

Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Ereignisses

Beispiel 1a

Ges.: die Wahrscheinlichkeit P für eine 3 bei einmaligem Würfeln.

Geg:

S={1;2;3;4;5;6} Anzahl der möglichen Ereignisse gleicher Wahrscheinlichkeit

A={3} Anzahl der gesuchten Ereignisse g.W.

W_Ub 1.1: Würfeln

AB Übungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung Aufg.1.1a

3) *Falls das Ergebnis bekannt ist, sofort die folgenden Fragen stellen, bis keine Antwort mehr kommt, danach Entwicklung wie geplant.*

S heißt auch Ergebnismenge und A Ereignismenge. Diese Begriffe sollen aber nicht eingeführt werden.

Beispiel 3a

Ges: P für die Würfelsumme 7 bei zwei Würfen.

Geg: Würfel 1

	Σ	1	2	3	4	5	6
Würfel 2	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

AB Übungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung Aufg.1.3

Bei zwei Würfen sind Würfelsummen von 2 bis 12 möglich. Die Ereignisse sind aber entgegen der obigen Formel nicht gleich wahrscheinlich, weil z.B. die Summe 12 nur mit einem 6-er-Pasch erreicht werden kann, aber die 7 durch verschiedene Kombinationen. Ggf. muss dies durch einen Versuch bewiesen werden. Tatsächlich war dies noch im 18.Jhd nicht selbstverständlich.

AM Würfel

1) *Das Problem muss auf Ereignisse zurückgeführt werden, die gleich wahrscheinlich sind. Welche sind dies?*
   Die Ereignisse eines einzelnen Wurfes

Geeignete Darstellung vereinfacht die Lösung

2) *Machen Sie Vorschläge.*
   z.B. in einer Matrix

Lsg: $P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

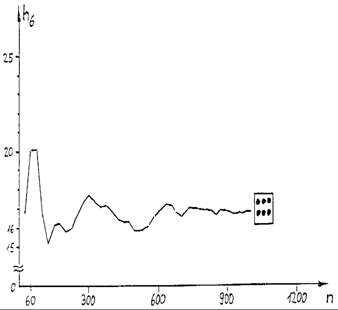
Das Wahrscheinlichkeitsgesetz gilt nur, wenn alle Ereignisse aus S dieselbe Wahrscheinlichkeit haben

Die Wichtigkeit der Gleichverteilung wird auch bei bedingten Wahrscheinlichkeiten deutlich:
Geg: Ein Foto mit 4 verschwommenen Personen
Ges: P für jede Person, dass es eine Frau ist?
Untersuchen Sie die Frage auch, wenn Sie weitere Informationen erhalten.
1. 2 Personen sind groß und spazieren, zwei sind klein und rennen (Familie?)
2. Eine große Person ist erkennbar ein Mann / eine Frau

Ges. P für jede Person, dass es ein Mädchen ist
3. Ein Kind ist erkennbar ein Junge (P(anderes Kind = Mädchen) = 2/3
4. Ein Kind ist erkennbar ein Mädchen und deutlich größer (P(anderes = Mädchen)=1/2)

Empirisches Gesetz der großen Zahl

Man würfelt sehr oft und notiert die Ergebnisse.



3) *Nur wenn die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bewiesen werden muss.*

Wie kann man testen, ob ein Würfel wirklich „fair“ ist, bzw. wie kann man das Wahrscheinlichkeitsgesetz beweisen? Ausprobieren, 100000x würfeln.

FO Versuchsreihen alter Statistiker oder Darstellung per Excel und OH-Display

Trägt man z.B. für die Augenzahl 6 die relative Häufigkeit $h_{i=6}$ über die Anzahl der Würfe auf, so sieht man, dass mit wachsendem n die relative Häufigkeit einem Grenzwert zustrebt.
Für sehr große n strebt h_6 hier gegen 1/6

Das empirische Gesetz der großen Zahlen:

Nach einer hinreichend großen Anzahl n von Durchführungen eines Zufallsexperiments stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten h_A eines Ereignisses A
Die relative Häufigkeit h_i ist ein Schätzwert für P(A) bei der Untersuchung. Umgekehrt ist die Wahrscheinlichkeit ein Schätzwert für die Vorhersage der relativen Häufigkeit.

Vertiefung

W_Ub 1: Übungen zur einfache Wahrscheinlichkeit

Stochastik_TA_Wahrscheinlichkeit.odt

Seitenumbruch

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

AB Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung Aufgabe 2.1

W_Ub 2.1: Fahrzeuge mit Lackfehlern

Aufgabe 4: *Auf dem Hof einer Lackiererei haben*
A 8% der Kfz Läufer (Rotznasen) und
B 10% der Kfz Farbfehler.
Die Lackfehler treten unabhängig voneinander auf.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit klaut ein Dieb im Dunkeln ein Kfz
a) mit beiden Lackfehlern (= Läufer und Farbfehler) *b) mit einem Lackfehler (=Läufer oder Farbfehler)*

UND und ODER unterstreichen, um die logische Bedeutung hervorzuheben.

[Bamberg 1993] S.84

$\cap$ oder $\wedge$ stehen für das logische UND, d.h. dass beide Ergebnisse eintreten sollen. Sprachlich wird „und" oft falsch verwendet: „Ich werde nass, wenn es regnet und wenn ich schwitze".

Eselsbrücke: UND ist unten offen

1) Vorgehensweise
Einfarbig beginnen mit der Grafik als bekanntester Darstellung und zuletzt das Baumdiagramm vorgeben. Zur Vertiefung alle Verknüpfungen farblich darstellen, zuletzt die Knoten des Baumdiagramms, Zeilen der Wahrheitstabelle und Felder der Grafik mit Zahlen zuordnen lassen.

Darstellungen logischer Funktionen

Text
z.B. Aufgabentext

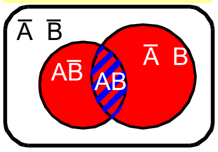
Boole'sche Logik
A und B = A∩B

A oder B = A∪B

Wahrheitstabelle

A	B	∪	∩
0	0	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	1

0 in Spalte A heißt $\bar{A}$ usw.

Grafik


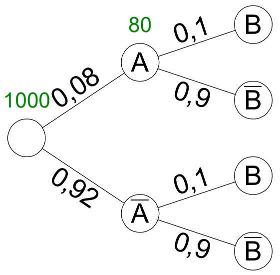
$\cup$ bzw. v (lat. vel: „oder) steht für das logische ODER, d.h. dass Ergebnis A oder Ergebnis B oder beide eintreten sollen: „Ich werde nass, wenn es regnet und wenn ich schwitze".

Eselsbrücke: ODER ist oben offen

Text, Boole'sche Logik, Wahrheitstabelle und die Grafik sind für Lösungen der Statik nicht so geeignet. Dafür ist das Baumdiagramm (Wahrscheinlichkeitsbaum) viel besser geeignet, solange es nicht zu groß wird.

Geeignete Darstellung erleichtert die Lösung !

W-Baum



$A\cup B$	$A\cap B$
X 0,008	X 0,08 · 0,1 = 0,008
	X 0,08 · 0,9 = 0,072
	X 0,92 · 0,1 = 0,092
	0,172

Erläutern anhand des Baumdiagramms und 1000 Kfz: 8% haben Läufer (=80 Kfz), davon haben 10% Farbfehler (=8 Kfz), das entspricht 0,8%.
Hier gilt $P_A(B) = P(B)$, weil A und B unabhängig voneinander sind (im Baumdiagramm berücksichtigt!). Sie sind abhängig, wenn es z.B. am schlechten Lackierer liegt: dann treten die Fehler eher zusammen auf.

4a: Lsg.: P(A∩B) = P(A) · P(B) = 0,08 · 0,10 = 0,008
Aus den Knoten des Baumdiagrammes
Aufeinanderfolgende Äste multiplizieren (= UND)
Beispiel siehe oben

4b: Lsg. P(A∪B) = = 0,1 + 0,92 · 0,08 = 0,172
Aus den Knoten des Baumdiagrammes
Nebeneinanderliegen Äste addieren (= ODER)
$P(A\vee B)=P(\bar{A}B)+P(A\bar{B})+P(AB)$
oder $P(A\vee B)=P(\bar{A}B)+P(A)$

P(A∪B) aus der linken Spalte übernehmen. Erläutern anhand der Grafik: P(A∩B) muss wieder abgezogen werden, weil es in P(A)+P(B) doppelt vorliegt.
Hier kann man umgekehrt günstiger rechnen:
$P(A\vee B)=1-P(\bar{A}\bar{B})=1-0{,}9\cdot 0{,}92=0{,}172$
Veranschaulichen in Grafik und Baumdiagramm, Beweis durch Boolesche Algebra: $P(A\vee B)=1-P(\bar{A}\wedge\bar{B})$

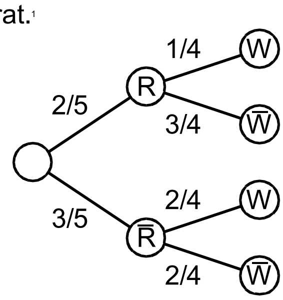
2) Allgemeine Lösung erst anschließend anschreiben.
allgemeiner Multiplikationssatz
„Ohne Zurücklegen" bringt die gegenseitige Abhängigkeit ein. Ohne diesen Hinweis genügt der spezielle Multiplikationssatz.

Multiplikationssatz
$P(A\cap B) = P(A)\cdot P_A(B)$
$P_A(B)$ = Wahrscheinlichkeit für B wenn A vorher eintrat.[1]

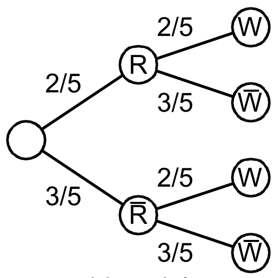
Additionssatz
$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

Allgemeiner Additionssatz

Aufgabe 5a: Gesucht ist P dafür, aus einer Urne mit 2 roten und 3 weißen Kugeln ohne Zurücklegen in zwei Zügen zwei rote Kugeln zu ziehen.
Geg. S={r; w}; P(A={r})=2/5; P_A(B={r})=1/4
Lsg: $P(A\cap B) = P(A)\cdot P_A(B)$
= 2/5 · 1/4 = 0,1



hypergeometrisch



binomial

Ültg: Wie oben bei $P_A(B) = P(B)$ gibt es u.U. Vereinfachungen:
Aufgabe 5b: Gesucht ist P dafür, aus einer Urne mit 2 roten und 3 weißen Kugeln mit Zurücklegen in zwei Zügen zwei rote Kugeln zu ziehen.
Lsg: $P(A\cap B) = P(A)\cdot P_A(B)$
= 2/5 · 1/4 = 0,1

spezieller Multiplikationssatz
„Unabhängig voneinander" heißt, dass es beim 2. Zug egal ist, wie der erste Zug verlief ist, z.B. durch Zurücklegen oder durch große Grundgesamtheit (10000 Schrauben)

Sonderfall $P_A(B)=P(B)$
⇒ A und B sind unabhängig
$P(A\cap B) = P(A)\cdot P_A(B)$

Sonderfall $P(A\cap B)=0$
⇒ A und B schließen sich aus
$P(A\cup B) = P(A) + P(B)$

spezieller Additionssatz
Gegenseitig ausschließen heißt, es kann nur einen geben. Ereignis A und das Ereignis B können nicht gemeinsam eintreten. z.B. „Sie ist schwanger oder nicht"

Rechnen mit Baumdiagrammen
1. Baumdiagramm aufstellen
2. Einzelwahrscheinlichkeiten für jeden Zweig aufstellen
3. Zweige suchen, die der Aufgabenstellung entsprechen
4. Wahrscheinlichk. von Knoten entlang der Zweige multiplizieren
5. Wahrscheinlichkeiten von parallelen Zweigen addieren

Vertiefung

Durch geschickte Anordnung des Systems kann die Lösung stark vereinfacht werden.
Die Knoten gleichartiger Ereignisse können zur Vereinfachung zusammengefasst werden. Betrachtet werden nur die günstigen Ereignisse. Wenn alle Anforderungen erfüllt sind, haben die folgenden Knoten die Wahrscheinlichkeit 1 und brauchen nicht mehr betrachtet zu werden.
AB Schleifmaschine und Getränkeabfüllanlage

Seitenumbruch

1 Bedingte Wahrscheinlichkeiten machen auch einfach erscheinende Probleme sehr verzwickt [SdW]7/97 S.8 „Der Trugschluss des Anklägers]

Register 2

Wahrscheinlichkeitsbaum

Zweck

Darstellung mehrstufiger Zufallsexperimente

Zeitbedarf ca 90‘

1) *Überleitung*

AB Schleifmaschine

AB Getränkeabfüllanlage

2) *Herleitung der Regeln siehe oben, hier nur Einüben. Begriffe wie binomial, hypergeometrisch, Erwartungswert, .. sind hier nicht das Lernziel, werden aber notiert,*

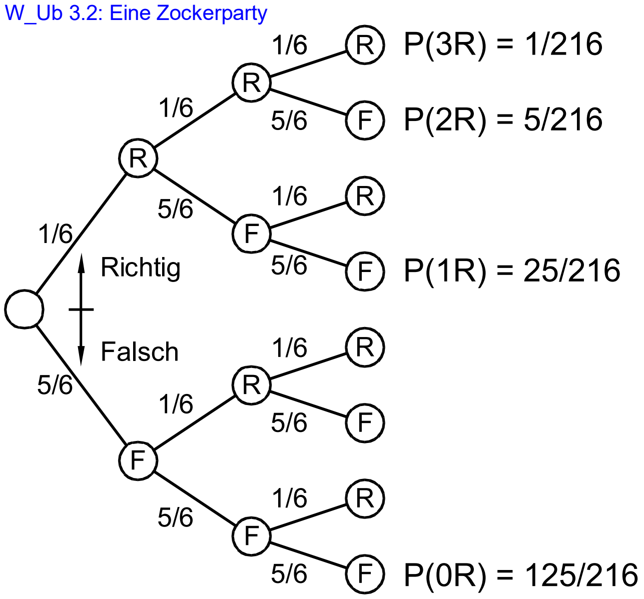
Übungen

W_Ub 2: W-Baum

W_Ub 3.1: Lotto II

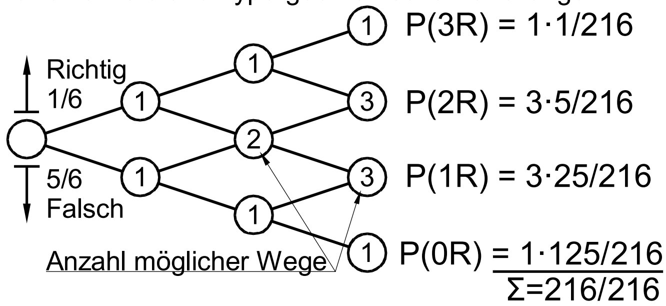
Allgemeiner W-Baum

W_Ub 3.2: Eine Zockerparty



Vereinfachter W-Baum

für binomiale und hypergeometrische Verteilungen



Weniger geeignet, wenn Reihenfolgen gesucht sind, z.B. erst 2 Mädchen, dann 2 Jungs

1) *Soll die beiden Darstellungen des W-Baumes und den Erwartungswert einführen*

Wahrscheinlichkeit_Ub: Kinder; Lotto; ..

Mit dieser Aufgabe soll auch die vereinfachte Darstellung des Wahrscheinlichkeitsbaumes bei unveränderlichen Einzelwahrscheinlichkeiten eingeführt werden. Dieser kann immer dann verwendet werden, wenn die Wahrscheinlichkeiten unabhängig von den vorherigen Ereignissen ist, z.B. beim Würfeln oder beim Losziehen „mit Zurücklegen“.

Beim ausführlichen Wahrscheinlichkeitsbaum müssen die Wahrscheinlichkeiten für die Knoten mit gleichem Ergebnis addiert werden. Beim vereinfachten Wahrscheinlichkeitsbaum findet man den Multiplikator für die Einzelwahrscheinlichkeit, indem man die Anzahl der Wege feststellt, die zu diesem Knoten führen. Die Multiplikatoren entsprechen den Zahlen aus dem Pascalschen Dreieck. Wenn Reihenfolgen gesucht sind (erst 2 Mädchen, dann 2 Jungs), muss man die Anzahl der erlaubten Wege (Multiplikatoren) selbst zählen.

einarbeiten: [Randow 1992] Vaterschaftstest

entspricht der Formel für den Schwerpunkt: http://lyrelda.de/lyrelda/lyrelda.php?eintrag_art=1&art=1&fach=2&themengebiet=4&thema=4&id=320#eintrag

Der Erwartungswert geht auf Christian Huygens (1629 – 1695) in [Huygens 1658] zurück. [Devlin 2008] S.106ff

Für den Erwartungswert werden die Ereignisse mit ihrer Wahrscheinlichkeit gewichtet.

Beispiel: Ein Speerwerfer wirft 4 mal 80m, beim 6ten Versuch fällt ihm der Speer aus der Hand fällt (0m). Der Erwartungswert seiner Wurfweite beträgt nicht den Mittelwert zwischen 0m und 80m, sondern zwischen 0m und 4 x 80m: μ = 0,2x0m + 0,8x80m = 64m.

Beispiel: Gewichtung von Klassenarbeiten. Bei symmetrischen normalverteilten Funktionen ist der Erwartungswert gleich dem Mittelwert.

Da der Mittelwert häufig keinen Sinn macht, spricht man vom Erwartungswert. Beispiele für Sinnlosigkeit: Klassenarbeit mit der Badewannenkurve als Ergebnis, 2 Maß und 2 Kalbshaxen, bei den meisten Würfelspielen (z.B. Kniffel = Würfelpoker).

