

Konvexe Polyeder im Mathematikunterricht

Diplomarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades einer
Magistra der Naturwissenschaften

an der Karl-Franzens-Universität Graz

vorgelegt von
Franziska FINSTERER

am Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen
Begutachterin: Univ.-Prof. Dr.phil. Karin Baur

Graz, 2018

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich erkläre ehrenwörtlich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen nicht benutzt und die den Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen inländischen oder ausländischen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht. Die vorliegende Fassung entspricht der eingereichten elektronischen Version.

Datum

Unterschrift

Danksagung

Gleich zu Beginn möchte ich einige Menschen namentlich nennen, die mich in der Phase des Verfassens dieser Diplomarbeit immer unterstützt haben und denen somit mein größter Dank gebührt.

Zuallererst möchte ich meiner Mentorin, Univ.-Prof. Dr.phil. Karin Baur, danken, die sehr viel Geduld und Verständnis für meine räumlichen und zeitlichen „Distanzen“ hatte und mich und mein Schaffen hervorragend betreut hat.

Als nächstes wäre da meine ganze, große Familie, die mich mein Leben lang unterstützt hat und mir auf dem Weg zur Selbständigkeit immer zur Seite stand (und nach wie vor steht, denn seien wir mal ehrlich: das Ziel ist noch nicht ganz erreicht). Ich danke euch auch von Herzen, dass ihr meine (beruflichen) Pläne immer abgesegnet habt und Vertrauen in diese und in mich hattet und nach wie vor habt!

Selbstverständlich möchte ich auch meinem Freund Lukas danken, der ohne Zweifel meine größte Stütze während des Schreibprozesses war, mich immer wieder ermutigte und motivierte, der nie müde wurde, mir bei Problemen und Fragen zuzuhören und an Lösungen zu feilen. Lukas, ich kann es gar nicht in Worte fassen, wie unendlich dankbar ich dir für alles bin!

Weiters möchte ich Annemarie und Horst danken, die sich tatsächlich die Mühe gemacht haben, diese Arbeit auf Fehler zu überprüfen und Verbesserungsvorschläge einzubringen. Ich schätze euch und eure Unterstützung wirklich sehr und könnte mir keine besseren Schwiegereltern (in spe) wünschen! Vielen Dank für alles!

Auch Isi möchte ich mit Freude nennen: Danke für die Beschaffung der österreichischen Schulbücher. Ohne deine Hilfe wäre das gesamte sechste Kapitel ins Wasser gefallen.

Weiters gebührt mein Dank dem Team von „Ganz in Weise“ und den „Hoffotografen“, das mir sogar in der Hochsaison frei gegeben hat, um meine Arbeit vollenden zu können, und mir zugleich die Deadline gesetzt hat, die ich so dringend brauchte. Ich freue mich unglaublich über die Arbeit bei und vor allem mit euch!

Danken möchte ich auch meinen Chören (insbesondere dem Very Large Quartett), die immer für entspannenden, musikalischen Ausgleich gesorgt haben.

Last, but definitely not least möchte ich allen anderen Freundinnen und Freunden danken, die mir immer ein offenes Ohr geschenkt haben und mit Rat und Tat zur Seite gestanden sind. Ganz besonders meinen Mädels, die ich leider viel zu selten sehe, aber umso mehr schätze!

Um diese Danksagung mit den Worten von maschek abzuschließen: „So das reicht, alle andern denken sichs.“¹

¹ https://www.youtube.com/watch?v=0BwhS_rp9ew

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	6
1	Polyeder allgemein	7
1.1	Definitionen.....	7
1.1.1	Polygon.....	7
1.1.2	Polyeder: Definition, Wortherkunft und –bedeutung	8
1.1.3	„konvex“	9
1.2	Eulerscher Polyedersatz.....	10
1.2.1	Beweis	10
1.3	Descartes‘ches Theorem	15
1.3.1	Definition „Winkeldefekt“	15
1.3.2	Satz	15
2	Platonische Körper (konvexe, reguläre Polyeder).....	16
2.1	Definitionen.....	16
2.2	Würfel (Hexaeder, Kubus) – {4, 3}.....	17
2.3	Tetraeder – {3, 3}	19
2.4	Oktaeder – {3, 4}.....	20
2.5	Dodekaeder – {5, 3}	21
2.6	Ikosaeder – {3, 5}.....	22
2.7	Anzahl der platonischen Körper	24
2.7.1	Satz	24
2.7.2	Beweis	24
2.8	Besondere Eigenschaften und Verbindungen unter den platonischen Körpern	27
2.8.1	Weitere Beziehungen innerhalb eines platonischen Körpers	27
2.8.2	Dualität	28
2.8.3	Der ‘Ringschluss der platonischen Körper’	30
2.9	Geschichte der platonischen Körper.....	32
2.9.1	Platon (427 – 347 v. Chr.)	33
2.9.2	Euklid von Alexandria (365 v. Chr. – ca. 300 v. Chr.).....	34
2.9.3	Kepler (1571 – 1630).....	35
3	Halbreguläre, konvexe Polyeder	37
3.1	Definitionen.....	37
3.2	Die archimedischen Körper	38
3.2.1	Prismen & archimedische Antiprismen	39

3.2.2	Abgestumpfte Körper	41
3.3	Die dual-archimedischen Körper.....	47
3.4	Die Johnson-Körper	50
3.5	Die Deltaeder.....	52
3.6	Überblick über verschiedenste Polyedergruppen	54
4	Konvexe Polyeder in der Natur	55
5	Weitere besondere konvexe Polyeder	57
5.1	Pseudo-Rhombenkuboktaeder.....	57
5.2	Dürer-Polyeder	58
6	Vorkommen konvexer Polyeder im schulischen Lehrplan:.....	60
6.1	Erste Klasse	60
6.2	Zweite Klasse	62
6.3	Dritte Klasse	64
6.4	Vierte Klasse	66
6.5	Fünfte Klasse.....	67
6.6	Sechste Klasse	69
6.7	Siebte Klasse	70
6.8	Achte Klasse.....	72
7	Theoretische und praktische Einbindungsmöglichkeiten von konvexen Polyedern in den Mathematikunterricht	74
7.1	Zielsetzungen.....	74
7.2	Theoretische und praktische Einbindungsmöglichkeiten	77
7.2.1	Räumliches Vorstellungsvermögen trainieren und ausbauen.....	77
7.2.2	Sorgfältiges und durchdachtes Arbeiten fördern	84
7.2.3	Rechenkompetenz stärken	91
8	Schlussbetrachtung.....	102
9	Anhang	103
9.1	Verweise zu Falt- und Bastelanleitungen zu den platonischen Körpern	103
9.2	Anhang zu Stationenbetrieb „Archimedische und dual-archimedische Körper“	103
9.3	Anhang zu „Beweis über die Anzahl der platonischen Körper“	118
9.4	Anhang zu „Rechnen und Operieren mit Vektoren in zueinander dualen Körpern“.....	120
9.5	Anhang zu „Rechnen und Operieren mit Vektoren im Kuboktaeder“	122
10	Quellenverzeichnis	123
10.1	Literaturverzeichnis.....	123
10.2	Abbildungsverzeichnis	126

0 Einleitung

Platon, Euklid, Kepler, Dürer und viele mehr haben sich offenkundig von ihnen faszinieren lassen, haben sie studiert, ihnen Namen gegeben, sie klassifiziert und auf Eigenschaften hin untersucht: *die Polyeder*.

Auch ich wurde von der Faszination für diese geometrischen Körper ergriffen und beeinflusst durch mein Lehramtsstudium hat sich in mir der Wunsch geweckt, die Polyeder aus didaktischer Sicht zu untersuchen. Da das Themengebiet unter dieser Überschrift mehrere Bücher füllen würde, habe ich beschlossen, mich in dieser Arbeit auf *konvexe* Polyeder im Mathematikunterricht zu spezialisieren.

Vorab möchte ich noch einen Einblick in die Struktur und den Inhalt dieser Arbeit ermöglichen. Sie lässt sich grob betrachtet in zwei Hauptteile gliedern: Der erste Teil (Kapitel 1-5) durchleuchtet die konvexen Polyeder aus wissenschaftlicher Sicht und liefert alle nötigen Informationen, die man für eine Behandlung des Themas im Unterricht benötigt. Mit dem zweiten Teil (Kapitel 6, 7 und 9) folgt die Untersuchung aus einem didaktischen Standpunkt, wobei zunächst betrachtet wird, in welchen Formen und in welchem Ausmaß konvexe Polyeder derzeit im österreichischen, mathematischen Lehrplan der AHS vorkommen. Daraufhin folgt eine Auflistung und Beschreibung von mathematischen Kompetenzen in Form von Zielsetzungen, die durch die Behandlung der konvexen Polyeder im Unterricht erreicht werden können. Zu diesen Zielsetzungen gibt es ab Kapitel 7.2 auch verschiedenste Vorschläge und Ideen, wie man konvexe Polyeder in den Schulunterricht integrieren kann, sowie konkrete, kompetenzkonforme Unterrichtsarbeiten inklusive erstellter Unterrichtsmaterialien, die sich im Anhang (Kapitel 9) befinden.

Bei Betrachtung des Aufbaus dieser Diplomarbeit lässt sich bereits erkennen, dass sie hauptsächlich an LehrerInnen und LehramtsstudentInnen gerichtet ist, wobei sie natürlich auch für andere Mathematik-Begeisterte interessant sein dürfte und gerne gelesen werden darf. Ich hoffe, Sie lassen sich ebenso von den konvexen Polyedern faszinieren.

1 Polyeder allgemein

1.1 Definitionen

1.1.1 Polygon

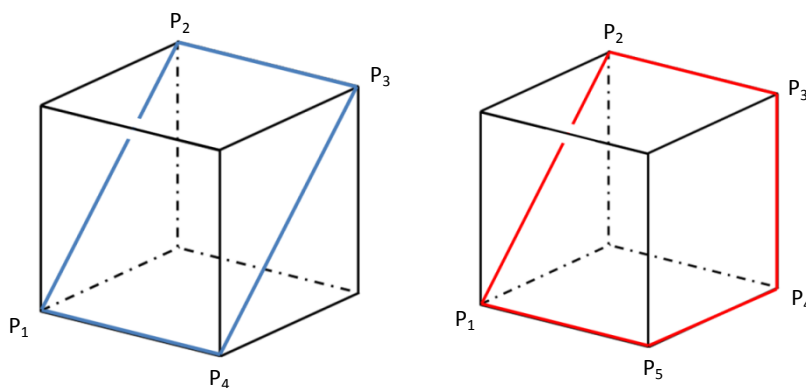
Def. 1 Ein **Polygon** oder (geschlossenes) Vieleck ist eine Figur, die aus geordneten Punkten P_1, P_2, \dots, P_n ($n \geq 3, n \in \mathbb{N} \setminus \{\infty\}$) besteht, wobei folgende Eigenschaften erfüllt sein müssen:

- I) Jeder Punkt P_i (mit $1 \leq i \leq n-1$) wird mit dem darauf folgenden Punkt P_{i+1} mittels einer Strecke $[P_i P_{i+1}]$ verbunden.
- II) Der letzte Punkt P_n wird mit P_1 verbunden.
- III) Jeweils drei aufeinander folgende Punkte dürfen nicht auf einer Geraden liegen.

Die Punkte P_1, P_2, \dots, P_n bezeichnet man dann als die **Ecken** des Polygons und die Strecken $[P_1 P_2], [P_2 P_3], \dots, [P_n P_1]$ als seine **Seiten**.

Def. 2 Ein Polygon nennt man genau dann **eben**, wenn alle Ecken (und somit auch Seiten) auf einer Ebene liegen. Andernfalls bezeichnet man es als **windschief**.

Das linke, blaue Polygon in den folgenden zwei Beispielen ist eben; das rechte, rote ist windschief.



Vereinbarung: Wenn im Laufe dieser Arbeit von Polygonen die Rede ist, sind stets ebene Polygone gemeint.

Def. 3 | Unter einem **Innenwinkel** eines Polygons versteht man den Winkel, der sich im Inneren des Polygons befindet und von zwei benachbarten Seiten eingeschlossen wird.

Def. 4 | Ein Polygon ist **regelmäßig** oder **regulär** genau dann, wenn alle Seiten gleich lang und alle Innenwinkel gleich groß sind.

Weiters heißen zwei Polygone **kongruent** oder **deckungsgleich**, wenn sie durch eine sogenannte Kongruenzabbildung in Deckung gebracht werden können. Eine **Kongruenzabbildung** wiederum ist eine *Spiegelung*, eine *Parallelverschiebung*, eine *Drehung* oder eine beliebige Verknüpfung dieser drei Bewegungen.

1.1.2 Polyeder: Definition, Wortherkunft und –bedeutung

Def. 5 | Ein **Polyeder** ist ein geometrischer Körper, der von endlich vielen, ebenen Polygonen begrenzt ist.

Eine alternative Möglichkeit für eine Definition wäre, ein Polyeder nicht als Körper, sondern als Oberfläche dieses Körpers zu verstehen. In dieser Auffassung lässt sich ein Polyeder als die Fläche definieren, die aus endlich vielen, ebenen Polygonen zusammengefügt ist (vgl. Alexandrow 1958, 7).

Da eine Verwechslung der beiden Auffassungen keine gewichtigen Verständnisschwierigkeiten bewirken kann, werden sie in der Literatur häufig als völlig synonym betrachtet oder es wird nur eine der beiden Definitionen angeführt. Zumeist wird die Auffassung eines Polyeders als Körper präferiert, wodurch unter anderem auch leichter auf einzelne Punkte innerhalb des (körperlichen) Polyeders verwiesen werden kann. Daher wird auch in dieser Arbeit die körperliche Auffassung favorisiert. Wird in der restlichen Arbeit auf die polyedrische Fläche Bezug genommen, wird diese klar als **Oberfläche** des Polyeders bezeichnet.

Etymologisch kommt das Wort „Polyeder“ aus dem Altgriechischen und setzt sich aus den Wörtern „πολύς“ (=viel) und „ἔδρα“ (=Sitz, Sessel - hier ist wohl eher die ebene „Sitzfläche“

gemeint) zusammen. Unter einem Polyeder wird also etymologisch ein Körper verstanden, der von vielen (Sitz-) Flächen begrenzt ist. Passend dazu sind auch die weiteren Bezeichnungen für Polyeder: Vielflach, Vielflächner oder Ebenflächner.

Def. 6 Die Polygone, die ein Polyeder begrenzen, nennt man auch die **Seitenflächen** oder einfach **Flächen** dieses Polyeders. Weiters werden die Eckpunkte des Polygons und deren Verbindungsstrecken als **Ecken** und **Kanten** des Polyeders bezeichnet.

Besonderes Augenmerk bei der Definition von Polyedern ist noch darauf zu legen, dass die Oberfläche eines Polyeders aus *ebenen* Polygonen besteht. Geometrische Körper wie die Kugel, der Kegel oder der Zylinder, sind keine Polyeder.

1.1.3 „konvex“

Es gibt mehrere Möglichkeiten einer Definition des Begriffes „konvex“:

- a) Müller-Philipp und Gorski schreiben zum Beispiel in ihrem *Leitfaden Geometrie* (2009, S. 51):

Def. 7 „Polyeder heißen **konvex**, wenn zu je zwei Punkten aus dem Innern des Polyeders auch die Verbindungsstrecke zwischen diesen beiden Punkten ganz im Innern des Polyeders verläuft.“

Das bedeutet also: Ein Polyeder $P \subset \mathbb{R}^3$ heißt konvex $:\Leftrightarrow \forall \text{ Punkte } A, B \in P: [AB] \subset P$

- b) Boreis wiederum definiert „konvex“ in seinem Werk *Darstellende Geometrie I* (1964, S. 119) folgendermaßen, wobei diese Definition nur an Polyedern angewandt werden kann und nicht flexibel abänderbar für andere geometrische Körper, wie zum Beispiel für eine Kugel, ist:

Def. 8 „Ein Polyeder heißt **konvex**, wenn es ganz auf einer Seite jeder durch ein Begrenzungs-polygon festgelegten Ebene liegt.“

Mathematisch lose, aber dafür anschaulich betrachtet, bedeutet „konvex“ also, dass das Polyeder keine Einbuchtungen oder Löcher hat.

1.2 Eulerscher Polyedersatz

Der Eulersche Polyedersatz wurde nach dem bedeutenden Mathematiker *Leonhard Euler* (1707-1783) benannt. Er besagt, dass für alle *konvexen* Polyeder mit e Ecken, k Kanten und f Flächen folgende Beziehung gilt:

$$e + f - k = 2$$

Vielen Vermutungen zufolge war der Polyedersatz schon *René Descartes* (1596 – 1650) bekannt, allerdings veröffentlichte dieser ihn nicht als solchen. Euler brachte 1751 einen Beweis heraus, der mit unserer heutigen mathematischen Genauigkeit allerdings einen Fehler enthält (vgl. Fischer 1990, S. 674). Mittlerweile sind zahlreiche (richtige) Beweise bekannt. Einer davon soll im Folgenden betrachtet werden:

1.2.1 Beweis

Bevor der Beweis mittels Induktion über die Kantenanzahl k gestartet wird, werden noch kurz einige Grundbegriffe zur Graphentheorie eingeführt, die für den Beweis nötig sind:

Für die Definitionen 9 bis 12 seien n und $m \in \mathbb{N} \setminus \{\infty\}$.

Def. 9

Seien K und $E \neq \emptyset$ zwei disjunkte Mengen, wobei die Elemente $k_1, k_2, \dots, k_n \in K$ als *Kanten* und die Elemente $e_1, e_2, \dots, e_m \in E$ als *Ecken* bezeichnet werden. Sei f eine Abbildung, die jeder Kante k_i genau zwei Ecken e_s und e_t zuordnet ($i \in \{1, \dots, n\}$; $s, t \in \{1, \dots, m\}$), wobei s und t nicht unbedingt verschieden sein müssen:

$$f: K \rightarrow E * E = \{(e_s, e_t) \mid e_s, e_t \in E\}$$

($E * E$ kennzeichnet dabei die Menge aller ungeordneten Paare von Elementen von E .)

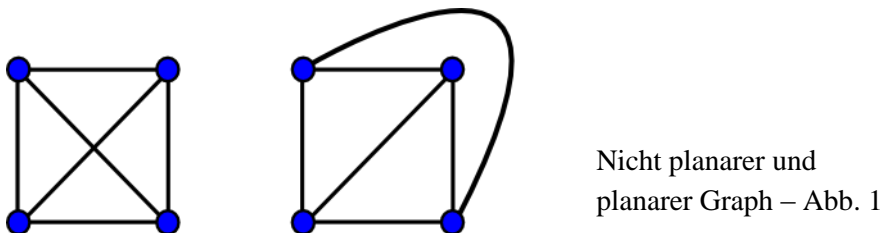
Dann bezeichnet man das Tripel (E, K, f) als **Graph**.

Def. 10 | Ein n -Tupel von Kanten (k_1, k_2, \dots, k_n) , bei dem die Endecke einer Kante k_i ($i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$) mit der Anfangsecke der darauffolgenden Kante k_{i+1} zusammenfällt, nennt man **Kantenzug**.

Def. 11 | Sei (E, K, f) ein Graph. Wenn sich zu zwei *beliebigen* Ecken e_i und $e_j \in E$ ($i \neq j$) immer ein Kantenzug $(k_1, k_2, \dots, k_n) \in K^n$ finden lässt, bei dem e_i die Anfangsecke der Kante k_1 und e_j die Endecke der Kante k_n ist, bezeichnet man den Graphen als **zusammenhängend**.

Def. 12 | Unter einem **planaren Graphen** versteht man einen Graphen, dessen Kanten nur in den Ecken aufeinander treffen.

In der folgenden Abbildung ist links ein nicht planarer und rechts ein planarer Graph dargestellt:



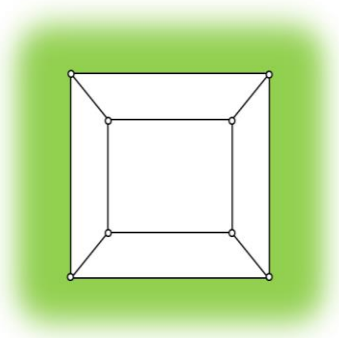
Satz:

Jedes konvexe Polyeder kann derart in die Ebene projiziert werden, sodass man einen zusammenhängenden, planaren Graphen erhält.

Ein konkreter Beweis für diesen Satz wird selten erbracht, da er ohnehin sehr anschaulich ist. Man kann sich vorstellen, dass man das Gerüst eines konvexen Polyeders in eine Kugel einschreibt und anschließend eine Lichtquelle in die Mitte von Polyeder und Kugel positioniert. Die Ecken und Kanten des Polyeders werden nun durch diese Lichtquelle als Schatten auf die Innenseite der Kugel projiziert. Man erkennt bereits an den Schatten, dass sich die Kanten nicht gegenseitig überschneiden. Diesen auf der Kugelhülle eingebetteten Graphen kann man nun noch mittels stereographischer Projektion auf die Ebene abbilden.

Wie genau eine stereographische Projektion funktioniert, wird unter anderem in dem pdf-Dokument der Christiani Hochschule Technik beschrieben, das man über folgendem Link erreichen kann (Stand: 25.07.2018): http://www.hochschule-technik.de/pdf/92880_probe.pdf (S. 3f.)

Wir wollen nun den Beweis des Eulerschen Polyedersatzes über den (planaren, zusammenhängenden) Graphen eines konvexen Polyeders erbringen (vgl. Gatschelhofer 2015, 15-17). Wenn nämlich der Eulersche Polyedersatz bei jedem planaren, zusammenhängenden Graphen gilt, dann gilt er also insbesondere auch bei jedem konvexen Polyeder, wie wir wegen des oben genannten Satzes wissen. Um sich den Graphen bzw. die Projektion eines Polyeders in die Ebene besser vor Augen halten zu können, soll man sich vorstellen, eine Fläche des Polyeders zu „entfernen“ und das übriggebliebene Konstrukt so lange an den „äußeren“ Ecken zu ziehen, bis es flach in der Ebene ausgebreitet ist. Der Graph eines Würfels sieht zum Beispiel folgendermaßen aus:



Bei der planaren Projektion eines Polyeders bleibt die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen gleich, da die entfernt gedachte Fläche des Polyeders der äußeren, sozusagen „unendlichen“ Fläche der planaren Projektion zugeordnet wird. (Diese äußere Fläche ist in der Abbildung grün gekennzeichnet.)

Nun kann der Beweis durch Induktion über die Kantenzahl geführt werden.

Im Folgenden bezeichne k die Kanten-, e die Ecken- und f die Flächenanzahl des jeweils betrachteten Graphen.

Induktionsbeginn: Es sei $k = 1$.

Für $k = 1$ gibt es nur zwei mögliche Graphen:

Graph 1: Es gibt zwei Ecken und die eine „unendliche“ Fläche;



also: $k = 1$, $e = 2$, $f = 1$

somit gilt der Eulersche Polyedersatz: $e + f - k = 2$

Graph 2: Es gibt nur eine Ecke, weil die Kante eine Schlinge bildet;



dadurch entstehen 2 Flächen;

also: $k = 1$, $e = 1$, $f = 2$

auch hier gilt wieder der Eulersche Polyedersatz: $e + f - k = 2$

Induktionsschritt: $k \rightarrow k + 1$

Wir nehmen also an, dass die Formel für Graphen mit bis zu k Kanten gilt. Wir nehmen einen beliebigen Graphen mit k Kanten und wollen zeigen, dass der Eulersche Polyedersatz auch für jeden Graphen gilt, den man durch Hinzufügen einer Kante erhält, wobei der „neue“ Graph wieder zusammenhängend und planar sein muss.

Sei $\tilde{k} = k + 1$ die Anzahl der Kanten, \tilde{e} die Anzahl der Ecken und \tilde{f} die Anzahl der Flächen des „neuen“ Graphen. Zu zeigen ist also: $\tilde{e} + \tilde{f} - \tilde{k} = 2$

Nun gibt es drei Möglichkeiten, wie wir eine Kante anfügen können, um dabei wieder einen zusammenhängenden, planaren Graphen zu erhalten:

Fall 1: Die neue Kante bildet eine Schlinge, d.h. sie geht von einem Eck aus und landet auch wieder im selben Eck. Durch die Schlinge entsteht eine neue Flächenabgrenzung; die Anzahl der Flächen \tilde{f} wird also im Vergleich zum ausgehenden Graphen um 1 erhöht, während die Anzahl der Ecken gleich bleibt. Wir erhalten also: $\tilde{k} = k + 1$, $\tilde{e} = e$, $\tilde{f} = f + 1$

Von der Induktionsannahme wissen wir, dass folgende Beziehung gilt:

$$e + f - k = 2$$

$$\Leftrightarrow \tilde{e} + (\tilde{f} - 1) - (\tilde{k} - 1) = 2$$

$$\Leftrightarrow \tilde{e} + \tilde{f} - \tilde{k} = 2$$

In diesem Fall gilt also der Eulersche Polyedersatz.

Fall 2: Die neu hinzugefügte Kante verbindet zwei bereits vorhandene Ecken. Die Anzahl der Ecken bleibt demnach also gleich; allerdings erhöht sich die Anzahl der Flächen im Vergleich zum ausgehenden Graphen um 1. Wir erhalten also: $\tilde{k} = k + 1$, $\tilde{e} = e$, $\tilde{f} = f + 1$

Wir finden dieselben Veränderungen wie in *Fall 1* vor und erkennen dadurch sofort, dass auch hier der Eulersche Polyedersatz gilt.

Fall 3: Die letzte Möglichkeit, wie wir eine neue Kante an den vorhandenen Graphen anknüpfen können, ist, dass die Kante eine bereits vorhandene Ecke mit einer neuen verbindet. Die Anzahl der Ecken wird somit um 1 erhöht, während die Anzahl der Flächen gleich bleibt.

Wir erhalten also: $\tilde{k} = k + 1$, $\tilde{e} = e + 1$, $\tilde{f} = f$

Wieder wissen wir aus der Induktionsannahme, dass folgende Beziehung gilt:

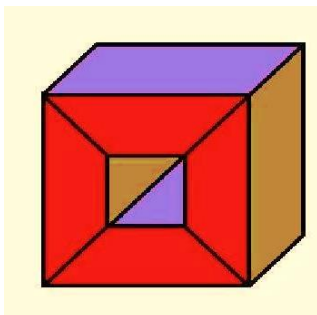
$$e + f - k = 2$$

$$\Leftrightarrow (\tilde{e} - 1) + \tilde{f} - (\tilde{k} - 1) = 2$$

$$\Leftrightarrow \tilde{e} + \tilde{f} - \tilde{k} = 2$$

q. e. d.

Man bemerke, dass der Eulersche Polyedersatz nur für *konvexe* Polyeder richtig ist. Für nicht konvexe Polyeder ist er im Allgemeinen falsch, was folgendes Beispiel verdeutlichen soll:



Durchstanzter
Würfel – Abb. 2

Der durchstanzte Würfel von Abb. 2 besitzt 16 Ecken und 16 Flächen. Die Anzahl der Kanten beträgt jedoch 32; somit gilt der Eulersche Polyedersatz nicht:

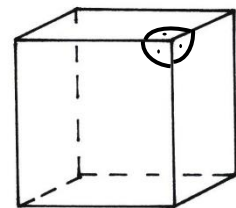
$$e + f - k = 16 + 16 - 32 = 0 \neq 2 .$$

1.3 Descartes'sches Theorem

1.3.1 Definition „Winkeldefekt“

Def. 13 | Als **Winkeldefekt** einer Ecke eines konvexen Polyeders bezeichnet man die Differenz zwischen dem Vollkreis (360°) und der Summe aller Winkel, die in dieser Polyederecke zusammenstoßen.

Die Definition soll anhand eines Beispiels verdeutlicht werden. Wir berechnen den Winkeldefekt einer Ecke eines Würfels: Jeder Innenwinkel eines Quadrats beträgt 90° und es stoßen drei Quadrate pro Ecke zusammen. Der Winkeldefekt einer Ecke ist somit:



$$360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 90^\circ$$

1.3.2 Satz

René Descartes veröffentlichte folgenden Satz – auch Descartes'sches Theorem genannt –, der eine weitere interessante Eigenschaft von konvexen Polyedern zutage legt:

Satz: Die Summe über die Winkeldefekte der Ecken eines Polyeders entspricht acht rechten Winkeln.

Das bedeutet also: $S = 8 * 90^\circ = 720^\circ$, wobei S die Summe über alle Winkeldefekte ist.

Cromwell führt in seinem Werk „Polyhedra“ (1997) auf Seite 187 einen Beweis für dieses Theorem an, der allerdings den einführenden Rahmen dieses Kapitels sprengen würde.

2 Platonische Körper (konvexe, reguläre Polyeder)

2.1 Definitionen

Def. 14 Ein Polyeder heißt „**regulär**“ genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (R1) Alle Flächen sind regelmäßige Vielecke.
- (R2) Alle Flächen sind zueinander kongruent.
- (R3) In jeder Ecke stoßen gleich viele Seitenflächen in gleicher Weise zusammen (:= kongruente Eckenumgebungen).