Erwartungswert

Lsg Für jeden Euro erhält der Spieler

$$E=\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\cdot x_i$$

$$m=2\,€\cdot 3\cdot\left(\frac{1\cdot 5\cdot 5}{6\cdot 6\cdot 6}\right)+3\,€\cdot 3\cdot\left(\frac{1\cdot 1\cdot 5}{6\cdot 6\cdot 6}\right)+4\,€\cdot 1\cdot\left(\frac{1\cdot 1\cdot 1}{6\cdot 6\cdot 6}\right)=\frac{199}{216}\,€=92{,}1\,Ct$$

AB Übungen zur Wahrscheinlichkeit: kombinierte Wahrscheinlichkeiten2

W_Ub 4: Hepatitistest

Ein Hepatitistest erkenne 99% aller Gesunden und 98% aller Kranken. Die Durchseuchung mit Hepatitis betrage in der relevanten Bevölkerungsgruppe 0,1%. Nach [Randow 1992]; [Beck-Bornholdt/Dubben 2002] S.20: „Es gibt nur wenige Tests, die so genau sind ..“

1) *Nach einem Test teilt Ihnen der Arzt, dass Sie positiv seien. Wie groß sind Ihre Chancen, dass Sie doch gesund sind?*

$$P(gesund\ trotz\ positiv)=\frac{P(gesund\ ,\ positiv)}{P(krank\ oder\ gesund\ ,\ positiv)}$$

$$=\frac{0{,}999\cdot 0{,}01}{0{,}999\cdot 0{,}01+0{,}001\cdot 0{,}98}=\frac{0{,}00999}{0{,}00999+0{,}00098}=91{,}1\%$$

2) *Wie stehen Ihre Chancen bei einem Durchseuchungsgrad von 10%*

$$P=\frac{0{,}90\cdot 0{,}01}{0{,}90\cdot 0{,}01+0{,}10\cdot 0{,}98}=\frac{0{,}009}{0{,}009+0{,}107}=7{,}8\%$$

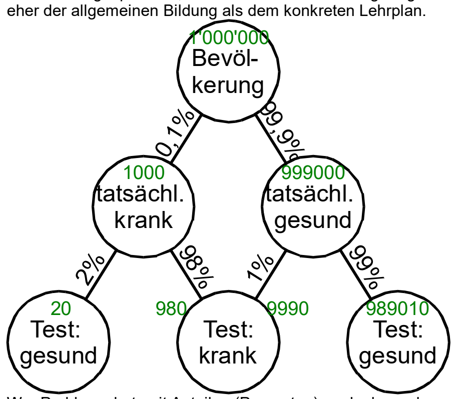
Die Aufgabe Hepatitistest führt zur Bayes'schen Formel nach Thomas Bayes (1702 – 1761), mit der ursprüngliche Schätzungen (Hier: Zuverlässigkeit des Testes) korrigiert werden können, wenn neue Erkenntnisse (Hier: Durchseuchungsgrad) vorliegen. Die Formel gewann erst durch Computer große Bedeutung. [Devlin 2008] S.152ff

Marc Dressler in [SdW] 10/2011: Von den Lebensdaten des Thomas Bayes kennt man nur die Inschrift auf seinem Grabstein: Gestorben am 7.April 1761 im Alter von 59. Wie verteilen sich die Wahrscheinlichkeiten auf die möglichen Geburtsjahre 1701 und 1702?

- Ohne weitere Info 268:96 gemäß der Anzahl der infrage kommenden Geburtstage
- Weitere Infos, die die Schätzung beeinflussen:
  - Bayes Eltern haben ihre Heiratserlaubnis am 23.10.1760 erhalten, sein Vater war Priester → ohne voreheliche Zeugung (Wahrscheinlichkeit) kann die Geburt etwa ab Juli 1761 erfolgen
  - Der gregorianische Kalender wurde in England erst 1752 eingeführt, vorher fand dort der Jahreswechsel am 24.03. statt, erst der 25.03 zählte zum Jahr 1702
  - → im Sept. 1752 wurden 14 Tage gestrichen

Bayes'sche Formel

Die Bayes'sche Formel spielt in der Versicherungsmathematik eine große Rolle. Für FTM wird dies angesprochen, aber nicht vertieft oder abgefragt. Auch die Hepatitis-Aufgabe dient eher der allgemeinen Bildung als dem konkreten Lehrplan.



Wer Probleme hat, mit Anteilen (Prozenten) zu denken oder zu rechnen, soll es mit konkreten Zahlen (grün) versuchen: Angenommen, eine Mio Menschen würden getestet..

Einbauen: Praktische Verwendung der Bayesschen Formel in Versicherungsmathematik [Crilly 2007] S.129

Stochastik_TA_W-Baum.odt

Seitenumbruch

Verteilungsmodelle

Smarties-Versuch ohne ...

Experimentelle Ermittlung von Verteilungen

Urwertliste

x	Strichliste	Anzahl	Anteil in %
0	IIIIII	7	
1	IIIIIIII	12	
2	IIIIIIIIIII	15	
3	IIIII	5	
4			
5			
	Summe:		

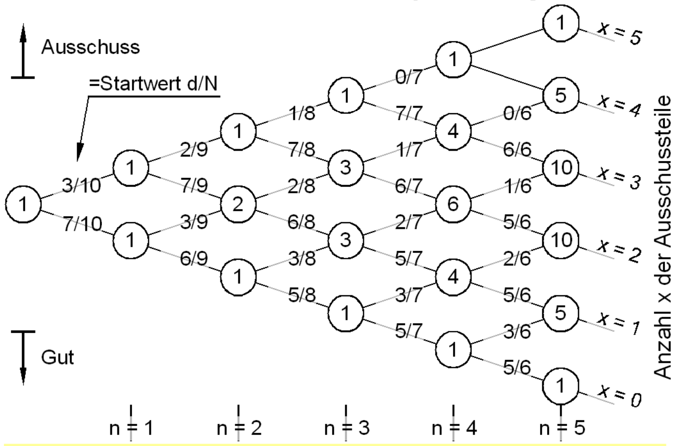
Histogramm

Einzelhäufigkeit

2) *Berechnung der Verteilungen*

Hypergeometrische Verteilung

Wahrscheinlichkeit ändert sich mit jedem Zug



Berechnung mit dem W-Baum

P(x) = P(ein Weg zu x) · P(Anzahl der Wege zu x)

x	0	1	2	3	4	5
P(x)	8,33%	41,67%	41,67%	8,33%	0%	0%

z.B.: $P(x=2)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot 10=0{,}417=41{,}7\,\%$

Notwendige Parameter

um den einfachen W-Baum eindeutig zu beschreiben

- n: Anzahl der Versuche, Stichprobenumfang
- N: Anzahl aller Teile im Lostopf
- d: Anzahl der Ausschussteile im Lostopf
- x: Gesuchte Anzahl von Ausschuss in der Stichprobe

N und d sind nötig, da die Wahrscheinlichkeiten im W-Baum von ihnen abhängen.

Berechnung mit Tabellenkalkulationen

P(x)=HYPGEOMVERT(x; n; d; N)

Anwendung

Stichproben (Schätzwert für die Grundgesamtheit); Lotto

Vertiefung

Smarties-Versuch berechnen

10 Schrauben

Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten g(x), aus einem Paket mit N = 10 Schrauben, davon d = 3 fehlerhaft, in einer Stichprobe vom Umfang n = 3 zufällig genau x = 0, 1, 2 oder 3 fehlerhafte Schrauben zu finden?

AB hypergeometrische Verteilung; AB, FO binomiale Verteilung: weglassen

Smarties-Versuche 1 und 2

... mit Zurücklegen

1) *Ültg: mit zunehmender Komplexität (5er mit Zusatzzahl) wird das Baumdiagramm zu unhandlich, deshalb sind andere Darstellungsfor - men nötig.*

AM Smarties (1 Großpackung für 10 Schüler), Frühstückstüten und Schalen

AB Verteilung_Hyper-Bin_AB_Smarties

Jeder Schüler nimmt 7 Smarties einer Farbe (Gutteile) und 3 Smarties einer anderen Farbe (Ausschuss) aus der Schale und legt sie in ein undurchsichtiges Tütchen.
1. Versuch: Jeder Schüler nimmt zufällig 5 Smarties ohne Zurücklegen aus der Tüte und stellt deren Farbe (Gut, Ausschuss) fest. Die Smarties werden noch gebraucht.
2. Versuch: Jeder Schüler nimmt 5mal hintereinander zufällig ein Smartie aus der Tüte, stellt die Farbe (Gut, Ausschuss) fest und legt es wieder hinein (mit Zurücklegen).
Alternative:Augenzahlen beim Würfelversuch (langweiliger, keine Ültg zu hypergeometrischer und binomialer Verteilung.
50 Versuche sind noch lange nicht aussagekräftig.

Bild Ergänzen

Summenhäufigkeit

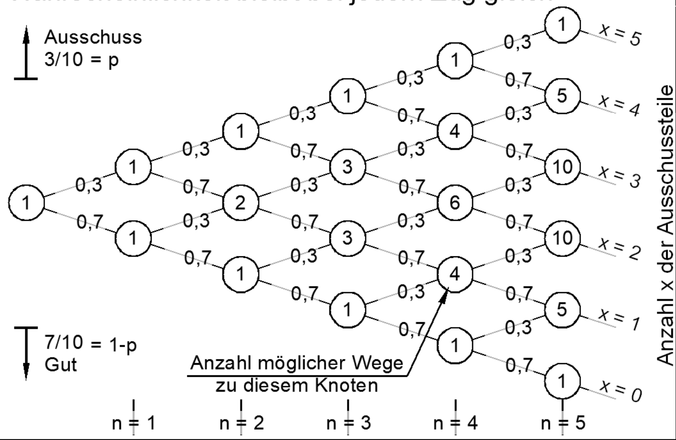
Beispiele: Lebensdauerstreukurven von Wälzlager, Profiltragkurve von Oberflächen

Smarties_FO mit ausführlichen W-Bäumen

3) *Querverweis vereinfachter Baum s.o.: Zockerparty, Lotto*

Binomiale Verteilung

Wahrscheinlichkeit bleibt bei jedem Zug gleich



- Alle Wege zum gleichen x haben die gleichen Zahlen in wechselnder Reihenfolge
- Die Anzahl der möglichen Wege zu einem Knoten liefert das Pascalsche Dreieck

FO Arithmetische Dreiecke

x	0	1	2	3	4	5
P(x)	16,81%	36,02%	30,87%	13,23%	2,84%	0,24%

z.B.: $P(x=2)=0{,}3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7\cdot 0{,}7\cdot 0{,}7\cdot 10=0{,}309=30{,}9\,\%$

4) *Welche Angaben sind nötig, um die Aufgabe (den vereinfachten W-Baum) statistisch umfassend zu beschreiben*
5) *Welche Größe muss man noch kennen, wenn man P(x) sucht? → x!*

- n: Anzahl der Versuche, Stichprobenumfang
- p: Wahrscheinl. eines Ausschussteils im Lostopf
- x: Gesuchte Anzahl von Ausschuss in der Stichprobe

Es genügt p, da p von N unabhängig ist.

P(x)=BINOMVERT (x, n; p; 0)

Stichproben mit großen Grundgesamtheiten
→ da ohne PC eine binomiale Verteilung leichter zu berechnen ist als eine hypergeometrische → Hinweis: kleinere Zahl der notwendigen Parameter

W_Ub 5: Große W-Bäume

Übungsblätter vereinheitlichen

Lotto

g(x=0)=0,435965; g(x=1)=0,4130195; g(x=2)=0,132,3780; g(x=3)=0,0176504 g(x=4) = 0,0009686197; g(x=5) = 0,0000184499, g(x=6) = 0,0000000715112

100 Schrauben

Aufgabe: Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten g(x), aus einem Paket mit N = 100 Schrauben, davon d = 8 fehlerhaft, in einer Stichprobe vom Umfang n = 5 zufällig genau x = 0, 1, 2, 3, 4 oder 5 fehlerhafte Schrauben zu finden, wenn jede gezogene Schraube sofort zurückgelegt und untergemischt wird?

Formeln ..

.. für die hypergeometrische Verteilung

$$P(x)=\frac{\binom{d}{x}\cdot\binom{N-d}{n-x}}{\binom{N}{n}}=\frac{\frac{d!}{x!\cdot(d-x)!}\cdot\frac{(N-d)!}{(n-x)!\cdot(N-d-n+x)!}}{\frac{N!}{n!\cdot(N-n)!}}$$

mit $\binom{N}{n}=\frac{N!}{n!\cdot(N-n)!}$

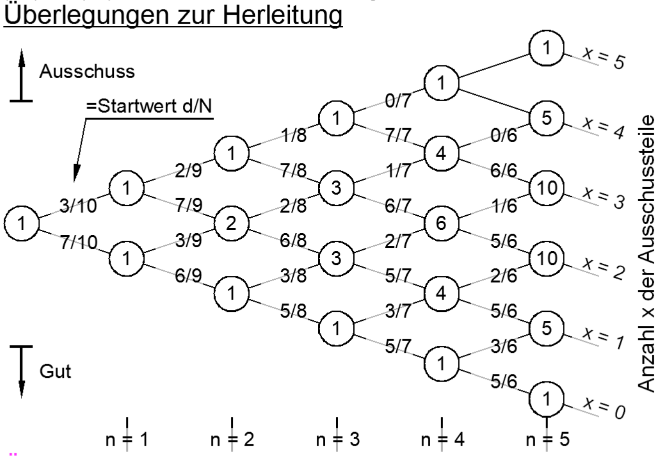
Veranschaulichung

Darin bedeuten

$$P(x=2)=\underbrace{\overbrace{\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}}^{\frac{d!}{(d-x)!}}\cdot\overbrace{\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}}^{\frac{(N-d)!}{(N-d-n+x)!}}}_{\frac{N!}{(N-n)!}}\cdot\underbrace{10}_{\frac{n!}{x!\cdot(n-x)!}}$$

N über n: Die Anzahl der Kombinationen aller Teile der Stichprobe
d über x: Die Anzahl der Permutationen der fehlerhaften Einheiten.
(N-d) über (n-x): Die Anzahl der Permutationen der guten Einheiten

Überlegungen zur Herleitung



Überlegung analog rechts

Beweis für $\sum_{n=1}^{N}\binom{N}{n}=n^N$

Taschenrechnerfunktionen

N-Fakultät: FACT 5 EXE
N über n = nCr(5 , 3) EXE

Larson-Nomogramm

zur grafischen Ermittlung der unteren Verteilungsfunktion (Summenfunktion)

nicht mehr unterrichten, stattdessen Berechnung am PC

.. für die binomiale Verteilung

$$P(x)=p^x\cdot(1-p)^{n-x}\cdot\binom{n}{x}$$

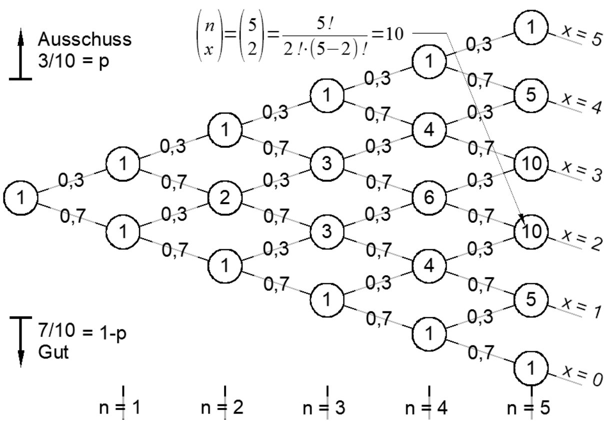
mit $p=\frac{d}{N}$ = Fehleranteil

und $n!=\prod_{i=1}^{n} n_i=1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot n$ für n>0 und 0! = 1

Darin bedeuten

$$P(x=2)=\overbrace{0{,}3\cdot0{,}3}^{=p^x=0{,}3^2}\cdot\underbrace{0{,}7\cdot0{,}7\cdot0{,}7}_{=(1-p)^{n-x}=(1-0{,}3)^{5-2}}\cdot\overbrace{10}^{=\binom{n}{x}=\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!\cdot(5-2)!}=10}$$

Die binomiale Verteilung ist einfacher als die hypergeometrische, weil durch das Zurücklegen der gezogenen Teile die Fehleranteile konstant bleiben. Die Binomialverteilung ist von der Größe der Grundgesamtheit unabhängig.



1) Vereinfachtes Baumdiagramm zeichnen.
2) Die W.-keit P(x=2 Ausschussteile) auf einem bestimmten Weg zu erreichen, liest man auf seinem Pfad im W-Baum ab. Darin ist (x=2)-mal die W.-keit p=0,3 für ein Ausschussteil und (n-x=5-2=3)-mal die W. (1-p=1-0,3=0,3) enthalten.
3) Um die W.-keit x=2 Ausschussteile auf einem beliebigen Weg zu ermitteln, muss man die obige W.-keit mit der Anzahl der möglichen Wege multiplizieren.
4) Wie viele Wege führen zum Knoten (n=5; x=2)? Dazu die Anzahl der Wege zu einem Knoten in den Kreis eintragen, beginnend ab dem Stamm. Es zeigt sich, dass die Anzahl der Wege gleich der Summe der beiden Vorläuferknoten ist. Die Darstellung entspricht einem Arithmetischen (Pascalschen) Dreieck und wird auch bei Polynomen verwendet.
5) Jeder Weg steht für eine Reihenfolge (Permutation) von 3 guten und 2 schlechten, also insgesamt 5 Teilen. Man kann n=5 Teile in n! = 1· 2 · .. · n bzw. 5! = 1 · 2 · .. · 5 = 120 verschiedenen Reihenfolgen auftragen. Da es aber gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge die Ausschussteile auftreten (bzw. der W-Baum nur eine Reihenfolge zulässt), müssen die Anzahl der Permutationen der Ausschussteile wieder herausgerechnet (durch n! = 2! =2 geteilt) werden. Dies gilt sinngemäß auch für die (n-x=5-2=3) Gutteile.
6) Eine Formel für die Anzahl der Weg zum Knoten (n; x) lautet also

$$\binom{n}{x}=\frac{n!}{x!\cdot(n-x)!}=\binom{5}{2}=10$$ ⇒ Taschenrechner nPr(5,2)

Kurz gibt man Binomialkoeffizienten in der Schreibweise n über x an

Permutationen von 2 in 5:
gggaa
ggaga
gagga
aggga
ggaag
gagag
aggag
gaagg
agagg
aaggg

siehe AB

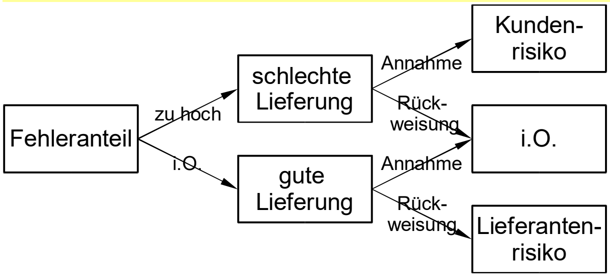
Einfach-Stichproben-Anweisung

n-c-Anweisung

Festzulegen bei einer Lieferung von N Teilen:

– Stichprobenumfang n
– maximal zulässige Anzahl c darin enthaltener fehlerhafter Teile
– Maßnahmen bei Überschreiten von c (fehlerhafter Lieferung)
  Stichprobenprüfung

Arten von Risiken



Welche Rolle spielt hier Bayes?

Höhe des Risikos

Fehleranteil		n-c = 100-2	50-2
	Lieferantenrisiko	Kundenrisiko	Kundenrisiko
P	P(Rückweise)	P(Annahme)	P(Annahme)
1 %	0,079	0,91	0,986
2 %	0,323	0,68	0,925
4 %	0,768	0,22	0,69
6 %	0,943	0,05	0,42
...			

Merkmale von n-c-Anweisungen

– messen keine erhöhte Fehleranteile, sondern erhöhen ihre Rückweisewahrscheinlichkeit.
– sichern den Abnehmer bei einem Los nicht ab, sondern sind nur für Serien von Losen geeignet.

Auswahl von n-c-Anweisungen

[Rinne 1991][S.238ff; DIN 40080] einarbeiten

oc-Funktionen

oc: Operationscharakteristiken
sind grafische Darstellung des Kundenrisikos

AQL-System

z.B. AQL 1,5 H normal Prüfniveau II

1,5: acceptable quality line = zuläss.Fehleranteil in % wird mit 90% Wahrscheinlichkeit akzeptiert

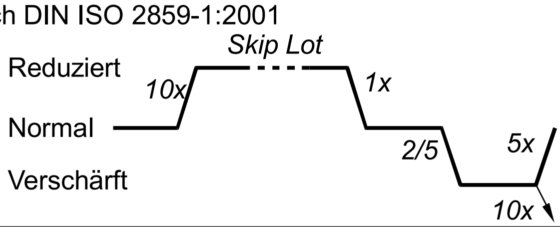
H für Losgröße 281 ... 500 EA
Kennbuchstabe für die n-c-Anweisung

normal
reduziert, normal und verschärft → Skiplot

II Prüfniveau
mittlerer Stichprobenumfang und Trennschärfe

Sprunganweisungen (Skip-Lot-Verfahren)

nach DIN ISO 2859-1:2001

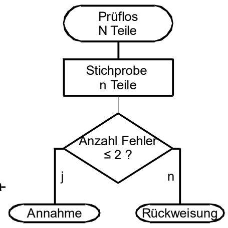


Sonstiges

$\bar{x}$ σ-Anweisungen, Wilrich-Nomogramm
sequentielle Stichprobenprüfung
Stichprobenumfang richtet sich nach dem Ergebnis der Prüfung (die Stichprobe wird häppchenweise genommen.)

grafische Darstellung

1) *Ihre Firma empfängt häufiger Container mit Schrauben. Erstellen Sie eine Prüfanwei sung für die die Kaufleute vom Wareneingang, wenn 2,5% Gewindefehler toleriert sind*



Einarbeiten: Betriebslehre für Techniker; Stichprobentabellen zur Attributprüfung 1973

2) *Prinzipielle Vorgehensweise*

Kaufleute: es kommt nur Gewindegrenzlehre in Frage
n-c-Anweisungen enthalten den Stichprobenumfang n, die maximal zulässige Anzahl c fehlerhafter Teile in der Stichprobe und die Maßnahmen bei Überschreiten der maximal zulässigen Anzahl von Fehlern. Dies kann sein: Zurückweisen des Loses, Informieren der Fertigungsplanung usw.
„Stichprobe" werden mit spitzen Halbrohren aus Säcken entnommen. Auch heutzutage nimmt man die Probe nicht von oben, sondern zufällig von jeder Palette. Um Bequemlichkeit und Vorlieben auszuschließen, werden vom Computer Zufallszahlen vorgegeben, oder nach DIN 53803-1:1991 Probenentnahme.. Container = große Grundgesamtheit: Binomialverteilung

3) *Welche Ergebnisse können auftreten, wenn der Container etwa 2% Fehler enthält?*

Man kann als Kunde 2 oder weniger Ausschussteile erwischen und beurteilt denContainer richtigerweise als gut, oder man erwischt zufällig mehr Ausschussteile und beurteilt die Lieferung fälschlicherweise als schlecht (Lieferantenrisiko).

4) *Welche Ergebnisse können auftreten, wenn der Container etwa 4% Fehler enthält?*

Man kann als Kunde 2 oder weniger Ausschussteile erwischen und beurteilt den Container fälschlicherweise als gut (Kundenrisiko), oder man erwischt zufällig mehr Ausschussteile und beurteilt die Lieferung richtigerweise als schlecht.

Bild Stichprobe

5) *Wie groß sind Kunden- und Lieferantenrisiko einer 100-2-Anweisung bei 2% bzw. 4% Fehleranteil*

AB Larson-Nomogramm gibt die Annahmewahrscheinlichkeit G aus P, x und n an.
Lieferantenrisiko und Rückweisewahrscheinlichkeit entsprechen einander, obwohl es genau genommen kein Lieferantenrisiko gibt, wenn der Fehleranteil größer als vereinbart ist.
Kundenrisiko und Annahmewahrscheinlichkeit entsprechen einander, obwohl es genau genommen kein Kundenrisiko gibt, wenn der Fehleranteil kleiner als vereinbart ist.
„Die Festlegung eines AQL-Wertes lässt keineswegs die Auslegung zu, dass der Lieferant das Recht hat, wissentlich auch nur eine fehlerhafte Einheit zu liefern. .. Es bleibt das Recht vorbehalten, jede fehlerhafte Einheit zurückzuweisen."[Klein 2008] S.977
Dagegen: Wenn ein Lieferant überzeugt ist, dass seine zurückgewiesene Lieferung einen niedrigen Fehleranteil hat, ist es vorstellbar, dass er sie heimlich umverpackt und erneut liefert.

6) *Schlagen Sie n-c-Anweisungen vor, die ein Los mit 2,5%-Fehlern mit 10% Wahrscheinlichkeit zurückweisen*

TabB

7) *Stellen Sie für die n-c-Anweisungen die Annahme wahrscheinlichkeiten gegen die Fehleranteile grafisch in einem Schaubild dar.*

FO, AB Operationscharakteristiken verschiedener Einfachstichproben

a) *oc-Linien beschriften*
b) *Lieferanten- und Kundenrisiko eintragen*
c) *Trennschärfe erklären*

8) *Ültg: für die Annahmewahrscheinlichkeit 90% gibt es ein aus gearbeitetes System, das AQL-System. Tragen Sie im Larson-Nomo - gramm die n-c-Paare für AQL 2,5 normal/verschärft Prüfniveau II ein*

Praktische Hinweise siehe [Geiger 1998]

Vereinbart werden der zulässige Fehleranteil (AQL-Wert) und das Prüfniveau. Die Stichprobengröße ergibt sich aus der Losgröße. Mit steigender Losgröße wird größerer Aufwand akzeptabel und die Trennschärfe erhöht.
Es sind auch doppelte und siebenfache Prüfungen möglich.

Je größer die Stichprobe, desto genauer das Ergebnis (Trennschärfe), aber desto größer der Aufwand.
III hat einen größeren Stichprobenumfang und größere Trennschärfe

Norm nach [Klein 2008][, S.977
Die Prüfanweisungen beginnen mit normal und pendeln dynamisch zwischen.

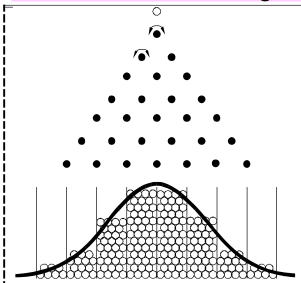
– normal - reduziert: 10 aufeinanderfolgende Lose angenommen, bzw. in 10 solcher Lose wurde eine max. Fehlerzahl nicht überschritten.
– reduziert - Skip Lot: nachdem mehrere Lose angenommen wurden, können Prüfungen übersprungen werden
– reduziert - normal: 1 Los zurückgewiesen
– normal - verschärft: 2 von 5 aufeinanderfolgenden Lose zurückgewiesen
– verschärft - normal: 5 aufeinanderfolgenden Lose angenommen
– verschärft - Prüfungsabbruch: 10 aufeinanderfolgenden Lose abgelehnt

Voraussetzung ist immer eine stabile Produktion. Wenn dort etwas umgestellt wird, beginnt man wieder mit normal. Es gibt auch Systeme, bei denen nach einer Rückweisung das Los auf Kosten des Herstellers zu 100% geprüft werden muss.

[Geiger 1998]: „Wer es nur mit qualitativen Merkmalen zu tun hat, wer von seinen Kunden .. verpflichtet wird oder selber glaubt, das sei die beste Methode, .. muß .. sich mit einer zweckmäßigen Festlegung des Schlüsselwertes AQL für die Auswahl der Stichprobenanweisungen.. genau befassen. ... Ganz allgemein muß er aus dem gewonnenen Wissen erkennen, wie wenig Aussagemöglichkeiten diese Verfahren bei einigermaßen wirtschaftlichen Stichprobenumfängen haben. .."

Stochastik_TA_Stichprobenanweisung.odt

Die Normal-Verteilung



1) *Entwicklung der Glockenkurve aus Galtons Nagelbrett*
z.B.

Lagerspiel
Schwingungen im Werkstück
Vibrationen der Maschine
Temperaturschwankungen
usw.

Viele natürliche und technische Prozesse streuen nach der Normalverteilung.

Glockenkurve, Standardverteilung, Gaußverteilung
kurze Geschichte der Normalverteilung → [Crilly 2007]
FO oder TA Galtonbrett, Einflüsse beim Drehen

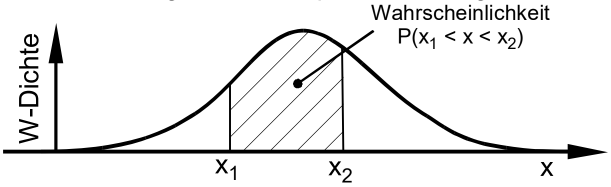
2) *Welche Verteilung wird hier entstehen?*

Galtons Nagelbrett ist ein materialisierter Wahrscheinlichkeitsbaum, der an jedem Knoten die Wahl lässt zwischen zwei Ereignissen, z.B. Größer oder Kleiner. Da die Wahrscheinlichkeit an jedem Knoten gleich ist, handelt es sich um eine Binomial-Verteilung.

FO Verteilung Binomial→Normal - Binomialverteilungen bei steigender Stichprobenzahl

Mit steigenden Stichprobenumfang nähert sich die Form der Verteilung immer mehr der idealen Glockenkurve. Besonders gut erkennt man sie in einer Ausschnittvergrößerung.
C.-F. Gauß (1777-1855) hat festgestellt, dass die Darstellung natürlicher Größen (z.B. den Durchmessern von Nüssen) zu einer Glockenkurve führt. Natürliche Prozesse hängen oft von sehr vielen Faktoren ab, die das Ergebnis nach oben oder nach unten beeinflussen. Die Faktoren entsprechen den Knoten im binomialen Wahrscheinlichkeitsbaum.
Die Glockenkurve und die Standardabweichung war schon vor Gauß bekannt geworden durch Abraham de [Moivre 1733] (1667-1754), der auch die Standardabweichung fand. Vorarbeiten veröffentlichte 1713 Nikolaus Bernoulli (1687-1759).

= Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomial-Verteilung bei unendlich großen Stichprobenumfängen



Die Form der Binomialverteilung hängt nicht von der Fehlerwahrscheinlichkeit ab, wenn der Stichprobenumfang groß genug gewählt wird.
FO Binomial-Verteilungen bei steigender Stichprobenzahl
AM, FO Zehnmarkschein

Bedeutung der Kurve verdeutlichen

c't 3/97: Artikel über Internet-Shopping „der typische Kaufhof-Kunde ist 41Jahre alt und weiblich“ Beschreiben sie die Situation, wenn der Mittelwert 41 eine Standardabweichung von 1 oder von 10 Jahre hat.

Aussagen der „Glockenkurve“

für quantitative Merkmale, z.B. Messwerte:

Für diskrete Merkmale kann die Normalverteilung nur Schätzungen liefern, weil sie nur die binomiale Verteilung, diese die hypergeometrischen Verteilung annähert; Normalverteilung gilt für unendlich große Stichprobenumfänge, die es real nicht gibt. Trotzdem wird die Normalverteilung zugrunde gelegt, weil sie einfach zu handhaben ist.

X-Achse: Messwerte

1) *Die Normalverteilung soll zur Untersuchung einer großen Stichprobe dienen. Wo werden die Messwerte eingetragen?*
2) *Welchen Informationen können aus der Kurve gezogen werden?*
3) *Welche Aussage macht die Höhe der Kurve?*

Y-Achse: Wahrscheinlichkeitsdichte

die Höhe der Kurve sagt uns (!) nix!

FO Binomial-Verteilungen bei steigender Stichprobenzahl
Je größer der Stichprobenumfang wird, desto kleiner wird der Maßstab der y-Achse. Bei unendlich vielen Stichproben wäre die Kurve flach. Veranschaulichung: Die Wahrscheinlichkeit, einen Wert 50,123456...mm zu finden, ist auch bei sehr vielen Versuchen gleich 0.

Fläche: Wahrscheinlichkeiten

– stecken in der Fläche der Glockenkurve
– Gesamtfläche hat die Wahrscheinlichkeit 1 =100%

4) *Wie kann man dann Wahrscheinlichkeiten aus der Kurve ermitteln?*
Wahrscheinlichkeiten sind nur für Bereiche möglich und sinnvoll, weil die Einzelwahrscheinlichkeit für einen Messwert zu gering ist. Schon bei den Maschinenfähigkeitsuntersuchungen haben wir keine Wahrscheinlichkeiten für Einzelwerte, sondern für Klassen angegeben.
Sie werden mit der Verteilungsfunktion, mit Tabellen oder mit dem Taschenrechner ermittelt.
[EuroTabM46] S…280

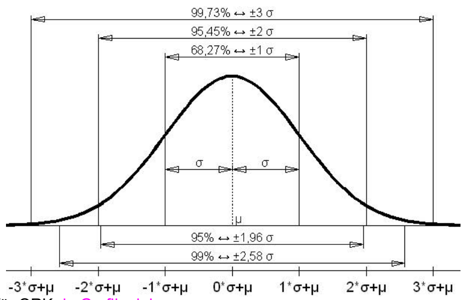
Parameter der Normalverteilung

.. reduzieren die Datenmenge erheblich

1) *Welche Parameter sind nötig, um die Glockenkurve zu beschreiben?*

Messreihe	hypergeom	binomiale	(Normal-)Verteilung
alle Messwerte	N, d, n und x	P, n und x	(σ, μ)

Wert ganz oben für 6-Sigma-Fertigung



Werte unten für QRK, in Grafik einbauen

2) *Mit der Glockenkurve beginnen und Einträge nach und nach ergänzen.*
→ *[EuroTabM46] S.279: Wahrscheinlichkeiten*

Zwischen den beiden Wendepunkten liegen 68,27% der Fläche, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiger Wert der Verteilung zwischen μ±σ liegt, ist 68,27%. Man spricht auch von 2σ und meint ±1σ bzw. 68,27% Wahrscheinlichkeit.
Bei 8σ oder mehr wird nicht die Toleranz erhöht, sondern es muss die Standardabweichung (Streuung) der Fertigung verringert werden. 95%- und 99%-Wahrscheinlichkeiten sind wichtig für Regelkarten (Warn- und Eingriffsgrenzen).
Es wird vorausgesetzt, dass die Verteilungsart Normalverteilung angegeben ist.

Man rechnet auch mit der Varianz σ² bzw. s².

Unterscheidung σ(n) - σ(n-1), Bevorzugung σ(n-1).

Mittelwert μ bzw. x̄

= Maß für die Lage der Fertigung

Mittelwert gibt die seitliche Lage der Glockenkurve an.
μ wird bei Grundgesamtheit verwendet. x̄ gilt bei Stichproben (eigentlich immer außer bei 100%-Prüfungen) und ist ein Schätzwert für μ. In der Literatur wird μ und x̄ oft verwechselt. In der Berechnung gibt es keinerlei Unterschiede.

Standardabweichung σ bzw. s

= Maß für die Streuung der Fertigung

Die Standardabweichung ist der Abstand vom Mittelwert bis zum Wendepunkt.

3) *Wie kann man eine gute und schlechte Maschine unterscheiden?*
σ für die Grundgesamtheit, s für Stichproben.
Die Breite der Kurve muss angegeben werden, aber die Gesamtbreite ist unendlich und deshalb nicht geeignet. Als markanter Punkt bietet sich der Wendepunkt an; bei ihm geht eine Linkskurve in die Rechtskurve über u.u. (Vgl. Motorradfahrer bei Kurvenfahrt).

Berechnung der Parameter	mit Tabellenkalkulationen	mit Taschenrechner	mit W.-Netz
Mittelwert x̄ bzw. μ	=MITTELWERT (Messwerte)	$\bar{x}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$	
Standardabweichung s bzw. σ	=STABW(Messwerte)	$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$	

Vertiefung

1) *Berechnen Sie Mittelwert und Standardabweichung.*
Norm_Ub Aufg.1: Parameter von normalverteilten Messreihen bestimmen

Anpassungstest nach DIN ISO 5479

In der Produktion hat man meistens mit Prozessen zu tun, denen eine unbekannte Verteilunge zugrunde liegt. Der Spezialfall der Normalverteilung tritt eher selten auf. Viele Analysen auf der Basis der traditionellen Verfahren sind fehlerhaft.