Ist ein reguläres Polyeder zusätzlich konvex, so spricht man von einem „**platonischen Körper**“.

Wichtig sind – besonders für die platonischen Körper – auch noch folgende Definitionen:

Def. 15 Eine Kugel, die alle Flächen eines konvexen Polyeders von innen berührt, wird „**Inkugel**“ genannt.

Def. 16 Eine Kugel wird genau dann als „**Umkugel**“ eines Polyeders bezeichnet, wenn alle Ecken dieses Polyeders die Kugel berühren.

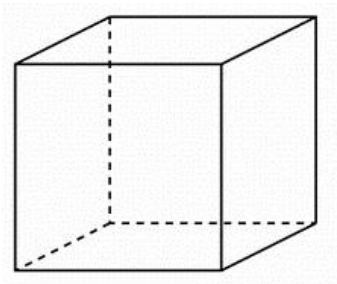
Nicht alle konvexen Polyeder besitzen eine Inkugel bzw. eine Umkugel. Die platonischen Körper hingegen haben die besondere Eigenschaft beides – sowohl eine In- als auch eine Umkugel – zu besitzen. Deren Mittelpunkte sind außerdem identisch und entsprechen dem Mittelpunkt des Polyeders selbst.

Eine spezielle Schreibweise für u.a. reguläre Polygone oder Polyeder ist das sogenannte „**Schläfli-Symbol**“ (vgl. Coxeter, Regular Polytopes 1963, 14), das nach dem Mathematiker Ludwig Schläfli benannt wurde. Es besitzt folgende Form: $\{p,q\}$

Dabei ist p das Symbol für die Form der Flächen und q das Symbol für die Konfiguration der Ecken. Zurzeit interessiert uns nur das Schläfli-Symbol für konvexe, reguläre Polyeder. Hierbei sind p und q ganze Zahlen, wobei p angibt, von welchen regelmäßigen p -Ecken der platonische Körper begrenzt wird, und q , wie viele Flächen in einer Ecke zusammenstoßen. Mit dem Schläfli-Symbol $\{p,q\}$ sind die einzelnen platonischen Körper eindeutig bestimmt.

2.2 Würfel (Hexaeder, Kubus) – $\{4, 3\}$

Der Würfel ist das wohl bekannteste Beispiel für ein konvexes, reguläres Polyeder. Er wird auch **Hexaeder** genannt, da er aus sechs (altgriech.: ἕξ [hék^{hs}]) kongruenten Quadraten besteht. Wie man schnell sieht, sind alle Bedingungen für ein reguläres Polyeder erfüllt:



Hexaeder – Abb. 3

- (R1) Alle Flächen sind regelmäßige Vierecke (=Quadrate).
- (R2) Alle Flächen sind zueinander kongruent.
- (R3) In jeder Ecke stoßen drei Seitenflächen in gleicher Weise zusammen.

Einige wichtige Formeln für ein Hexaeder mit der Kantenlänge a :

Volumen $V = a^3$

Oberflächeninhalt $O = 6a^2$

Seitendiagonale $d_S = a\sqrt{2}$

Körperdiagonale $d_K = a\sqrt{3}$

Inkugelradius $\rho = \frac{a}{2}$

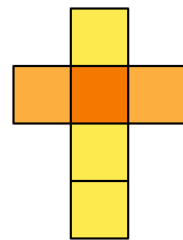
Umkugelradius $r = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

Def. 17

Das „**Körpernetz**“ (oder einfach „Netz“) eines Polyeders ist eine Skizze, von allen Polygonen, die das Polyeder begrenzen, wobei diese zusammenhängend in die Ebene ausgebreitet sind.

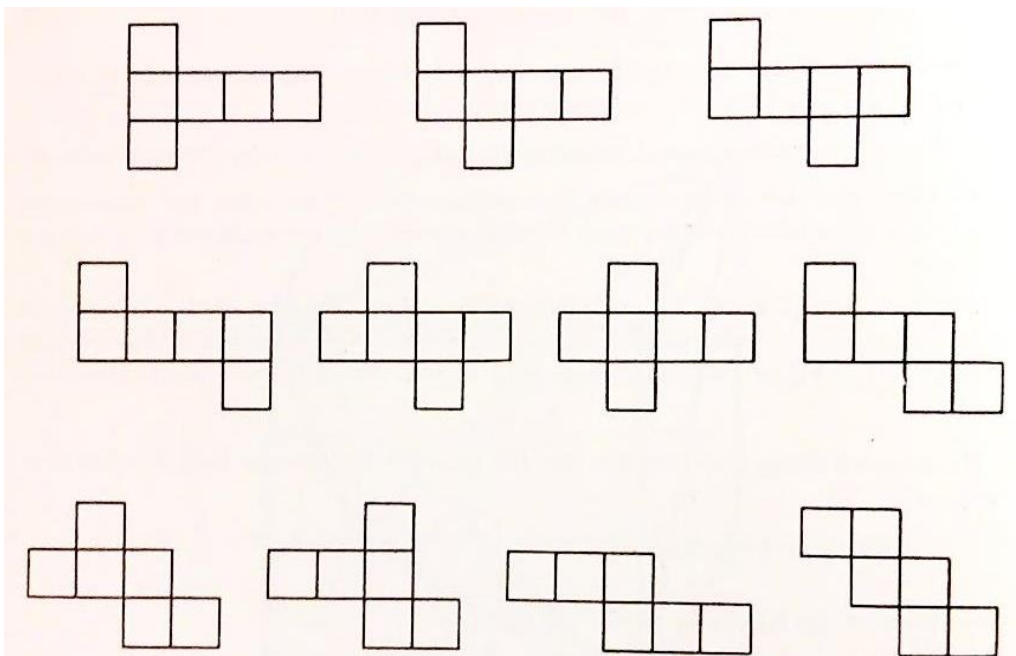
Ein Netz erhält man, indem man das Polyeder so oft entlang der Kanten aufschneidet, bis man alle Seitenflächen in die Ebene ausbreiten kann, ohne dabei irgendeines von diesen Polygonen herausgelöst zu haben (vgl. Boreis 1964, S. 117).

Das Körpernetz eines Hexaeders kann zum Beispiel so aussehen wie in Abb. 4.



Netz des Würfels – Abb. 4

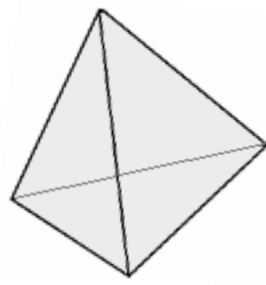
Es gibt aber auch noch zehn andere Möglichkeiten das Netz eines Würfels zu zeichnen. Folgende Abbildung stammt aus Rudolf Boreis' Werk „Darstellende Geometrie I“ (1964) und zeigt alle elf Arten von Körpernetzen eines Hexaeders auf:



Alle Würfelnetze – Abb. 5

2.3 Tetraeder – {3, 3}

Auch die Bezeichnung „Tetraeder“ kommt aus dem Altgriechischen und bedeutet so viel wie „Vierflächner“. Wie der Name bereits vermuten lässt, besteht dieser platonische Körper aus vier regelmäßigen Polygonen, und zwar aus vier gleichseitigen, kongruenten Dreiecken.



Tetraeder –
Abb. 6

Auch hier sind wieder alle Bedingungen zur Regularität erfüllt:

- (R1) Alle Flächen sind regelmäßige Dreiecke.
- (R2) Alle Flächen sind zueinander kongruent.
- (R3) In jeder Ecke stoßen drei Seitenflächen in gleicher Weise zusammen.

Einige wichtige Formeln für ein Tetraeder mit der Kantenlänge a :

$$\text{Volumen } V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$$

$$\text{Oberflächeninhalt } O = a^2\sqrt{3}$$

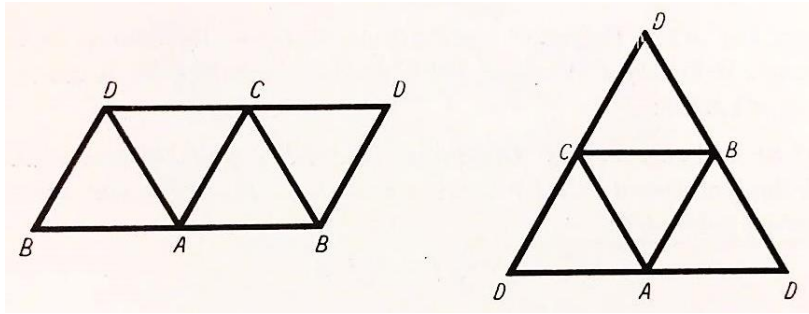
$$\text{Mantel-/Dreieckshöhe } h_a = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{Körperhöhe } h_K = \frac{a}{3}\sqrt{6}$$

$$\text{Inkugelradius } \rho = \frac{a}{12}\sqrt{6}$$

$$\text{Umkugelradius } r = \frac{a}{4}\sqrt{6}$$

Im Gegensatz zum Hexaeder besitzt das Tetraeder nur zwei verschiedene Arten von Netzen. Die folgende Abbildung, die diese beiden verschiedenen Körpernetze zeigt, ist ebenfalls Boreis' Werk „Darstellende Geometrie I“ (1964, 120) entnommen:

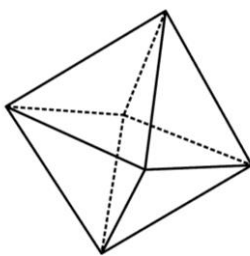


Alle Tetraedernetze
– Abb. 7

2.4 Oktaeder – {3, 4}

In Analogie zu den anderen platonischen Körpern besteht das Oktaeder, wie der Name schon sagt (altgriech. „ὀκτώ“ [októ:] = acht), aus acht kongruenten Flächen. Bei diesen Flächen handelt es sich – gleich wie beim Tetraeder – um gleichseitige Dreiecke.

Wieder lässt sich schnell überprüfen, dass auch für das Oktaeder die Bedingungen für ein reguläres Polyeder gegeben sind:



Oktaeder
– Abb. 8

- (R1) Alle Flächen sind regelmäßige Dreiecke.
- (R2) Alle Flächen sind zueinander kongruent.
- (R3) In jeder Ecke stoßen vier Seitenflächen in gleicher Weise zusammen.

Einige wichtige Formeln für ein Oktaeder mit der Kantenlänge a :

$$\text{Volumen } V = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}$$

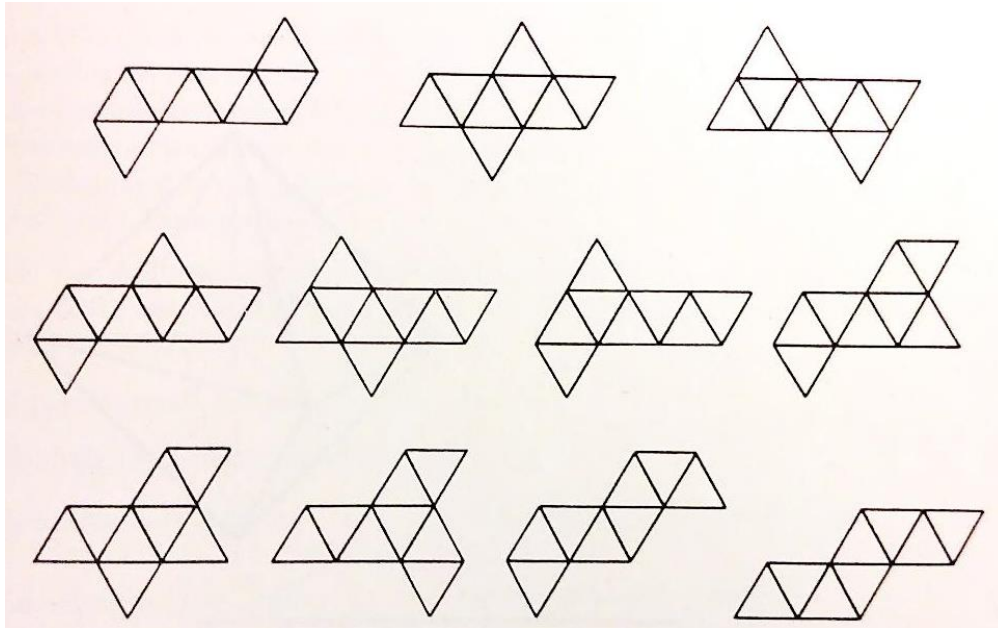
$$\text{Oberflächeninhalt } O = 2a^2\sqrt{3}$$

$$\text{Diagonale } d = a\sqrt{2}$$

$$\text{Inkugelradius } \rho = \frac{a}{6}\sqrt{6}$$

$$\text{Umkugelradius } r = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

Gleich wie der Würfel besitzt das Oktaeder elf unterschiedliche Arten von Netzen, was die folgende Abbildung deutlich macht.

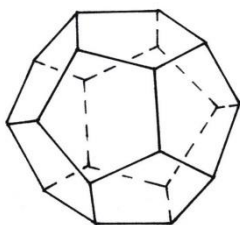


Alle Oktaedernetze – Abb. 9

2.5 Dodekaeder – {5, 3}

Das Dodekaeder, das auch unter dem Begriff „Pentagondodekaeder“ bekannt ist, besitzt zwölf (altgriech.: „δώδεκα“ [doˈdeka]) regelmäßige, kongruente Fünfecke als Begrenzungspolygone.

Erneut gilt:



Dodekaeder –
Abb. 10

- (R1) Alle Flächen sind regelmäßige Fünfecke.
- (R2) Alle Flächen sind zueinander kongruent.
- (R3) In jeder Ecke stoßen drei Seitenflächen in gleicher Weise zusammen.

Somit sehen wir, dass es sich auch hier wieder um ein konvexes, reguläres Polyeder – und somit um einen platonischen Körper – handelt.

Einige wichtige Formeln für ein Dodekaeder mit der Kantenlänge a :

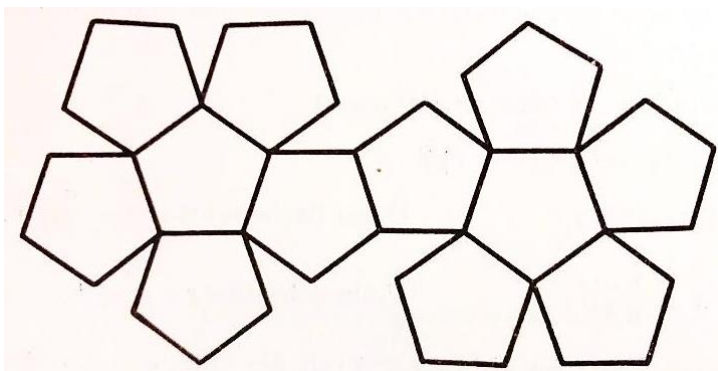
$$\text{Volumen } V = \frac{a^3}{4} (15 + 7\sqrt{5})$$

$$\text{Oberflächeninhalt } O = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

$$\text{Inkugelradius } \rho = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$$

$$\text{Umkugelradius } r = \frac{a}{4} \sqrt{3}(1 + \sqrt{5})$$

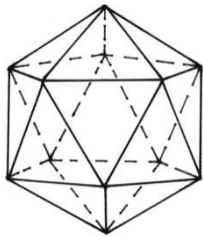
Das Dodekaeder besitzt eine zu große Anzahl an verschiedenartigen Netzen, als dass sie alle hier abgebildet werden könnten, nämlich 43380. Daher soll im Folgenden nur ein Körpernetz gezeigt werden, das bereits aufgrund seines Aussehens als „besonders symmetrisch“ bezeichnet (Bereis 1964, 129).



Dodekaedernetz –
Abb. 11

2.6 Ikosaeder – {3, 5}

Gleich wie das Tetraeder und das Oktaeder besteht das Ikosaeder aus gleichseitigen Dreiecken, allerdings ist die Anzahl dieser Polygone erheblich höher: So begrenzen ganze zwanzig (altgriech.: „εἰκοσι“ [e:kosi]) kongruente, gleichseitige Dreiecke das Ikosaeder, bei dem offensichtlich auch die Bedingungen für die Regularität gelten:



Ikosaeder –
Abb. 12

- (R1) Alle Flächen sind regelmäßige Dreiecke.
- (R2) Alle Flächen sind zueinander kongruent.
- (R3) In jeder Ecke stoßen fünf Seitenflächen in gleicher Weise zusammen.

Einige wichtige Formeln für ein Ikosaeder mit der Kantenlänge a :

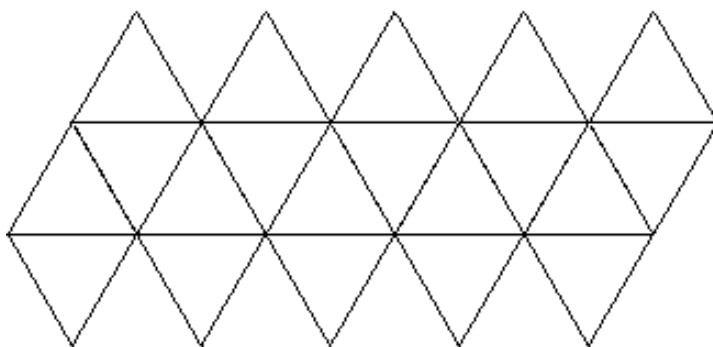
Volumen $V = \frac{a^3}{12} 5(3 + \sqrt{5})$

Oberflächeninhalt $O = 5a^2\sqrt{3}$

Inkugelradius $\rho = \frac{a}{12}\sqrt{3}(3 + \sqrt{5})$

Umkugelradius $r = \frac{a}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

Auch das Ikosaeder besitzt eine große Anzahl an verschiedenen Netzen, nämlich gleich wie das Dodekaeder 43380, weshalb hier nur eines angeführt werden soll:



Ikosaedernetz – Abb. 13

2.7 Anzahl der platonischen Körper

2.7.1 Satz

Auf den ersten Blick überraschend wirkt der folgende Satz über die Anzahl der platonischen Körper.

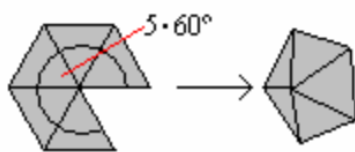
Satz: Es gibt genau 5 platonische Körper.

2.7.2 Beweis

Wir wissen, dass es die fünf bereits behandelten platonischen Körper (Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder) gibt. Wir wollen also noch zeigen, dass dies die einzigen sind (vgl. Bauernfeind/ Kerbl 2004, 6):

Wir suchen jetzt Polyeder, für die alle notwendigen Bedingungen für einen platonischen Körper erfüllt sind, d.h. die Regularitätsbedingungen (R1), (R2) und (R3), sowie die Konvexität müssen unsere gesuchten Polyeder erfüllen.

Es gibt aber auch noch bisher unausgesprochene Bedingungen, damit das Konstrukt überhaupt ein Körper sein kann: Damit eine räumliche Ecke entstehen kann, muss einerseits der Winkeldefekt größer als 0° sein (vgl. Abb. 14) – ansonsten würde eine Ebene entstehen oder die Konvexität wäre nicht erfüllt – und andererseits müssen mindestens drei Polygone in jeder Ecke zusammenstoßen.



Winkeldefekt größer 0° ermöglicht räumliche Ecke – Abb. 14

Nun wollen wir mehrere Fälle unterscheiden:

Fall 1: In jeder Ecke stoßen genau *drei* Polygone zusammen.

Wir überprüfen nun, für welche regelmäßigen Polygone es zutrifft, dass sie – unter der Bedingung von Fall 1 – einen Winkeldefekt größer als 0° bilden. Diejenigen Polygone, die

einen Winkeldefekt von 0° oder kleiner bilden, können, wie oben erwähnt, auch keine räumliche Ecke und somit keinen platonischen Körper bilden.

- Regelmäßige **Dreiecke** besitzen in jeder (Polygon-) Ecke einen Winkel von 60° . Drei Polygone sollen nun in jeder Ecke zusammenstoßen: $3 * 60^\circ = 180^\circ < 360^\circ$
Somit ist ein Winkeldefekt größer als 0° gegeben. Wir wissen auch bereits, dass, wenn drei regelmäßige, kongruente Dreiecke in einer Ecke zusammenstoßen, es sich dabei um das *Tetraeder* handelt. Wir haben also einen platonischen Körper gefunden.
- Regelmäßige **Vierecke** besitzen in jeder Ecke einen Winkel von 90° :
 $3 * 90^\circ = 270^\circ < 360^\circ \rightarrow$ Auch hier ist ein Winkeldefekt größer als 0° gegeben. Der platonische Körper, der von regelmäßigen, kongruenten Vierecken begrenzt wird, wobei jeweils drei Vierecke in einer Ecke zusammenstoßen, ist das *Hexaeder*.
- Regelmäßige **Fünfecke** besitzen in jeder Ecke einen Winkel von 108° :
 $3 * 108^\circ = 324^\circ < 360^\circ \rightarrow$ Wieder ist der notwendige Winkeldefekt vorhanden. Es handelt sich hier um das *Dodekaeder*, das von regelmäßigen, kongruenten Fünfecken begrenzt wird, wobei jeweils drei Fünfecke in einer Ecke zusammenstoßen.
- Regelmäßige **Sechsecke** besitzen in jeder Ecke einen Winkel von 120° :
 $3 * 120^\circ = 360^\circ \rightarrow$ Der Winkeldefekt ist hier 0° , also nicht größer als 0° . Es kann also keine räumliche, konvexe Ecke mehr gebildet werden, und auch bei Polygonen mit einer höheren Eckenanzahl ist dies der Fall. Dadurch kann kein platonischer Körper gebildet werden. Demnach wissen wir nun, dass platonische Körper nur von Drei-, Vier- und Fünfecken gebildet werden können. (Dies gilt für alle Fälle.)

Im Fall 1 haben wir also drei verschiedene platonische Körper gefunden.

Fall 2: In jeder Ecke stoßen genau vier Polygone zusammen.

Wieder betrachten wir, welche regelmäßigen Polygone unter dieser Bedingung den notwendigen Winkeldefekt bilden:

- Regelmäßige **Dreiecke**: Nun sollen anstatt drei vier Polygone in jeder Ecke zusammenstoßen. Wir erhalten somit eine Winkelsumme von $4 * 60^\circ = 240^\circ <$

360°.

Der Winkeldefekt ist größer als 0° und unter diesen Bedingungen erhalten wir das *Oktaeder*.

- Regelmäßige **Vierecke**: $4 * 90^\circ = 360^\circ$

Der notwendige Winkeldefekt ist nicht mehr gegeben – ebenso wenig bei Fünfecken oder Polygonen mit noch höherer Eckenanzahl.

Das Oktaeder ist somit der einzige platonische Körper, bei dem vier Polygone in einer Ecke zusammenstoßen.

Fall 3: In jeder Ecke stoßen genau *fünf* Polygone zusammen.

- Regelmäßige **Dreiecke**: $5 * 60^\circ = 300^\circ < 360^\circ$

Dank des positiven Winkeldefekts entsteht eine räumliche Ecke, nämlich die eines *Ikosaeders*.

- Wir wissen bereits aus Fall 2, dass kein Winkeldefekt größer als 0° mehr gegeben ist, wenn vier regelmäßige Vierecke in einer Ecke zusammenstoßen. Dementsprechend ist dies schon gar nicht für fünf regelmäßige Vierecke möglich ($5 * 90^\circ = 450^\circ > 360^\circ$), bzw. für fünf Polygone mit höherer Eckenanzahl.

Der einzige im Fall 3 ermittelte platonische Körper ist somit das Ikosaeder.

Fall 4: In jeder Ecke stoßen genau *sechs* Polygone zusammen.

- Regelmäßige **Dreiecke**: $6 * 60^\circ = 360^\circ$

Bei sechs oder mehr Polygonen in einer Ecke entsteht kein positiver Winkeldefekt und somit kein platonischer Körper mehr.

Summiert man nun die Anzahl der in den einzelnen Fällen ermittelten platonischen Körper auf, so sehen wir, dass es nur diese fünf uns bekannten konvexen, regulären Polyeder gibt.

q. e. d.

Die folgende Tabelle fasst noch einmal alle platonischen Körper mit ihren jeweiligen Ecken-, Flächen- und Kantenanzahlen zusammen:

Platonischer Körper	Eckenanzahl e	Flächenanzahl f	Kantenanzahl k
Tetraeder	4	4	6
Würfel	8	6	12
Oktaeder	6	8	12
Dodekaeder	20	12	30
Ikosaeder	12	20	30

2.8 Besondere Eigenschaften und Verbindungen unter den platonischen Körpern

2.8.1 Weitere Beziehungen innerhalb eines platonischen Körpers

Neben dem Eulerschen Polyedersatz gelten für jeden platonischen Körper mit f Flächen, e Ecken und k Kanten, wobei jede Fläche ein regelmäßiges n-Eck ist und in jeder Ecke m Kanten zusammenstoßen, folgende Beziehungen:

$$(A1) \quad k = \frac{f \cdot n}{2}$$

$$(A2) \quad k = \frac{e \cdot m}{2}$$

Diese beiden Beziehungen, die durch kurze Überlegungen schnell bewiesen und deswegen hier nicht weiter ausgeführt werden sollen, liefern gemeinsam mit dem Eulerschen Polyedersatz nach folgenden kurzen Umformungen die Gleichung (A3):

$$k = \frac{f \cdot n}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{n} = \frac{f}{2k}, \text{ analog: } k = \frac{e \cdot m}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{e}{2k}, \text{ und: } e + f - k = 2 \Leftrightarrow e + f = k + 2$$

$$\text{somit gilt: } \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{e+f}{2k} \Leftrightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{k+2}{2k} \Leftrightarrow$$

$$(A3) \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{k} \quad \Rightarrow$$

$$(A4) \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2} \quad (\text{da } k \text{ für die Kantenanzahl steht und somit positiv ist})$$

Auch mit der Ungleichung (A4), die für alle konvexen, regulären Polyeder erfüllt sein muss, lässt sich der Beweis erbringen, dass es nur fünf platonische Körper gibt. Eine Tabelle mit dem Beweis befindet sich u.a. im „Leitfaden Geometrie“ (2009, 54) von Susanne Müller-Philipp und Hans-Joachim Gorski.

2.8.2 Dualität

Def. 18

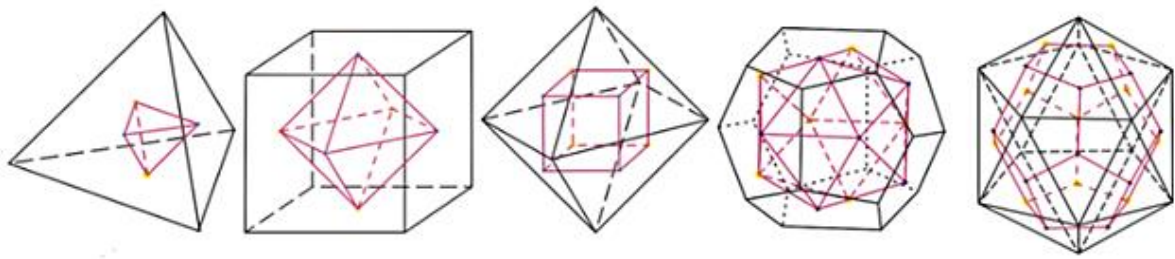
Unter Dualität versteht man eine bestimmte Beziehung zwischen zwei konkreten Polyedern. Verbindet man die Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen eines konvexen Polyeders, so erhält man wieder ein konvexes Polyeder, nämlich das zum Ausgangspolyeder **duale Polyeder**, oder auch **Dualkörper** genannt. Man sagt dann, dass sich die beiden Polyeder *dual zueinander* verhalten.

Ein Polyeder wird hier also auf besondere Weise einem anderen Polyeder eingeschrieben. Dies funktioniert manchmal auch umgekehrt: Umschreibt man einem konvexen Polyeder eine Umkugel – sofern diese existiert –, so kann man an den Ecken des Polyeders die Tangentialflächen der Umkugel bilden. Diese Tangentialflächen begrenzen ein konvexes Polyeder, nämlich wieder den bestimmten Dualkörper, diesmal allerdings in größerem Verhältnis.

Fügt man die beiden zueinander dualen Körper ineinander, so überbrücken sich ihre Kanten rechtwinklig. Interessant ist auch noch, dass, wenn man den Vorgang der Ermittlung des Dualkörpers bei einem bereits ermittelten Dualkörper anwendet, man wieder das Ausgangspolyeder erhält, allerdings – je nach Ermittlungsvorgang – in verkleinerter oder vergrößerter Form.

Das Besondere bei den platonischen Körpern ist, dass das zu ihnen duale Polyeder wieder ein platonischer Körper ist. Verbindet man zum Beispiel die Mittelpunkte benachbarter Flächen eines Tetraeders, so erhält man wieder ein Tetraeder. Das Tetraeder ist also zu sich selbst dual.