Prüft, ob eine Normalverteilung für eine gegebene Menge von Messwerten passend ist. QZ 04/99 S.458ff. Wenn sie nicht passt, können die Daten mit einer Transformation nach Johnson transformiert werden und dann wie normalverteilte Prozesse behandelt werden. Excel bietet dazu Funktionen an.

ZSB: Grenzwerte der Normalverteilung

ZSB Zufallsstreubereiche

Beantworten die Fragen: Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt ein Maß in der Toleranz bzw. wie muss die Toleranz liegen, damit ein Maß mit gegebener Wahrscheinlichkeit darin liegt

1) *Wdh.: Mit welchen Parametern geben Sie die Streuung bzw. die Lage Ihrer Fertigung an?*
Rhetorisch: Was können sie mit diesen Parametern anfangen?

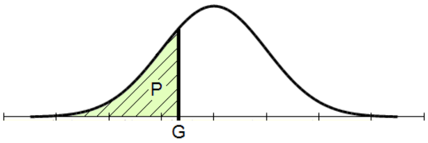
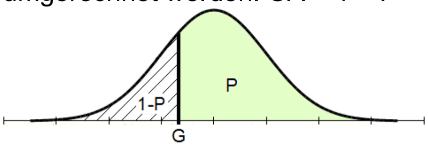
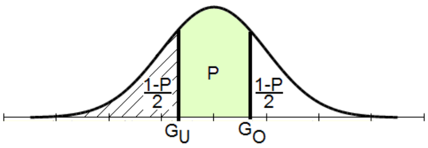
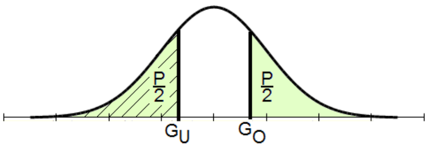
Norm_Ub.2 Unter- und Überschreitungsanteile

Norm_Ub 3: Grenzwerte für vorgegebene Anteile

Veranschaulichung des Unterschreitungsanteils:

FO Lebensdauerstreukurve von Wälzlagern (x- und y-Achse vertauscht)

Man unterteilt die Beispiele auch in einseitigbzw. beidseitig abgegrenzt. Die Abkürzung G für Grenzwerte ist in der statistischen Literatur nicht üblich. Aber die Schüler kennen diese Abkürzungen von Toleranzen, die wiederum eine typische Anwendung sind.

	Anteile aus Grenzwerten	Grenzwerte aus Anteilen
	Geg.: G; Ges.: P Welcher Anteil P der Messwerte x liegt unter (über, innerhalb, außerhalb) der Grenzwerte G?	Geg.: P; Ges.: G Wo liegen die Grenzwerte G, sodass der Anteil P der Messwerte x unter (über ..) ihnen liegt.
Unterschreitungsanteil .. rechnen Excel&Co direkt aus  	Wie groß ist der Anteil p unterhalb des Grenzwertes x? $p(x < G) =$ $= \text{NORMVERT}(G;\ \mu;\ \sigma;\ 1)$ Excel ab ca. 2010: $= \text{NORM.VERT}(G;\ \mu;\ \sigma;\ 1)$	Wo liegt der Grenzwert x, unterhalb dessen ein Anteil p liegt? $G\ (P) =$ $= \text{NORMINV}(P;\ \mu;\ \sigma)$
Überschreitungsanteil muss in Unterschreitungsanteil (UA) umgerechnet werden: UA = 1 – P  	Wie groß ist der Anteil p oberhalb des Grenzwertes x? $P(x > G) =$ $1 - \text{NORMVERT}(G;\ \mu;\ \sigma;\ 1)$ = 1 – Unterschreitungsanteil (G)	Wo liegt der Grenzwert x, oberhalb dessen ein Anteil p liegt? $G\ (P) =$ $= \text{NORMINV}(1\text{-}P;\ \mu;\ \sigma)$
Zwischenanteil (Gutteile) wird mit 2 UA gerechnet: $G_U \leftrightarrow \frac{1-P}{2}$; $G_O \leftrightarrow 1-\frac{1-P}{2}=\frac{1+P}{2}$  	Wie groß ist der Anteil p zwischen den Grenzen G_U und G_O? $P(G_U < x < G_O) =$ $+ \text{NORMVERT}(G_O;\ \mu;\ \sigma;\ 1)$ $- \text{NORMVERT}(G_U;\ \mu;\ \sigma;\ 1)$ = UA (G_O) – UA (G_U) (auch asymmetrische Grenzen)	Wo liegen die symmetrischen Grenzen G_U und G_O innerhalb deren ein Anteil p liegt? $G_U\ (P) =$ $= \text{NORMINV}((1\text{-}P)/2;\ \mu;\ \sigma)$ $G_O\ (P) =$ $= \text{NORMINV}((1+P)/2;\ \mu;\ \sigma)$ (nur für symmetrische Grenzen)
Ausschussanteil wird mit 2 UA gerechnet: $G_U \leftrightarrow \frac{P}{2}$; $G_O \leftrightarrow 1-\frac{P}{2}$  	Wie groß ist der Anteil p außerhalb der Grenzen G_U und G_O? $P(x < G_U \cup G_O < x) =$ $1 - \text{NORMVERT}(G_O;\ \mu;\ \sigma;\ 1)$ $+ \text{NORMVERT}(G_U;\ \mu;\ \sigma;\ 1)$ = 1 – Zwischenanteil (G_U; G_O) (auch asymmetrische Grenzen)	Wo liegen die symmetrischen Grenzen G_U und G_O außerhalb deren ein Anteil p liegt? $G_U\ (P) =$ $= \text{NORMINV}(P/2;\ \mu;\ \sigma)$ $G_O\ (P) =$ $= \text{NORMINV}(1\text{-}P/2;\ \mu;\ \sigma)$ (nur für symmetrische Grenzen)

Die beteiligten Wahrscheinlichkeiten P (grün) müssen für Excel&Co in den Unterschreitungsanteil UA (schraffiert) umgerechnet werden.

Vorgehensweise:
Ich lasse die Schüler im PC-Raum Tabellenkalkulationsblätter vorbereiten, mit denen sie solche Aufgaben auch in der Klassenarbeit lösen können. Aber das Blatt kann nur dazu dienen, dass man die Formeln nicht auswendig können muss, die Zusammenhänge rundherum sollte man begriffen haben: Unterschied zwischen Unter- und Überschreitung; warum man bei Gutteilen zwei Grenzen benötigt; die Sache mit der Funktion (P aus G) und der Umkehrfunktion (G aus P); dass die gesuchte (Funktion) oder gegebene (Umkehrfunktion) Wahrscheinlichkeit P (grün dargestellt) immer auf den Unterschreitungsanteil(UA) (schraffiert) zurückgeführt werden muss, weil Tabellenkalkulationen eben nur mit UA rechnen.
Es nützt auch hier nichts, den Aufgabentext nach Schlagworten abzusuchen ...

Norm_Ub 2 und 3

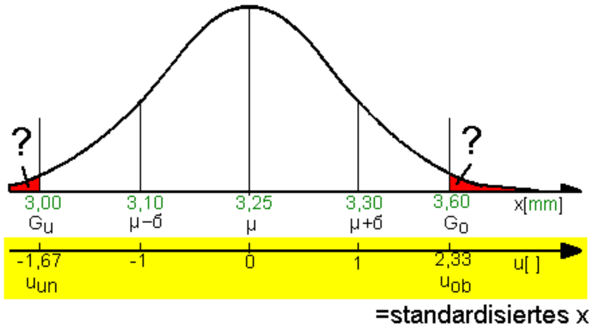
Vertiefung

Zufallsstreubereiche ZSB der Messwerte x (alt)

Beantworten die Fragen: Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt ein Maß in der Toleranz bzw. wie muss die Toleranz liegen, damit ein Maß mit gegebener Wahrscheinlichkeit darin liegt

Standardisierte Normalverteilung

Aufg. 1: Verteilung von Unterlagscheiben



Umrechnung

$u=\frac{x-\bar{x}}{s}$ → $x=u\cdot s+\bar{x}$

Wdh.: Mit welchen Parametern geben Sie die Streuung bzw. die Lage Ihrer Fertigung an?
Rhetorisch: Was können sie mit diesen Parametern anfangen?

AB Zufallsstreubereiche Aufgabe 1

Deutsche Gesellschaft für Qualität e.V., Pf 50 07 63, 60395 Frankfurt am Main. In den Tabellen ist für positive u der Überschreitungsanteil Q(u) und der Unterschreitungsanteil G(u) aufgelistet. Die Werte für negative u ergeben sich sinngemäß (siehe Bild). Auf der letzten Seite sind häufig gebrauchte Werte mit genaueren Ergebnissen aufgelistet. Die Tabellen sind in jedem besseren Buch für Statistik enthalten.
Da Tabellen nicht für alle möglichen Mittelwerte und Standardabweichungen erstellt werden können, muss man die Werte einer Messreihe standardisieren. Dazu wird berechnet, wie weit die Werte vom Mittelwert μ entfernt sind, und zwar in der Einheit *Standardabweichung*. Im Bild ist der Mittelwert μ=3,25 und die Standardabweichung σ=0,15. Der Wert 3,40 wird zu u = +1 standardisiert, weil er eine Standardabweichung über dem Mittelwert liegt, dementsprechend entspricht 3,00 u = -1,67.
Ein Wert x wird jetzt nicht mehr absolut angegeben, sondern mit seiner Abweichung von Mittelwert seiner Menge. Die Abweichung wird nicht in mm, sondern in Vielfachen der Standardabweichung angegeben.

AB DGQ-Tabelle 11, Normalverteilung „Wilrich-Nomogramm für ..“

Excel & Co: =STANDARDISIERUNG (x; μ; δ) ↔ ??

Ermittlung der ZSB (x)

(nicht vollständig)

In der Tabelle ist zu beachten, dass bei u<0 Q(u) und G(u) vertauscht werden muss, da nur der Betrag von u abgelesen werden kann.

Beim Casio ist zu beachten, dass die standardisierte Variable u auch mit x abgekürzt wird.

DGQ-Tabelle 11 Normalverteilung

Geg: x; Ges: P
Geg: P; Ges: x

Casio FX-880P

6210 <u>LIB</u>: Geg: x; Ges: P

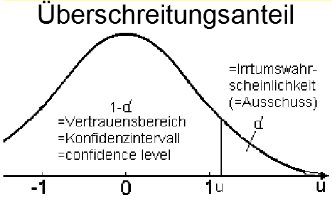
„Upper probality N(0,1²)“ (0=Mittelwert, 1²=Varianz) berechnet das obere W.-integral. Wie groß ist P, x_{stand} (=u!) zu überschreiten?

6410 <u>LIB</u>: Geg: P; Ges: x

„Percentage points N(0,1²)“ (0=Mittelwert, 1²=Varianz). Wie groß muss x sein, um es mit P zu überschreiten?

Einseitig abgegrenzt

Überschreitungsanteil



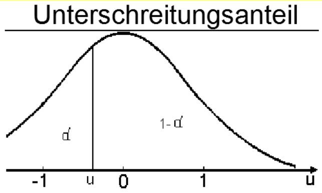
Aufgabe 2a
α = Q(u=3) =0,0013499 für u>1
1-α = G(u=3) =0,9986501

Aufgabe 4a
G(u)=75% ⇒ u=0,67449
$x\le m+|u|\cdot s$

Aufgabe 2a
α = p(x=3) für alle u
1-α = 1-p(x=3)

Aufgabe 4a
P=25% ⇒ x=u=0,67449
$x\le m+u\cdot s$
x ≤ 58+1·0,674=58,674HRC

Unterschreitungsanteil



Aufgabe 2b
α = Q(|u=-2,5|) =0,99 für u<1
1-α = G(|u=-2,5|)=0,00621

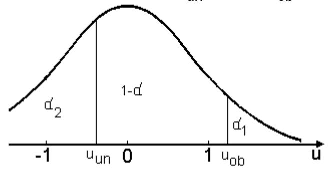
Aufgabe 5a
G(u)=80% ⇒ |u|=0,8416
$m-|u|\cdot s\le x$

Aufgabe 2b
1-α = p(x=-2,5) für alle u
α = 1-p(x=-2,5)

Aufgabe 5a
P=80% ⇒ x=u=-0,84162
$m+u\cdot s\le x$
x ≥ 58-0,84162·1=57,158HRC

Beidseitig abgrenzt

1-α zwischen u_{un} und u_{ob}



Aufgabe 2c
1-α = G(|u_{un}=-1,5|) - Q(|u_{ob}=1,5|)
α = Q(|u_{un}|) + Q(|u_{ob}|)

Aufgabe 6a
Q(u)=20% ⇒ |u|=0,8416
G-Q=60% ⇒ |u|=0,8416
$m-|u_{un}|\cdot s\le x\le m+|u_{ob}|\cdot s$

Aufgabe 2c
1-α = p(x_{un}=-1,5) - p(x_{ob}=1,5) =0,93319 - 0,066807 = 0,866283
α = 1-p(x_{un}=-1,5) + p(x_{ob}=1,5) =0,133717

Aufgabe 6a
P=20/80% ⇒ x=u=±0,84162
$m+u_{un}\cdot s\le x\le m+u_{ob}\cdot s$
57,15838 ≤ x ≤ 58,84162

Wahrscheinlichkeitsnetz

Im Wahrscheinlichkeitsnetz wird die y-Achse derart skaliert, dass die Normalverteilung als Gerade erscheint.

Ein: neben der Ermittlung aus Tabellen und Taschenrechner gibt es auch noch eine grafische Lösungsmöglichkeit.

AB Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsnetzes

AB Zufallsstreubereiche Aufgabe 4

Im Wahrscheinlichkeitsnetz wird die y-Achse derart skaliert, dass die Normalverteilung als Gerade erscheint. Die Messergebnisse werden für eine Häufigkeitsverteilung aufbereitet und dann ins Wahrscheinlichkeitsnetz eingetragen. Über die Balken des Histogrammes wird eine Gerade nach Augenmaß gezogen. An den Rändern des W-Netzes kann man Standardabweichung, Ausschussanteile usw. ablesen.
Nicht zuletzt sollen die Schüler auch sehen, wie eine verzerrte Skalierung entsteht und das Leben vereinfachen kann.

<u>Entwicklung des W-Netzes</u>

1) Eintragen der x-Werte, Wdh. der Normalverteilung
2) Wdh. der Wahrscheinlichkeitsfunktion. Aus ihr kann man Unterschreitungsanteile grafisch ablesen. Leider ist die S-Kurve der W-Funktion nur schwer zu zeichnen. Ziel der folgenden Operation ist es deshalb, die Kurve so zu verzerren, dass sie eine Gerade ergibt. Dazu muss die Skalierung der y-Achse verzerrt werden.
3) Wenn man neben die y-Achse die Glockenkurve zeichnet und die x-Werte einträgt, ergibt sich eine Gerade, weil beide Skalen dieselben Zahl linear verteilt tragen.
4) Um Unterschreitungsanteile ablesen zu können, standardisiert man zunächst die senkrechten x-Werte (⇒u) und trägt dann die Unterschreitungsanteile auf (Ableseübung aus DGQ-Tabelle 11 oder Taschenrechner).
5) Hier könnte die Aufgabe schon gelöst werden, wenn die Skalierung der y-Achse in [%] genau genug wäre.

Übungen

AB Zufallsstreubereiche Aufgabe 1-3 grafisch nachvollziehen

Wie viel Überschreitungen des oberen Grenzmaßes und wie viel Unterschreitungen des unteren Grenzmaßes sind bei den Maschinenfähigkeitsuntersuchungen zu erwarten?

<u>Histogramm im W-Netz</u>

Aufg.: Werten Sie die Maschinenfähigkeitsuntersuchungen Merkmal 5 und 1 im Wahrscheinlichkeitsnetz aus.
- Ermitteln Sie Mittelwert, Standardabweichung und die Anteile, die unterhalb bzw. oberhalb der Toleranzen liegen.
- Vergleichen Sie die Werte mit den berechneten.

Ültg: Die graphische Auswertung macht wenig Sinn, wenn vorher $\bar{x}$ und s ausgerechnet werden müssen.
Vorführen: Eintragen von Wellengelenkschaft Merkmal 5 Durchmesser 20h7: Klassen einteilen und eintragen, Gerade durch die Klassenmitte abschätzen und eintragen, Werte ablesen.
Lösung Merkmal 1: MEANX = $\bar{x}$ = 26,064; SDX = s(n-1) = 0,01852: G_o = 26,1; u_{ob} = 1,9442222; p(>u_{ob}) = 0,025934; G_u = 26; u_{un} = -3,4563950; p(<u_{un}) = 1 - 0,99973 = 0,00027
Wie groß müsste die Toleranz nach den Maschinenfähigkeitsuntersuchungen sein, um 0,5% Ausschuss zu erreichen? Die Messreihen werden als normalverteilt angenommen.
Lösung Merkmal 1: MEANX = $\bar{x}$ = 26,064; SDX = s(n-1) = 0,01852;u(p(>u)=0,0025) = 2,807
x = Ao = - Au = 2,807· 0,01852 = 0,0520 ⇒ T = 0,104

Übungen

AB Maschinenfähigkeitsuntersuchungen grafisch durchführen

<u>Schnellauswertung</u> <u>nicht unterrichten</u>

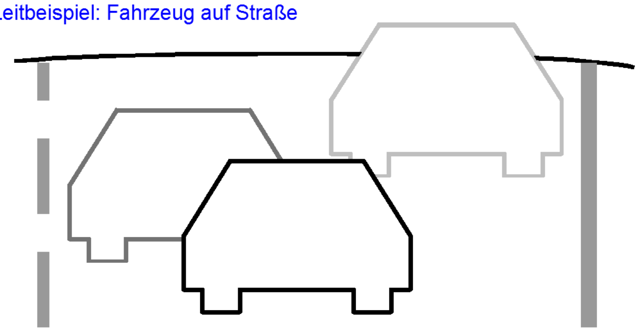
nur zur Beobachtung grober Trends

Im Wahrscheinlichkeitsnetz können auch Stichproben geringen Umfanges ausgewertet werden. Dazu wird jeder einzelner Messwert eingezeichnet. Seine Wahrscheinlichkeit wird aus einer Tabelle entnommen, die den Werten nach der Rangfolge steigenden Wahrscheinlichkeiten zuordnet. (DGQ Tabelle 12: Eintragung geordneter Stichproben in das Wahrscheinlichkeitsnetz, siehe Baumann, LFB QS 1996)

Begründung für SPC

SPC = Statistische Prozesskontrolle

Leitbeispiel: Fahrzeug auf Straße



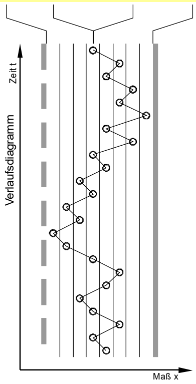
Ein Fahrzeug (Fertigungsprozess) sollte nicht die ganze Fahrbahnbreite (Toleranz) ausnutzen.

Datenerfassung

Urwertliste

schwer lesbare Zahlenreihen

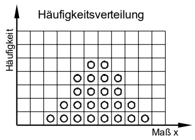
Verlaufsdiagramm



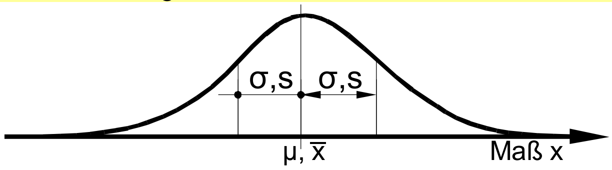
Reduzierung der Daten

Häufigkeitsverteilung im Histogramm

vereinfacht die Verlaufswerte



Normalverteilung



vereinfacht die Häufigkeitsverteilung auf 2 Parameter:

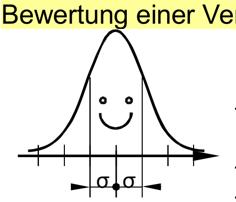
Wo liegt die Mitte des Prozesses (=Mittellage)

= Mittelwert μ bzw. $\bar{x}$

Wie stark streut / schwankt der Prozess?

= Standardabweichung σ bzw. s

Bewertung einer Verteilung

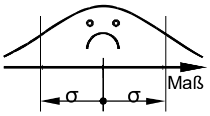


Prozesse mit geringerer Streuung: bedeuten

–weniger Risiko = geringere Prüfkosten

–bessere Funktionalität

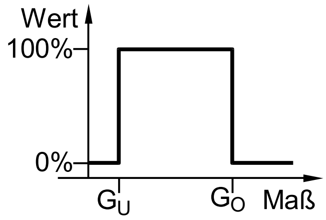
–größere Wiederholgenauigkeit



gute Streuung

schlechte Streuung

1) *Klassische Toleranzen kennen nur die Qualität 0 und 100%. Lehrlinge haben Mühe, die Logik dieses Systems zu verstehen, und haben recht. Warum?*



Klassische Grenzmaßtolerierung

klassische Grenzmaßtoleranzen

- Abmaß
- Allgemeintoleranzen
- ISO-Toleranz

TX SPC_Begründung:

2) *Wie reagieren Sie, wenn das Fahrzeug vor Ihnen Schlangenlinien fährt und die ganze Fahrbahnbreite ausnützt? Es verlässt seine Spur nicht!*

Ein Fahrzeug hat eine ganze Spur zur Verfügung, die Fahrbahnmarkierungen entsprechen den Grenzwerten G_U und G_O, die Fahrbahnbreite (minus Fahrzeug-Breite) der Toleranz. Hoffentlich lautet Ihre Reaktion: extragroßer Abstand!

Begründungen:Wenn man an der Toleranzgrenze fertigt,

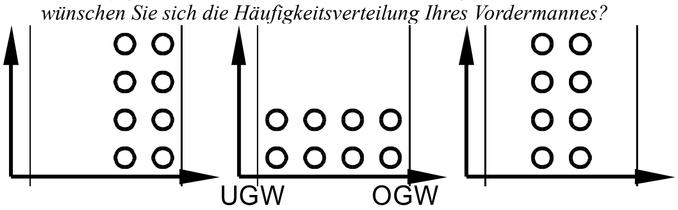
- ist die Funktionsqualität nicht optimal.
- kann schon eine geringe Störung zu Ausschuss führen.
- können nur teure 100%-Prüfungen sicherstellen, dass kein Ausschussteil vorliegt.

3) *Zur Untersuchung zeichnen wir den Fahrweg auf.*

- Zur Vereinfachung wird das Fahrzeug auf einen Punkt reduziert und die Fahrbahn entsprechend schmaler.
- y-Achse: Strecke in m oder Zeit t in s (Zeit ist besser geeignet, weil übertragbar auf QRK)
- x-Achse: Lage des Fahrzeuges

4) *Der Fahrweg enthält unhandlich viele Informationen, also reduzieren wir ihn auf eine Häufigkeitsverteilung.*

5) *Die Häufigkeitsverteilung erlaubt eine Bewertung eines Prozesses. Wie wünschen Sie sich die Häufigkeitsverteilung Ihres Vordermannes?*



Vertiefung

Datenauswertung_AB

Spätere Vertiefung

Unterrichtseinheit Häufigkeitsverteilung, ggf. Wahrscheinlichkeitsnetz

6) *Auch Häufigkeitsverteilungen enthalten noch viele Informationen, die man mit einem Verteilungsmodell weiter reduzieren kann.*

Wenn eine Häufigkeitsverteilung in ein Verteilungsmodell passt, kann man die Menge der Informationen drastisch reduzieren. Hier wird nur die Normalverteilung betrachtet, aber das Prinzip der Verteilungen kann man von der Normalverteilung auch auf andere übertragen, z.B. hypergeometrische oder binomiale Verteilung, Weibull- oder Chi²-Verteilung.

Galtons Nagelbrett

Enticklung der Normalverteilung siehe SP_Begruendung-TX.

7) *Parameter der Normalverteilung? Welche einfachen Größen interessieren?*

Standardabweichung ist der Abstand vom Mittelwert zu einem Wendepunkt. Die Breite der ganzen Normalverteilung anzugeben ist nicht geeignet, weil sie theoretisch bis±∞ reicht. Stattdessen nimmt man den Wendepunkt, der mathematisch leicht fassbar ist. Wendepunkt ist der Punkt, bei dem ein Motorradfahrer auf der Linie zwischen Rechts- und Linkskurve gerade senkrecht stünde.

Spätere Vertiefung

Wahrscheinlichkeitsnetz, Normalverteilung, Verteilung mit Tabellenkalkulationen.

8) *Welche Häufigkeitsverteilung wünschen Sie sich von Ihrem Vordermann im Straßenverkehr bzw. für Ihre Produktion?*

- Schmale Häufigkeitsverteilung sagt aus, dass das Fahrzeug häufiger in der Mitte fährt und weniger die Fahrbahngrenzen auslotet. In diesen Prozess hat man mehr Vertrauen.
- bessere Funktionalität heißt z.B., dass es weniger Beeinflussung mit Straßenrand und anderer Spur gibt, mehr Platz, wenn doch was schief geht usw. Sie kann auch ausgenutzt werden, indem man breitere Fahrzeuge bzw. schmalere Straßen usw. zulässt = geringere Kosten. (Beispiel Schienen = weniger Schwankung im Fahrbetrieb = schmalere Trasse = billiger)

Stochastik_TA_SPC-Einführung.odt

Seitenumbruch

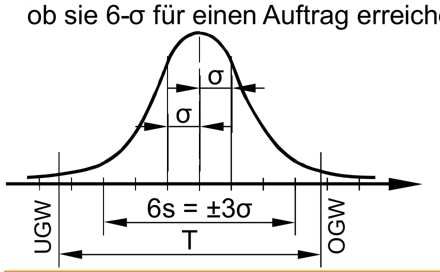
Inhalte von SPC

6-Sigma-Fertigung, 6-σ-Fertigung

– Mittelwert μ ± 3 x Standardabweichung σ müssen innerhalb der Toleranz liegen
– Toleranz darf nicht mehr beliebig ausgenutzt werden
– 8-, 10-, 12-, … -Sigma sind möglich

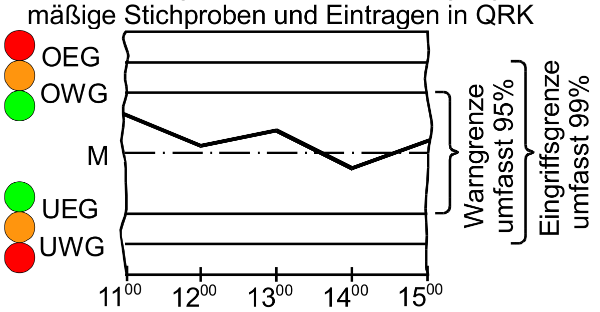
SPC:Fähigkeitsuntersuchungen

– prüfen einer Maschine vor der Fertigung ob sie 6-σ für einen Auftrag erreichen kann



SPC: Qualitätsregelkarten

– Überwachung einer laufenden Fertigung durch regelmäßige Stichproben und Eintragen in QRK



Warn- und Eingriffsgrenzen

– bewirken Reaktion, bevor Ausschuss produziert wurde
– hängen von der Streuung der Produktion ab, nicht von der Toleranz

Einzelmessungen

sind wenig aussagekräftig und deshalb selten

Stichproben von kleinem Umfang

ermöglichen die Überwachung von
– Fertigungslage (Mittelwert oder Median)
– Fertigungsstreuung (Standardabweichung oder Range = Spannweite)

Dazu benötigt man:

Zweispurige Regelkarten

Vorteile von QRK

– regelmäßige Stichproben zeigen die momentane Qualität der Fertigung.
– Änderungen werden entdeckt, bevor Ausschuss entsteht.
– Erst wenn die Ursachen der Änderungen gefunden sind, ist Qualitätsverbesserung möglich
– QRK können Eingangsprüfung des Kunden ersetzen
– QRK dokumentieren Sorgfalt im Sinne des Produkthaftungsgesetzes (→ Beweislastumkehr!)
– QRK ermöglichen langfristige Beobachtung der Maschinen- und Bedienerzuverlässigkeit

Vertiefung

Fortsetzung

Mit der Normalverteilung kann man mit wenigen Werten beschreiben, wie das Fahrzeug vor uns fährt.

9) Bis jetzt spielte die Toleranz keine Rolle. Wie kommt sie ins Spiel?

Ob ein Fahrstil sicher (ein Prozess fähig) ist, hängt nicht allein vom Fahrstil (Prozess) ab, sondern muss immer im Vergleich mit der Straße (Toleranzen) gesehen werden. Wer mit einem Anhänger auf Dorfstraßen (enge Toleranz) Probleme hat, kann auf Autobahnen (weite Toleranzen) immer noch sicher fahren (fertigen).
Man muss Toleranz und Schwankung ins Verhältnis setzen. Man sagt, ein Prozess sei 6σ-fähig, wenn die Toleranzgrenzen außerhalb Mittelwert μ ± 3 Standardabweichungen σ liegen. Üblich ist mittlerweile 8-σ und mehr.

spätere Vertiefung:

Unterrichtseinheit Maschinen- und Prozessfähigkeit

10) Sollte ein automatisches Lenksystem erst am Fahrbahnrand reagieren?

Warn- und Eingriffsgrenzen.

11) Sollte das Lenksystem auf breiten Straßen mehr Schwankung zulassen?

Nein, da riskant und unkomfortabel. Die Schwankungsbreite sollte so gering wie möglich gemäß den Fähigkeiten des Lenksystems sein. EG und WG hängen von den Fähigkeiten der Produktion ab, nicht von den Toleranzen. Wenn die Fähigkeiten für die Toleranzen nicht ausreichen, ist ein Prozess eben nicht fähig.

12) Die Polizei will die Spurtreue von Brücken aus überwachen. Fotoapparate haben sie schon. Genügen einzelne Fotos?

Einzelmessungen haben wenig Aussagekraft, es ist ja nicht „verboten", am Fahrbandrand zu fahren. Außerdem interessiert die Polizei nicht nur die Lage, sondern auch die Schwankung. Also muss man eine Stichproben mit mehreren Messungen nehmen.

spätere Vertiefung:

Unterrichtseinheit Qualitätsregelkarten

TX SPC_Einführung_TX

QRK, Fähigkeitsuntersuchungen

Stochastik_TA_SPC-Einführung.odt

Register 6

Seitenumbruch

SPC: Fähigkeitskennzahlen c

SPC vor der Fertigung

Fähigkeitskennzahlen sagen aus, wie gut eine Fertigung im Vergleich der Toleranz ist.
Dazu eine Vorserie gefertigt und gemessen und die Toleranz (Konstruktion) und die Streuung (Fertigung) ins Verhältnis gesetzt.

$$c=\frac{Forderung\ der\ Konstruktion}{Ergebnis\ der\ Fertigung}=\frac{Toleranz}{Streuung}$$

[EuroTabM46] S.381 vorläufige Prozessfähigkeit einarbeiten

2 Welten treffen aufeinander: Konstruktion ↔ Fertigung

Fähigkeitsuntersuchungen sind der Versuch, zwei völlig verschiedene Welten zusammenzuführen: Konstruktion und Fertigung

TX SPC_Begründung

Die Forderung nach 6-Sigma (oder mehr) wandelt eine Toleranz mit Grenzmaßen in ein Verteilungsmodell um, das für Fertigung, Q-Kontrolle und Funktion besser geeignet ist.

1) *Ein 2: Kundenanfrage nach zentrisch gelochten Pappkartons. Wie stellen wir fest, ob wir die geforderte Toleranz fertigen können? ⇒ Versuch.*

FO Schießscheibe (Bild 4)

SPC = statistische Prozessregelung

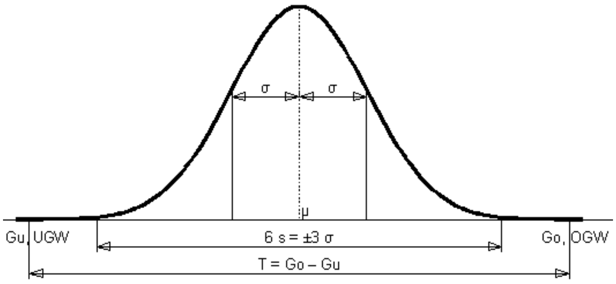
c steht für capable (fähig), c_m und c_p sind Abkürzungen von Ford, DGQ verwendet p_p (statt c_m), für c_p habe ich keine andere Abkürzung der DGQ gefunden.
Der Bezug auf 6 s hat vermutlich historische Gründe. Damals war eben 6 Sigma Stand der Technik, und als dieser später auf 8, 10 s erhöht wurde, musste man beim Teiler 6 s bleiben, weil sonst verschiedene c-Werte existierten.

Ermittlung von c_m, c_p, c_{mk} und c_{pk}

die Standardabweichung

bei mittiger Fertigung

in der Mitte der Toleranz

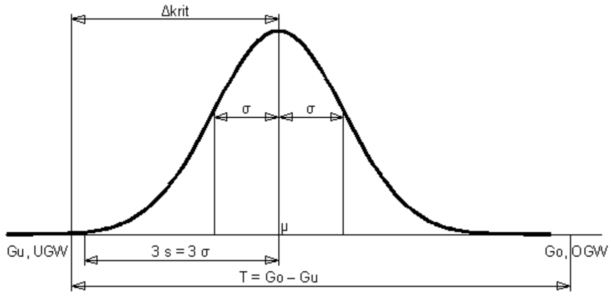


$$c=\frac{Toleranz}{6\cdot s}=\frac{T}{6\cdot s}=\frac{G_o-G_u}{6\cdot s}$$

c_m Maschinenfähigkeitskennwert
c_p Prozessfähigkeitskennwert
T Werkstücktoleranz
G_u,G_o oberer und unterer Grenzwert
σ_m, σ_p bzw. s_m, s_p
Standardabweichungenvon Versuchsserien

bei außermittiger Fertigung

außerhalb Toleranzmitte



$$c_{mk}/c_{pk}=\frac{\Delta_{krit}}{3\cdot s}=\frac{MIN(G_O-\mu\,;\mu-G_U)}{3\cdot s}$$

c_{mk} kritischer Maschinenfähigkeitskennwert
c_{pk} kritischer Prozessfähigkeitskennwert
Δ_{krit} Abstand von μ zur näheren Toleranzgrenze
μ_m, μ_p bzw. $\bar{x}_m$, $\bar{x}_p$,
Mittelwerte der Versuchsserien

Bedeutung einer Fähigkeitskennzahl c

$$\frac{T}{6\cdot s}>1{,}33 \quad\rightarrow\quad T>1{,}33\cdot 6\,s=8\cdot s$$

Wenn die Fähigkeitskennzahl c > 1,33 ist, wird mindestens 8 Sigma erfüllt.

c_P > 1,00 (c_m > 1,33) bedeutet 6 σ
c_P > 1,33 (c_m > 1,66) bedeutet 8 σ
c_P > 1,66 (c_m > 2,00) bedeutet 10 σ
c_P > 2,00 (c_m > 2,33) bedeutet 12 σ

Die unter idealen Bedingungen ermittelte Maschinenfähigkeit c_m soll eine Stufe höher als die Prozessfähigkeit c_p liegen, da sonst nicht damit zu rechnen ist, dass c_p unter normalen Bedingungen eingehalten werden kann.

Fähigkeitsuntersuchungen c_m, c_p

Aus Kostengründen wird die Prozessfähigkeit in 2 Stufen ermittelt:

1) *Welche beiden Systeme spielen in der Fertigung die wichtigste Rolle? Maschine und Bedienung (=Prozessführung)*

Maschinenfähigkeit c_m, c_{mk}

(fähig, kurzzeitfähig)
– Ist die Maschine genau genug?
– Wenige Teile (50) unter Idealbedingungen fertigen
Nur wenn C_m eine Stufe besser ist als C_p sein soll (z.B. C_m > 1,66 für 8 Sigma) folgt eine Untersuchung der :

Idealbedingungen: Prozess auf Mittellage der Toleranz eingestellt; eine Fertigungsstufe; eine Materialcharge; ein Mitarbeiter; günstige Umweltbedingungen; keine Veränderungen, z.B. Nachstellen, Abschirmung gegen Wärme.
Goldene Regel der Messtechnik: Messgenauigkeit der Messeinrichtung muss 10-mal kleiner als die Toleranz sein.