Weiters bilden Würfel und Oktaeder ein duales Paar sowie Dodekaeder und Ikosaeder ein duales Paar, was man in folgender Abbildung gut erkennen kann:



Dualität zwischen den Platonischen Körpern – Abb. 15

Besonders deutlich wird der Zusammenhang zwischen dualen Körpern bei Betrachtung des Schläfli-Symbols. Der Dualkörper zu einem regulären Polyeder $\{p, q\}$ ist nämlich das reguläre Polyeder $\{q, p\}$.

Platonischer Körper...	...im Schläfli-Symbol	Schläfli-Symbol des...	...Dualkörpers
Hexaeder (Würfel)	$\{4, 3\}$	$\{3, 4\}$	Oktaeder
Tetraeder	$\{3, 3\}$	$\{3, 3\}$	Tetraeder
Oktaeder	$\{3, 4\}$	$\{4, 3\}$	Hexaeder (Würfel)
Dodekaeder	$\{5, 3\}$	$\{3, 5\}$	Ikosaeder
Ikosaeder	$\{3, 5\}$	$\{5, 3\}$	Dodekaeder

Diese „Vertauschung“ von p ($\triangleq n$ von Kapitel 2.8.1) und q ($\triangleq m$) wird verständlich, wenn man noch einmal betrachtet, wie ein dualer Körper gebildet wird: Die Mittelpunkte der benachbarten Flächen des Ausgangspolyeders werden miteinander verbunden. Die Anzahl der Flächen des Ausgangspolyeders wird somit zur Anzahl der Ecken des Dualkörpers. Wenn man die zweite Möglichkeit zur Bildung des Dualkörpers (über die Umkugel) betrachtet, erkennt man auch, dass die Anzahl der Ecken des Ausgangspolyeders zur Anzahl der Flächen des Dualkörpers wird. Die Anzahl der Ecken und Flächen wird also vertauscht und somit muss die Anzahl der Kanten gleich bleiben, damit der Eulersche Polyedersatz erfüllt ist. Wenn man nun die weiter oben genannten Formeln (A1) und (A2) betrachtet, ergeben sich folgende Erkenntnisse:

$$(A1) \quad k = \frac{f \cdot n}{2} \quad \rightarrow \quad n = \frac{2 \cdot k}{f}$$

$$(A2) \quad k = \frac{e \cdot m}{2} \rightarrow m = \frac{2 \cdot k}{e}$$

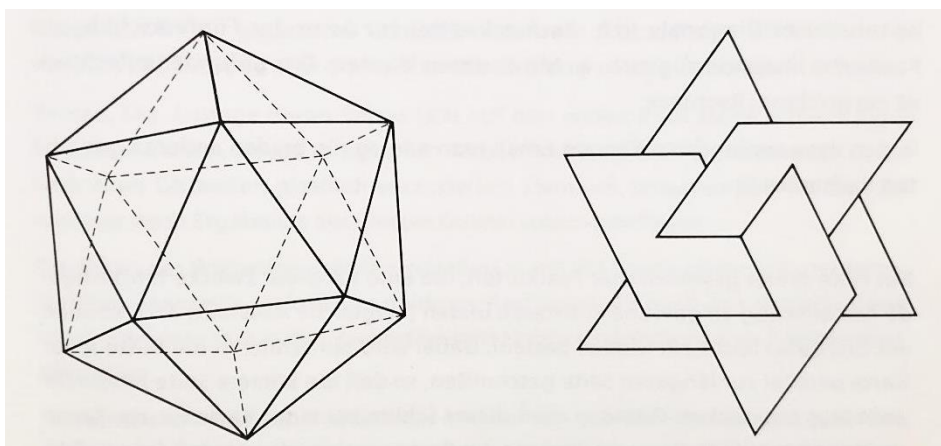
f wird beim Dualkörper zu e (und umgekehrt): $n = \frac{2 \cdot k}{f} \Leftrightarrow \frac{2 \cdot k}{e} = m$

Man sieht also, dass n beim Dualkörper zu m wird, bzw. p zu q wird. Dies gilt auch umgekehrt: Somit wird dann m zu n, bzw. q zu p, wie man in der Tabelle gut erkennen kann.

Die Dualitäts-Beziehung der platonischen Körper wird vor allem bei der Besprechung der abgestumpften Körper (siehe Kapitel „3.2.2 Abgestumpfte Körper“) sowie im Kapitel „3.3 Die dual-archimedischen Körper“ noch einmal von großer Bedeutung sein.

2.8.3 Der ‘Ringschluss der platonischen Körper’

Neben der Dualität gibt es noch eine weitere interessante Beziehung zwischen den platonischen Körpern. Betrachten wir zunächst das Ikosaeder genauer. Beutelspacher und Petri zeigen und beweisen folgenden Satz: „Die zwölf Ecken eines Ikosaeders sind die zwölf Ecken dreier goldener Rechtecke, die paarweise aufeinander senkrechten [sic!] stehen.“ (Beutelspacher/ Petri 1989, 51f.)

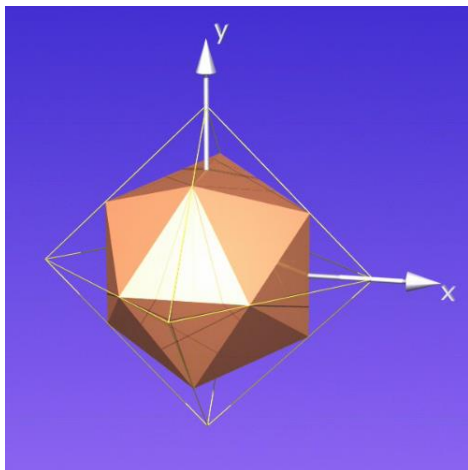


Verbindung von Ikosaeder und goldenem Rechteck – Abb. 16

Ähnliches gilt auch für das Oktaeder, bloß dass hier nicht die Ecken goldener Rechtecke, sondern die Ecken von drei paarweise senkrecht aufeinanderstehenden Quadraten die Ecken des Oktaeders bilden. Insbesondere gilt auch, dass die Seiten dieser Quadrate die Kanten des Oktaeders sind.

Aus diesen Erkenntnissen lässt sich auch folgender Satz, erneut dem Werk „Der Goldene Schnitt“ von Beutelspacher und Petri entnommen, formulieren und beweisen: „In ein gegebenes Oktaeder kann ein Ikosaeder so einbeschrieben werden, daß dessen Ecken die Kanten des Oktaeders im goldenen Schnitt teilen.“ (Beutelspacher/ Petri 1989, 53)

Dargestellt wird dieser Satz in folgender Abbildung, die nur ein Ausschnitt aus einer von der Universität Bremen veröffentlichten Animation ist.



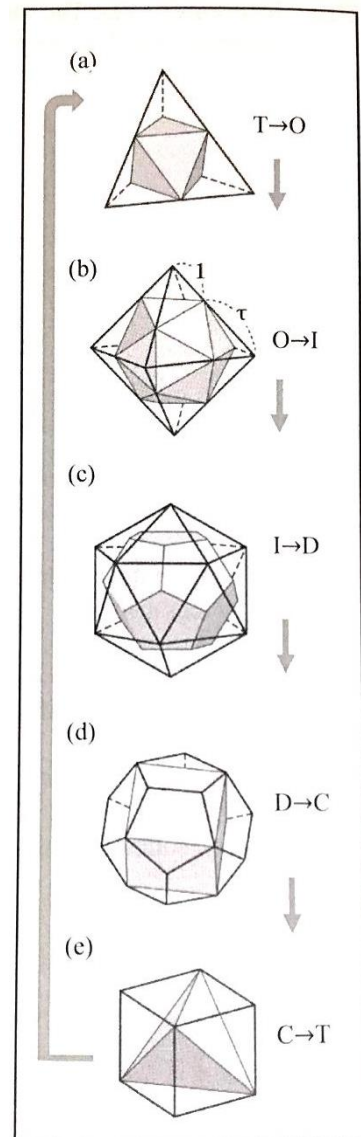
Verbindung von Ikosaeder und Oktaeder
– Abb. 17

Es gibt auch noch weitere Möglichkeiten, einen platonischen Körper in einen anderen einzuschreiben: Ein Oktaeder lässt sich in ein Tetraeder einschreiben, indem man die Mittelpunkte jeweils benachbarter Kanten des Tetraeders miteinander verbindet. Weiters lässt sich durch Verbinden spezieller Ecken ein Würfel in ein Dodekaeder und ebenso ein Tetraeder in einen Würfel einschreiben (siehe Abb. 18).

Dadurch ergibt sich sozusagen ein „Ringschluss der platonischen Körper“, oder – wie Akiyama und Matsunaga es bezeichnen – „The Cycle of Platonic Solids“ (Akiyama/ Matsunaga 2015, 152).

Häufig gibt es Beschreibungen einzelner dieser Verbindungen (vgl. u.a. Tóth 1965, 104 oder Félix 1964, 108 oder Beutelspacher/ Petri 1989, 51-54), äußerst selten jedoch wird dieser Ringschluss der platonischen Körper zur Gänze in der Literatur erwähnt. Tatsächlich scheint ein äquivalenter Begriff zu „Cycle of Platonic Solids“ in der deutschsprachigen Fachliteratur bisher nicht zu existieren, weswegen im Rahmen dieser Arbeit die von mir sinngemäß gewählte Übersetzung ‚Ringschluss der platonischen Körper‘ verwendet wird.

Nachdem durch diesen Einblick die mathematischen Aspekte der platonischen Körper bekannt sind, möchte ich nun auf Basis dessen noch die geschichtliche Komponente dieser Polyeder betrachten, bevor in Kapitel „3 Halbreguläre, konvexe Polyeder“ weitere wichtige Körper und Polyedergruppen besprochen werden.



The Cycle of Platonic Solids – Abb. 18

2.9 Geschichte der platonischen Körper

Von archäologischen Funden weiß man, dass bereits in den **Megalith-Kulturen** (europäische Kulturen der Jungsteinzeit und der Bronzezeit, 4500 – 2000 v. Chr.) das Grundprinzip von Hexaeder, Tetraeder, Oktaeder und Dodekaeder bekannt gewesen sein dürfte, so wie das Grundprinzip vieler anderer Körper auch.

Aus der Zeit der **Etrusker** und **Römer**, um rund 500 v. Chr., wurden ebenfalls Dodekaeder gefunden, über deren damalige Verwendung man sich jedoch uneinig ist: Die Theorien gehen von Zepterknäuf über Waffen oder Spielzeuge bis hin zu Vermessungsapparaten oder sogar religiösen Symbolen.

Cromwell nennt das *Pyrit*-Gestein als mögliche Inspiration für den Fund des Dodekaeders (Cromwell 1997, 71). Der Pyrit entwickelt Kristalle meist in Form eines Würfels, häufig jedoch auch in Form eines Dodekaeders (siehe Kapitel „4 Konvexe Polyeder in der Natur“).

Pythagoras von Samos (ca. 580 – ca. 500 v. Chr.) soll dem Mathematiker-Verzeichnis des Proklus Diadochus zufolge die Konstruktion der fünf Körper entdeckt haben. Allerdings gab es damals in der antiken, griechischen Mathematik eine Art Tradition, neue Erkenntnisse oder Entdeckungen, deren Urheber man nicht kannte, immer Pythagoras zuzuschreiben.

Ein Scholium zum dreizehnten Buch der Elemente Euklids besagt wiederum, dass die **Pythagoräer** für das Wissen um den Würfel, die Pyramide (gemeint ist das Tetraeder) und das Dodekaeder verantwortlich sind. Das Oktaeder und das Ikosaeder hingegen sollen auf **Theaitetos** (ca. 415 – ca. 369 v. Chr.), einen Freund Platons, zurückgehen. Cromwell legt deutlich dar, dass man der Aussage des Scholiums wohl mehr Glauben schenken dürfte (vgl. Cromwell 1997, 72). Dabei stellt sich allerdings die Frage, weshalb das doch viel einfacher zu konstruierende Oktaeder so viel später gefunden wurde als das Dodekaeder. Die Antwort liegt vermutlich darin, dass man das Oktaeder zwar durch die Zusammensetzung zweier wohlbekannter quadratischer Pyramiden kannte, dass man aber noch nicht um die besonderen Eigenschaften dieses Körpers wusste, wodurch es keinen Grund gab, ihm große Aufmerksamkeit zu schenken.

Auch die Regularitätsbedingungen mussten erst gefunden und vor allem genau definiert werden, um die platonischen Körper, ihre Besonderheiten und Gemeinsamkeiten in eine Gruppe klassifizieren zu können. Mehr dazu folgt im Kapitel „2.9.2 Euklid von Alexandria“.

2.9.1 Platon (427 – 347 v. Chr.)

Die alten Griechen betrieben detaillierte Studien über die platonischen Körper. Der Grund könnte zum Beispiel die begrenzte Anzahl dieser Körper sein, die aufgrund der Existenz unendlich vieler verschiedener regelmäßiger Polygone durchaus unerwartet scheint (vgl. Cromwell 1997, 70).

Die Bezeichnung „*platonische Körper*“ leitet sich vom Namen eines der bedeutendsten antiken, griechischen Philosophen ab: **Platon**. In seinem *Timaios* befindet sich die älteste, uns erhaltene Schilderung dieser Körper. Obgleich Platon sie nicht als Erster entdeckt hat, kommt

es nicht von ungefähr, dass sie nach ihm benannt wurden, da er sich intensiv mit ihnen auseinandersetzte und auch ein *Kosmos-Modell* entwickelte, bei dem er die platonischen Körper mit den vier Elementen des Empedokles in Verbindung brachte. Er verknüpfte dabei die Elementen-Lehre des Empedokles mit der Atom-Lehre des Demokrit und ergänzte seine eigenen Gedanken dazu:

Die Atom-Lehre Demokrits besagt, dass sich alles aus kleinsten Körperchen zusammensetzt. Empedokles wiederum meint, dass alles aus den Elementen Erde, Feuer, Wasser und Luft besteht, jeweils in unterschiedlichen Mischverhältnissen. Platon sagt nun, dass die Erde aus Hexaeder-Körperchen besteht, das Feuer aus Tetraeder-, das Wasser aus Ikosaeder- und die Luft aus Oktaeder-Körperchen. Alles auf der Welt ist folglich in unterschiedlichen Mischverhältnissen aus diesen vier platonischen Körpern aufgebaut. Den fünften platonischen Körper, das Dodekaeder, verbindet Platon schließlich noch mit dem Himmelsäther, wobei jedes der zwölf begrenzenden Polygone einem Sternbild entspricht. Kepler zeichnet später Skizzen von dieser Idee Platons (siehe Kapitel „2.9.3 Kepler“).

2.9.2 Euklid von Alexandria (365 v. Chr. – ca. 300 v. Chr.)

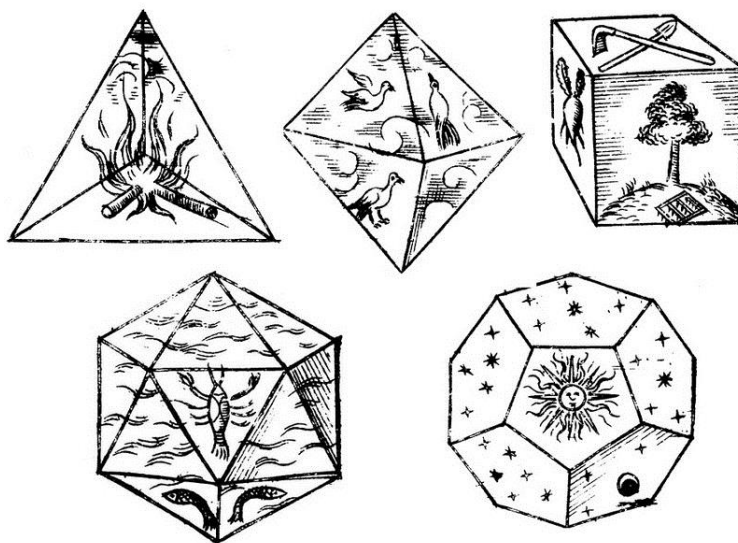
Auch **Euklid** beschäftigte sich intensiv mit den platonischen Körpern. Besonders Buch XIII seiner „Elemente“ ist für diese Betrachtung entscheidend, worin unter anderem Definitionen der fünf Körper enthalten sind. Allerdings wurden diese individuell besprochen und Euklid hat nicht klar hervorgehoben, welche der gemeinsamen Eigenschaften diejenigen sind, die diese Polyeder so stark miteinander verbinden. Fast am Ende des Buches gibt es jedoch einen Satz, von dem man denkt, dass Euklid oder ein Scholiast ihn nachträglich hinzugefügt hat. Cromwell übersetzt diesen Satz folgendermaßen: „No other figure, besides the said five figures, can be constructed which is contained by equilateral and equiangular figures equal to one another.“ (Cromwell 1997, 75)

Daraus geht klar hervor, dass die Kongruenz und die Regularität der Flächen stark mit der (noch nicht definierten) Regularität eines Polyeders assoziiert werden. Für eine Definition sind diese beiden Bedingungen allerdings unzureichend und somit ist der Satz in den „Elementen“ tatsächlich falsch. Schließlich gibt es noch andere Polyeder neben den platonischen Körpern, die die beiden Bedingungen erfüllen würden, nämlich die Deltaeder (siehe Kapitel „3.5 Die Deltaeder“).

Weiters zeigt Euklid, dass die platonischen Körper in Umkugeln eingeschrieben werden können. Hätte er diesen Umstand mit den erwähnten Bedingungen der Kongruenz und der Regularität der Flächen kombiniert, hätte er eine richtige Definition für die Regularität von konvexen Polyedern gefunden. Die Eigenschaft, dass die platonischen Körper in eine Umkugel eingeschrieben werden können, ist nämlich eine alternative Bedingung zur Eckenkongruenz, da sie äquivalent sind. Einen Beweis dafür sowie weitere alternative Bedingungen zur Eckenkongruenz nennt Cromwell (1997) auf den Seiten 77f.

2.9.3 Kepler (1571 – 1630)

Wie bereits erwähnt beschäftigte sich auch Johannes Kepler mit den platonischen Körpern. Im Folgenden sehen wir eine Abbildung seiner Skizzen zu Platons Kosmos-Modell:



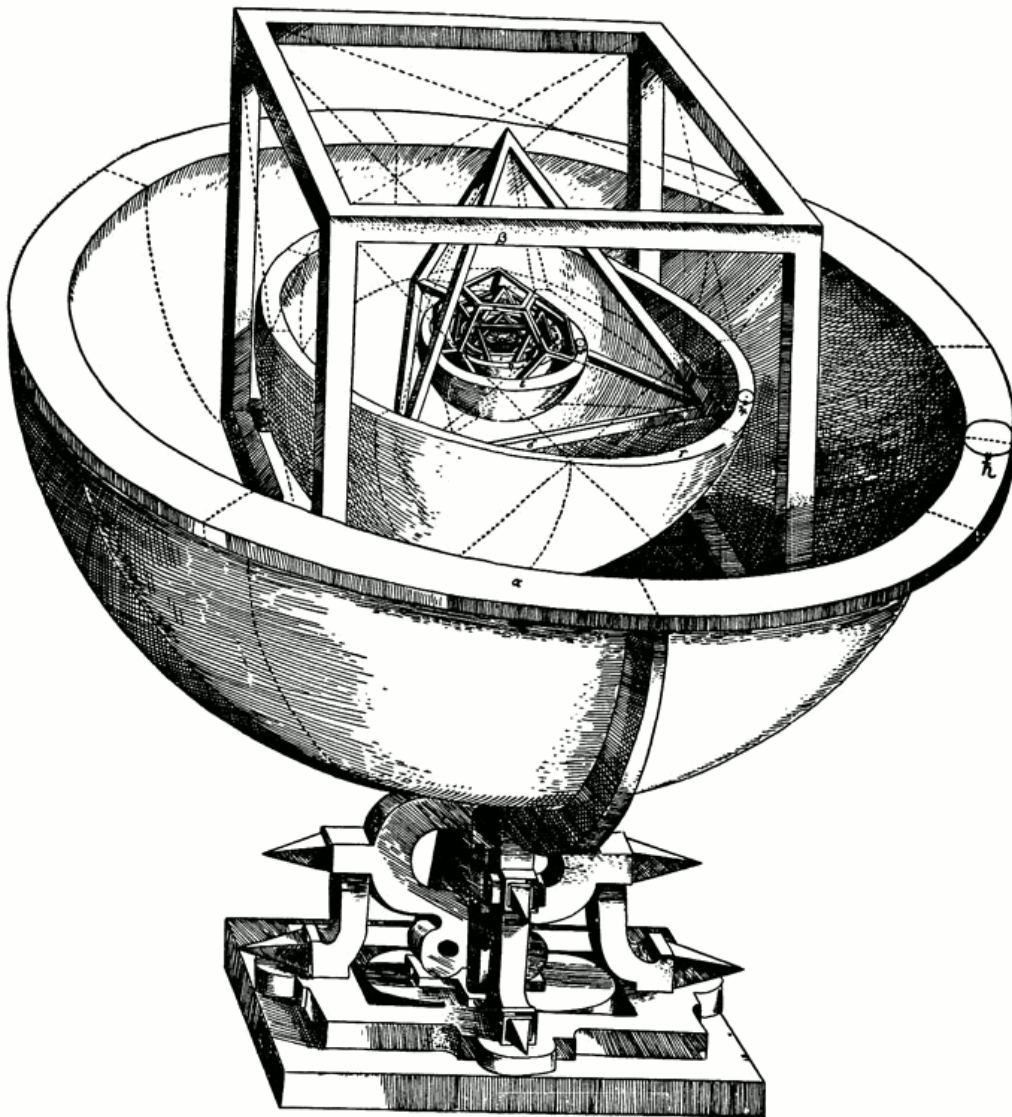
Platons Kosmos-Modell – Abb. 19

Berühmter ist aber vermutlich sein *Weltmodell*, das er in seinem Werk „Mysterium Cosmographicum“ (1596) beschreibt.

Bei diesem Modell befindet sich die Sonne in der Mitte und die Planeten bewegen sich auf Kugelschalen um sie herum. Die Bahn des *Saturn* befindet sich auf der äußeren, großen Halbkugel (siehe Abb. 20). Wie wir bereits wissen, besitzen die platonischen Körper sowohl eine Umkugel, als auch eine Inkugel. Der äußeren Kugel soll nun ein Würfel eingeschrieben

werden und zwar so, dass die äußere Kugel die Umkugel des Würfels ist. Die Inkugel des Würfels wiederum beschreibt die Bahn des *Jupiter*. In diese zweite Kugel wird ein Tetraeder eingeschrieben, dessen Inkugel die Bahn des *Mars* beschreibt. Dieser Vorgang wird so fortgesetzt, wobei nacheinander das Dodekaeder, das Ikosaeder und anschließend das Oktaeder eingeschrieben werden. Die Inkugel des Dodekaeders beschreibt die Bahn der *Erde*, die Inkugel des Ikosaeders beschreibt die der *Venus* und die Inkugel des Oktaeders beschreibt die des *Merkur*.

Da die damals bekannten Abstände nicht ganz mit dem Modell übereinstimmten, gab Kepler den Kugelschalen jeweils eine bestimmte Dicke, die er auf die Monde zurückführte. Somit passte das Modell relativ gut. Nachdem später aber noch zwei Planeten (Uranus und Neptun) hinzukamen, verlor diese Theorie wieder an Bedeutung.



Keplers Weltmodell – Abb. 20

Auch im Zusammenhang mit den später erwähnten Archimedischen Körpern (siehe Kapitel „3.2 Die archimedischen Körper“) spielt Kepler eine große Rolle. Zwar wurden laut Pappus diese dreizehn Polyeder von Archimedes entdeckt, allerdings sind sie im Laufe der Zeit immer wieder in Vergessenheit geraten und (vor allem in der Malerei) wiederentdeckt worden. Kepler erforschte sie schließlich erneut, verschriftlichte seine Erkenntnisse und gab ihnen die Namen, die sie auch heute noch besitzen (vgl. Cromwell 1997, 81-85).

3 Halbreguläre, konvexe Polyeder

3.1 Definitionen

Im Kapitel 2.1 wurden drei Bedingungen für die Regularität von Polyedern genannt:

- (R1) Alle Flächen sind regelmäßige Vielecke.
- (R2) Alle Flächen sind zueinander kongruent.
- (R3) In jeder Ecke stoßen gleich viele Seitenflächen in gleicher Weise zusammen
(:= kongruente Eckenumgebungen).

Diese Bedingungen lassen sich jedoch unter anderem in zwei Richtungen abschwächen:

Def. 19 Die **archimedischen Körper**, benannt nach dem griechischen Mathematiker Archimedes von Syrakus (287 v. Chr. – 212 v. Chr.), werden von verschiedenen Arten von regelmäßigen und innerhalb einer Art kongruenten Polygonen begrenzt, wobei die Eckenumgebungen kongruent sein müssen; das heißt, in jeder Ecke stoßen gleich viele Flächen in gleicher Weise zusammen.

Def. 20 Bei den **dual-archimedischen** Körpern, also den Dualkörpern zu den archimedischen Körpern, sind die nicht regelmäßigen Polygone zueinander kongruent, während die Bedingung (R3) vernachlässigt wird. Es können also unterschiedlich viele Flächen in den Ecken zusammenstoßen und/oder auf unterschiedliche Weise.

An dieser Stelle ist es notwendig zu erwähnen, dass die Definitionen dieser halbbregulären Körper, sowie auch zahlreiche weitere Definitionen in den folgenden Kapiteln, bei vielen Autoren unterschiedlich sind. Manche fassen die Definitionen etwas enger, andere lassen da mehr Spielraum oder fügen völlig andere Bedingungen hinzu. So herrscht zum Beispiel große Uneinigkeit, ob die Prismen und Antiprismen, die ich später noch definieren werde, zu den archimedischen Körpern gezählt werden sollen oder nicht. Diese Uneinigkeit hat jedoch große Auswirkungen: So gibt es je nach Definition entweder nur 13 archimedische Körper oder unendlich viele.

Weiters gibt es keinen Konsens darüber, welche Polyeder zu den halbbregulären Körpern gezählt werden sollen. Manche sind der Meinung, dass ausschließlich die archimedischen Körper halbbreguläre Polyeder genannt werden sollen. Andere Autoren wiederum binden die dual-archimedischen Körper mit ein. Wieder andere erweitern die halbbregulären Polyeder noch zusätzlich durch die sogenannten „Johnson-Körper“, die ich im Folgenden gleich definieren möchte:

Def. 21 | Unter **Johnson-Körpern** versteht man konvexe Polyeder mit regulären Seitenflächen, wobei weder diese begrenzenden Polygone, noch die Eckenumgebungen kongruent sein müssen.

Da die Bedingungen zur Definition eines Johnson-Körpers schwächer sind als die zur Definition eines regulären Polyeders, würden die platonischen Körper zu den Johnson-Körpern zählen. In der praktischen Handhabung hat es sich jedoch etabliert, dass diese Körper, genauso wie die archimedischen Körper, die wie die Johnson-Körper ebenfalls reguläre Seitenflächen besitzen, explizit bei der Definition der Johnson-Körper ausgenommen werden, um somit eine eigene Gruppe von Polyedern zu klassifizieren.

3.2 Die archimedischen Körper

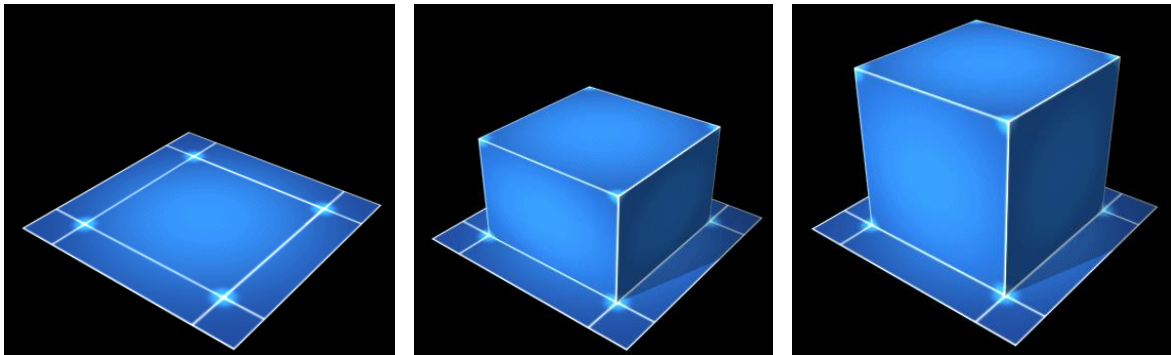
Wie bereits erwähnt gibt es je nach Definition entweder 13 oder unendlich viele archimedische Körper. Alle Polyeder, die eine der möglichen Definitionsbedingungen für archimedische Körper aufweisen, besitzen jedenfalls eine Umkugel. Die dual-archimedischen Körper hingegen haben eine Inkugel.

3.2.1 Prismen & archimedische Antiprismen

Def. 22

Unter einem **Prisma** versteht man ein konvexes Polyeder, das durch Parallelverschiebung eines ebenen Polygons entlang einer Geraden entsteht, wobei die Gerade nicht in der Ebene des Polygons liegen darf. Diese Parallelverschiebung wird auch **Extrusion** genannt.