Prozessfähigkeit c_p, c_{pk}

(beherrscht, langzeitfähig)
– Kann die Fertigung x Sigma dauerhaft erfüllen?
– Mindestens 125 Teile unter Normalbedingungen fertigen und s_p und $\bar{x}_P$ ermitteln

Prozessfähigkeit benötigt einen größeren Stichprobenumfang, da unter Normalbedingungen mehr Einflüsse herrschen als unter Idealbedingungen.
125 Teile nach [Greßler 1995], [Reichard 1993] fordert mindestens 100 Teile.

Zur Ermittlung:
Maschinenfähigkeit: Bei der Bw werden Gewehre eingespannt und mit nur ca. 6 Schuss angeschossen (getestet). Mil.: Kampfwert.
Prozessfähigkeit: zur Überprüfung der Fähigkeit eines Schützen braucht es mehr Schüsse, schon weil es mehr Einflussfaktoren gibt. Mil.: Gefechtswert

Zur Aussage:
Der Ausschuss beträgt bei der Forderung nach 6s ca. 60ppm. Qt fordert offiziell einen Ausschussanteil von 0ppm, inoffiziell werden 10ppm zugestanden. Der Trend geht zu geringeren akzeptierten Ausschussanteilen. Mercedes fordert z.B. schon 8s oder 10s. Übung: Berechnen Sie die entsprechenden Ausschussanteile.

Normalverteilung_Ub_SPC Aufg.4: Maschinen- und Prozessfähigkeit

Vertiefung

Wie groß ist der Ausschussanteil bei einer 8s-Fertigung mindestens?
=NORMVERT(Go=+4σ ; μ=0 ; σ =1 ; 1) - NORMVERT(Go=-4σ ; μ=0 ; σ =1 ; 1)
= 99,9968% - 0,0032% = 99,9937 %

Übungen

SPC: Qualitätsregelkarten QRK

SPC während der Fertigung

QRK = Qualitätsregelkarten
(hier nur Prozess-, keine Annahme-Regelkarten)

- regelmäßige Stichproben zeigen die momentane Qualität der Fertigung.
- Änderungen werden deutlich, bevor Ausschuss entsteht.
- Erst wenn die Ursachen der Änderungen gefunden sind, ist Qualitätsverbesserung möglich
- QRK können die Eingangsprüfung des Kunden ersetzen
- QRK dokumentieren Sorgfalt im Sinne des PHG

In QRK werden die Ergebnisse von Stichproben regelmäßig und übersichtlich eingetragen.
Änderungen der Stichprobenergebnisse deuten auf Änderungen der Prozessparameter hin und ermöglichen rechtzeitig, systematische Fehler abzustellen.

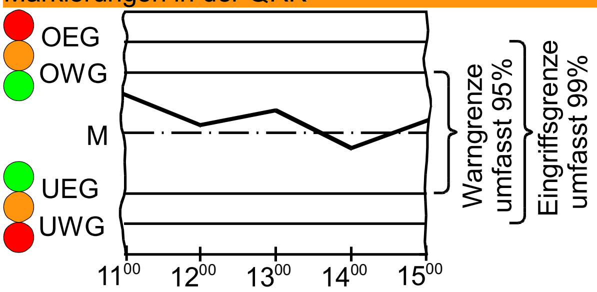
Arbeitsblatt erstellen

1) Ein: Automatisches Lenksystem …
2) Mit dem Merchandise Marks Act 1887 verlangte GB die Kennzeichnung dt. und US-amerik. Waren mit Made in Germany / USA als ein Versuch, sich vor der ausl. Konkurrenz zu schützen.
3) In 1970er Jahren rollt Japan den westl. Markt mit Qualität und niedrigen Preisen auf. Ihre Methoden stammten aus USA, zB. Shewhart ca. 1920.
4) Im Moment (2010) kommt China..
5) Wie kann die Fertigung zentr. gelochter Pappkartons überwacht werden?

[Reichard 1993], S.20ff: „Statistisch auswertbare Stichprobenergebnisse sind die Grundlage für die Qualitätslenkung und Prozessüberwachung. Dabei werden aus der laufenden Fertigung in regelmäßigen Abständen Stichproben entnommen, geprüft und die Ergebnisse in QRK meist als Linienzug dargestellt."
[Greßler 1995], S70ff: „Die wirtschaftlichen Verhältnisse erfordern es, sich um ständige Verbesserung der Qualität und Produktivität zu bemühen. Fehlerhafte Teile festzustellen und auszusortieren (Taylorismus-Prinzip) genügt nicht mehr. Ziel ist es, durch vorbeugende Qualitätssicherung die Entstehung von Fehlern frühzeitig zu erkennen und zu vermeiden."

Regelkarten wirken nur, wenn regelmäßig und häufig Stichproben genommen werden. Jede Maschine muss getrennt überwacht werden. Gezielte Einflüsse auf den Prozess (z.B. Werkzeugwechsel) müssen in der Regelkarte vermerkt werden.

Markierungen in der QRK



Prozessregelkarten: EG + WG aus Fertigungswerten
Annahmeregelkarten: EG + WG aus Toleranz

Die Datengrundlage muss ein Probelauf oder eine vorhergehende Produktion sein. EG und WG basieren nicht auf der Toleranz, sondern auf der Möglichkeit der Fertigung. Vergleich: Man fährt ja auch nicht mit ausgeschlagener Lenkung solange man das Fahrzeug noch auf der Straße halten kann.

- untere und obere Warngrenze UWG und OWG; enthalten 95% aller Messwerte (95% ist in der Statistik allgemein ein Zeichen für Signifikanz)
- untere und obere Eingriffsgrenze UEG und OEG; enthalten 99% aller Messwerte. Ermittlung von UEG, UWG, OWG und OEG siehe Zufallsstreubereiche.
- unterer und oberer Grenzwert G_u (UGW) und G_o (OGW). Die Toleranzgrenzen dürfen nicht als Eingriffsgrenzen benutzt werden, da bei Überschreiten der Toleranzgrenzen schon Ausschuss produziert wurde. Dies soll vermieden werden.

95% / 99% sind im deutschsprachigen Raum üblich, im englischsprachigen Raum werden für EG $\mu \pm 3\times\sigma$ (99,73%) und für WG $\mu \pm 2\times\sigma$ (95,44%) verwendet [Rinne 1991] S.337.

Ermittlung der Grenzen:
AB QRK Grenzwerte

Typen von QRK

FO Urliste und Urwertkarte
[EuroTabM] „Qualitätsregelkarten"

	Urliste	Urwertkarte (x-Karte)
	+ haben den höchsten Informationsgehalt - unübersichtlich	

Bei jeder Behandlung der Daten, z.B. Sortieren, Mittelwertbildung usw., gehen Infos verloren, z.B. der zeitliche Verlauf der Werte.

Begründung?

Es ist sinnvoll, Mittellage und Streuung zu überwachen, deshalb sind Prozessregelkarten meist zweispurig.

FO $\tilde{x}$-Karte, FO $\bar{x}$ -Karte [Reichard 1993],
[EuroTabM] „Qualitätsregelkarten

	$\tilde{x}$-R-Karte (Median – Spannweite)	$\bar{x}$-s-Karte (Mittelwert – Streuung)
Mittellage verdeutlichen die Fertigungslage Beispiel: 5, 4, 2, 1, 2	Median $\tilde{x}$ Die Werte einer Stichprobe werden der Größe nach sortiert, und der mittlere Wert wird eingetragen (z.B. der 3. Wert bei Stichprobenumfang n=5). *Sortieren:* $1,2,2,4,5 \Rightarrow \tilde{x}=2$	Mittelwert $\bar{x}$ Die Grenzen für WG und EG werden enger als bei der Urwertkarte , weil hinter den Mittelwerten eine Verteilung steckt: $\bar{x}=\frac{5+4+2+1+2}{5}=2{,}8$
Streuung verdeutlichen die Fertigungsstreuung	Spannweiten R Range R (=Spannweite SP) = x_{max} - x_{min} siehe Klassierung von Einzelmesswerten. Baumann, LFB QS S.86: enthält auch Berechnung der Warn- und Eingriffsgrenzen $R=Max(..)-Min(..)=5-1=4$	Standardabweichung s Shewhart-Regelkarten wurden erstmalig 1924 in den USA verwendet. $\sigma=\sqrt{\frac{(5-2{,}8)^2+..+(2-2{,}6)^2}{5-1}}=1{,}64$

dynamische Regelkarten

passen EG und WG ständig an die verbesserte Fertigung an.
WG und EG werden ständig aus den letzten Messwerten neu berechnet und verengt. Dadurch wird der Prozess immer genauer.

Abweichung über EG und WG sind auch dann kritisch, wenn die Toleranzgrenzen weit entfernt liegen, da sie auf Störungen, wenn auch geringfügige, im Prozess hindeuten. Anwendung von Vertrauensbereich, P=95%, 3σ usw. ⇒ DIN 2257

Bewertung von QRK

– Überschreitung von UWG, OWG und UEG, OEG
– Trend, Rund. Periode, Middle Third

1) Anhand TabB durchsprechen

– TREND oder RUN sind nur schwer erkennbar. – $\tilde{x}$ – R – Karten erfordern wenig Rechenaufwand	– (+) TREND oder RUN lassen Rückschlüsse auf den Messwertverlauf zu. – $\bar{x}$ – s – Karten sind etwas empfindlicher.

Empfindlich heißt, der Prozessverlauf ist gut erkennbar. Rechenaufwand erfordert CAQ. Details: [EuroTabM] „Qualitätsregelkarten

Vertiefung

Norm_Ub_SPC: QRK ausfüllen
Regelkarten ausfüllen und Prozessverlauf bewerten

Register 7

SPC: Grenzwerte für QRK

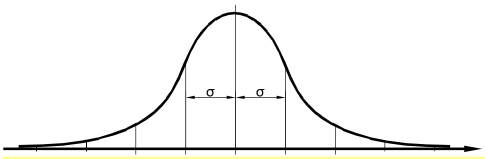
Norm nach [Klein 2008][, S.983ff

Seit [EuroTabM46] kann man WG und EG mit dem TabB berechnen. Deshalb nur kurze Einführung (oder weglassen), dann Berechnungsübungen.

Vertiefungsmöglichkeit: AB Grenzen von QRK

Wahrscheinlichkeiten für Stichproben

ZSB: Zufallsstreubereiche



1) Wie groß ist P, dass ein Teil zwischen Gu und Go liegt?

→ Sollte inzwischen lösbar sein, wenn auch nicht aus den Effeff.

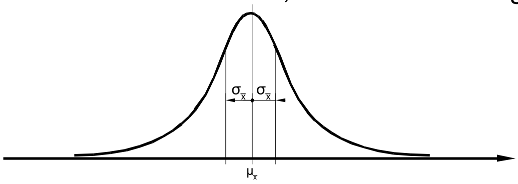
2) Wie groß ist P, dass eine Stichprobe zwischen Gu und Go liegt?

Jeder Einzelwert siehe oben, aber Einzelwerte interessieren nicht! Es interessieren nach wie vor Fertigungslage und Fertigungsstreuung.

3) Wie verhalten sich Fertigungslage (Mittelwert) und Fertigungsstreuung (Standardabweichung) einer Stichprobe zur Grundgesamtheit?

Mittelwert der Stichproben

sind auch normalverteilt, streuen aber weniger.



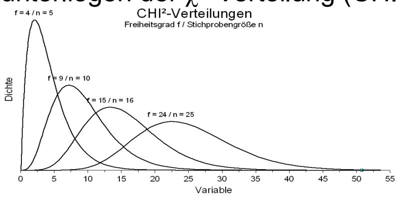
$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\mu_{\bar{x}}=\mu$$

- μ: Mittelwert der Grundgesamtheit
- $\bar{x}$: Mittelwert einer Stichprobe
- n: Umfang der Stichproben

Standardabweichung der Stichproben

unterliegen der χ²-Verteilung (CHI²).



$$\chi^2=(n-1)\cdot\frac{s^2}{\sigma^2}$$

- σ: Standardabweichung der Grundgesamtheit
- s: Standardabweichung einer Stichprobe
- χ²: Variable der CHI²-Verteilung

Median der Stichproben

Die Streuung der Mediane $\tilde{x}$ von Stichproben aus einer Normalverteilung ist normalverteilt (?)

Spannweite der Stichproben

Die Streuung der Spannweiten R von Stichproben aus einer Normalverteilung ist W-verteilt (=Weibull).(?)

χ²-Verteilung

Tabelle: [Schneider21] S.2.31

c't 1/2009 S.173 Faites vos jeux: Chi-Quadrat-Anpassungstests zum Testen von Zufallszahlengeneratoren

4) Wozu muss man das eigentlich wissen? 5) Konfidenzintervalle möchte ich nicht mehr unterrichten, aber wenn Sie Warn- und Eingriffsgrenzen nicht berechnen könnten, wüssten Sie auch nicht mehr als ein Fachar - beiter.

Wie berechnet man sie, wenn noch nicht einmal der Lehrer die Vertei - lung kennt..

Anwendung

Vertrauensbereich von Stichproben

Eine Stichprobe ist eine Schätzung der Gesamtmenge. Der Vertrauensbereich gibt an, wie präzise die Schätzung ist. Er wird auch Konfdenzintervall oder Vertrauensintervall oder Erwartungsbereich genannt. Meist gibt man die Grenzen an an, innerhalb derer der geschätzte Werte der Gesamtmenge mit 95% W. liegt.

Warn- und Eingriffsgrenzen von QRK

ZSB der Mittelwerte $\bar{x}$

→ [Rinne 1991] S.374ff

ZSB der Standardabweichungen s

→ [Rinne 1991] S.385ff

ZSB der Mediane $\tilde{x}$

→ [Rinne 1991] S.377ff, Tabelle 5.3/1 S.477

→ [Hering ua.: QS-Sicherung für Ingenieure, 1992] S.203: aus Range

ZSB der Spannweiten R

→ [Rinne 1991] S.388ff

[HTTabM15] S.F109f berechnet Spannweitenspur aus Spannweiten

[EuroTabM46] S.283 berechnet Spannweitenspur aus Standardabweichung

Vertiefung

6) Geg: Prozessfähigkeitsuntersuchung mit μ=100 mm und σ = 0,1 mm; Gesucht: WG, EG und Mittenmaß für $\bar{x}$-s- und $\tilde{x}$-R-QRK

In technischen Berufen ist es nicht unüblich, dass man Berechnungsverfahren anwenden muss ohne sie zu verstehen. Dies gilt auch hier.

7) Berechnen Sie WG und EG mithilfe des TabB

→ [EuroTabM46] S.283 „Qualitätsregelkarten"

Norm_Ub_SPC: Grenzwerte für Regelkarten

Wahrscheinlichkeiten für die Parameter x̄ und s (alt)
ZSB: Zufallsstreubereiche

1) Wie viele verschiedene Stichproben mit dem Umfang n=5 kann man aus einer Grundgesamtheit mit dem Umfang N=10 ziehen?

a) 10 Schüler gehen nacheinander in ein Klassenzimmer mit 10 Stühlen. Der 1te hat 10 Möglichkeiten, der 2te 9 usw. → 10·9·8·..·1 = 10!
b) 5 Stühle sind als Stichprobe ausgewählt. In welcher Reihenfolgen die Schüler darauf sitzen, spielt keine Rolle → 5! Möglichkeiten.
c) Gleiches gilt für die 5 Stühle, die nicht zur Stichprobe gehören → 5! Möglichkeiten.
d) Gesamtergebnis: $p=\frac{10!}{5!\cdot5!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot\cancel{5\cdot4\cdot3\cdot3\cdot1}}{(5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)\cdot\cancel{(5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)}}=\frac{10}{5}\cdot9\cdot\frac{8}{4}\cdot7\cdot\frac{6}{3\cdot2}=252$

Anwendung
- Warn- und Eingriffsgrenzen von x̄ -s-Regelkarten
- Ermittlung des Vertrauensbereiches für μ aus dem x̄ von Stichproben.

ZSB der Mittelwerte x̄
Die Streuung der Mittelwerte x̄ von Stichproben aus einer Normalverteilung ist auch normalverteilt, aber die Standardabweichung $s_{\bar{x}}$ der Mittelwerte ist geringer als die Standardabweichung σ der Grundgesamtheit.

Streuung $s_{\bar{x}}$ der Mittelwerte
hängt vom Stichprobenumfang n ab.

$$s_{\bar{x}}=\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Mittelwert $\mu_{\bar{x}}$ der Mittelwerte
ist gleich dem Mittelwert μ der Einzelwerte

$$\mu_{\bar{x}}=\mu$$

Vertiefung

ZSB der Standardabweichungen s
Streuung der Standardabweichungen s_s
von Stichproben aus einer Normalverteilung mit der Standardabweichung σ ist χ²-verteilt (=CHI-Quadrat).
Die χ²-Funktion lautet

$$\chi^2=CHI^2=f\cdot\frac{s^2}{\sigma^2}$$ mit dem Freiheitsgrad f = n-1

Mittelwert der Standardabweichungen μ_s
Vertiefung

Übungen
In welchem Bereich liegen die tatsächlichen Mittelwerte μ für die Maschinerfähigkeitsuntersuchungen mit der Wahrscheinlichkeit p = 99%

Berechnung mit Tabellen
u und χ² werden aus Tabellen entnommen und in die obige Formel eingesetzt.
u wird aus Tabellen entnommen und in die obige Formel eingesetzt.