Durch die folgende Abbildung soll die Extrusion verdeutlicht werden.



Extrusion – Abb. 21

Dies sind Ausschnitte einer Animation von Frank Müller. Die ganze Animation kann über folgenden Link angesehen werden:

https://de.wikipedia.org/wiki/Extrusion_%28Geometrie%29#/media/File:Illu_extrusion.gif

Im Allgemeinen muss die Parallelverschiebung nicht entlang einer senkrecht zur Ebene stehenden Geraden verlaufen, wie es in der Animation gezeigt wird. Prismen, die die Bedingungen für archimedische Körper erfüllen sollen, müssen allerdings diese Art von Extrusion aufweisen, da ansonsten keine regelmäßigen Seitenflächen entstehen würden. Dabei erfolgt die Verschiebung so lange, bis man Quadrate als Seitenflächen erhält. Somit sind alle begrenzenden Polygone regelmäßig und die Eckenumgebungen sind kongruent.

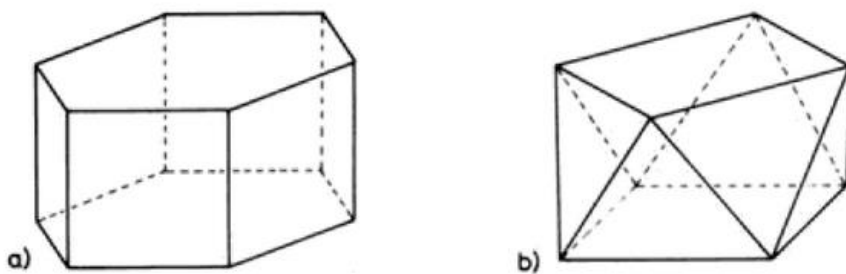
Def. 23

Ein **archimedisches Prisma** ist ein konvexes Polyeder mit regelmäßigen, kongruenten n -Ecken als Grund- und Deckfläche sowie quadratischen Seitenflächen.

Def. 24

Ein **archimedisches Antiprisma** ist im Grunde ähnlich aufgebaut; es besitzt ebenso regelmäßige, kongruente n -Ecke als Grund- und Deckfläche, hat allerdings gleichseitige Dreiecke anstatt der Quadrate als Seitenflächen.

Die folgende Abbildung ist dem Werk „Anschauliche Topologie“ von Kurt Peter Müller und Heinrich Wölpert (1976, 143) entnommen und zeigt ein archimedisches Prisma und ein archimedisches Antiprisma:



Prisma und Antiprisma – Abb. 22

Man beachte, dass ein archimedisches Prisma, wie bereits in der Animation gesehen, einen *Würfel* ergibt, wenn man ein Quadrat als Grundfläche hernimmt. Ebenso entsteht aus einem archimedischen Antiprisma mit einem gleichseitigen Dreieck als Grund- und Deckfläche ein *Oktaeder*.

Da es unendliche viele n -Ecke gibt, existieren auch unendlich viele archimedische Prismen und Antiprismen. Zählt man demnach diese konvexen Polyeder zu den archimedischen Körpern, so ist deren Anzahl ebenso unendlich. Einige Autoren sehen die Prismen und Antiprismen allerdings als zu einfach an, als dass sie an Komplexität mit den übrigen archimedischen Körpern vergleichbar wären. Sie geben daher ähnliche Definitionen wie Def. 19 in Kapitel „3.1 Definitionen“, schließen dabei jedoch die Prismen und Antiprismen explizit von den archimedischen Körpern aus. Somit bleiben nur 13 archimedische Körper übrig, die ich nun erläutern will.

3.2.2 Abgestumpfte Körper

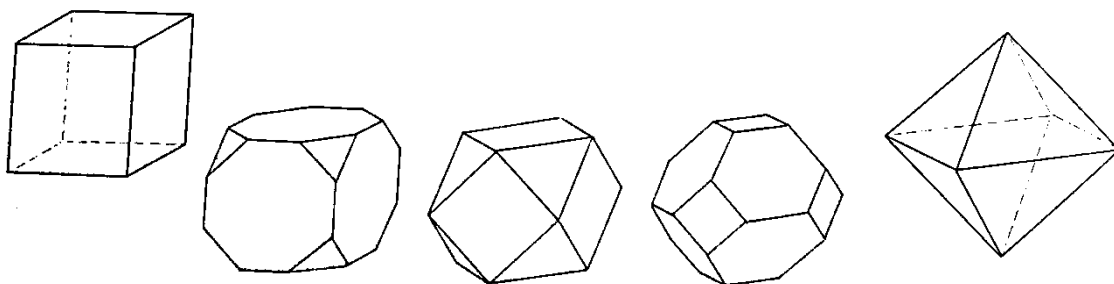
Die 13 archimedischen Körper erreicht man durch „Abstumpfung“ der platonischen Körper. Darunter versteht man, dass die Ecken eines platonischen Körpers so lange gleichmäßig abgeschliffen bzw. „abgestumpft“ werden, bis wieder regelmäßige Polygone als Begrenzungsflächen mit kongruenten Eckenumgebungen entstehen. Man kann aber auch zuerst platonische Körper kombinieren und eine Abstumpfung durch die Bildung des Durchschnitts erreichen. Dies wird im Folgenden noch näher erklärt.

3.2.2.1 Abstumpfung durch Durchschnittsbildung zweier platonischer Körper

Zur Herleitung der 13 archimedischen Körper ist es leichter, sich vorzustellen, dass sie aus einer Mischform von zwei bzw. drei platonischen Körpern entstehen, wobei jeder platonische Körper unterschiedliche Einflusskraft in den ‚Mischkörper‘ hat.

Nimmt man zum Beispiel die Form eines Würfels und die eines Oktaeders – zwei zueinander duale Körper also –, legt sie so ineinander, dass ihre Mittelpunkte zusammenfallen, und bildet den Durchschnitt dieser beiden Konstrukte, so entsteht – je nach Größe des Würfels und des Oktaeders – eine „Mischform“ von den beiden, die eher dem Würfel oder dem Oktaeder ähnlich sehen kann (vgl. Adam/Wyss 1994, 49-64).

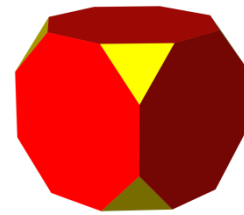
Folgende Abbildung, entnommen aus dem Werk von Adam und Wyss (1994, 50), soll dies verdeutlichen:



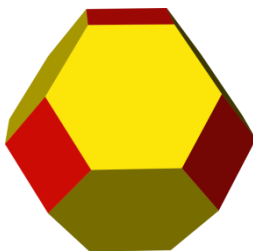
Abstumpfung durch Durchschnittsbildung
von Würfel und Oktaeder – Abb. 23

Es können nun drei archimedische Körper aus dem Durchschnitt von Würfel und Oktaeder gewonnen werden:

1. Der **Würfel-** bzw. **Hexaederstumpf**: Er ähnelt noch mehr dem Würfel und besteht aus sechs regelmäßigen Achtecken sowie aus acht regulären Dreiecken.

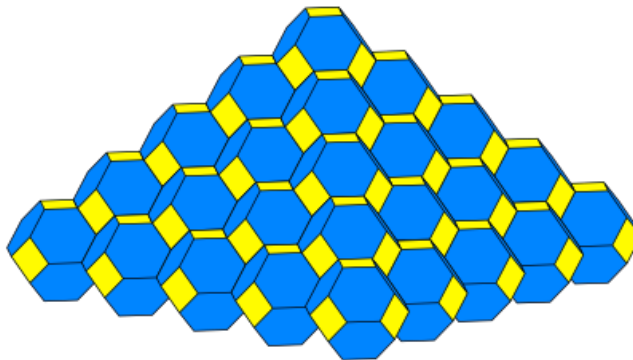


Hexaederstumpf
– Abb. 24



Oktaederstumpf
– Abb. 25

2. Der **Oktaederstumpf**: Dieses Polyeder hat mehr Ähnlichkeit mit dem Oktaeder, als mit dem Würfel. Der Oktaederstumpf wird von acht regelmäßigen Sechsecken und von sechs kongruenten Quadraten begrenzt. Eine besondere Eigenschaft des Oktaederstumpfes ist, dass man damit den Raum lückenlos und überlappungsfrei füllen kann, was folgende Abbildung visualisiert:



Lückenloses Füllen des Raums mit Oktaederstümpfen
– Abb. 26

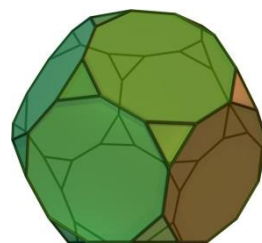
3. Das **Kuboktaeder**: Hier wirken Würfel und Oktaeder in gleicher Weise ein. Es besitzt acht reguläre Dreiecke und sechs zueinander kongruente Quadrate.



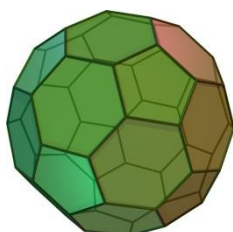
Kuboktaeder
– Abb. 27

Analog können aus den beiden zueinander dualen platonischen Körpern Dodekaeder und Ikosaeder wieder drei archimedische Körper gewonnen werden:

4. Der **Dodekaederstumpf**: Er besteht aus zwölf regelmäßigen Zehnecken sowie aus 20 gleichseitigen Dreiecken. Seine Form ähnelt noch eher der eines Dodekaeders.



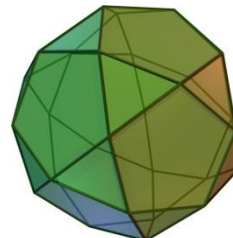
Dodekaederstumpf
– Abb. 28



Ikosaederstumpf
– Abb. 29

5. Der **Ikosaederstumpf**: Dieser archimedische Körper ist besonders im sportlichen Bereich bekannt. Der klassische Fußball ist wie ein Ikosaederstumpf aufgebaut: Er besitzt 20 regelmäßige Sechsecke und zwölf reguläre Fünfecke.

6. Das **Ikosidodekaeder**: Dieses Polyeder wird – analog zum Kuboktaeder – gleich stark von Dodekaeder und Ikosaeder beeinflusst. Es wird von zwölf regelmäßigen Fünfecken und 20 gleichseitigen Dreiecken begrenzt.

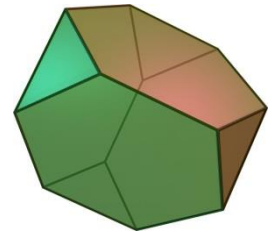


Ikosidodekaeder
– Abb. 30

Betrachten wir nun noch das Tetraeder, das zu sich selbst dual ist: Wirken beide, Tetraeder und Gegentetraeder (= auf dem Kopf gestelltes Tetraeder), auf gleiche Weise in den „Mischkörper“ ein, so entsteht kein archimedischer Körper, sondern sogar ein platonischer Körper: das Oktaeder.

Es gibt jedoch auch die Möglichkeit, dass die beiden Tetraeder unterschiedlich stark einwirken; das heißt, dass ein Tetraeder größer als das Gegentetraeder ist, womit der Durchschnitt aus den beiden Körpern eine andere Form ergibt. Unter all diesen möglichen Polyedern findet sich genau *ein* archimedischer Körper:

7. Der **Tetraederstumpf**: Er wird von vier regulären Sechsecken und ebenfalls vier regelmäßigen Dreiecken begrenzt.

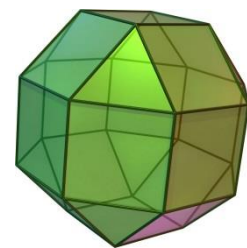


Tetraederstumpf
– Abb. 31

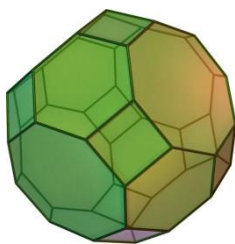
3.2.2.2 *Abstumpfung durch Durchschnittsbildung dreier platonischer Körper*

Die Bildung dieser archimedischen Körper ist etwas komplizierter und soll daher nicht im Detail ausgeführt werden. Adam und Wyss (1994) bieten in ihrem Werk „Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde“ auf den Seiten 56-59 eine anschauliche Herleitung. Es sei allerdings erwähnt, dass Kuboktaeder und Ikosidodekaeder – Körper die bereits aus zwei platonischen Körpern entstanden sind – jeweils die Grundform von je zwei weiteren archimedischen Körpern bilden. Auf diese Grundformen wirkt dann jeweils noch ein weiterer platonischer Körper ein, sodass schlussendlich folgende vier archimedische Körper entstehen:

8. Das **Rhombenkuboktaeder**: Dieses Polyeder besitzt insgesamt 18 kongruente Quadrate und acht gleichseitige Dreiecke.



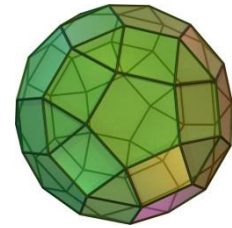
Rhombenkuboktaeder
– Abb. 32



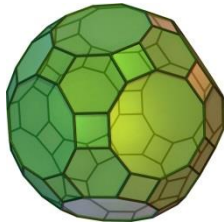
Kuboktaederstumpf
– Abb. 33

9. Der **Kuboktaederstumpf**: Er wird von drei Arten regelmäßiger Polygone begrenzt, nämlich von sechs Achtecken, acht Sechsecken und zwölf Quadraten.

10. Das **Rhombenikosidodekaeder**: Dieser archimedische Körper wiederum weist zwölf Fünfecke, 20 Dreiecke und 30 Quadrate auf.



Rhombenikosi-
dodekaeder –
Abb. 34



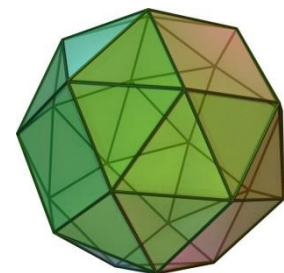
Ikosidodekaeder-
stumpf – Abb. 35

11. Der **Ikosidodekaederstumpf**: Hier handelt es sich um ein archimedisches Polyeder mit zwölf Zehneckern, 20 Sechsecken und 30 Quadraten.

3.2.2.3 *Cubus simus und Dodecaedron simum*

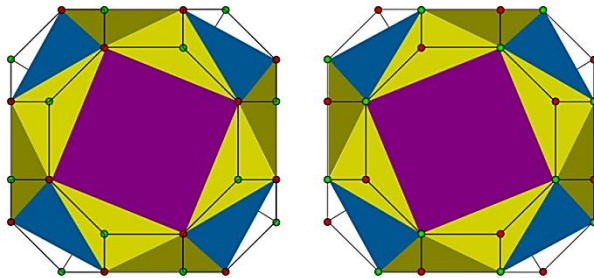
Diese letzten beiden archimedischen Körper erscheinen aufgrund ihres Aussehens besonders interessant. Sie sind nicht nur auffällig durch ihre große Anzahl an Dreiecken, sondern scheinen durch diese auch einen Drall nach links oder nach rechts zu besitzen (vgl. Adam/Wyss 1994, 60). Die Bezeichnungen „Cubus simus“ und „Dodecaedron simum“ stammen von Kepler und bedeuten wörtlich übersetzt so viel wie „plattnasiger Würfel“ und „plattnasiges Dodekaeder“. Mit „plattnasig“ ist hier wieder die Abstumpfung der Körper gemeint. Wir wollen jedoch eher die lateinischen Begriffe verwenden, da ansonsten schnell Verwechslungen mit dem Würfelstumpf bzw. dem Dodekaederstumpf entstehen können.

12. Der **Cubus simus**: Er wird von sechs Quadraten und 32 gleichseitigen Dreiecken begrenzt, wobei man hier die Formeinwirkungen verschiedener uns bekannter Polyeder erkennen kann. Die Quadrate sind relativ markant und lassen sich gut in die Hülle eines Würfels einpassen. Sie sind zwar etwas gedreht im Vergleich zu den großen Quadraten der Würfelhülle, befinden sich aber dennoch gänzlich in deren Flächen. In Abbildung 37 lässt sich die Form des Würfels



Cubus simus
– Abb. 36

vermutlich deutlicher erkennen. Hier ist auch der Links- bzw. Rechtsdrall besser ersichtlich.

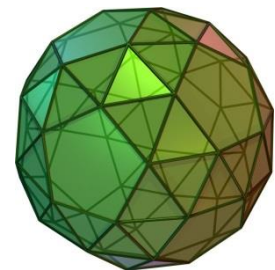


Cubus simus mit Rechts- bzw. Linksdrall – Abb. 37

Weiters kann man zwischen zwei Arten von Dreiecken unterscheiden. Acht Dreiecke sind nur über die Ecken mit den Quadraten verbunden. Diese sind in Abbildung 37 blau gekennzeichnet. Vergrößert man diese Dreiecke, so überschneiden sie sich derart, dass sie die Form eines Oktaeders begrenzen.

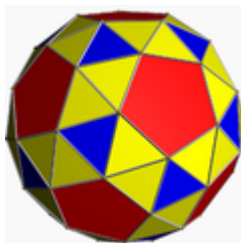
Die übrigen 24 Dreiecke – gelb und olivgrün eingezeichnet – sind über eine Seite mit einem Quadrat verbunden. Ihre Formen und Anordnungen kann man auf den Einfluss von sechs Oktaederhälften (also Pyramiden) zurückführen. Diese Pyramiden soll man sich über die Quadrate gestülpt vorstellen. Die gelb eingezeichneten Dreiecke sind nun Ausschnitte aus den Seitenflächen einer Pyramide.

13. Das **Dodecaedron simum**: Dieses Polyeder weist zwölf Fünfecke und ganze 80 Dreiecke auf. Es besitzt somit die größte Anzahl an Flächen aller archimedischen Körper und hat ebenfalls die kugelähnlichste Form. Der Aufbau des



Dodecaedron simum – Abb. 38

Dodecaedron simum verhält sich analog zum Cubus simus:



Dodecaedron simum 2 – Abb. 39

Die zwölf markanten Fünfecke, die in Abbildung 39 rot eingefärbt sind, stammen von der Form des Dodekaeders. Die 20 blau markierten Dreiecke, welche nur über die Ecken mit den Fünfecken verbunden sind, lassen sich auf die Form des Ikosaeders zurückführen. Die 60 übrigen Dreiecke entstehen, wenn man eine fünfseitige Pyramide über jedes Pentagon stülpt.

3.3 Die dual-archimedischen Körper

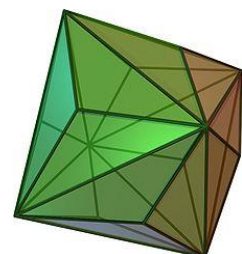
Nachdem wir alle archimedischen Polyeder kennengelernt haben, wollen wir nun ihre Dualkörper betrachten. Je nachdem, ob man die speziellen Prismen und Antiprismen zu den archimedischen Körpern zählt oder nicht, ist die Anzahl der dual-archimedischen Körper ebenfalls endlich oder unendlich. Wir wollen uns in diesem Kapitel auf die endliche Anzahl konzentrieren und werden uns daher auf die zu den 13 archimedischen Körpern dualen Polyeder beschränken.

Zuvor sei aber noch einmal erwähnt, dass die dual-archimedischen Körper alle eine *Inkugel* besitzen. Weiters soll man beachten, dass diese Polyeder in vielen Literaturwerken auch als **Catalan-** bzw. **Catalanische Körper** bezeichnet werden.

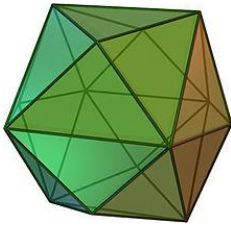
Die Definition von dual-archimedischen Körpern wurde bereits weiter oben festgehalten. Ihre Herleitung ist schnell erklärt: Da der Dualkörper gebildet wird, indem man die Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen des archimedischen Körpers verbindet, und diese Seitenflächen nicht alle zueinander kongruent sind, ist anschaulich klar, dass die begrenzenden Polygone des Dualkörpers nicht regelmäßig sein können. Die Eckenumgebungen der archimedischen Körper sind hingegen kongruent, das heißt, dass in jeder Ecke gleich viele Flächen in gleicher Weise zusammenstoßen. Dementsprechend sind dann die Flächen des dual-archimedischen Körpers kongruent. Schließlich weist der archimedische Körper noch zwei oder drei verschiedene Arten von Flächen auf, wodurch der Dualkörper dann zwei oder drei verschiedenartige Ecken besitzt. Die Eckenumgebungen des dual-archimedischen Körpers sind also nicht kongruent.

Betrachten wir nun diese 13 dual-archimedischen Körper:

1. **Triakisoktaeder** (dreikantiges Pyramidenoktaeder): Dieses Polyeder ist der Dualkörper zum Würfelstumpf. Es wird von 24 gleichschenkeligen Dreiecken begrenzt. Die Bezeichnung für diesen Körper setzt sich aus altgriechischen Wörtern zusammen. „τριάκις“ ist das Multiplikativum „dreimal“, während „ὀκτώ“ der Kardinalzahl „acht“ entspricht. Somit weist der Name auf die Flächenanzahl ($3 \cdot 8 = 24$) des Polyeders hin.



Triakisoktaeder
– Abb. 40

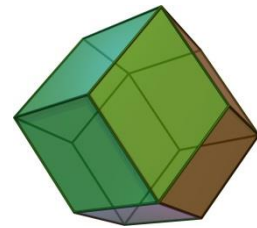


Tetrakis hexaeder
– Abb. 41

2. **Tetrakis hexaeder** (Pyramidenwürfel): Auch dieses Polyeder, das der Dualkörper zum Oktaederstumpf ist, setzt sich aus 24 gleichschenkeligen Dreiecken zusammen.

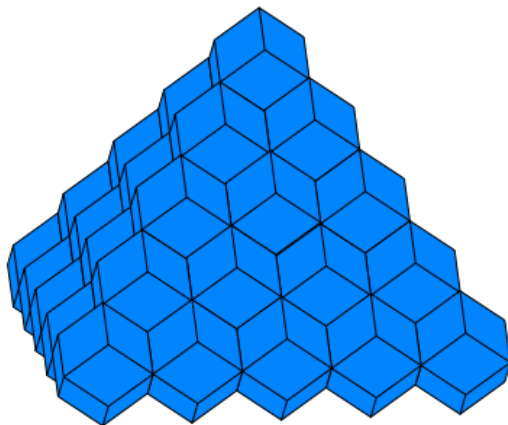
3. **Rhombendodekaeder** (Rhombenzwölfflächner): Der zum Kuboktaeder duale Körper besitzt zwölf rhombenförmige Flächen. Man kann das Rhombendodekaeder bilden, indem man quadratische Pyramiden auf die Seitenflächen eines Würfels setzt.

Das Rhombendodekaeder und der Triakontaederrhombus sind die einzigen dual-archimedischen Körper die von gleichseitigen Polygonen begrenzt werden. Alle übrigen dual-archimedischen Polyeder besitzen maximal gleichschenkelige Polygone.



Rhombendodekaeder
– Abb. 42

Eine weitere Besonderheit des Rhombendodekaeders ist, dass man mit diesen Polyedern den Raum lückenlos und überlappungsfrei füllen kann (ebenso wie mit dem Würfel und dem Oktaederstumpf). Folgende Abbildung soll das noch verdeutlichen:



Lückenloses Füllen des Raums mit Rhombendodekaedern
– Abb. 43

4. **Triakisikosaeder** (dreikantiges Pyramidenikosaeder): Dieses Polyeder weist 60 gleichschenkelige Dreiecke auf. Es ist der Dualkörper zum Dodekaederstumpf.



Triakisikosaeder
– Abb. 44

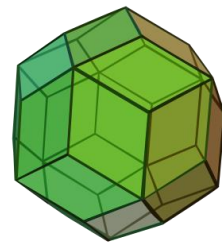


Pentakisidodekaeder
– Abb. 45

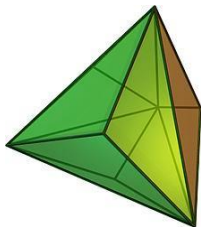
5. **Pentakisidodekaeder** (Pyramidendodekaeder): Der Dualkörper zum Ikosaederstumpf besitzt ebenfalls 60 gleichschenkelige Dreiecke.

6. **Triakontaederrhombus** (Rhombendreißigflächner):

Der Triakontaederrhombus wird – so wie das Rhombendodekaeder – von gleichseitigen Rhomben begrenzt. Dieses Polyeder ist der Dualkörper zum Ikosidodekaeder.



Triakontaeder-
rhombus
– Abb. 46

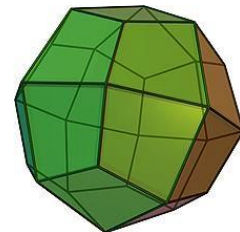


Triakistetraeder –
Abb. 47

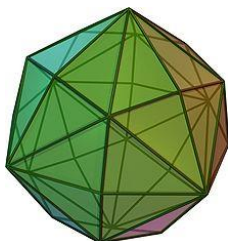
7. **Triakistetraeder** (Pyramidentetraeder): Dieses konvexe Polyeder verhält sich dual zum Tetraederstumpf. Wie der altgriechische Name schon vermuten lässt, besitzt das Triakistetraeder zwölf zueinander kongruente Flächen. Diese sind gleichschenkelige Dreiecke.

8. **Deltoidikositetraeder** (Deltoidvierundzwanzigflächner):

Das zum Rhombenkuboktaeder duale Polyeder zeichnet sich durch 24 kongruente Deltoide aus.



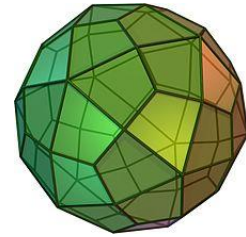
Deltoidikositetraeder
– Abb. 48



Hexakisoktaeder
– Abb. 49

9. **Hexakisoktaeder** (sechskantiges Pyramidenoktaeder): Das Hexakisoktaeder, gelegentlich auch Disdyakisidodekaeder („δίς“ = zweimal, „δωάκις“ = zweimal, „Dodekaeder“ = Zwölfblächner) genannt, ist der Dualkörper zum Kuboktaederstumpf. Es setzt sich aus 48 unregelmäßigen, aber kongruenten Dreiecken zusammen.

10. **Deltoidhexakontaeder** (Deltoidsechzigflächner): Dieses konvexe Polyeder, das dual zum Rhombenikosidodekaeder ist, besitzt 60 Deltoide als Seitenflächen.



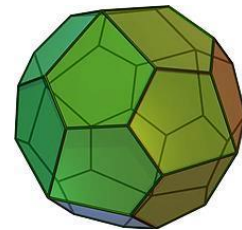
Deltoidhexakontaeder
– Abb. 50



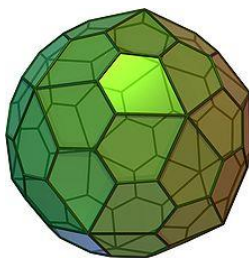
Hexakisikosaeder
– Abb. 51

11. **Hexakisikosaeder** (sechskantiges Pyramidenikosaeder): Der Dualkörper zum Ikosidodekaederstumpf wird auch oft als Disdyakistriakontaeder bezeichnet. Beide altgriechischen Namen weisen darauf hin, dass dieses Polyeder aus ganzen 120 unregelmäßigen Dreiecken besteht.

12. **Pentagonikositetraeder** (Pentagonvierundzwanzigflächner): Das zum Cubus simus duale Polyeder wird von 24 unregelmäßigen Pentagonen, also Fünfecken, begrenzt.



Pentagonikositetraeder – Abb. 52



Pentagonhexakontaeder
– Abb. 53

13. **Pentagonhexakontaeder** (Pentagonsechzigflächner): So wie das Dodecaedron simum das flächenreichste archimedische Polyeder ist, so ist sein Dualkörper mit 92 Ecken das eckenreichste Polyeder unter den dual-archimedischen Körpern. Es wird von 60 kongruenten Fünfecken zusammengesetzt.