Ermittlung mit dem Wahrscheinlichkeitsnetz
Die Gerade wird mit der berechneten Standardabweichung der Mittelwerte eingesetzt, die Zufallsstreubereiche der Mittelwerte können abgelesen werden.
Die Gerade wird mit der berechneten Standardabweichung der Mittelwerte eingesetzt, die Zufallsstreubereiche der Mittelwerte können abgelesen werden.

nicht mehr unterrichten

Alte Version; übertragen!!
Norm nach [Klein 2008], S.983ff
AB Was sagen Stichproben über ihre Grundgesamtheit aus?
Das AB enthält N=10 Werte einer Grundgesamtheit (μ≈100; σ≈10) und listet alle möglichen Stichproben n=5 und ihre Mittelwerte x̄ und Standardabweichung s auf. Man sieht, dass Mittelwerte und Standardabweichung der Stichproben stark von den Werten der Grundgesamtheit abweichen.
2) Worauf wirkt sich das in der Praxis aus, z.B. QRK?
Man muss die Zusammenhänge kennen, um die Warn- und Eingriffsgrenzen festlegen zu können, und umgekehrt, um zu wissen, wie stark man dem Ergebnis einer Stichprobe vertrauen kann (Konfidenz).

$$\mu-|u_{(\alpha/2)}|\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\le\bar{x}\le\mu+|u_{(\alpha/2)}|\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Durch Umformen ist erkennbar, dass x̄ und μ austauschbar sind.
Vertrauensbereich oder Konfidenzintervall ist ein Bereich, in dem ein Ereignis mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit liegen soll. x̄ ist nur eine Schätzung für μ.

FO Grundgesamtheit, Stichproben
1) Aus einer Grundgesamtheit (Container mit Schrauben) wird eine Stichprobe gezogen. Welche der 3 Stichproben (FO 1 .. 3 mit verschiedenen s) ist am wahrscheinlichsten? Stichprobe 2 hat die passende Standardabweichung.
2) FO 2: In welchem Bereich kann die Stichprobe n=30 bzw. ihr Mittelwert liegen? Welcher Bereich ist am wahrscheinlichsten? Die Mittelwerte streuen ebenfalls unter einer Glockenkurve, aber diese wird enger, d.h. die Standardabweichung der Mittelwerte ist kleiner als die der Einzelmesswerte.
3) FO 4: In welchem Bereich kann die Stichprobe n=10 bzw. ihr Mittelwert liegen? Die Streuung der Mittelwerte hängt vom Stichprobenumfang ab (je kleiner der Stichprobenumfang, desto größer die Streuung und umgekehrt).
Überlegung: für n → ∞ wird $s_{\bar{x}}$ =0, d.h. m = x̄
Damit ergibt sich für den zweiseitigen Zufallsstreubereich von x̄

$$m-|u_{(\alpha/2)}|\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\le\bar{x}\le m+|u_{(\alpha/2)}|\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Anwendung: Wo liegt wahrscheinlich eine Stichprobe aus einer bekannten Grundgesamtheit? So kann der Lieferant der Schrauben ausrechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit seine Schrauben bei der Stichprobe durchfallen.
Wo liegt wahrscheinlich die Grundgesamtheit zu einer bekannten Stichprobe? Häufiger!
Schlussfolgerung: Je größer die Stichprobe, desto genauer das Ergebnis.
AB Zufallsstreubereiche für die Parameter der Normalverteilung
Text durchsprechen, Beispiele rechnen
Ültg anhand des AB Zufallsstreubereiche

Für die Standardabweichungen s der Stichproben sind nur positive Werte möglich, deshalb können sie nicht normalverteilt sein. Außerdem sind die s meist kleiner als σ, weil die Stichprobenumfänge meist kleiner sind. Es ergibt sich die χ²-Verteilung
Einseitig begrenzte Verteilungen haben χ²-Verteilungen oder Weibull-Verteilungen.

Damit ergibt sich für den zweiseitigen Zufallsstreubereich von s

$$\sqrt{\frac{c^2_{f;\alpha/2}}{f}}\cdot s\le s\le\frac{\sqrt{c^2_{f;1-\alpha/2}}}{f}\cdot s$$

Siehe die χ²-Verteilung auf dem Arbeitsblatt Zufallsstreubereiche:
Der Freiheitsgrad verhält sich wie bei ternären Legierungen oder oder Platzwahl von n=3 Personen auf 3 Stühlen. Nur f = n-1 = 2 Personen haben die Freiheit der Wahl, der letzte muss den einzigen freien Stuhl nehmen. Bei Mix-Getränken aus 3 Komponenten kann man die ersten beiden variieren, die 3. ergibt sich daraus, dass das Glas voll werden soll.
Der Berg der χ²-Verteilung liegt niedriger als ihr Mittelwert und die Standardabweichungen σ der Grundgesamtheit.

Fragezeichen??

Ergänzen

AB Zufallsstreubereiche für die Parameter der Normalverteilung
AB Grenzen von QRK
Text durchsprechen, Beispiele rechnen
Nicht durchführen
Da in der χ²-Formel s und σ nicht einfach umkehrbar sind, gilt für den Vertrauensbereich für σ aus s eine andere Formel, siehe z.B. Handbuch CASIO FX-880P:

$$\sqrt{\frac{f}{c^2_{f;\alpha/2}}}\cdot s\le s\le\sqrt{\frac{f}{c^2_{f;1-\alpha/2}}}\cdot s$$ [Hering 1993] S.26

AB DGQ Tabelle 11.1 der standardisierten Normalverteilung
AB DGQ Tabelle 14.1 χ²-Verteilung

Häufigkeitsverteilung: Praktisches Beispiel

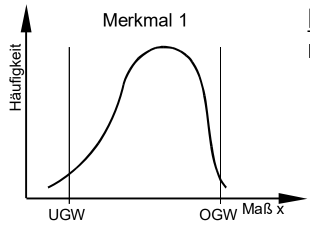
kontinuierliche Merkmale im Histogramm

Quelle: LFB Baumann 1996; Norm nach [Klein 2008] S.981ff

1) *Die zugehörige Zeichnung habe ich nicht kopiert, da es darauf gar nicht ankommt, dafür habe ich etwas viel schöneres: Zahlen:*

AB Ausfüllanweisung für Histogramme

Beispiel XYZ



Merkmal 1: Breite
normalverteilt

- Glockenkurve = Normalverteilung: typisch für viele technische Prozesse

Bewerten:
– Form der Kurve
– Lage der Kurve in Bezug zu den Toleranzen
– Breite der Kurve

Klassenbildung

Strichliste

Histogramm

am Beispiel der Breite

≅ Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion

FO Lebensdauerstreukurve
FO Siedekurve von Kraftstoffen

Summenhäufigkeiten sind besser geeignet, um Ausschuss abzulesen.

W-Netz wieder einführen?

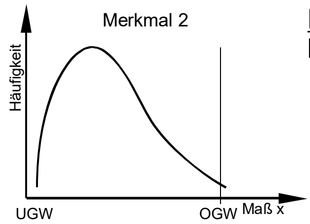
Die Unterscheidung zwischen W-/V-Funktion einerseits und Einzel-/summen-Häufigkeiten andererseits ist in der Bezeichnung nicht so wichtig, wichtig ist aber, dass das erste theore tisch voraussagt und das zweite einen vergangenen praktischen Versuch beschreibt.

Wahrscheinlichkeitsnetz

2) *Ermitteln Sie Mittelwert, Standardabweichung und Ausschussanteile mithilfe von Wahrscheinlichkeitsnetzen*

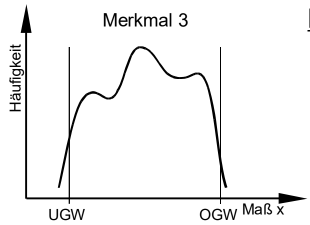
Übungen

3) *In Gruppenarbeit, je Gruppe ein Merkmal:*
- Erstellen Sie für den Wellengelenkschaft, Merkmale 2 bis 6, die Histogramme
- Beschreiben Sie die Kurve
- Diskutieren Sie mögliche Ursachen und weitere Maßnahmen.
- Tragen Sie Ihre Ergebnisse vor



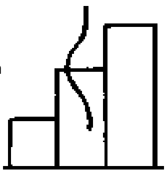
Merkmal 2: Parallelität
linksschiefe Verteilung

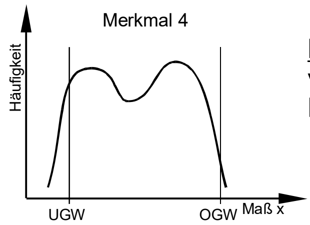
- keine Gauß´sche Normalverteilung
- linksschiefe Verteilung ist typische für Lagetoleranzen und Rauheiten, weil es bei die sen keine negativen Werte gibt
- die Kurve der Summenhäufigkeit ist konvex, weil von links her kommend zuerst die gro ßen Einzelklassenhäufigkeiten kommen. Bei rechtsschiefen Verteilungen ist sie konkav



Merkmal 3: Gesamtlänge

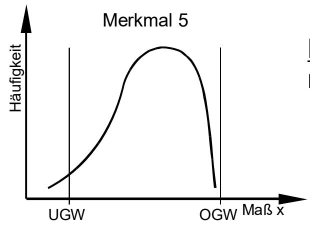
- Die grafische Beurteilung hängt stark von den Klassengrenzen ab. Die Normalverteilung muss rechnerisch überprüft werden.
- der Prozess ist nicht maschinenfähig (viel zu breit)
- die zulässige Schwankung innerhalb der Klassen hängt von N, n usw. ab und steigt mit sinkendem $\frac{n}{N}$.





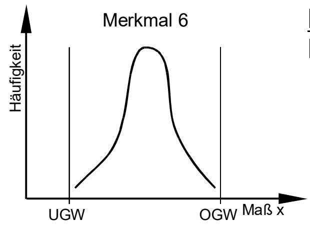
Merkmal 4: Härte
vermutlich zwei verschiedene Prozesse

- möglicherweise handelt es sich um zwei verschiedene Prozesse (Anlagen, Bediener, Chargen, Einstellungen o.ä.)
- wenn möglich, muss jeder für sich beurteilt werden.



Merkmal 5: Abstand
rechtsschiefe Verteilung

- ähnelt einer abgeschnittenen Normalverteilung
- Mögliche Ursachen
  - der Lieferant hat Ausschuss gefertigt und ihn aussortiert. In dem Fall kann der Kunde den Ausschussanteil berechnen.
  - es handelt sich um eine manuelle Fertigung (man feilt nicht weiter, sobald man inner halb der Toleranz ist).
  - es wurde mit einem Anschlag gearbeitet.

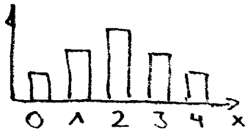
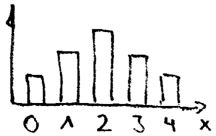
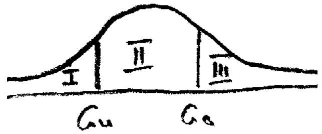
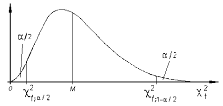


Merkmal 6: Durchmesser
Normalverteilung

- sehr schöne Normalverteilung
- die Maschinenfähigkeit wird nur knapp erreicht

Wahrscheinlichkeitsnetz

Entwürfe oder alt

Verteilungen: Übersicht		Hypergeometrische Vtlg 	Binomiale Verteilung 	Normalverteilung 	χ^2-Verteilung (CHI² – Vtlg) 
Parameter der Verteilung (Bezeichnungen nach DGQ; MS-Office; LibreOffice)		N Anzahl der Teile im untersuchten Los (N; N_Gesamt) d Anzahl der fehlerhaften Teile im Los (d; M) n Stichprobenumfang (n; N_Stich) x Anzahl der fehlerhaften Teile in der Stichprobe (x; X)	p (prozentualer) Fehleranteil im Los (p; W) n Umfang der Stichprobe (n; N) x Anzahl der gesuchten Teile in der Stichprobe (x; X) G(x) untere Summenhäufigkeit P = P($x_i \le x$) α = 1 - G(x)	$\bar{x}$, μ: Mittelwert =MITTELWERT(..) s, σ: Standardabweichung =STDABW(..) n Stichprobenumfang =ANZAHL(..) u standardisierter Einzelwert der Normalverteilung, berechnet aus $u=\frac{x-\bar{x}}{s}$ p Überschreitenswahrscheinlichkeit	f Freiheitsgrad, berechnet aus f = n - 1 (n = Stichprobenumfang) χ^2 Einzelwert der χ^2-Funktion p Wahrscheinlichkeit des Überschreitens
Anwendungen		diskrete Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeit sich mit jedem Zug ändert: Stichproben, Lotto	diskrete Ereignisse mit konst. Wahrsch. – Wareneingang – n-c – Anweisungen – Stichproben aus großen Mengen: n/N < 10	kontinuierliche Ereignisse – Fähigkeitskennzahlen, – Qualitätsregelkarten Fertigungsergebnisse werden bevorzugt als normalverteilt angenommen	Zufallsstreubereich der Standardabweichung bei Normalverteilung
Formel in Tabkal Parameter ermitteln				=MITTELWERT(..) =STDABW(..)	
Einzelhäufigkeit	Wie groß ist die Wahrsch., dass x genau erreicht wird?	g(x_i=x) =HYPGEOMVERT(x;n;d;N)	g(x_i=x) =BINOMVERT(x;n;p;0)	nicht sinnvoll	nicht sinnvoll
Unterschreitungsanteil α untere Summenhäufigkeit	Wie groß ist die Wahrsch., dass x erreicht oder unterschritten wird?	α = g(x_i≤x) = HYPGEOM.VERT(x;n;d;N;kumuliert)	α = g(x_i≤x) = BINOMVERT(x;n;p;1)	α =NORMVERT(x;μ;σ;1)	α =CHIVERT(χ²; f)
Umkehrfunktion	Welches x wird mit der gegebenen Wahrsch. erreicht bzw. überschritten?		x =KRITBINOM(n; p; α)	x =NORMINV(α;μ;σ)	χ² =CHIINV(α; f)
Überschreitungsanteil α obere Summenhäufigkeit	Wie groß ist die Wahrsch., dass x erreicht oder überschritten wird?	α = g(x_i≥x) = 1 – HYPGEOM.VERT(x-1;n;d;N;kumuliert)	α = g(x_i≥x) =1 – BINOMVERT(x;n;p;1)	α =1-NORMVERT(x;μ;σ;1)	
Umkehrfunktion	Welches x wird mit der gegebenen Wahrsch. erreicht bzw. überschritten?				
Zwischenanteile	Wie groß ist die Wahrsch. p, dass eine Stichprobe zwischen Gu und Go liegt?	g(x_u< x<x_o) = HYPGEOM.VERT(x_o; n; d; N) – HYPGEOM.VERT(x_u-1; n; d; N)	g(x_u< x<x_o) = BINOMVERT (x_o; n; p; 1) – BINOMVERT (x_u; n; p; 1)		
Umkehrfunktion	Wo liegen die symmetrischen Grenzen Gu und Go, innerhalb derer eine Anteil α liegt.			G_U =NORMINV(1-α/2;μ; σ) G_O = NORMINV((1+α)/2;μ; σ)	
Ausschussanteile	W.g.ist.W. alpha , dass ein zufälliges x außerhalb der Grenzen Gu oder Go liegt?	g(x<x_u oder x>x_o) = 1 – HYPGEOM.VERT(x_o; n; d; N) + HYPGEOM.VERT(x_u-1; n; d; N)	g(x<x_u oder x>x_o) = 1 – BINOMVERT (x_o; n; p; 1) + BINOMVERT (x_u; n; p; 1)		
Umkehrfunktion	Wo liegen die symmetrischen Grenzen Gu und Go, außerhalb derer der Anteil α liegt.			G_U = NORMINV(α/2 ;μ; σ) G_O = NORMINV(1-α/2 ;μ; σ) oder $G_{U/O}$ = μ ±KONFIDENZ(α;s;n)	
Formeln	$\binom{N}{n}=\frac{N!}{n!\cdot(N-n)!}$	$g(x)=\frac{\binom{d}{x}\cdot\binom{N-d}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$g(x)=\binom{n}{x}\cdot p^x\cdot(1-p)^{n-x}$	$\bar{x}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$, $s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$ siehe 10-DM-Schein	$\chi^2=CHI^2=f\cdot\frac{s^2}{\sigma^2}$ mit f = n - 1
DGQ			Nomogramm 01 von 08/84 „Larson-Nomogramm“ G(x) Annahmewahrscheinlichkeit	Tabelle 11 von 7/91 „Normalverteilung“	Tabelle 14 von 8/85 „Kritische Werte der χ^2-Verteilung“
Taschenrechner Permutationen	N Anzahl der Plätze n Anzahl der Elemente	Fakultät FACT n → n!	für unterscheidbare Elemente: nPr(N , n) → Anzahl der möglichen Anordnungen = $\frac{N!}{(N-n)!}$	für austauschbare Elemente: nCr(N , n) → Anzahl der möglichen Anordnungen = $\binom{N}{n}=\frac{N!}{n!\cdot(N-n)!}$	*Stochastik_TA_Verteilung-Uebersicht.odt*

Manueller Seitenumbruch

Kombinatorik (alt)

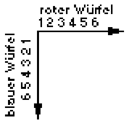
Definition des Begriffes habe ich nicht eindeutig geklärt.

Gesucht ist die Anzahl x der möglichen Anordnungen für

N verschiedene Elemente mit je n Möglichkeiten

Elemente sind mehrfach einsetzbar

z.B. N=4 unterscheidbare Würfel mit n=6 Zahlen



x = 6×6×6×6 = 6^4 =1296   für 2 Würfel: x = 36

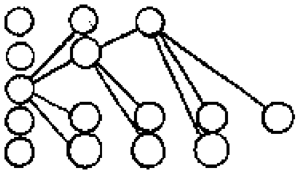
Formel $x=n^N$

n verschiedene Elemente auf N Plätzen

Jedes Elemente gibt es nur einmal

Sonderfall n = N

z.B. z.B. 5 Schüler auf 5 Plätzen



x = 5×4×3×2×1 =120

Formel $x=n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$

0!=1   (am Taschenrechner herleiten)

allgemeiner Fall n≤N

Beispiel 3 Schüler auf 5 Plätzen

x = 5×4×3 =60 = $\dfrac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1}=\dfrac{5!}{2!}=\dfrac{5!}{(5-3)!}$

FO Beispiel 1a und 1b für Permutationen

1a zeigt alle Permutationen der 5 Buchstaben A bis E auf 5 Plätzen, in 1b sind an Stelle von D und E die leeren Plätze (rot gefärbt). DE und ED sind gleich und nur noch eine Permutation.