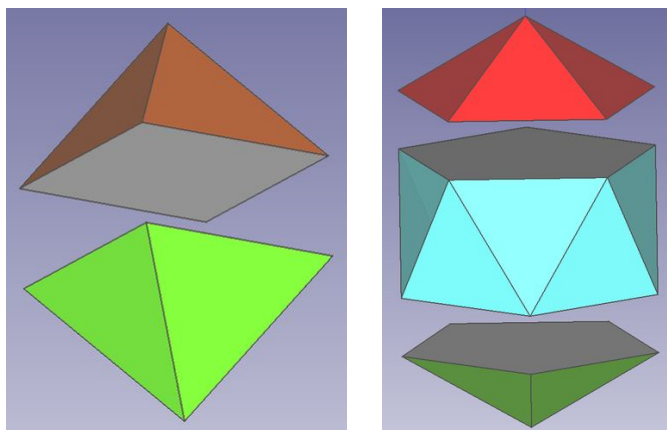
3.4 Die Johnson-Körper

Zieht man von allen konvexen Polyedern mit regelmäßigen Polygonen die platonischen Körper, die dual-archimedischen Körper sowie die Prismen und Antiprismen ab, bleiben 92 Polyeder übrig – die bereits im Kapitel „3.1 Definitionen“ erwähnten Johnson-Körper, benannt nach Norman Johnson, der als Erster alle 92 dieser Körper auflistete. Viele dieser

Polyeder lassen sich bilden, indem man kleinere Körper mit regelmäßigen Flächen miteinander verknüpft. Diese kleineren Körper nannte Johnson „elementary polyhedra“ und definierte sie sinngemäß folgendermaßen:

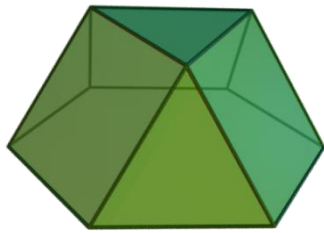
Def. 25 | Ein Polyeder, das von regelmäßigen Polygonen begrenzt wird, heißt **elementar**, wenn es nicht von einer Ebene in zwei kleinere Polyeder mit regelmäßigen Polygonen geteilt werden kann (vgl. Cromwell, 1997, 86).

Diese Elementarpolyeder, oder auch Basispolyeder, lassen sich auf unterschiedliche Weise miteinander verknüpfen, wodurch neue Polyeder entstehen. Betrachten wir die platonischen Körper, so erkennen wir, dass das Tetraeder, das Hexaeder und das Dodekaeder elementar sind. Das Oktaeder hingegen lässt sich in zwei quadratische Pyramiden teilen und das Ikosaeder in zwei Pyramiden und ein Antiprisma, jeweils mit einem regelmäßigen Pentagon als Grund- bzw. Deckfläche.

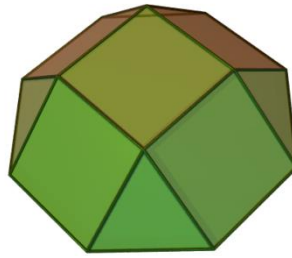


Teilung von Oktaeder und Ikosaeder in die jeweiligen Elementarpolyeder – Abb. 54

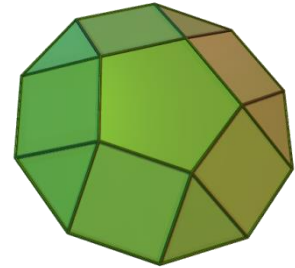
Diese Pyramiden werden von regelmäßigen Flächen begrenzt und zählen daher zu den Johnson-Körpern, wobei die quadratische Pyramide die Kurzbezeichnung J_1 und die Pyramide mit dem regelmäßigen Pentagon als Grundfläche die Kurzbezeichnung J_2 erhielt. Weitere Johnson-Polyeder sind alle Kuppeln mit regelmäßigen Begrenzungsflächen, wovon es lediglich drei geben kann. Diese bestehen aus einem n -Eck, einem dazu parallelen $2n$ -Eck sowie n Dreiecken und n Quadraten, die die beiden parallelen Polygone abwechselnd in einem Ring verbinden. n kann dabei nur 3, 4 oder 5 sein, da andernfalls die umringenden Dreiecke und Vierecke nicht regelmäßig sein können bzw. (unter Beibehaltung der Regelmäßigkeit der Flächen) keine räumliche, konvexe Ecke entstehen kann.



Dreieckskuppel, J_3 –
Abb. 55



Quadratkuppel, J_4 –
Abb. 56



Fünfeckskuppel, J_5 –
Abb. 57

Einen weiteren besonderen Johnson-Körper werde ich im Kapitel „5.1 Pseudo-Rhombenkuboktaeder“ vorstellen. Alle übrigen Johnson-Körper in dieser Arbeit vorzustellen, wäre nicht zielführend, weswegen ich an dieser Stelle auf folgendes pdf-Dokument verweisen möchte, in dem alle 92 Johnson-Polyeder aufgelistet sind: <https://mathematikalpha.de/wp-content/uploads/2016/12/13-Johnson.pdf> (Steffen 2016, 1-8).

3.5 Die Deltaeder

Es gibt auch noch eine weitere, bedeutende Möglichkeit, die Regularitätsbedingungen für konvexe Polyeder abzuschwächen. Vernachlässigt man die Kongruenz der Eckenumgebungen, bleiben die beiden folgenden Bedingungen übrig:

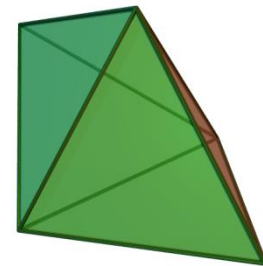
- (R1) Alle Flächen sind regelmäßige Vielecke.
- (R2) Alle Flächen sind zueinander kongruent.

Neben den platonischen Körpern gibt es auch noch andere Polyeder, die diese beiden Bedingungen erfüllen. Tatsächlich werden alle diese Polyeder von *Dreiecken* begrenzt, weswegen sie gemeinsam mit dem Tetraeder, dem Oktaeder und dem Ikosaeder eine eigenständige Gruppe bilden, die sogenannten Deltaeder.

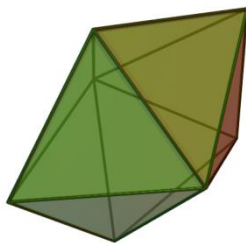
Def. 26 | Die **Deltaeder** sind konvexe Polyeder, die von regulären, zueinander kongruenten Dreiecken begrenzt werden.

Gemeinsam mit Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder gibt es acht Deltaeder, wobei die übrigen fünf, da sie ja von regelmäßigen Vielecken begrenzt werden, auch zu den Johnson-Körpern gehören und dementsprechend Kurzbezeichnungen besitzen.

Die **trigonale Bipyramide** (J_{12}) setzt sich, wie der Name schon vermuten lässt, aus zwei Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche zusammen.



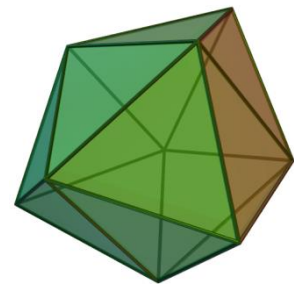
Triagonale Bipyramide,
 J_{12} – Abb. 58



Pentagonale Bipyramide,
 J_{13} – Abb. 59

Es gibt auch noch ein weiteres Deltaeder, das aus zwei Pyramiden gebildet wird, nämlich die **pentagonale Bipyramide** (J_{13}), deren Pyramiden eine fünfeckige Grundfläche besitzen.

Ein drittes Deltaeder entsteht, wenn man auf die Quadratflächen eines Prismas mit dreieckiger, regulärer Grundfläche je eine quadratische Pyramide setzt. Dies ist das sogenannte **dreifach erweiterte Dreiecksprisma** (J_{51}).



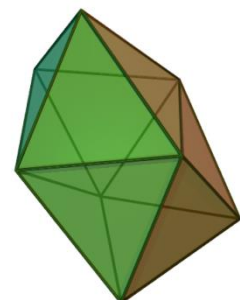
Dreifach erweitertes
Dreiecksprisma, J_{51} –
Abb. 60



Zweifach erweitertes
Antiprisma, J_{17} –
Abb. 61

Ein weiteres Deltaeder, das **zweifach erweiterte Antiprisma** (J_{17}), wird aus einem Antiprisma mit quadratischer Grundfläche und zwei quadratischen, an Grund- bzw. Deckfläche des Antiprisma angehängten Pyramiden gebildet.

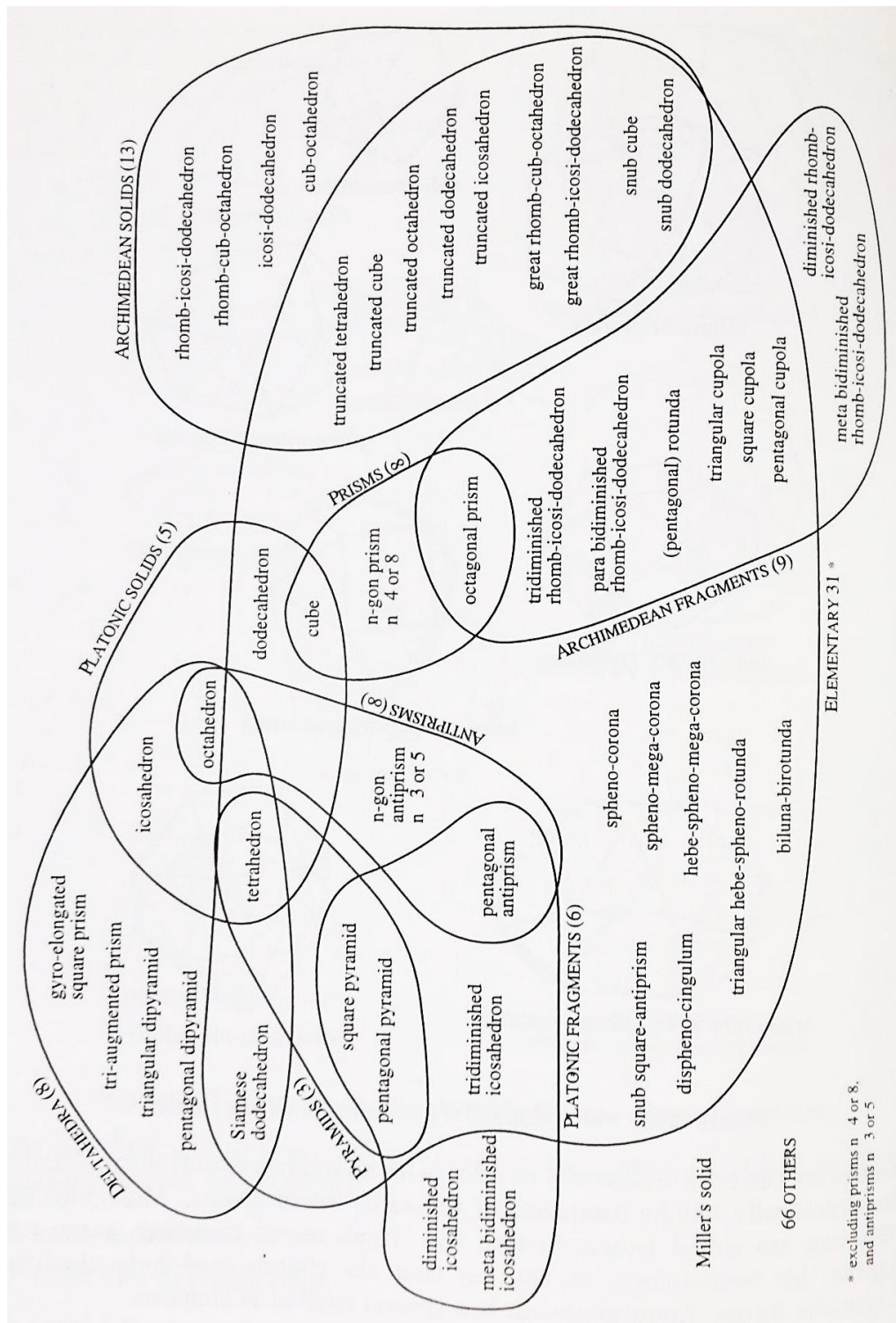
Das letzte Deltaeder ist das **Trigondodekaeder** (J_{84}), auch siamesisches Dodekaeder genannt. Es lässt sich nicht so einfach beschreiben, wie die übrigen Deltaeder; es sei aber erwähnt, dass es von zwölf Dreiecken begrenzt wird, weshalb es diesen Namen erhielt.



Trigondodekaeder,
 J_{84} – Abb. 62

3.6 Überblick über verschiedenste Polyedergruppen

Die bisher genannten Gruppen von konvexen Polyedern sind wohl die in der Literatur am häufigsten genannten. Es sind dies allerdings bei weitem nicht alle Einteilungs- bzw. Gliederungsmöglichkeiten, was durchaus verständlich wird, wenn man sich vor Augen hält, dass es unendlich viele konvexe Polyeder gibt. Cromwell erstellte eine Abbildung, die einen groben Überblick über die Einteilungen der konvexen Polyeder mit regulären Flächen geben soll (Cromwell 1997, 90).



Einteilungen konvexer Polyeder mit regulären Flächen – Abb. 63

4 Konvexe Polyeder in der Natur

Konvexe Polyeder kann man überall in der Natur finden. Besonders markant lassen sich die Formen (konvexer) regulärer Polyeder und bestimmter dual-archimedischer Körper bei Kristallen erkennen (vgl. Roman 1987, 85). In Werner Nowackis „Moderne allgemeine Mineralogie“ heißt es: „Jede frei wachsende homogene, kristallisierte Substanz nimmt eine charakteristische, von ebenen Flächen begrenzte, eigene äußere Gestalt an“ (Nowacki 1951, 20-22). Jede derartige Substanz nimmt also die Gestalt eines Polyeders an. Betrachten wir nun noch folgendes Zitat: „Jeder einheitliche Stoff, der nicht gasförmig oder flüssig ist, ist – in weiterem Sinne – ein Kristall. Der kristallisierte Zustand ist daher außerordentlich weit verbreitet und von ganz grundsätzlicher Wichtigkeit; sozusagen alles, was wir täglich in die Hand nehmen, besteht aus kleinsten Kristallindividuen“ (Nowacki 1951, 3). Wir sind folglich auch tagtäglich von kleinsten, polyedrischen Formen umgeben, zumeist jedoch ohne diese mit freiem Auge sehen zu können. Mit dieser Erkenntnis steigert sich die Bedeutung von Polyedern deutlich.

An dieser Stelle seien nur einige Substanzen genannt, die in Form konvexer Polyeder kristallisieren. Für weitere Informationen verweise ich auf Roman Tiberiu (1987, 85-89). Rotkupfererz, auch *Cuprit* genannt, tritt unter anderem in Formen von Würfeln, Oktaedern und Rhombendodekaedern auf. Etwa 15% aller bekannten Minerale, darunter *Fluorit* (=Flussspat), *Gold*, *Silber*, *Eisen*, *Kupfer*, *Granat* und *Bleiglanz*, besitzen unter anderem Kristalle in Form von Hexakisoktaedern, Deltoidikositetraedern, Rhombendodekaedern, Oktaedern und Würfeln. Den *Pyrit* wiederum findet man oft in Form von Dodekaedern, Oktaedern und Würfeln (vgl. Winchell/ Winchell 1967, 48).



Cuprit – Abb. 64



Flussspat – Abb. 65

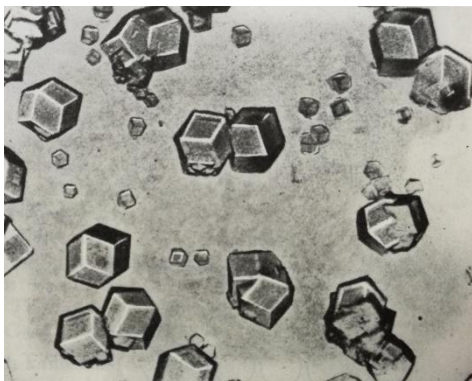


Granat – Abb. 66



Pyrit – Abb. 67

Auch in der Biologie bzw. Medizin findet man die Formen konvexer Polyeder. Viren können Kristalle bilden, die polyedrische Form aufweisen. Nowacki erwähnt das „Bushy stunt“-Virus der Tomate, das würfel- aber auch rhombendodekaederförmige Kristalle bildet (Nowacki 1951, 58).



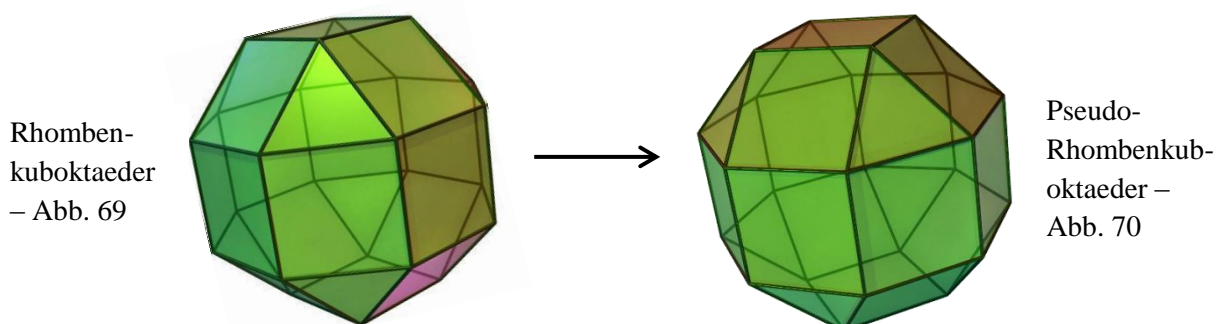
Kristalle vom
„Bushy stunt“-
Virus – Abb. 68

5 Weitere besondere konvexe Polyeder

Alle konvexen Polyeder aufzuzählen wäre, gerade in Anbetracht der unendlichen Anzahl, unmöglich. Daher möchte ich zusätzlich zu den bisher genannten Polyeder(gruppe)n noch zwei weitere konvexe Körper beschreiben, die in der Vergangenheit große Aufmerksamkeit erfahren haben und auch heute noch besondere Bedeutung genießen.

5.1 Pseudo-Rhombenkuboktaeder

Besondere Aufregung brachte das Pseudo-Rhombenkuboktaeder im Jahre 1930 hervor. Der britische Mathematiker J. C. P. Miller entdeckte es durch Zufall, als er eine Kappe des Rhombenkuboktaeders um 45° gedreht aufsetzte (siehe Abb. 70). Dadurch erhielt er ein konvexes Polyeder, das auf den ersten Blick alle Bedingungen für einen archimedischen Körper erfüllen würde: Es wird von zueinander kongruenten Quadraten und zueinander kongruenten Dreiecken begrenzt und auch die Eckenumgebungen scheinen übereinzustimmen. Betrachtet man die Ecken jedoch genauer, so erkennt man, dass sie lokal zwar kongruent zueinander sind, da in jeder Ecke die direkt benachbarten Flächen in gleicher Weise zusammenstoßen. Unter Mitberücksichtigung der weiter entfernten Nachbarflächen lassen sich jedoch Unterschiede feststellen. Von diesem Zeitpunkt an unterschied man zwischen **lokalen** und **globalen** kongruenten Eckenumgebungen. Man einigte sich schließlich, dass nur jene konvexen Polyeder zu den archimedischen Körpern zählen, die eine *globale* Eckenkongruenz aufweisen. Somit fällt das Pseudo-Rhombenkuboktaeder nicht mehr unter die archimedischen Polyeder, sondern unter die Johnson-Körper und erhält die Kurzbezeichnung **J₃₇**. Nach seinem Entdecker wird es auch gerne als „**Miller's solid**“ bezeichnet (vgl. Cromwell 1997, 89ff.), wobei man sich jedoch unsicher ist, ob nicht bereits Kepler das Pseudo-Rhombenkuboktaeder entdeckt hat, da dieser in seinem *De Nive Sexangula* von vierzehn Archimedischen Körpern spricht (vgl. Cromwell 1997, 156).



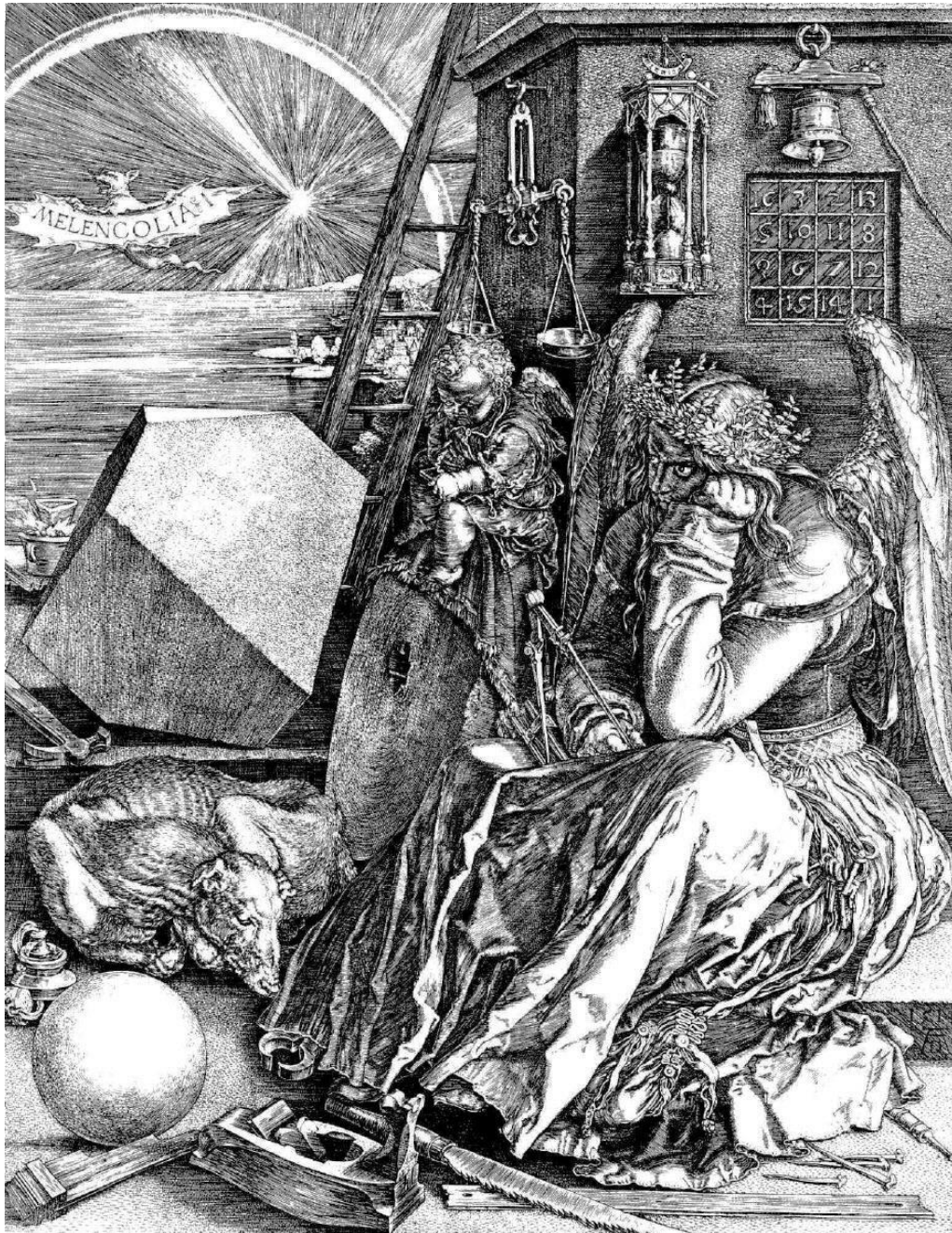
5.2 Dürer-Polyeder

Albrecht Dürer (1471 – 1528) fertigte im Jahre 1514 einen Kupferstich mit dem Titel „Melencolia I“ an (vgl. Schröder 1980, 64-75). In diesem Kupferstich (siehe Abb. 71) geht Dürers Interesse für Mathematik deutlich hervor. So befinden sich nicht nur eine Kugel (links vorne), ein Zirkel (in der Hand des Engels) und ein magisches Quadrat (rechts oben) in diesem Werk, sondern auch ein konvexes Polyeder – das abgestumpfte Rhomboeder, auch Dürer-Polyeder genannt.

Es besitzt acht Flächen, wovon sechs zueinander kongruente, jedoch unregelmäßige Fünfecke sind, die durch Abstumpfung der Rautenflächen entstanden sind. Die übrigen zwei Flächen sind regelmäßige Dreiecke, die im Kupferstich als Grund- und Deckfläche fungieren. Jeweils gegenüberliegende Flächen verhalten sich parallel zueinander.

Das Dürer-Polyeder rief jedoch eine bis zum heutigen Tage bestehende Uneinigkeit über seine genauen Proportionen hervor. Einige Quellen gehen davon aus, dass die Rauten (vor der Abstumpfung) Innenwinkel von 72° und 108° besitzen und anschließend der Körper so weit abgestumpft wird, bis alle Ecken des entstehenden Polyeders auf einer Umkugel liegen (vgl. Börgens 2018). Eberhard Schröder vertritt allerdings die Ansicht, dass sich die Längen der Diagonalen der Raute wie $2:\sqrt{3}$ verhalten (vgl. Schröder 1980, 72), wodurch sich aber andere Innenwinkel ergeben würden. Die Konstruktion dieses abgestumpften Rhomboeders schien auch Dürer selbst länger beschäftigt zu haben. So ist unter den Dresdner Skizzenblättern auch eine Zeichnung dieses Polyeders, allerdings gespiegelt zur Endfassung und mit den verdeckten Kanten versehen.

Passend zu diesem Eindruck, dass Dürer scheinbar selbst mit der Konstruktion dieses Körpers haderte, unterstützt Schröder die allgemeine Ansicht, dass in der geflügelten Frauengestalt „ein geistiges Selbstbildnis von Albrecht Dürer“ zu erkennen sei. „Der in die Ferne gerichtete Blick, das im Schoß liegende Buch und der von der Hand geführte Zirkel stützen die Annahme, daß Dürer hier ein ihm selbst zutiefst vertrautes geistiges Ringen um die Problematik der Wiedergabe des dreidimensionalen Raumes mit seinen verschiedenartigen Objekten in einer zweidimensionalen Bildebene versinnbildlichen wollte.“ (Schröder 1980, 64)



Melencolia I
– Abb. 71

Mit diesem Gedanken im Hinterkopf, dass selbst der große Meister Albrecht Dürer Probleme beim Darstellen dreidimensionaler Objekte hatte und diese nach einigem Überlegen und Herumprobieren meisterte, möchte ich den theoretischen Teil dieser Arbeit abschließen und unter anderem das eben genannte Problem im zweiten, schulpraxisnahen Teil unter die didaktische Lupe nehmen. Zunächst folgt aber noch eine kurze Untersuchung, wo konvexe Polyeder (in Ansätzen oder sogar ganz) im Mathematikunterricht der AHS vorkommen.

6 Vorkommen konvexer Polyeder im schulischen Lehrplan:

In diesem Kapitel betrachten wir Schulstufe für Schulstufe, welche Bereiche des Lehrstoffs konvexe Polyeder zumindest ansatzweise inkludieren bzw. die Grundlagen dafür bereitstellen, um später mit konvexen Polyedern arbeiten zu können. Diese Untersuchung erfolgte unter der Betrachtung der neuen, ab 1. September 2018 gültigen Lehrpläne der AHS für das Unterrichtsfach Mathematik, abrufbar über folgenden Link (Stand: 29.07.2018, Lehrplan der Unterstufe auf den Seiten 79-85, Lehrplan der Oberstufe auf den Seiten 165-172):

<https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung/Bundesnormen/10008568/Lehrpl%C3%A4ne%20%E2%80%93%20allgemeinbildende%20h%C3%B6here%20Schulen%2c%20Fassung%20vom%2001.09.2018.pdf?FassungVom=2018-09-01>

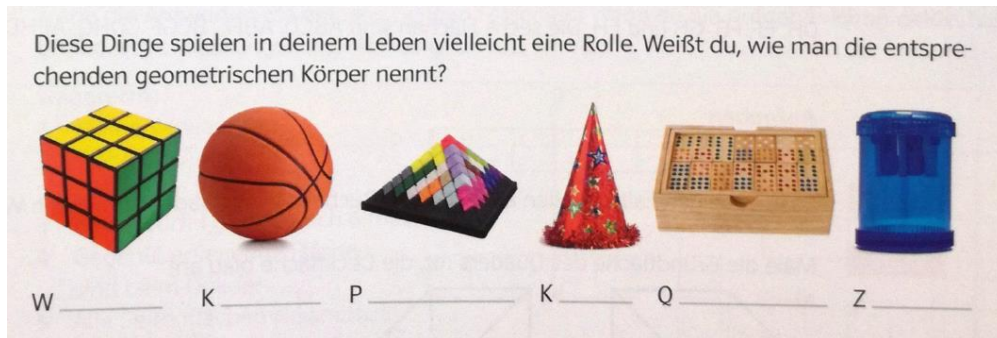
Zusätzlich werden konkrete Übungsbeispiele vorgestellt, die einen besseren Einblick in den entsprechenden Lernstoff geben sollen. Diese Beispiele wurden aktuellen, gängigen Schulbüchern der jeweiligen Schulstufe entnommen und sollen zeigen, dass im Schulunterricht ein durchaus relevanter Bezug zu konvexen Polyedern existiert.. Dabei sei noch erwähnt, dass die Schulbücher nach den derzeit gültigen Bildungsstandards entwickelt wurden. Weiters wurden sie bewusst nicht aus einer einzigen Serie gewählt, um aufzeigen zu können, wie häufig konvexe Polyeder, deren Zusammensetzungen und Eigenschaften unabhängig von den Interessen der AutorInnen direkt oder indirekt thematisiert werden.

6.1 Erste Klasse

Für die erste Klasse bzw. fünfte Schulstufe sind die Kapitel „1.1 Arbeiten mit Zahlen und Maßen“ und „1.3 Arbeiten mit Figuren und Körpern“ in Hinblick auf (konvexe) Polyeder entscheidend. In ersterem soll unter anderem die Kompetenz erlangt werden, mit Maßen und Umwandlungen rechnen zu können, was auch für geometrische Berechnungen relevant ist. Die SchülerInnen werden an dieser Stelle zwar noch nicht mit dem Begriff des Polyeders, geschweige denn mit allen für Polyeder relevanten Informationen konfrontiert, aber sie legen bereits in diesem Kapitel den Grundstein für ein späteres Verständnis von der Größe eines Polyeders.

Konkreter wird es noch im Kapitel „1.3 Arbeiten mit Figuren und Körpern“. Hier wird das zwei- und sogar dreidimensionale Vorstellungsvermögen der SchülerInnen intensiv gefordert

und gefördert. Diese sollen unter anderem „ausgehend von Objekten der Umwelt durch Idealisierung und Abstraktion geometrische Figuren und Körper sowie ihre Eigenschaften erkennen und beschreiben“ können (BMBWF 2018, 83). Folgende Abbildung, entnommen aus dem Schulbuch „Mathematik verstehen 1“, zeigt ein klassisches Übungsbeispiel, um diese Kompetenz zu fördern:



Geometrische Körper an Alltagsgegenständen erkennen – Abb. 72

Weiters lernen die SchülerInnen, Skizzen unter anderem von Quadern und Rechtecken sowie von deren Netzen anzufertigen. Auch die „Flächenberechnungen an Rechtecken“ sowie die „Volums- und Oberflächenberechnungen an Quadern“ werden in der ersten Klasse thematisiert, wobei die SchülerInnen auch lernen, entsprechende Formeln aufzustellen (BMBWF 2018, 83). Salzger et al. führen die Volumsberechnung an Quadern durch ein Anwendungsbeispiel ein, das die SchülerInnen leicht nachvollziehen können:

Alexandra sucht nach einer passenden Schachtel für ihre kleinen Legoteile. In welche der beiden Schachteln A oder B passen mehr Teile hinein? (Maße in Zentimeter)

Lösung: In der Schachtel A könnte sie Schichten von $40 \cdot 30$ Würfeln mit je einem Volumen von 1 cm^3 genau fünfmal übereinander stapeln. Sie rechnet: $V = 40 \cdot 30 \cdot 5 = 6000$, dh. das Volumen der Schachtel A ist 6000 cm^3 . In der Schachtel B könnte sie Schichten von $20 \cdot 20$ Würfeln mit je einem Volumen von 1 cm^3 genau 20-mal übereinander stapeln. Sie rechnet: $V = 20 \cdot 20 \cdot 20 = 8000$, dh. das Volumen der Schachtel B ist 8000 cm^3 . In Schachtel B passen mehr Teile hinein, da sie ein um $2000 \text{ cm}^3 = 2 \text{ dm}^3$ größeres Volumen hat als Schachtel A.

Volumsberechnungen an Quadern – Abb. 73

Man kann also erkennen, dass sich die SchülerInnen der ersten Klasse tatsächlich schon mit einfachen Polygonen und Polyedern beschäftigen, ohne sie jedoch als solche zu bezeichnen.

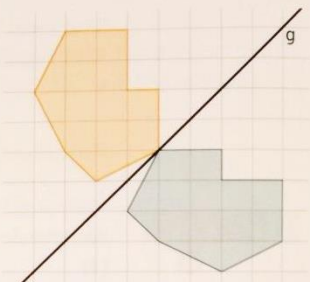
6.2 Zweite Klasse

In der zweiten Klasse bzw. sechsten Schulstufe werden die beiden Kapitel der ersten Klasse noch deutlich vertieft und erweitert, wobei eine größere Gewichtung auf die Skizzierung und die sorgfältige Konstruktion von Figuren gelegt wird. Zusätzlich lernen die SchülerInnen im Kapitel „2.3 Arbeiten mit Figuren und Körpern“ zum ersten Mal den Begriff der Kongruenz kennen, der gerade bei der Betrachtung der begrenzenden Polyederflächen wichtig wird. Für das Kennenlernen und die Verinnerlichung des Begriffs und dessen Bedeutung müssen die SchülerInnen auch „kongruente Figuren herstellen“ und die „Kongruenz begründen“ können (BMBWF 2018, 84). Folgende Abbildung zeigt drei Beispiele, die stark das Verständnis für den Kongruenzbegriff vertiefen:

6.48 Die orange Figur in der nebenstehenden Abbildung wurde an der Geraden g gespiegelt, wodurch die blaue Figur entstanden ist.
Sind die beiden Figuren kongruent?
Begründe die Antwort!

6.49 Zwei Quadrate haben jeweils denselben Flächeninhalt von 400 mm^2 . Sind die beiden Figuren kongruent?
Begründe die Antwort!

6.50 Gegeben ist ein Rechteck mit dem Flächeninhalt 40 cm^2 .
1) Wie viele solcher Rechtecke gibt es?
2) Konstruiere ein Rechteck mit dem gegebenen Flächeninhalt!
3) Sind alle Rechtecke mit dem Flächeninhalt 40 cm^2 kongruent? Begründe die Antwort!
4) Sind alle kongruenten Rechtecke flächeninhaltsgleich? Begründe die Antwort!



Übungsbeispiele zum Kongruenzbegriff – Abb. 74

Auch Prismen werden in diesem Kapitel eingeführt, erneut ohne diese Körper als Polyeder zu klassifizieren. Hierfür findet sich im Schulbuch „Mathematik verstehen 2“ ein Übungsbeispiel mit konkretem Alltagsbezug:

Welche der dargestellten Körper sind keine Prismen? Begründe die Antwort!

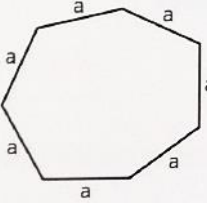
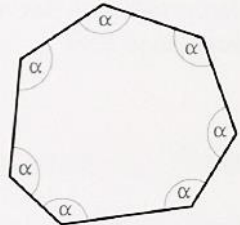
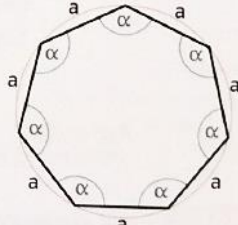
1)  2)  3)  4)  5)  6) 

Übungsbeispiel zum Erkennen von Prismen – Abb. 75

Weiters werden in der zweiten Klasse Dreiecke, Vierecke und regelmäßige Vielecke behandelt und hinsichtlich ihrer Eigenschaften untersucht. Abbildung 76 zeigt den

SchülerInnen deutlich, dass die Gleichseitigkeit eines Vielecks nicht bedeutet, dass es auch gleichwinkelig ist. Nur wenn beides erfüllt ist, darf das Vieleck „regelmäßig“ oder „regulär“ genannt werden – eine Eigenschaft, die unter anderem bei der Untersuchung der platonischen Körper, der archimedischen Polyeder und der Johnson-Körper eine wichtige Rolle spielt.

Besondere Vielecke

<p>Hat ein Vieleck gleich lange Seiten, nennt man es gleichseitiges Vieleck.</p> 	<p>Hat ein Vieleck gleich große Winkel, nennt man es gleichwinkeliges Vieleck.</p> 	<p>Hat ein Vieleck gleich lange Seiten und gleich große Winkel, nennt man es regelmäßiges oder reguläres Vieleck. Alle Eckpunkte liegen auf einer Kreislinie.</p> 
--	--	--

Besondere Eigenschaften von Vielecken – Abb. 76

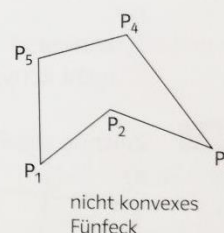
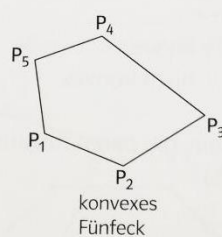
Eine weitere höchst bedeutsame Eigenschaft von Vielecken, die die SchülerInnen in der zweiten Klasse lernen, ist die der Konvexität. Allerdings wird sie in dieser Schulstufe nur in der Ebene betrachtet. Salzger et al. bieten dafür zwei unterschiedliche Definition bzw. Sichtweisen:

Sind alle Innenwinkel des Vierecks kleiner als 180° , so nennt man es ein **konvexes Viereck**. Hat ein Viereck hingegen eine einspringende Ecke, dh. einen Innenwinkel, der größer als 180° ist, so nennt man es ein **nicht konvexes Viereck**.

Konvexität 1 – Abb. 77

Verlaufen alle **Diagonalen**, dh. die Verbindungsstrecken zweier nicht benachbarter Eckpunkte, im **Inneren** des Vielecks, so nennt man dieses Vieleck **konvex**.

Ein **konvexes n-Eck** hat **n Eckpunkte**, **n Seiten** und **n Innenwinkel**, deren Maß jeweils **kleiner als 180°** ist. Ist das Maß nur eines Innenwinkels größer als 180° , ist das n-Eck nicht konvex.



Konvexität 2 – Abb. 78

Zunächst wird die Konvexität anhand eines Vierecks definiert, wobei die Aufmerksamkeit auf die Innenwinkel des Polygons gelenkt wird, die alle kleiner als 180° sein müssen, um die Konvexität erfüllen zu können. Etwas später wird die Eigenschaft der Konvexität erneut thematisiert, wobei dieses Mal eine andere Definition vorgestellt und an allgemeinen Vielecken untersucht wird. Durch diese unterschiedlichen Zugänge erhalten die SchülerInnen die Möglichkeit, die Konvexität auf zwei verschiedene Arten prüfen zu können und sich somit diejenige Art aussuchen zu können, die ihnen verständlicher erscheint.

Besonders spannend im Schulbuch „Mathematik verstehen 2“ ist auch die Thematisierung der Form eines Fußballs, der ja nach dem Prinzip eines Ikosaederstumpfs aufgebaut ist (siehe Abb. 79). Wir befinden uns hier also mitten im Bereich der konvexen Polyeder. Es wird sogar erörtert, weshalb der Winkeldefekt größer als 0° sein muss; dies allerdings mit anderen Worten.

Auch bei der klassischen Form eines **Fußballs** wird man an regelmäßige Sechsecke erinnert. Aber bei genauerem Betrachten stellt man fest, dass die Fußballoberfläche auch regelmäßige Fünfecke aufweist. Um ein Fünfeck herum befinden sich fünf Sechsecke. Nun hat ein regelmäßiges Fünfeck aber ein Innenwinkelmaß von 108° , während ein regelmäßiges Sechseck 120° hat:
 $108^\circ + 120^\circ + 120^\circ = 348^\circ \neq 360^\circ$.



Wie ist das möglich?

Das liegt daran, dass die Oberfläche eines Fußballs nicht eben, sondern gekrümmt ist. Es handelt sich um eine Kugel. Um diese dreidimensionale Gestalt eines Balls zu erreichen, ist daher an mehreren Stellen ein kleineres Vieleck notwendig: Beim Fußball ist es so, dass an jeder Ecke zwei regelmäßige Sechsecke und ein regelmäßiges Fünfeck aneinanderliegen. So entsteht die Kugelform.

Ein klassischer Fußball besteht somit aus 20 regelmäßigen Sechsecken und genau jenen zwölf regelmäßigen Fünfecken, die einander jedoch an keiner Stelle der Oberfläche berühren.

Fußball in Form eines Ikosaederstumpfs – Abb. 79

6.3 Dritte Klasse

Ein mathematischer Themenbereich, der in Bezug auf die Geometrie bis hierhin noch keine große Rolle spielte, ist das Arbeiten mit Variablen. Die SchülerInnen beginnen zwar bereits ab der ersten Klasse Variablen im Unterricht zu verwenden und ihr Wissen darüber wird in der zweiten Klasse noch vertieft. Vor der dritten Klasse kommen Variablen in geometrischen Fragestellungen allerdings nur in Einzelfällen vor. In der siebten Schulstufe wird nun aber im Kapitel „3.2 Arbeiten mit Variablen“ gefordert, Variablen bei der Aufstellung bzw. Umformung von Formeln ebenfalls explizit in der Geometrie einzusetzen, was natürlich auch

ein Erlernen von Kenntnissen und Fähigkeiten bedeutet, die für eine Auseinandersetzung mit Polyedern förderlich, oftmals sogar nötig sind.

Folgende Abbildung wurde dem Schulbuch „Expedition Mathematik 3“ entnommen und zeigt ein typisches Übungsbeispiel, an dem man das Arbeiten mit Variablen im Bereich Geometrie trainieren kann.

358 Ein Quader hat die Kantenlängen a , b und c .

- a) Gib eine Formel für das Volumen des Quaders an.
- b) Wie lautet die Formel, wenn du die Kantenlänge a verdoppelst? Wie verändert sich das Volumen?
- c) Wie ändert sich das Volumen des Quaders, wenn du zwei [drei] Kantenlängen verdoppelst?

Arbeiten mit Variablen und konvexen Polyedern – Abb. 80

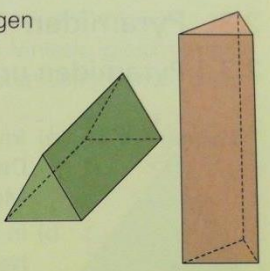
Noch konkreter wird den konvexen Polyedern aber wieder im Kapitel „3.3 Arbeiten mit Figuren und Körpern“ Aufmerksamkeit gewidmet. Hier stehen insbesondere das Prisma und die Pyramide im Fokus, deren Oberfläche, Rauminhalt und Gewicht die SchülerInnen in konkreten Anwendungsbeispielen zu berechnen lernen. Auch die Kompetenz, diese Körper zeichnerisch darzustellen, wird entwickelt und gefordert, was das räumliche Vorstellungsvermögen klar intensiviert. Abbildung 81 zeigt ein klassisches Beispiel, mit dem man diese Kompetenz gut trainieren kann. (α gibt dabei den Verzerrungswinkel und v den Verkürzungsfaktor an.)

281 Zeichne einen Schrägriss eines regelmäßigen, dreiseitigen Prismas (Grundfläche ist ein gleichseitiges Dreieck)

- (1) auf einer Seitenfläche liegend,
- (2) auf der Grundfläche stehend.

a) Länge der Basiskante $a = 4$ cm,
 $h = 12$ cm; $\alpha = 45^\circ$, $v = \frac{1}{2}$

b) Länge der Basiskante $a = 6$ cm,
 $h = 8$ cm; $\alpha = 135^\circ$, $v = \frac{1}{2}$



Schrägriss eines Prismas zeichnen – Abb. 81

Ein weiterer bedeutender mathematischer Fortschritt in der dritten Klasse ist das Erlernen des pythagoräischen Lehrsatzes, der natürlich auch in Bezug auf die konvexen Polyeder äußerst wichtig ist, zum Beispiel für die Ermittlung des Flächeninhalts von Polygonen, die ein Polyeder begrenzen, – siehe Abb. 82.

1014 In einer Feriensiedlung werden Dachhäuser wie im Bild errichtet.

- Wie hoch sind die Dachhäuser?
- Die Giebelflächen sollen mit Holz verkleidet werden. Wie viel m^2 werden für eine Seite benötigt?



Den Lehrsatz des Pythagoras bei Polygonen einsetzen – Abb. 82

6.4 Vierte Klasse

In der dritten Klasse beschränkte sich der Lehrsatz des Pythagoras noch auf Berechnungen in ebenen Figuren. Ab der vierten Klasse bzw. achten Schulstufe nutzen die SchülerInnen diesen nun auch in Körpern. Kraker, Plattner und Preis erkannten den Nutzen von platonischen Körpern in diesem Stoffgebiet und erstellten mehrere Aufgaben, die sogar Oktaeder und Tetraeder inkludieren. Die folgende Abbildung zeigt zwei dieser Aufgaben:

Partner 376 Ein regelmäßiges Oktaeder („regelmäßiger Achteflächner“) ist eine quadratische Doppelpyramide mit Kanten, die alle gleich lang sind. Das gegebene regelmäßige Oktaeder hat eine Kantenlänge von 4 cm.

- Bestimmt eine Formel für die Oberfläche O des Oktaeders und berechnet die Oberfläche mit der gegebenen Kantenlänge a .
- Bestimmt die Länge der Raumdiagonalen AC , BD , EF . Was fällt euch auf?
- Zeigt, dass das **Volumen** eines regelmäßigen Oktaeders mithilfe der Formel $V = \frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot \sqrt{2}$ berechnet werden kann. Berechnet das Volumen des gegebenen Oktaeders.

Partner 378 Ein regelmäßiges Tetraeder (regelmäßiger Vierflächner) ist eine regelmäßige dreiseitige Pyramide, deren Seitenkanten alle gleich lang sind.

- Leitet eine Formel zur Berechnung der Oberfläche O her.
- Der Fußpunkt M der Körperhöhe ist der Umkreismittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks ABC und damit auch gleichzeitig der Schwerpunkt. Es gilt daher:
 $\overline{AM} = \frac{2}{3} \cdot h_a$ und $\overline{MM}_{BC} = \frac{1}{3} \cdot h_a$.
 Leitet daraus die Formel $h = \frac{a}{3} \cdot \sqrt{6}$ zur Berechnung der Körperhöhe und $V = \frac{a^3}{12} \cdot \sqrt{2}$ zur Berechnung des Volumens eines regelmäßigen Tetraeders her.

Den Lehrsatz des Pythagoras bei Polyedern einsetzen – Abb. 83


Ansonsten werden im Kapitel „4.3 Arbeiten mit Figuren und Körpern“ hauptsächlich der Kreis, sowie der Drehzylinder, der Drehkegel und die Kugel thematisiert. Dies sind zwar keine Polyeder, dennoch sind die Erkenntnisse aus der Beschäftigung mit der Kugel wichtig für eine Berechnung der In- bzw. Umkugel eines konvexen Polyeders, sofern vorhanden. In

folgendem Beispiel wurde der Ikosaederstumpf, der den SchülerInnen als klassischer Fußball bekannt ist, durch eine Kugel angenähert, um die Volums- und Oberflächenberechnungen einfacher durchführen sowie die neu gelernten Formeln alltagsbezogen einsetzen zu können.

H2 846 Laut Reglement darf ein Fußball den Umfang zwischen 68 cm und 70 cm haben.

a) Um wie viel Prozent ist das Volumen beim Mindestmaß kleiner als beim Höchstmaß?

b) Eine Firma produziert täglich 400 Bälle. Wie viel m² Leder werden für das Höchstmaß mehr gebraucht als für das Mindestmaß, wenn jeweils noch 25 % Verschnitt hinzugerechnet werden müssen?



Berechnungen an der Kugel durchführen – Abb. 84


Kraker, Plattner und Preis behandeln im Schulbuch „Expedition Mathematik 4“ auch schon das Stoffgebiet der Funktionen, was im neuen Lehrplan erst ab der fünften Klasse vorgesehen ist. Dennoch möchte ich an dieser Stelle auf ein schönes Beispiel verweisen (siehe Abb. 85), das eine der zahlreichen Möglichkeiten aufzeigt, konvexe Polyeder bei der Behandlung von Funktionen zu inkludieren.

Gruppe 444 Welche Schachtel hat das größte Volumen?

Schneidet an den Ecken von Rechtecken (DIN-A4-Blätter) jeweils vier gleich große Quadrate ab und faltet Schachteln.

Erstellt eine Wertetabelle für die Funktion f :
Seitenlänge x des Quadrats \rightarrow *Volumen der Schachtel*
 und zeichnet den Graphen der Funktion.

Für welche Seitenlänge des Quadrats hat die Schachtel das größte Volumen?



Funktionen bei Polyedern einsetzen – Abb. 85

6.5 Fünfte Klasse

In der fünften Klasse bzw. neunten Schulstufe sind im Hinblick auf konvexe Polyeder vor allem die Kapitel „Trigonometrie“ und „Vektoren und analytische Geometrie in \mathbb{R}^2 “ interessant. In ersterem werden Sinus, Cosinus und Tangens eingeführt sowie der Sinus- und Cosinussatz. Mit dieser Fülle an neuen Rechenmöglichkeiten üben sich die SchülerInnen vor allem an „rechtwinkligen und allgemeinen Dreiecken“ sowie an anderen „Figuren und

Körpern“ (BMBWF 2018, 168). Dabei ist es sehr naheliegend, dass die Übungsaufgaben oftmals auch konvexe Polyeder beinhalten, wie folgendes Beispiel zeigt:

Ein Ziegeldach sollte mindestens unter 30° geneigt sein. Warum? Wie lang müssen die Dachsparren eines symmetrischen Satteldaches auf jeder Seite

►► mindestens sein, wenn das Haus die angegebene Breite hat?

a 6 m	b 7 m
c 8,5 m	d 9,5 m

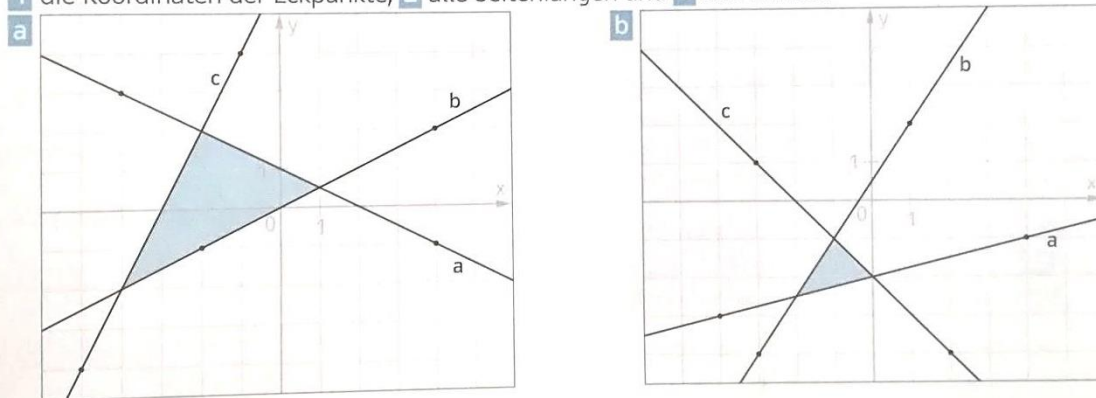


Sinus, Cosinus und Tangens bei Polyedern einsetzen – Abb. 86

Gemeinsam mit der Einführung der Vektoren im Kapitel „Vektoren und analytische Geometrie in \mathbb{R}^2 “ eröffnet sich auch ein neuer Zugang zu den konvexen Polyedern. Deren Darstellung und die Berechnung markanter Punkte, Längen, Flächen und später auch Volumina sind mithilfe von Vektoren auf eine ganz neue Art und Weise möglich. Umgekehrt bieten konvexe Polyeder den SchülerInnen gute Möglichkeiten, an ihnen die Verwendung von Vektoren zu üben, weshalb sie oftmals in der einen oder anderen Form in Aufgaben eingesetzt werden. In der fünften Klasse beschränkt man sich dabei aber noch auf den \mathbb{R}^2 , weswegen Verbindungen zu Polyedern hauptsächlich durch die Beschäftigung mit Vektoren bei Polygonen bestehen.

Lies aus der Figur die Gleichungen der Geraden ab und berechne für das eingeschlossene Dreieck

- 1** die Koordinaten der Eckpunkte, **2** alle Seitenlängen und **3** alle Winkel!



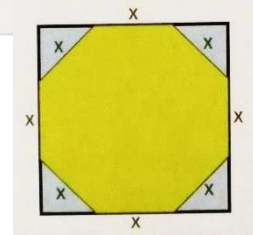
Vektoren bei Polygonen einsetzen – Abb. 87

Auch Gleichungen und Gleichungssysteme werden in der fünften Klasse untersucht. In den dazugehörigen Anwendungsbeispielen findet man häufig Polygone, von denen ausgehend

man konkrete Gleichungen aufstellen und berechnen soll. Ein derartiges Anwendungsbeispiel zeigt Abbildung 88:

Einem Quadrat mit der Seitenlänge **1** 5 cm, **2** a cm ist ein gleichseitiges Achteck einzuschreiben ▶▶. Berechne dessen Seitenlänge (in Abhängigkeit von a)!

Gleichungen bei Polygonen – Abb. 88



6.6 Sechste Klasse

Auch in der sechsten Klasse bzw. zehnten Schulstufe sind Vektoren ein wichtiges Thema im Mathematikunterricht. Im Kapitel „Vektoren und analytische Geometrie in \mathbb{R}^3 ; Vektoren in \mathbb{R}^n “ vertiefen die SchülerInnen ihr Wissen über Vektoren und analytische Geometrie und weiten dieses nun auf den dreidimensionalen Raum aus. So betrachten sie ab jetzt auch Ebenen, deren Darstellungsweisen und mögliche Lagebeziehungen zu anderen Ebenen und Geraden. Dadurch ergibt sich eine Vielfalt an neuen Übungsaufgaben, die nicht selten konvexe Polyeder inkludieren. Zwei Beispiele möchte ich insbesondere hervorheben, da sie konkrete Rechenoperationen an einem Tetraeder fordern:

Von einem Tetraeder ABCD kennt man $A(2|-3|1)$, $B(1|3|1)$, $C(-2|-3|4)$, $D(3|4|5)$ ▶▶. Berechne den Winkel zwischen der angegebenen Seitenkante und der angegebenen Seitenfläche (bzw. Grundfläche)!

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| a AD, ABC | b BD, ABC | c CD, ABC |
| d AB, ACD | e CB, ACD | f DB, ACD |

Die Geraden a, b und c tragen die Seitenkanten DA, DB und DC eines Tetraeders ABCD, dessen Grundfläche in der Ebene ϵ liegt ▶▶.

Berechne die Koordinaten aller Eckpunkte!

- a** $X = (3|5|0) + t \cdot (2|3|0)$, $b: X = (3|5|0) + s \cdot (2|5|1)$,
 $c: X = (3|5|0) + r \cdot (1|2|1)$, $\epsilon: x + y + z = 0$
- b** $a: X = (8|5|-3) + t \cdot (7|4|-3)$, $b: X = (8|5|-3) + s \cdot (-3|-2|-2)$,
 $c: X = (8|5|-3) + r \cdot (4|1|0)$, $\epsilon: x - y - z = 0$

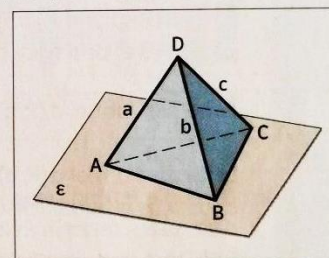


Fig. 1.41

Vektoren bei Tetraedern einsetzen – Abb. 89

Weiters werden in der sechsten Klasse die Folgen und Reihen behandelt. Sehr häufig lassen sich dazu in den Schulbüchern Beispiele aus der ebenen Geometrie finden (mit häufigem Einsatz von Polygonen), seltener aus dem \mathbb{R}^3 . Viele dieser Aufgaben im zweidimensionalen Raum könnten jedoch leicht auf den dreidimensionalen Raum ausgeweitet werden. Erklären möchte ich dies anhand des vielfach verwendeten Beispiels einer konvergenten Reihe auf Basis eines Rechtecks. Im Rahmen dieses Beispiels wird die Fläche des Rechtecks halbiert, sodass zwei

kleinere Rechtecke entstehen. Der Flächeninhalt eines dieser kleineren Rechtecke bildet das erste Glied der Reihe, während das zweite kleinere Rechteck erneut halbiert wird, sodass eine der Hälften das zweite Reihenglied bildet. Dieser Prozess wird unendlich oft fortgeführt und illustriert die Konvergenz dieser Reihe gegen den Flächeninhalt des großen Rechtecks (siehe Abb. 90). Dieses Beispiel lässt sich insofern einfach auf den \mathbb{R}^3 erweitern, als dass man statt des Rechtecks einen Quader nehmen könnte, den man bei jedem Schritt mit einem Quader von halbem Volumen des noch leeren/ freien Raumes füllt.

Unendliche Reihen können **konvergent** sein, also eine Summe haben, **uneigentlich divergent** sein, also gegen $+\infty$ oder $-\infty$ streben, oder **divergent** sein, also gegen keinerlei „Wert“ streben.