Formel $x=\dfrac{N!}{(N-n)!}=\dfrac{Permutationen\ aller\ Plätze}{Permutationen\ \ der\ Leerstellen}$

n gleichart. Elemente auf N Plätzen

bzw. ein Element n-mal auf N Plätzen

Beispiel 3 Ausschussteile unter 5 Teilen

$$x=\frac{5!}{3!\cdot(5-3)!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(3\cdot 2\cdot 1)\cdot(2\cdot 1)}=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1}=10$$

FO Beispiel 1c für Kombinationen

FO wie oben, aber jetzt sind auch die gleichen Elemente A, B und C grün gefärbt.

Formel $x=\dfrac{N!}{n!\cdot(N-n)!}=\dbinom{N}{n}$ (Binomialkoeffizient, sprich: N über n)

Übungen

mehrere Elemente auf N Plätzen

wobei Element 1 n_1-mal auftritt und Element 2 n_2-mal auftritt

Formel $x=\dfrac{N!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot(N-n_1-n_2)!}$

[Gieck 1995], D5f

Kombinatorik zwar kein Thema des LPE, aber sowohl als sinnvolle Ergänzung und Vertiefung der Wahrscheinlichkeiten als auch zur Vorbereitung der Formeln für die hypergeometrische und binomiale Verteilung geeignet.

Wichtig ist es, den Denkansatz zur Ermittlung der Formeln zu vermitteln, weil nur dieser Verständnis und spätere Anwendung ohne memorierte Formeln ermöglicht.

Quellen: [Barth 1994] S.87ff;

1) Wie viele Variationen sind für 2, 3 bzw. 4 verschiedenfarbige Würfel möglich?

Mehrfach verwendbare Elemente dürfen mehrmals auftreten, z.B. Bits bzw. Ziffern in einer Zahl, Gut- oder schlechte Teile in einem Los, mehrere verschiedenartige Würfel in einem Wurf. Die Reihenfolge der Teile muss beachtet werden (nummerierte Plätze, unterscheidbare Würfel).

1) Das 1te Würfel hat 6 Möglichkeiten, der 2te auch usw.
2) Würde man die Wahrscheinlichkeit für genau eine Anordnung suchen, könnte man den Wahrscheinlichkeitsbaum wie dargestellt skizzieren. Der Umkehrschluss P=1/x für eine bestimmte Anordnung gilt nur, wenn die Teile gleich verteilt sind, was bei guten und schlechten Teilen hoffentlich nicht der Fall ist.
3) Wie viele Anordnungen gut / schlecht sind bei 5 Teilen möglich? x = 2^5=32 (Binärzahl!)

Im Allgemeinen interessieren uns nur gute und schlechte Teile, deshalb genügt meist x=2^N.

2) Wie viele Sitzordnungen x gibt es für n=5 Schüler auf N=5 Stühlen?

Unikate kommen nur einmal vor, z.B. Personen, nummerierte Teile.

1) Skizze, Gleichung: der 1te Schüler hat 5 Möglichkeiten, der 2te 4 Möglichkeiten usw.
2) Auch hier gilt der Umkehrschluss p=1/x nur, wenn alle Schüler die Plätze rein zufällig wählen. Dann gilt P(Anordnung) = $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{120}$
3) Wie viele Sitzordnungen sind in der Klasse möglich, wenn man vorher alle freien Stühle entfernt?

möglich: FO, AB Wahrscheinlichkeiten und Permutationen 1.
n! spricht man n-Fakultät.

Eselsbrücke für 0!=1: Ein Stuhl für eine Person ergibt eine Möglichkeit. Kein Stuhl für eine Person ergibt auch eine Möglichkeit, nämlich Stehen bleiben bzw. Verstopfung.

3) Wie viele Möglichkeiten x gibt es für n=3 Schüler auf N=5 Stühlen?

3 Plätze / 5 Schüler (n>N) hat die gleiche Lösung: Der 1te Platz hat 5 Schüler zur Auswahl usw.

1) Skizze und Gleichung wie oben, bricht aber nach dem dritten Schüler ab.
2) Wie groß ist die Anzahl der mögliche Anordnungen? Mit der Wahrscheinlichkeit p=1/x beginnen oder begründen. P(Ordnung) = $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{60}$
3) Bruch erweitern: 5! ist die Anzahl möglicher Anordnungen 5 Schülern auf 5 Stühle und wird durch die 2! möglichen gleichwertigen Anordnungen der leeren Stühle dividiert.
4) Wie viele Sitzordnungen sind in der Klasse mit den vorhandenen Stühlen möglich?

möglich: FO, AB Wahrscheinlichkeiten und Permutationen 2.
Vertiefung: Berechnen Sie das Eingangsbeispiel (x für 5 unterschiedliche Personen und 5 Stühle) mit dieser Formel: x=5!/0!=120. Hier wird die Definition 0!=1 benötigt.
nPr steht für die Permutationen von r (≦ n) Elementen auf n (≦ N) Plätzen. Eine Permutation (n-Tupel) ist eine Anordnung, bei der es auf die Reihenfolge der Elemente ankommt.

4) Wie viele Sitzmuster x gibt es für n=3 Schüler auf N=5 Stühlen?

1) Skizze und Gleichung wie oben.
2) Beim 1ten Schüler sind 3 von 5 Plätzen richtig, dann 2 von 4 usw. P = $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$
3) Möglichkeiten mit P=1/x übertragen und passenden Gedankengang suchen: Der 1te Schüler hat 5 Plätze zur Auswahl, 3 davon sind gleichwertig richtig, usw.
4) Erweitern des Bruches: 5! und 2! wie oben, 3! sind die Permutationen der Schüler.
5) Wie viele Sitzmuster sind in der Klasse mit den vorhandenen Stühlen möglich?

möglich: FO, AB Wahrscheinlichkeiten und Permutationen 3.
Vertiefung: Das Eingangsbeispiel (x für 5 Schüler auf 5 Stühle) kann mit dieser Formel: nicht berechnet werden, da es sich um unterscheidbare Personen handelt. Man müsste die folgende Formel für mehrere austauschbare Elemente verwenden.
nCr steht für die Kombination von r (≦ n) Elementen auf n (≦ N) Plätzen. Eine Kombination ist eine Möglichkeit der Anordnung, bei der es nicht auf der Reihenfolge der Elemente ankommt.

AB Übungen zur Kombinatorik

Ültg: Aufgaben, die man nicht lösen können muss.
Erklärung: N! sind die Permutationen aller Felder, in der Klammer sind die Permutationen der leeren Felder, n_x! sind die Permutationen des x-Elementes.
Diese Art Aufgaben sind in der QS wichtig, da i.d.R. nur mit Gut- und Ausschusselementen gearbeitet wird.

nicht mehr unterrichten

Prüfplanung

Ziel: Sicherstellung einer ordnungsgemäßen Qualitätsprüfung und einer einwandfreien Produktqualität.

Ein: eine Kiste mit Ware kommt an. Was ist zu tun?
Einbeziehung der betrieblichen Strukturen, der Qualitätsvorgaben und vor allem der Kostenaspekte. Entscheidende Bedeutung für spätere lang- und kurzfristige Prüfdatenanalysen.

Einarbeiten Grundkurs QS Kap.2

Prüfmerkmal - was?

soll Produktqualität sichern und Kosten minimieren
Kriterien: Funktion, Kunde, Fertigung (Nacharbeitskosten, Weiterverarbeitung, unsicher - sicher).

Entscheidungshilfen: Konstruktionszeichnungen, Arbeitspläne, FMEA, Unterlagen über Fertigungsunsicherheiten, Maschinen und Prozessfähigkeitskennwerte, Schadensberichte, Reklamationen, Kostendaten

Prüfhäufigkeit - wie oft?

Kriterien: Prüfkosten, Wertzuwachs, Schadensrisiko, Zugang zur Prüfstelle, Totzeit in der SPC.

Auch Kostenstellenwechsel, vgl. interner Kunde
Unter Schadensrisiko fallen auch Produktveränderung, z.B. durch Schweißspannungen.
Totzeit: Begriff aus der Regelungstechnik, vgl. QRK

Wareneingang

prüft nach Notwendigkeit und Möglichkeit Material und Fremdteile, große Lieferungen stichprobenartig nach vertraglich vereinbarten Prüfplänen.
Mehrere Merkmale in der Reihenfolge der Fehlerwahrscheinlichkeit.

Fertigungsprüfung / Zwischenprüfung
verhindert weitere Produktionskosten

erfolgt meist als Durchlaufkontrolle. Jeder qualitätsbestimmende Arbeitsvorgang wird sofort geprüft, um das Ausschussrisiko gering zu halten.

Zentralprüfung

Verursacht Kostensteigerung durch Transport und Liegezeiten. Für Prüfaufgaben, die empfindliche oder aufwendige Prüfgeräte erfordert.

Endkontrolle

wird durch die Garantie gegenüber dem Abnehmer bestimmt.

Prüfart

Attributenprüfung
prüft Gut / Schlecht und zählt

z.B. Prüfergebnisse durch Lehren, Lackfehler je Fahrzeug, Webfehler je Tuchballen und Litzenbrüche je 100m Stahlseil.

Variablenprüfung
prüft quantitative Merkmale
→ höhere Aussagekraft, benötigt weniger Stichproben

z.B. durch Messen

Prüfumfang - wie viel?

Fehlerarten nach DIN 55350 T31

Hängt maßgeblich von den Folgen eines Fehlers ab
– **kritische Fehler**: sicherheitsrelevant
  erfordert automatische 100%-Prüfung
– **Hauptfehler**: betriebsrelevant
– **Nebenfehler**: unwesentlich

gefährdet Personen oder die Funktion einer größeren Anlage
Automatische 100%-Prüfung mit Dokumentation ist Stand der Technik für kritische Fehler und dient der Absicherung gegen Regressansprüche
führt voraussichtlich zum Ausfall oder senkt die Brauchbarkeit erheblich
senkt die Brauchbarkeit nicht wesentlich

100%-Prüfung
nur in Kleinserien oder bei automatischer Prüfung wirtschaftlich

Unmöglich bei zerstörender Prüfung, z.B. Festigkeitsklasse.
Manuelle attributive 100%-Prüfung hat ca. 0,5% Restfehleranteil, statistisch abgesicherte Stichprobenprüfungen sind genauer. Gefordert werden für automatische Fertigung 0% Fehler (AQL=acceptable quality line), (praktisch toleriert < 10 ppm).

– Sortierprüfung: fehlerhafte Teile aussortieren
– Klassierprüfung: in der SPC oder zum Sortieren in Qualitätsklassen

steigert die Qualität, ist teuer, verbessert aber nicht die Fertigung
Klassierung der Werkstücke ist heute selten, z.B. Endmaße, früher Einspritzpumpenteile oder für die Hydropneumatik bei Citroen

Stichprobenprüfung (DIN ISO 2859 und 3951)
Vorteile: billiger, schneller, zerstörend möglich

Vertragliche Haftung für Garantieansprüche erfordert mindestens mathematische Stichproben nach DIN 40080 = DIN ISO 2859 T1
DIN ISO 2859 enthält Stichprobenanweisungen und Verfahren für die Attributprüfung, DIN ISO 3951 für Variablenprüfung.
Der Ausdruck „Stichprobe" kommt vom Handel in Säcken. Daraus werden Proben mit einen spitzen Halbrohr entnommen.
siehe Statistik „Stichprobensysteme"

Prüfumfang hängt u.a. ab von
– der Menge der Teile
– den vorherigen Ergebnissen (Skip-Lot-Verfahren, Prüfdynamisierung)

DIN ISO 2859 T3
to skip: auslassen, überspringen, vgl.: das Känguruh Skippy

Prüfer und Prüfort

durch wen und wo?
je nach Prüfmittel im Messlabor oder am Arbeitsplatz, durch QS-Personal oder durch Werker (Selbstprüfung)

Selbstprüfung verlangt Qualifikation, spart Personal und motiviert den Werker durch Verantwortung (außer bei Stückzahllohn).
Prüfung durch QS Personal bringt objektiver Ergebnisse

Prüfmittel - womit?

Verweis auf die eigene Unterrichtseinheit.

Dokumentation

Kann durch CAQ unterstützt werden, aber die Leistungsfähigkeit von CAQ ist unterschiedlich und begrenzt.

Prüfanweisung
ergänzt die Zeichnung

z.B. bei neuen oder komplexen Prüfmerkmalen: Verhalten bei bestimmten Situationen, grafische Visualisierung, in Fremdsprachen.
FO einer Zeichnung mit roter Markierung
„Er tut es" ist besser als „Er müsste das können".

Prüfdaten
Prüfen ⇒ Dokumentieren ⇒ Auswerten

Stellt sicher, dass und wie Prüfdaten dokumentiert und gesammelt werden und bildet die Basis für alle QRK
Prüfen ohne auswerten macht keinen Sinn⇒Produkthaftungsgesetz.

Prüfschärfe

Festzulegen bei der Stichprobenprüfung aus einer Grundgesamtheit von N Teilen:
– Stichprobenumfang n
– maximal zulässige Anzahl c darin enthaltener fehlerhafter Teile
– Maßnahmen bei fehlerhafter Lieferung (Überschreiten von c)

Zur Binomial-Verteilung

Stichprobenprüfung

Da steht er nun, der Container mit N=5000 Schrauben. Geprüft werden soll das Gewinde durch Lehren. Der frisch gebackene Techniker soll jetzt eine einfache Regel aufstellen, nach der der Wareneingang die Schrauben prüfen soll und unter welchen Voraussetzungen sie angenommen werden soll.

n-c-Anweisungen enthalten den Stichprobenumfang n, die maximal zulässige Anzahl c fehlerhafter Teile in der Stichprobe und die Maßnahmen bei Überschreiten der maximal zulässigen Anzahl von Fehlern. Dies kann sein: Zurückweisen des Loses, Informieren der Fertigungsplanung usw.
„Stichprobe" werden mit spitzen Halbrohren aus Säcken entnommen. Auch heutzutage nimmt man die Probe nicht von oben, sondern zufällig von jeder Palette. Um Bequemlichkeit und Vorlieben auszuschließen, werden vom Computer Zufallszahlen vorgegeben.
Programmablaufplan zur Einfachstichprobenprüfung nach DIN 40080

Literaturverzeichnis

[Bamberg 1993] Günther Bamberg, Franz Baur: Statistik, R.Oldenburg Verlag München Wien 1993
[Barth 1994] Friedrich Barth, Rudolf Haller: Stochastik, Ehrenwirth Verlag München 1994
[Beck-Bornholdt/Dubben 2002] Hans-Peter Beck-Bornholdt, Hans-Hermann Dubben: Der Hund, der Eier legt - Erkennen von Fehlinformationen durch Querdenken, Rowohlt Taschenbuch Verlag Reinbek 2002
[Crilly 2007] Tony Crilly: 50 Schlüsselideen Mathematik, Spektrum Heidelberg 2007
[Devlin 2008] Keith Devlin: Pascal, Fermat und die Berechnung des Glücks, C.H.Beck München 2009
[Dobelli 2011] Hans-Peter Beck-Bornholdt, Hans-Hermann Dubben: Der Hund, der Eier legt - Erkennen von Fehlinformation durch Querdenken, Rowohlt Taschenbuch Verlag München 2011
[Dobelli 2012] Rolf Dobelli: Die Kunst des klugen Handelns, Hanser Verlag München 2012
[EuroM] Ulrich Fischer ua.: Fachkunde Metall, Europa-Lehrmittel Haan-Gruiten
[EuroTabM] Ulrich Fischer ua.: Tabellenbuch Metall, Europa-Lehrmittel Haan-Gruiten
[EuroTabM46] Roland Gommeringer ua.: Tabellenbuch Metall 46.Auflage, Europa-Lehrmittel Haan-Gruiten 2014
[Geiger 1998] Walter Geiger: Qualitätslehre (auch: DGQ-Band 11-20), Vieweg Braunschweig 1998
[Gieck 1995] K. + R. Gieck: Technische Formelsammlung, Gieck Verlag Germering 1995
[Greßler 1995] U.Greßler, R.Göppel: Qualitätsmanagement - Eine Einführung, Stam Köln 1995
[Hering 1993] Johannes Braun ua.: Qualitätssicherung für Ingenieure, VDI-Verlag Düsseldorf 1993
[HTTabM15] Wilhelm Dax u.a.: Tabellenbuch für Me3talltechnik 15.Auflage, Handwerk und Technik Hamburg 2014
[Huygens 1658] Christiaan Huygens: Pensées, 1658
[Klein 2008] Dieter Alex ua.: Klein Einführung in die DIN-Normen, Beuth Verlag Berlin 2008
[Mérö 1996] László Mérö: Die Logik der Unvernunft - Spieltheorie und die Psychologie des Handelns, rororo Reinbek 1996
[Moivre 1733] Abraham de Moivre: The Doctrine of Chances, London 1733
[Randow 1992] Gero von Randow: Das Ziegenproblem, Rowohlt Reinbek 1992
[Reichard 1993] Alfred Reichard: Fertigungstechnik 1, Handwerk und Technik Hamburg 1993
[Rinne 1991] Horst Rinne, Hans-Joachim Mittag: Statistische Methoden der Qualitätssicherung, Carl Hanser Verlag München Wien 1991
[Schneider21] Andrej Albert ua.: Bautabellen für Ingenieure, 21.Auflage,, Bundesanzeiger Verlag Köln 2014
SdW: wechselnde Autoren, Spektrum der Wissenschaft,
[Voigt 1997] Hans-Dietrich Voigt: Qualitätssicherung - Qualitätsmanagement, Handwerk und technik Hamburg 1997

Auswertung von Daten

– Tabellenkalkulationen: Excel, OpenOffice ..
– R Project for Statistical Computing: mächtige Programmiersprache → www.r-project.org