Ein ganz einfaches Beispiel für eine *konvergente* Reihe ist die Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$. Gemäß Fig. 4.9 ist offensichtlich, dass die Summe 1 ist, dass also ihre Partialsummenfolge $\langle s_n \rangle$ gegen 1 konvergiert: $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$. **Begründe!**

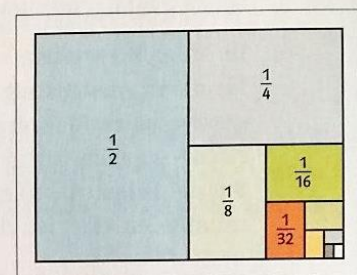


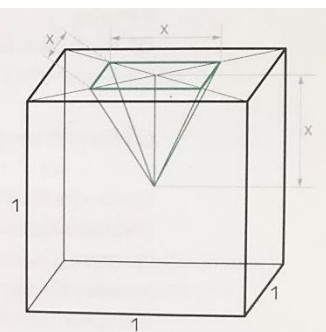
Fig. 4.9

Reihen bei Polygonen einsetzen – Abb. 90

6.7 Siebte Klasse

Ab der siebten Klasse wird die Differentialrechnung in den Mathematikunterricht aufgenommen, wodurch es unter anderem auch zahlreiche neue Möglichkeiten gibt, Funktionen auf gewisse Eigenschaften zu untersuchen und zu interpretieren. Da es für die SchülerInnen zusätzlich förderlich ist, die zu betrachtenden Funktionen zuerst basierend auf einem anschaulichen Zusammenhang aufzustellen, kommt es hin und wieder gerne vor, dass Polyeder in die Aufgabe inkludiert werden. Folgende Abbildung wurde dem Schulbuch „Mathematik verstehen 7“ entnommen und zeigt ein typisches Beispiel dafür:

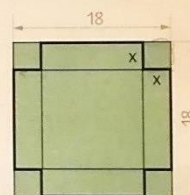
- 3.24** Aus einem Würfel der Kantenlänge 1 wird eine quadratische Pyramide wie in der Abbildung herausgeschnitten ($0 \leq x \leq 1$).
- 1) Stelle eine Formel für das Volumen $V(x)$ des Restkörpers auf!
 - 2) Skizziere den Graphen der Funktion $V: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid x \mapsto V(x)$!
 - 3) Was lässt sich über die Krümmung von V aussagen?
 - 4) Nimmt V mit wachsendem x immer schneller oder immer langsamer ab?



Funktionen ausgehend von Polyedern erstellen und untersuchen – Abb. 91

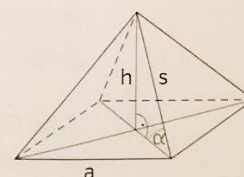
Ein relevanter Unterpunkt in der Differentialrechnung ist auch die Behandlung von Extremwertaufgaben. Diese beinhalten ebenfalls oft konvexe Polyeder, wie die zwei nachfolgenden Beispiele zeigen.

- 3.122** Aus jeder Ecke eines quadratischen Kartonstücks mit der Seitenlänge 18 cm wird ein kleines Quadrat ausgeschnitten. Die verbleibenden Seitenteile werden aufgebogen, sodass eine (oben offene) Schachtel mit quadratischer Grundfläche entsteht. Wie groß muss die Seitenlänge der auszuschneidenden Quadrate gewählt werden, damit das Volumen der Schachtel möglichst groß wird? Wie groß ist dieses Volumen?



Extremwertaufgabe zum Quader – Abb. 92

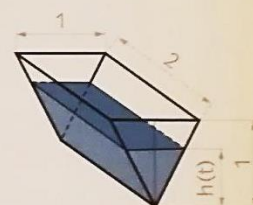
- 4.71** Unter welchem Winkel α muss eine Seitenkante einer quadratischen Pyramide mit der Länge s zur Grundfläche geneigt sein, damit das Volumen der Pyramide möglichst groß ist?
Hinweis: Drücke die Grundkantenlänge a und die Höhe h der Pyramide durch s und α aus!



Extremwertaufgabe zur Pyramide – Abb. 93

Ein weiterer Aspekt in der Differentialrechnung ist die Betrachtung und Ermittlung einer Änderungsgeschwindigkeit. In Übungsbeispielen werden oft geometrische Formen verwendet, die befüllt oder entleert werden sollen. Dementsprechend ist es naheliegend, dass auch konvexe Polyeder in derartigen Beispielen auftauchen. Abbildung 94, entnommen aus dem Schulbuch „Mathematik verstehen 7“, zeigt eines dieser Beispiele.

- 4.91** Ein Trog hat die nebenstehend abgebildete Gestalt (Maße in Meter). Es fließt Wasser mit der konstanten Zuflussgeschwindigkeit von 10 l pro Minute ein.
- 1) Stelle eine Formel auf, die jedem Zeitpunkt t die Wasserhöhe $h(t)$ im Trog zuordnet!
 - 2) Wie schnell steigt die Wasserhöhe nach 15 min?
 - 3) Wie schnell steigt die Wasserhöhe, wenn das Wasser gerade 0,5 m hoch steht?
 - 4) Wie schnell steigt das Wasser, wenn sich im Trog gerade 1000 l befinden?



Änderungsgeschwindigkeit der Befüllung eines polyedrischen Gefäßes bestimmen – Abb. 94

Auch den Kreisen, Kugeln und Kegelschnitten wird in der siebten Klasse Aufmerksamkeit geschenkt, wobei die Behandlung der Kugel für die Berechnung einer möglichen In- oder Umkugel eines Polyeders essentiell ist.

6.8 Achte Klasse

In der achten Klasse wird unter anderem die Integralrechnung eingeführt, wobei die SchülerInnen insbesondere lernen, „das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben [zu] können (insbesondere Flächeninhalte, Volumina, [...]“ (BMBWF 2018, 171). Zur Berechnung von Volumina mithilfe der Integralrechnung stellen Malle et al. unter anderem folgende Aufgabe, für die sie auch eine Lösung angeben:

Herleitung von Volumensformeln

2.57 Leite die Volumensformel $V = \frac{G \cdot h}{3}$ für eine Pyramide mit dem Grundflächeninhalt G und der Höhe h her!

Lösung:
 Es seien a und a' die nebenstehend eingezeichneten Streckenlängen. Nach dem Strahlensatz gilt: $a' : a = (h - z) : h$.
 Aus der Ähnlichkeitslehre wissen wir: Die Flächeninhalte ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Streckenlängen in diesen Figuren. Daher gilt für den Inhalt $A(z)$ der Querschnittsfläche in der Höhe z und den Inhalt G der Grundfläche:

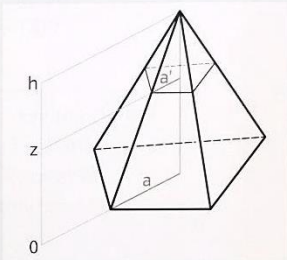
$$A(z) : G = (a')^2 : a^2 = (h - z)^2 : h^2$$

Daraus ergibt sich:

$$A(z) = \frac{G \cdot (h - z)^2}{h^2} = \frac{G}{h^2} \cdot (h^2 - 2hz + z^2)$$

Die Querschnittsflächenfunktion A ist eine Polynomfunktion und daher stetig in $[0; h]$.
 Somit gilt:

$$\begin{aligned} V(K) &= \int_0^h A(z) \, dz = \int_0^h \frac{G}{h^2} \cdot (h^2 - 2hz + z^2) \, dz = \frac{G}{h^2} \cdot \int_0^h (h^2 - 2hz + z^2) \, dz = \frac{G}{h^2} \cdot \left(h^2z - hz^2 + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^h \\ &= \frac{G}{h^2} \cdot \left(h^3 - h^3 + \frac{h^3}{3} \right) = \frac{G}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{G \cdot h}{3} \end{aligned}$$



Herleitung der Volumensformel einer Pyramide – Abb. 95

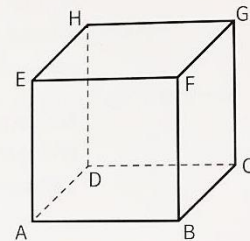
Ansonsten konzentriert sich die Integralrechnung hauptsächlich auf die Berechnung von Flächen und von Volumina verschiedenster Rotationskörper. Da diese nicht (ausschließlich) von ebenen Polygonen begrenzt werden, fallen sie thematisch nicht in den Bereich der Polyeder, mit Ausnahme der Kugel, deren Volumsberechnung für die In- oder Umkugel eines Polyeders interessant sein kann. Eher selten werden in derartigen Kugelbeispielen aber Polyeder inkludiert. Auch im zweiten großen Themenbereich der achten Klasse, nämlich im Kapitel „Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen; beurteilende Statistik“ werden kaum

konvexe Polyeder thematisiert. Relevanter werden sie jedoch wieder in der Phase der Maturavorbereitung, in der die SchülerInnen wichtige Kapitel aus früheren Klassen wiederholen und miteinander verknüpfen. Hier lassen sich erneut zahlreiche Beispiele mit konvexen Polyedern finden, wie folgende Abbildungen belegen:

10.17 Ein achsenparalleler Würfel mit der Kantenlänge 6 hat seinen Mittelpunkt im Ursprung.

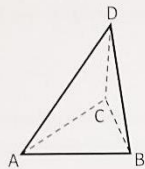
Aufgabenstellung:

Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte des Würfels sowie die Koordinaten der vier von A, B, C bzw. D ausgehenden Raumdiagonalvektoren an!



Verwendung von Vektoren beim Würfel – Abb. 96

10.43 Gegeben ist ein Tetraeder ABCD mit $\vec{DA} = \vec{a}$, $\vec{DB} = \vec{b}$, $\vec{DC} = \vec{c}$.



Aufgabenstellung:

AG 2.1 AG 3.2 a) Sei S der Schwerpunkt des Dreiecks DAB. Drücken Sie \vec{CS} durch \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} aus!

AG 3.4 Refl. b) Zeigen Sie, dass die Verbindungsstrecke der Schwerpunkte zweier Seitendreiecke parallel zu derjenigen Kante ist, die keinem der beiden Dreiecke angehört!

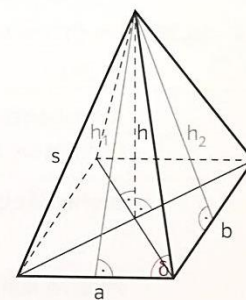
Verwendung von Vektoren beim Tetraeder – Abb. 97

10.26 In nebenstehender Abbildung ist eine gerade rechteckige Pyramide dargestellt.

Aufgabenstellung:

Drücken Sie die Seitenflächenhöhen h_1 und h_2 , die Seitenkantenlänge s , die Körperhöhe h und das Pyramidenvolumen V durch a , b und δ aus!

Hinweis: Verwenden Sie auch den pythagoräischen Lehrsatz!



Berechnungen an einer rechteckigen Pyramide – Abb. 98

7 Theoretische und praktische Einbindungsmöglichkeiten von konvexen Polyedern in den Mathematikunterricht

Aus dem vorangegangenen Kapitel lässt sich erkennen, dass viele Grundlagen zum Umgang mit konvexen Polyedern sowie auch diese Körper selbst in Beispielen behandelt werden, allerdings sind sie trotzdem eher unterrepräsentiert. Ihr volles Potential wird bei weitem nicht ausgeschöpft. Daher möchte ich in diesem Kapitel aufzeigen, welche Vorteile es haben kann, diese Körper vermehrt in den Unterricht zu inkludieren, sowie Anreize, Ideen bis hin zu konkreten Unterrichtsarbeiten liefern, die beispielhaft darlegen, auf welche Weise man konvexe Polyeder in den Mathematikunterricht einbinden kann.

Mir ist sehr wohl bewusst, dass der schulische Lehrplan teilweise sehr straffe Vorgaben hat und viele wichtige und unverzichtbare Inhalte inkludiert. Daher erhebe ich auch gar nicht den Anspruch, die Behandlung gewisser Inhalte durch die der konvexen Polyeder zu ersetzen. Vielmehr sollen die konvexen Polyeder als eine gewinnbringende Ergänzung zum vorgesehenen Unterrichtsstoff betrachtet werden sowie als besondere Körper, durch deren Behandlung die SchülerInnen verschiedenste Kompetenzen entwickeln, trainieren und stärken können.

Dabei gibt es neben der Thematisierung der konvexen Polyeder im regulären Mathematikunterricht auch die Möglichkeit, diese in den Erweiterungsbereich einzuordnen und die Chance einer fächerübergreifenden Kooperation zu nutzen. Besonders in den Abschnitten „2.9 Geschichte der platonischen Körper“ und „4. Konvexe Polyeder in der Natur“ lässt sich gut erkennen, dass es einige Möglichkeiten zur fächerübergreifenden Bearbeitung von konvexen Polyedern gibt – insbesondere mit den Fächern Geschichte, Philosophie, Biologie, Geographie und natürlich Darstellende Geometrie.

7.1 Zielsetzungen

Inwiefern die Behandlung konvexer Polyeder jedoch gewinnbringend ist, möchte ich im Folgenden in Gestalt von Zielsetzungen beleuchten, bevor ich dann anhand dieser Zielsetzungen auf konkrete theoretische und praktische Einbindungsmöglichkeiten in den Mathematikunterricht eingehen werde.

Räumliches Vorstellungsvermögen trainieren und ausbauen

Gerade in Zeiten, in denen man sich sehr bemüht, den Mathematikunterricht realitätsbezogener zu gestalten, ist es wichtig, dass auch Kompetenzen wie das räumliche Vorstellungsvermögen gefördert werden. Bereits im frühen Kleinkindalter beginnen Menschen mit steigender Koordinationsfähigkeit der Augen das räumliche Sehen und Vorstellungsvermögen zu entwickeln, indem sie sich mit raumbezogenen Aktionen beschäftigen. Das Ein- und Ausräumen von Dingen in bzw. aus Boxen, Kästen, Laden etc. hilft den Kindern, räumliche Gegebenheiten wahrzunehmen und zu verstehen. Insbesondere fördert das Stapeln von Bauklötzen zu Türmchen das vertikale und das Aneinanderreihen von Zügen das horizontale Vorstellungsvermögen (vgl. Oellinger 2017). Diese Kompetenzen werden im Laufe der Jahre noch ständig weiterentwickelt und unter anderem im Mathematikunterricht gefördert.

Gerade konvexe Polyeder eignen sich ausgezeichnet, das räumliche Vorstellungsvermögen im Unterricht zu trainieren und auszubauen, da sie in ihrer grundlegenden Form den SchülerInnen aus dem Alltag bekannt sind. Sei es frühmorgens die Milchverpackung, im Sportunterricht der Fußball oder am Abend die Würfel beim Brettspiel mit Freunden - vieles kann man (simplifiziert) in der Form eines Polyeders modellieren. Durch diesen Alltagsbezug wird den SchülerInnen ein leichter Zugang zur Thematik der Polyeder ermöglicht. Gleichzeitig ist das Niveau, auf dem man sich mit konvexen Polyedern beschäftigen kann, sehr variabel. So befassen sich die SchülerInnen nicht nur mit grundlegenden Formen, wie Quader oder Würfel, sondern können sich durch die Auseinandersetzung mit komplexeren polyedrischen Strukturen steigern, ihr räumliches Vorstellungsvermögen deutlich verbessern und dieses über die Grenzen des Mathematikunterrichts hinaus in der Welt und im Alltag einsetzen.

Sorgfältiges und durchdachtes Arbeiten fördern

Viele SchülerInnen haben große Probleme, Aufgaben wirklich durchgehend konzentriert und vor allem genau zu bearbeiten. Oftmals haben sie zumindest einen groben Plan ihrer Vorhaben, arbeiten aber nicht sorgfältig genug, wodurch sich schnell klassische ‚Schlampigkeitsfehler‘ einschleichen. Doch gerade Mathematik ist eine Wissenschaft, die hohe Präzision und gewissenhaftes Arbeiten verlangt. Die SchülerInnen dahingehend zu

orientieren, ist für LehrerInnen eine Aufgabe, die sehr viel Kontinuität und konsequente Ausübung fordert.

Auch bei der Beschäftigung mit konvexen Polyedern ist hohe Sorgfalt und Genauigkeit gefragt. Beispielsweise müssen SchülerInnen, wenn sie ein konvexes Polyeder einer bekannten Gruppe von Polyedern zuordnen wollen, sorgfältig überprüfen, welche Eigenschaften und Bedingungen der Gruppe auf dieses konkrete Polyeder zutrifft. Das mag in manchen Fällen vielleicht geradezu trivial wirken, in anderen Fällen kann eine ungenaue Betrachtung jedoch für völlige Verblüffung sorgen. Ein gutes Beispiel dafür ist das Pseudo-Rhombenkuboktaeder, das nur auf den ersten Blick alle Bedingungen für einen archimedischen Körper erfüllt, bei den globalen Eckenumgebungen jedoch aus der Reihe tanzt.

Natürlich ist nicht nur bei der Zuordnung von Polyedern Genauigkeit gefragt. Insbesondere bei der Skizzierung oder sonstiger zeichnerischer Darstellung von Polyedern ist sorgfältiges Vorgehen unerlässlich, da dies auch stark beeinflussen kann, wie schnell oder einfach man sich ausgehend von einer zweidimensional gezeichneten Skizze den entsprechenden Polyeder im dreidimensionalen Raum vorstellen kann.

Weiters wird – wie in vielen anderen Themenbereichen der Mathematik – auch hier bei Berechnungen hohe Sorgfalt gefordert. Insbesondere rechnerische Aufgaben, die Vektoren inkludieren, verlangen ein gutes Zusammenspiel von räumlicher Vorstellungskraft und durchdachtem, genauem Vorgehen.

Rechenkompetenz stärken

Bei der Betrachtung konvexer Polyeder in Kombination mit Vektoren wird aber natürlich nicht nur die Sorgfalt im Arbeiten gefördert, sondern auch die Rechenkompetenz an sich. In Arbeitsaufgaben mit Polyedern lassen sich viele unterschiedliche Rechenoperationen sowie Aspekte und Eigenschaften von Vektoren üben und trainieren. Durch ein einfaches Anpassen der Schwierigkeit einer Aufgabe (durch Hinzufügen oder Unterlassen von Zusatz-Informationen) können sich die SchülerInnen in allen drei Komplexitätsbereichen („Einsetzen von Grundkenntnissen und Grundfertigkeiten“, „Herstellen von Verbindungen“, „Einsetzen von Reflexionswissen/ Reflektieren“ (BIFIE 2013, 5f.)) üben und so alle Grundkompetenzen als auch weitere Kenntnisse und Fähigkeiten verinnerlichen und vernetzt einsetzen. Gerade

wegen der Parallelitäten von begrenzenden Flächen und der zahlreichen Symmetrieebenen eignen sich konvexe Polyeder hervorragend, um insbesondere das Verständnis dafür festigen zu können, dass ein Vektor nicht an einen einzigen Ort bzw. Punkt gebunden ist, sondern lediglich Informationen über Länge und Richtung in sich trägt, unabhängig vom Ausgangspunkt des Vektors. Diese Eigenschaft von Vektoren werde ich fortan als ‚lokale Ungebundenheit‘ bezeichnen.

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass man durch die Beschäftigung mit konvexen Polyedern unter anderem einem der drei übergeordneten Unterrichtsziele der Unterstufe, nämlich Einblick in das Gebiet der Geometrie zu erlangen, bedeutend näher rückt. Dazu zählen „mit grundlegenden geometrischen Objekten und mit Beziehungen zwischen diesen Objekten vertraut werden, zeichnerische Darstellungen von ebenen und räumlichen Gebilden anfertigen können, räumliches Vorstellungsvermögen entwickeln und Längen-, Flächen- und Volumsberechnungen durchführen können, geeignete Sachverhalte geometrisch darstellen und umgekehrt solche Darstellungen deuten können“ (BMBWF 2018, 79). Alle diese Punkte werden bei einer gezielt eingesetzten Behandlung von konvexen Polyedern gefördert – ein triftiger Grund also, diese Körper vermehrt in den Mathematikunterricht zu inkludieren.

7.2 Theoretische und praktische Einbindungsmöglichkeiten

In diesem Kapitel soll nicht jede Gelegenheit einer Einbindungsmöglichkeit von konvexen Polyedern genannt werden – die Anzahl wäre viel zu groß. Vielmehr geht es darum, anhand der gesteckten Ziele Ideen für einen möglichen Unterricht zu besprechen sowie teilweise konkrete, vollständige Unterrichtsvorbereitungen zu bieten, die die oben angesprochenen Kompetenzen stärken und somit als Beispiel und Vorlage für eine gute Inkludierungsmöglichkeit konvexer Polyeder in den Unterricht dienen sollen.

7.2.1 Räumliches Vorstellungsvermögen trainieren und ausbauen

Es gibt zahlreiche Möglichkeiten, das räumliche Vorstellungsvermögen mithilfe konvexer Polyeder zu trainieren und auszubauen. An dieser Stelle folgen einige Denkanstöße, bevor sich im nächsten Unterkapitel eine konkrete Unterrichtsausarbeitung befindet.

Eine gute Möglichkeit, sich an konvexe Polyeder heranzutasten und gleichzeitig die Kompetenz des räumlichen Vorstellungsvermögens zu stärken, ist, die SchülerInnen verschiedene Alltagsgegenstände in den Unterricht mitnehmen zu lassen. Nach der Klärung des Polyederbegriffs und der Definition von Konvexität kann man diese neuen Kenntnisse an den mitgebrachten Objekten üben, indem man einerseits überprüft, ob es sich bei den Gegenständen um Polyeder handelt bzw. ob man sie näherungsweise mit Polyedern modellieren kann, und andererseits die Gegenstände auf die Konvexität hin untersucht. Weiters könnten die SchülerInnen ihre und weitere Gegenstände näherungsweise mithilfe konvexer Polyeder skizzieren. Dadurch wird zusätzlich die Kompetenz des zeichnerischen Darstellens gefördert.

Besonders praktisch an Polyedern ist auch, dass sie sowohl in einfacherer als auch komplexerer Form existieren, wodurch man das Niveau des Unterrichts beliebig an die jeweilige Klasse anpassen kann. Sind die SchülerInnen mit dem Skizzieren simpler Polyeder unterfordert, können sie sich an der Darstellung komplexerer Polyeder steigern.

Wenn das Zeichnen schwieriger Polyeder zu viel Zeit in Anspruch nimmt, gibt es auch die Möglichkeit, Skizzen verschiedener Polyeder bereitzustellen, die nur durch ihre Ecken und Kanten dargestellt werden, und die SchülerInnen diese Skizzen so in unterschiedlichen Helligkeitsstufen schraffieren zu lassen, dass sie einen dreidimensionalen Charakter erhalten. Hilfreich bei dieser Aufgabe ist es, einen Punkt irgendwo um die Darstellung herum zu setzen, diesen als Lichtquelle zu betrachten, deren Lichtstrahlen in Richtung des skizzierten Körpers fallen, und anschließend zu bestimmen, welche Flächen heller und welche dunkler schraffiert werden müssen. Flächen, die der Lichtquelle zugewandt sind und normal zu den Lichtstrahlen stehen, müssen heller sein, während Flächen, die der Lichtquelle abgewandt sind und/oder parallel zu den Lichtstrahlen verlaufen, weniger Licht reflektieren können und folglich dunkler sind.

Da jede/r Schüler/in den Punkt bzw. die Lichtquelle an einer anderen Stelle als die MitschülerInnen setzen kann, ist er/sie auch gefordert, selbständig zu denken und zu arbeiten, da ein Abschauen falsche Resultate erzielen würde.

Verfügt der Klassenraum über einen Beamer, gibt es auch die Möglichkeit, den SchülerInnen (animierte) 3D-Modelle konvexer Polyeder zu zeigen. Für platonische und archimedische Körper gibt es über folgenden Link kurze Animationen, die die Bildung eines Polyeders ausgehend von seinem Netz zeigen (Stand: 05.08.2018): <http://www.3d-meier.de/Videos/Polyeder/Seite0.html>.

Animierte 3D-Modelle der platonischen Körper sind über folgenden Link zu finden (Stand: 05.08.2018): <http://www.3quarks.com/de/PlatonischeKoerper/index.html>.

Da gemäß der Lernpyramide, die im NTL Institute in Bethel (Maine) entwickelt wurde, ein bloßes Betrachten von Gegebenheiten nicht so viel Wissensgewinn erzielt, wie ein aktives Mitarbeiten (vgl. Braehmer 2015), ist bei der Vorführung dieser 3D-Modelle sehr zu empfehlen, den SchülerInnen eine damit verknüpfte Aufgabe zu nennen. Beispielsweise könnten die SchülerInnen die Flächenanzahl der jeweiligen Polyeder schätzen und ihre Ergebnisse zunächst untereinander und anschließend mit der Lösung vergleichen.

Besitzt die Schule zusätzlich Zugang zum Programm GeoGebra oder ähnlichen Mathematik-Programmen, können die 3D-Modelle auch selbst erstellt werden. Dabei ist es selbstverständlich sinnvoller, diese nicht nur in fertigem Zustand vorzuführen, sondern sie in Zusammenarbeit mit den SchülerInnen anzufertigen oder – sofern genügend Computerarbeitsplätze vorhanden sind – die Modellerstellung sogar ganz an die SchülerInnen abzugeben.

Eine weitere Möglichkeit das räumliche Vorstellungsvermögen zu erweitern ist, in zeitlich flexibleren Phasen im Schuljahr, zum Beispiel am Schulbeginn bzw. -ende, die SchülerInnen platonische Körper falten zu lassen. Dies trainiert auch zusätzlich die Genauigkeit beim Arbeiten, da die SchülerInnen sehr sorgfältig falten müssen, damit sich alle Flächen gut in- und aneinander fügen. Empfehlungen für Bastelanleitungen zu den platonischen Körpern befinden sich im Anhang (siehe Kapitel 9.1). Alternativ könnten die SchülerInnen verschiedene Polyeder auch mit einem speziellen (Magnet-) Baukasten erstellen, sofern ein derartiger vorhanden ist bzw. die finanziellen Mittel eine Beschaffung erlauben.

Eine kostengünstigere, jedoch auch weniger stabile Möglichkeit, konvexe Polyeder zu bauen, wäre Zahnstocher als Kanten und Kugeln aus Knetmasse als Ecken zu verwenden, allerdings beschränkt sich diese Möglichkeit aufgrund der vorgegebenen Zahnstocherlänge auf Polyeder mit regelmäßigen Polygonen.

7.2.1.1 Stationenbetrieb „Archimedische und dual-archimedische Körper“

Um nicht nur theoretische Ideen und Anreize zu liefern, sondern auch eine tatsächliche praktische Einsatzmöglichkeit aufzeigen zu können, möchte ich an dieser Stelle eine konkrete Unterrichtsplanung präsentieren, in der gleich mehrere Kompetenzen gefördert werden: allen voran das räumliche Vorstellungsvermögen und die Fähigkeit, dreidimensionale Objekte mit

der dazugehörigen zeichnerischen Darstellung verknüpfen zu können, aber auch sorgfältiges Arbeiten sowie das Erkennen sprachlicher Muster, was klar in den Bildungsbereich „Sprache und Kommunikation“ fällt.

Voraussetzungen:

Grundsätzlich kann schon in einer niedrigen Schulstufe mit dieser konkreten Unterrichtseinheit begonnen werden, da der Stationenbetrieb völlig losgelöst von rechenoperativen Kenntnissen ist. Es gibt aber dennoch Themen(gebiete), die zuvor besprochen werden sollen. Die SchülerInnen sollten Kenntnisse über die Form eines Deltoids, eines Pentagons sowie eines Rhombus bzw. einer Raute besitzen. Auch der Begriff und die Bedeutung der „Kongruenz“ sollten bekannt sein. Da dies in der zweiten Klasse behandelt wird, ist es ratsam, den Stationenbetrieb zeitlich nicht eher anzuordnen.

Weiters sollten die SchülerInnen bereits einen Einführungsunterricht zu konvexen Polyedern erhalten haben, der die platonischen Körper, die Definition archimedischer und dual-archimedischer Körper sowie die Entstehung mancher archimedischer Polyeder durch die Durchschnittsbildung bzw. Abstumpfung platonischer Körper beinhaltet.

Ablauf und Organisation:

In dieser Unterrichtsplanung gibt es drei Stationen, an denen sich jeweils das dazugehörige Aufgabenblatt sowie drei verschiedene, nummerierte Polyeder befinden. (Alle Materialien, insbesondere das Aufgabenblatt und die Netze für die Polyeder befinden sich im Anhang „9.2 Anhang zu Stationenbetrieb ‚Archimedische und dual-archimedische Körper‘“). Bei der Erstellung der Polyeder steht es den Lehrenden frei, ob sie selbst in ihrer Vorbereitungszeit die Netze ausschneiden und zu dreidimensionalen Polyedern formen oder ob sie das bei günstiger Gelegenheit gemeinsam mit den SchülerInnen machen, was einerseits zeitintensiv, andererseits aber auch lehrreich und vor allem für das räumliche Vorstellungsvermögen förderlich sein kann.

Die SchülerInnen bekommen jeweils ein Arbeitsblatt und eine Übersetzungshilfe. Anschließend teilen sie sich in drei möglichst gleich große Gruppen, wobei es sich bei einer

SchülerInnenanzahl von insgesamt mehr als 18 Leuten empfiehlt, ein zweites Set von Polyedern zu erstellen und somit zwei Stationenbetriebe parallel ablaufen zu lassen.

Jede Gruppe setzt sich nun mit ihren erhaltenen Unterlagen an eine Station, wo sie noch einmal in drei Untergruppen geteilt wird, die dann die Bezeichnung „A“, „B“ und „C“ erhalten. Die SchülerInnen bleiben für den ganzen Stationenbetrieb in diesen Untergruppen – es ist also wichtig, dass sie sich ihre jeweilige Untergruppenbezeichnung merken. Diese kommt bei der Vergabe der Aufgaben zum Einsatz: An jeder Station gibt es dieselben drei Aufgaben. Welche Aufgabe aber von welcher Untergruppe ausgeführt wird, ist von Station zu Station unterschiedlich. So wird zum Beispiel Aufgabe 1 bei Station I von der Untergruppe A bearbeitet, bei Station II von Untergruppe C und bei Station III von Untergruppe B. Geregelt wird diese Vergabe durch die Anmerkungen am Aufgabenblatt an der jeweiligen Station.

Am Ende des Stationenbetriebs hat jede/r Schüler/in jede Aufgabenstellung drei Mal selbst und sechs Mal in beobachtender Position bearbeitet, somit werden die entsprechenden Kompetenzen, die für die Bearbeitung der Aufgaben nötig sind, stark gefördert. Weiters wird gefordert, dass jede/r Schüler/in das Arbeitsblatt ausfüllt, wodurch die gewonnenen Erkenntnisse zusätzlich gesichert werden. Selbstverständlich müssen die Ergebnisse entweder mit dem Lösungsblatt oder in einem abschließenden Vergleichsgespräch mit der Lehrperson auf ihre Richtigkeit überprüft werden.

Erläuterung der Aufgaben:

Kommen wir nun zu den Aufgaben selbst. Aufgabe 1 lautet: „Überprüft, welche Bedingungen (R1, R2 und/oder R3) das jeweilige Polyeder erfüllt und ob es somit ein archimedischer oder ein dual-archimedischer Körper ist.“

Hintergrund dieser Aufgabe ist, dass die SchülerInnen einerseits die Definition eines archimedischen bzw. dual-archimedischen Körpers wiederholen und festigen, und andererseits das räumliche Vorstellungsvermögen trainieren, indem sie mithilfe eines dreidimensionalen Modells das Polyeder ansehen, angreifen und durch die Aufgabenstellung auch auf bestimmte Eigenschaften hin untersuchen können. Gemäß der Lernpyramide behalten die SchülerInnen so ca. 75% des behandelten Stoffes im Gedächtnis (vgl. Braehmer 2015).

Aufgabe 2 lässt sich in zwei unterschiedliche Teile gliedern. Der erste Teil („Findet für das Polyeder die dazugehörige Abbildung auf dem Arbeitsblatt.“) zielt darauf ab, die Verknüpfung zwischen einem dreidimensionalen Objekt und seiner skizzierten Darstellung herzustellen, sowie umgekehrt die Fähigkeit zu fördern, zeichnerische Darstellungen mit Hilfe der räumlichen Vorstellungskraft in rein gedankliche 3D-Modelle umzuwandeln. Auch der zweite Teil („Anschließend überprüft, ob es zueinander kongruente Flächen gibt und wenn ja, wie viele solch kongruenter Flächen es gibt.“) trainiert das räumliche Denken, indem die SchülerInnen haptisch am konkreten Modell arbeiten.

Zusätzlich ist die Lösung des zweiten Teils für die Bearbeitung von Aufgabe 3 wichtig, die folgendermaßen lautet: „Findet für das Polyeder den dazugehörigen Namen, indem ihr einerseits die Form(en) der begrenzenden Flächen und andererseits die in Aufgabe 2 ermittelte Anzahl an Flächen betrachtet. Die Übersetzungshilfe Altgriechisch-Deutsch hilft euch bei der Suche des Namens!“ Bei der Beschäftigung mit Aufgabe 3 erkennen die SchülerInnen das System der Benennung vieler Polyeder. Namen wie „Deltoidikositetraeder“ oder „Pentagonhexakontaeder“ können zunächst sehr einschüchternd wirken. Durch das Erkennen der dahinterliegenden Struktur wird diese respektgeladene Scheu relativiert.

Bei dieser Aufgabe kann es sein, dass die SchülerInnen ein paar Denkanstöße benötigen. Sie bekommen schon die Hinweise, sich einerseits auf die Form der begrenzenden Flächen und andererseits auf deren Anzahl zu konzentrieren. Betrachten wir das Polyeder 0 vom vorgezeigten Beispiel am Arbeitsblatt (siehe Kapitel 9.2, Seite 106), so erkennen wir, dass es sich bei den begrenzenden Flächen um vierundzwanzig zueinander kongruente Deltoiden handelt. Mit dem Verweis auf die Übersetzungstabelle sollten die SchülerInnen erkennen, dass das altgriechische Wort für zwanzig „eikosa“ (bzw. in abgewandelter Form „ikosi“) und für vier „tetra“ ist. Eine Kombination dieser beiden Zahlwörter, hier zusätzlich in Verbindung mit der Flächenform des Deltoids, ergibt den Polyedernamen „Deltoid-ikosi-tetra-eder“, was übersetzt so viel bedeutet wie „Deltoidvierundzwanzigflächner“.

Nicht alle Namen der vorgegebenen Polyeder lassen sich auf diese Weise herleiten. Bei manchen Polyedern wird auch der Gedanke, dass sie durch die Abstumpfung der Ecken eines anderen Polyeders gebildet werden, in den Namen inkludiert. Dabei wird an den Namen des ursprünglichen Polyeders das Wort „Stumpf“ angehängt. Die SchülerInnen erhalten diese Information durch den an Aufgabe 3 angehängten Tipp: „Kommt ihr mit der Information über die Anzahl der Flächen nicht weiter, so betrachtet lieber die Form des Polyeders und erinnert euch an Folgendes: Manche Polyeder werden gebildet, indem die Ecken von platonischen

Körpern abgeschnitten bzw. „abgestumpft“ werden.“ Wie die Formulierung dieses Tipps vermuten lässt, ist es sinnvoll vor der Bearbeitung des Stationenbetriebs die Entstehungsmöglichkeiten der archimedischen Körper, insbesondere die Abstumpfung durch die Durchschnittsbildung zweier platonischer Körper (siehe Kapitel 3.2.2.1), zu besprechen.

Dauer:

Für den Beginn der Unterrichtseinheit, der eine Erklärung des Stationenbetriebs und die Gruppeneinteilungen beinhaltet, werden in etwa 10-15 Minuten eingerechnet. Die Bearbeitung der Stationen, die den Großteil der Zeit in Anspruch nimmt, dürfte (je nach Konzentrationsfähigkeit der SchülerInnen) ungefähr 50-60 Minuten dauern. Der abschließende Vergleich mit dem Lösungsblatt bzw. mit der Lehrperson sowie die Beantwortung möglicher finaler Fragen benötigen in etwa 15 Minuten der Unterrichtszeit.

Rechnet man zusätzlich noch wenige Minuten Puffer für eine mögliche Zeitverzögerung ein, füllt man mit dem Stationenbetrieb ohne Bedenken eine Doppelstunde à 100 Minuten. Ist dieser zeitliche Rahmen nicht gegeben, besteht auch die Möglichkeit, nur zwei Polyeder pro Station aufzulegen und die benötigte Zeit auf eine Einzelstunde à 50 Minuten zu kürzen. Andersherum ist der Unterricht auch zeitlich erweiterbar auf drei Einheiten à 150 Minuten, indem man die SchülerInnen zuerst noch die benötigten Polyeder bauen lässt, was zusätzlich ihr räumliches Vorstellungsvermögen fördert.

Handlungsbereiche:

In dieser Unterrichtsplanung ist hauptsächlich der Handlungsbereich „Interpretieren“ vertreten (siehe BIFIE 2013, 3), der unter anderem dann zum Einsatz kommt, wenn die SchülerInnen ausgehend vom gegebenen dreidimensionalen Polyeder Informationen (wie die Erfüllung oder Nichterfüllung der Regularitätsbedingungen) ermitteln. Auch bei der Suche nach dem entsprechenden Polyedernamen und der Bestimmung der dazugehörigen Abbildung, ist dieser Handlungsbereich vonnöten. Da es sich bei diesem Stationenbetrieb allerdings auch um eine Gruppenarbeit handelt, kann es durchaus vorkommen, dass sich die SchülerInnen uneinig sind und für die Ermittlung der korrekten Lösung ihre Ideen durch Vortragen von Argumenten verteidigen müssen. Dies fällt wiederum klar in den Handlungsbereich „Argumentieren, Begründen“.

Empfehlung:

Da Aufgabe 3 darin besteht, zu einem vorgegebenen Polyeder den dazugehörigen Namen mittels altgriechischer Zahlen zu ermitteln, empfiehlt es sich, diesen Stationenbetrieb im Zuge eines fächerübergreifenden Unterrichts mit dem Unterrichtsfach Altgriechisch abzuhalten, sofern dieses an der Schule angeboten wird. Dementsprechend kann der Stationenbetrieb erst stattfinden, sobald im Altgriechisch-Unterricht die Zahlwörter besprochen wurden, was in etwa gegen Ende der sechsten Klasse der Fall ist.

7.2.2 Sorgfältiges und durchdachtes Arbeiten fördern

Gerade bei der Beschäftigung mit bzw. Anwendung von Mathematik ist ein genaues, sorgfältiges, strukturiertes, durchdachtes Arbeiten gefordert, um zuverlässige Ergebnisse erzielen zu können. Eine derartige Arbeitsweise muss daher auch bewusst von den SchülerInnen eingefordert werden, um sie dahingehend zu trainieren. Ein sorgfältiges und durchdachtes Arbeiten kann theoretisch in jeder Unterrichtsphase gefördert werden, zumeist liegt der Fokus aber auf das Arbeiten selbst und weniger auf der Arbeitsweise. Es gibt jedoch auch Aufgaben, die verstärkt ein genaues, strukturiertes und durchdachtes Vorgehen verlangen, wodurch auch diese Arbeitsweise stark gefördert wird.

Einige derartige Aufgaben in Zusammenhang mit konvexen Polyedern wären zum Beispiel, eine exakte zeichnerische Darstellung diverser Körper zu erstellen oder dreidimensionale Modelle aus Papier allein durch Faltvorgänge zu bilden. Beide Aufgaben, die in den Handlungsbereich „Darstellen und Modellbilden“ fallen und somit auch das räumliche Vorstellungsvermögen trainieren, erfordern ein sorgfältiges Vorgehen, da eine ungenaue Ausführung keine zufriedenstellenden oder vielleicht sogar überhaupt keine Ergebnisse liefert.

Auch Beweise verlangen ein erhöhtes Maß an sorgfältiger, strukturierter und durchdachter Arbeitsweise. Insbesondere der Beweis, dass es nur fünf platonische Körper geben kann, eignet sich dafür, weswegen im Folgenden eine konkrete Unterrichtsausarbeitung dazu vorgestellt wird.

7.2.2.1 Beweis über die Anzahl der platonischen Körper

Voraussetzungen:

Für diesen Beweis über die Anzahl der platonischen Körper sind die Grundlagen zu regulären, konvexen Polyedern Voraussetzung. Insbesondere die Begriffe bzw. Bedeutungen von „Regularität“, „Konvexität“, „Kongruenz“ und „Winkeldefekt“ sind für die Lösung der Aufgabe entscheidend und sollten daher schon zuvor behandelt worden sein. Auch der Umgang mit Winkeln und das Rechnen mit dreistelligen Zahlen sollten keine Schwierigkeiten darstellen.

Sind all diese Voraussetzungen erfüllt, kann theoretisch der Beweis behandelt werden. Allerdings sollte die Lehrperson zuvor abschätzen, ob der Beweis im Hinblick auf das Schwierigkeitsniveau für die SchülerInnen geeignet ist. Ist die Lehrperson sich diesbezüglich unsicher, kann sie sich folgende Fragen stellen: *Haben die SchülerInnen schon Beweise durchgeführt? Wurde mit ihnen besprochen, warum man überhaupt Beweise erbringen muss? Wie viele Beweise haben sie schon mithilfe der Lehrperson durchgeführt? Wie viele selbst? Und in welcher Länge und Schwierigkeit? Haben die SchülerInnen sich ausreichend mit den Begriffen „Konvexität“, „Kongruenz“, „Regularität“ und „Winkeldefekt“ beschäftigt, um deren Bedeutungen verinnerlicht zu haben?*

Denkt die Lehrperson nach diesen Überlegungen, dass die SchülerInnen den Beweis bzw. die Fragestellung, ob es noch weitere platonische Körper gibt, mit zusätzlichen Hilfestellungen erbringen bzw. beantworten können, ist diese Unterrichtsplanung für den Unterricht geeignet.

Ablauf:

Zunächst wiederholt die Lehrperson gemeinsam mit den SchülerInnen wichtige Begrifflichkeiten wie „Konvexität“, „Kongruenz“, „Regularität“ und „Winkeldefekt“. Haben die SchülerInnen die Bedeutung dieser Begriffe nicht verstanden, wird es für sie schwierig, den Beweis zu erbringen. Daher sei ausdrücklich empfohlen, sich die Zeit für eine Wiederholung zu nehmen. Sobald alle Voraussetzungen geklärt und wieder ins Gedächtnis gerufen wurden, erhalten die SchülerInnen die Unterrichtsmaterialien von Kapitel „9.3 Anhang zu ‚Beweis über die Anzahl der platonischen Körper‘“, die aus einem Set von regelmäßigen Polygonen und einem Arbeitsblatt bestehen.

Anschließend sollen die SchülerInnen anhand der Leitfragen auf dem Arbeitsblatt alleine und/oder in (Klein-) Gruppen feststellen, dass es nur fünf platonische Körper gibt. Einige für die Erarbeitung passende Methoden, entnommen aus dem Buch *Mathematik Methodik* (2011) von Barzel, Büchter und Leuders, werden nachfolgend vorgestellt. Die Lehrperson kann insbesondere unter Betrachtung des klassenabhängigen Lern- und Arbeitsverhaltens entscheiden, welche Methode am besten geeignet ist.

Knobelteam (vgl. Barzel et al., 2011, 124-127):

Bei der Methode *Knobelteam* bilden die SchülerInnen Kleingruppen zu je vier Personen und behandeln innerhalb dieser Gruppe die vorgegebene Fragestellung mithilfe der Leitfragen. Vor Beginn der Erarbeitung erfährt jede/r Schüler/in eine Bedingung, die jeder platonische Körper erfüllen muss. Ein/e Schüler/in bekommt die Information, dass der Körper konvex sein muss, der/die zweite Schüler/in erhält die Bedingung, dass alle Flächen regelmäßige Vielecke sein müssen, der/die dritte Schüler/in bekommt die Einschränkung, dass alle Flächen zueinander kongruent sein müssen und der/die vierte Schüler/in erhält die Information, dass alle Ecken kongruent zueinander sein müssen. (Bei Anwendung dieser Methode müssen die Informationen zu den Bedingungen für platonische Körper zuerst vom Arbeitsblatt abgetrennt werden!)

Diese vier Informationen sind essentiell, um zu erkennen, dass es nur fünf platonische Körper gibt, und um den Beweis dafür liefern zu können. Wenn jede/r Schüler/in einer Vierergruppe für eine Information verantwortlich ist, ist es schwieriger, eine Information zu vergessen oder außer Acht zu lassen. Gemeinsam können sie sich über die Leitfragen austauschen, Theorien aufstellen und mögliche Fehler in diesen Theorien durch ihre jeweiligen Informationen korrigieren. Anschließend werden die Lösungsvorschläge im Plenum präsentiert und besprochen. Der Beweis wird dann noch einmal sorgfältig unter Einbindung dieser Lösungsvorschläge und Ideen gemeinsam erarbeitet und verschriftlicht.

Ich-Du-Wir-Methode bzw. *Think-Pair-Share-Methode* (vgl. Barzel et al., 2011, 118-123):

Diese Methode besteht aus drei wesentlichen Phasen: In der ersten Phase, der Ich-Phase, nimmt sich jede/r Schüler/in einige Minuten Zeit, um selbst über die Fragestellung und die Leitfragen nachzudenken, sich in die Thematik zu vertiefen und erste mögliche

Lösungsvorschläge zu erarbeiten. In der zweiten Phase, auch Du-Phase genannt, tauscht jede/r Schüler/in seine Gedanken und Ideen mit einem/einer Lernpartner/in aus. Dabei kann man schon konkretere Lösungsansätze verfolgen und Beweisstrategien entwickeln sowie mögliche Probleme oder Fragen für die dritte Phase notieren. Denn in dieser dritten und letzten Phase, auch unter der Bezeichnung Wir-Phase bekannt, präsentiert das Lernduo aus Phase Zwei ihre Überlegungen einer größeren Gruppe oder gar der ganzen Klasse. Die Vorschläge der einzelnen Zweiergruppen werden dann verglichen und eventuell kombiniert, um am Ende – je nach Bedarf mit Unterstützung der Lehrperson – einen vollständigen, richtigen Beweis zu erstellen und zu verschriftlichen.

Gruppenpuzzle (vgl. Barzel et al., 2011, 96-103):

Bei dieser Methode starten die SchülerInnen ihre Überlegungen zur Fragestellung und den dazugehörigen Leitfragen in Kleingruppen, wo sie ihre Ideen aber auch Verständnisschwierigkeiten mitteilen und so kooperativ und sich gegenseitig unterstützend eine Beweisstrategie oder zumindest Ansätze davon entwickeln. Die Anzahl der Kleingruppen und die Anzahl der Gruppenmitglieder sollten dabei möglichst gleich groß sein. Innerhalb einer Kleingruppe sollte jedes Gruppenmitglied zum „Experten“ ihrer gemeinsamen Strategien und Ideen werden, um diese im nächsten Schritt selbständig und kompetent wiedergeben zu können. Im nächsten Schritt geht nämlich jede/r Experte/Expertin jeder Kleingruppe zu einer anderen Kleingruppe hinzu. Dadurch entstehen neue Kleingruppen, in denen jeweils ein/e Experte/Expertin der früheren Kleingruppen vertreten und somit eine Fülle an durchdachten Ideen vorhanden ist. In dieser Konstellation tauschen sich die SchülerInnen erneut aus, erkennen mögliche Ungereimtheiten oder Unvollständigkeiten in ihren Theorien und können so in gemeinsamer Diskussion und Erarbeitung einen ausgereifteren und vielleicht schon vollkommen richtigen Beweis entwickeln. Abschließend werden die Ergebnisse in der gesamten Klasse zusammengetragen, verglichen, berichtigt und am Ende verschriftlicht.

Kombination aus Ich-Du-Wir-Methode und Gruppenpuzzle (geeignet für Doppelstunden):

Selbstverständlich kann man die von Barzel, Büchter und Leuders vorgeschlagenen Methoden auch abwandeln und/oder kombinieren. Vereint man zum Beispiel die Ich-Du-Wir-Methode

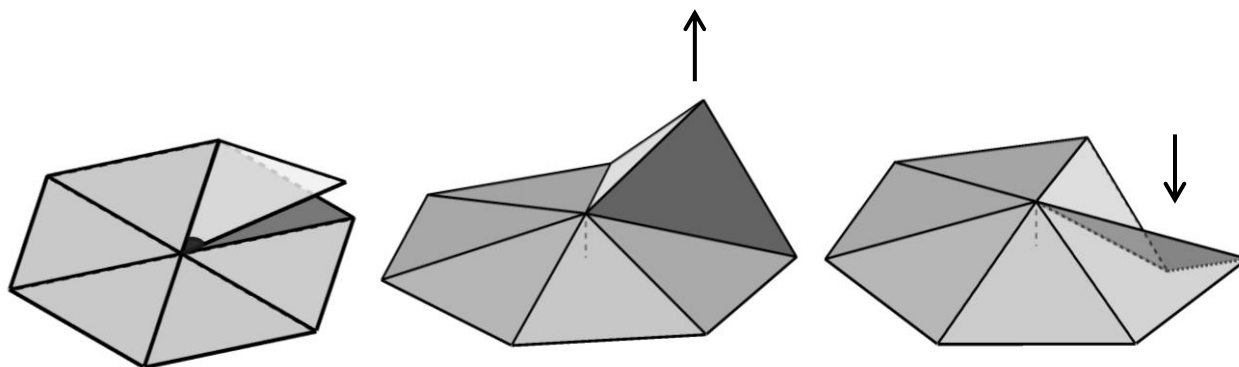
mit dem Gruppenpuzzle ergibt sich eine neue Methode, die vermutlich etwas zeitintensiver ist und sich deswegen eher für Doppelstunden eignet. Sie gibt aber auch jedem/jeder Schüler/in die Möglichkeit, sich ohne Zeitdruck auf ein sorgfältiges, genaues Arbeiten zu konzentrieren und sich selbst zu entfalten, indem er/sie zunächst alleine für sich überlegt und sich in die Thematik einarbeitet, anschließend mit dem/der Lernpartner/in konkretere Ideen entwickelt, in der dritten Phase in Kleingruppen zum/zur Experten/Expertin wird, um dann im vierten Schritt die Idee in den neuen Kleingruppen zu präsentieren und voll auszufeilen. Auch bei dieser Methode ist es nötig, dass am Ende der vollständige Beweis gemeinsam mit der Lehrperson besprochen und anschließend verschriftlicht wird.

Erläuterung des Arbeitsmaterials (siehe Kapitel „9.3 Anhang zu ‚Beweis über die Anzahl der platonischen Körper‘“):

Im Anhang befinden sich sieben regelmäßige Dreiecke, fünf Quadrate, vier regelmäßige Fünf- und drei regelmäßige Sechsecke, alle mit derselben Kantenlänge. Je nach Methode bekommt jede/r Schüler/in oder jede Kleingruppe ein Set mit diesen Figuren, das ihnen hilft, diverse Überlegungen konkret auszuprobieren. Um die SchülerInnen in die richtige Richtung zu weisen, gibt es auch ein Arbeitsblatt mit konkreten Leitfragen, deren Beantwortung und daraus resultierende Erkenntnisse auch für den Beweis unerlässlich sind.

Die ersten Leitfragen beziehen sich auf die Regelmäßigkeit von Flächen und die einhergehende Auswirkung auf deren Innenwinkel. Die SchülerInnen sollten erkennen, dass alle Innenwinkel eines regelmäßigen Vielecks gleich groß sind. Das Dreieck hat insbesondere einen Innenwinkel von 60° , das Quadrat einen von 90° , das Fünfeck einen von 108° und das Sechseck einen von 120° .

Bevor aber dieser entdeckte Hinweis für die Überlegungen interessant wird, benötigen die SchülerInnen noch andere entscheidende Informationen über den Winkeldefekt einer Ecke eines platonischen Körpers. Die zweite Gruppe an Leitfragen beschäftigt sich genau mit diesem Thema. Die SchülerInnen sollen erkennen, dass der Winkeldefekt bei einem platonischen Körper größer als 0° sein muss. Wieso das der Fall ist, sei schnell erklärt: Angenommen der Winkeldefekt ist nicht größer 0° , somit ist er entweder gleich oder kleiner als 0° . Das bedeutet, dass die Polygone, die hier zusammenstoßen, nur dann eine räumliche Ecke bilden können, wenn manche Polygone nach innen oder außen „verdrängt“ werden. Folgende Abbildung veranschaulicht diesen Sachverhalt für einen Winkeldefekt von -60° :



Dadurch ist aber die für platonische Körper notwendige Bedingung der Konvexität nicht mehr gegeben. Der Winkeldefekt muss also größer als 0° sein.

Schließlich fehlt den SchülerInnen noch der Hinweis, dass sie nicht immer den ganzen Körper eines Polyeders betrachten müssen, um Überlegungen anstellen zu können, sondern dass es ausreicht, sich auf eine Ecke zu konzentrieren. Verpackt ist dieser Hinweis in der Leitfrage, ob und warum folgende Aussage zutreffend ist oder nicht: „Alle Überlegungen, die man für eine Ecke eines platonischen Körpers anstellt, gelten auch für alle übrigen Ecken dieses Körpers.“ Aufgrund der Bedingung, dass alle Ecken zueinander kongruent sein müssen, ist diese Aussage richtig. Die SchülerInnen hatten diese Information also schon von Beginn an und je nach mathematischer Erfahrung der Klasse könnte man diese Leitfrage vom Arbeitsblatt streichen. Für jüngere SchülerInnen ist sie jedoch ein wertvoller Tipp, um die Eckenkongruenz neu zu betrachten, diese zum Vorteil zu nutzen und so eine Beweisstrategie zu entwickeln.

Die bisherigen Leitfragen könnten für einige SchülerInnen schon Inspiration und Hilfe genug sein. SchülerInnen, die in mathematischen Belangen öfter Schwierigkeiten haben, sind aber bestimmt für die letzte Leitfrage dankbar, für deren Beantwortung sie noch einmal alle entscheidenden Informationen kombinieren müssen und so kurz vor der Beweisstrategie stehen. Finden die SchülerInnen dennoch keine Möglichkeit, systematisch alle platonischen Körper zu finden, kann die Lehrperson auch noch folgenden Tipp an der Tafel notieren: „Welche Ecken können entstehen, wenn genau drei/vier/fünf/sechs Polygone zusammenstoßen?“ Diese Frage sollte aber nur im Notfall gestellt werden, da sie den SchülerInnen viel Überlegungsarbeit wegnimmt und diese die Lösung somit nicht mehr eigenhändig finden können. Doch gerade dies wäre für einen optimalen Lernerfolg vonnöten.

Dauer:

Die Dauer dieser Unterrichtsplanung variiert je nach ausgewählter Methode. Die Einleitung, die eine Wiederholung der Voraussetzungen und eine knappe Erklärung der Methode beinhaltet, dürfte in etwa 10-15 Minuten dauern. Die anschließende Bearbeitung der Fragestellung benötigt bei der Methode „Knobelteam“ ungefähr 30 Minuten, bei der „Ich-Du-Wir“-Methode 45-50 Minuten und bei der Methode „Gruppenpuzzle“ 40-45 Minuten. Die letzte vorgestellte Methode, die eine Kombination aus der „Ich-Du-Wir“-Methode und dem „Gruppenpuzzle“ ist, nimmt mit ca. 55-60 Minuten die meiste Zeit in Anspruch, wobei die Zeit selbstverständlich auch gut genutzt ist, da sich die SchülerInnen ohne Druck eingehender mit dem Thema beschäftigen und es somit besser verinnerlichen können. Die abschließende Besprechung und Verschriftlichung des Beweises mit der Lehrperson hängt sehr stark von den Ergebnissen der SchülerInnen ab. Haben diese sorgfältig und durchdacht gearbeitet, dürfte dieser letzte Schritt nicht länger als 10 Minuten dauern.

Für eine einzige Unterrichtseinheit ist nach diesen Überlegungen die Methode „Knobelteam“ zu empfehlen. Steht allerdings mehr Zeit zur Verfügung, wären wohl die anderen Methoden besser geeignet, da die SchülerInnen so ohne zeitlichen Druck arbeiten können.

Handlungsbereiche:

Das Besondere an diesem Beweis ist unter anderem, dass die SchülerInnen in allen vier Handlungsbereichen tätig sind. Der Handlungsbereich „Darstellen, Modellbilden“ kommt vor allem beim Herumprobieren mit den regelmäßigen Polygonen zum Einsatz, wo sie unterschiedlichste Ecken modellieren, um aus diesen Erkenntnisse ziehen und konkrete Sachverhalte herauslesen zu können. Letztere Tätigkeiten fallen dabei schon in den Handlungsbereich „Interpretieren“. Der nächste Handlungsbereich „Rechnen, Operieren“ ist zwar nur schwach vertreten, aber immerhin vorhanden. Beim Berechnen der unterschiedlichen Winkeldefekte erkennen die SchülerInnen erst, welche Polygone in welcher Anzahl zusammenstoßen dürfen, um die Ecke eines konvexen Polyeders bilden zu können. Schließlich bleibt noch der Handlungsbereich „Argumentieren, Begründen“ übrig, den die Lernenden beim Vorstellen ihrer Ideen und Strategien vor ihren KollegInnen sowie beim Beweisen selbst einsetzen.

Empfehlung:

Endet die Unterrichtseinheit aufgrund des Zeitmangels ohne eine Verschriftlichung des Beweises, so kann dies den SchülerInnen als Hausaufgabe gegeben werden. Hierbei müssen sie noch einmal alles Schritt für Schritt durchgehen und können in ihrer jeweiligen Lerngeschwindigkeit die neuen Erkenntnisse einprägen. Eine Überprüfung der verschriftlichten Beweise in der nächsten Unterrichtseinheit ist dennoch notwendig.

7.2.3 Rechenkompetenz stärken

Barzel, Büchter und Leuders stellen in ihrem Buch „Mathematik Methodik“ ein Projekt vor, bei dem sowohl die Rechenkompetenz gefördert wird, als auch konvexe Polyeder eine wichtige Rolle spielen (vgl. Barzel et al., 2011, 175). Dabei erhielten SchülerInnen die Aufgabe, funktionsfähige Heißluftballons in der Gestalt von konvexen Polyedern herzustellen. Die Bearbeitung des Auftrags erfolgte dabei in einer fächerübergreifenden Kooperation der Unterrichtsfächer Mathematik, Kunst und Physik. Die SchülerInnen einigten sich nach einer kurzen Recherche darauf, die Heißluftballons in Form eines Dodekaeders und eines Ikosaederstumpfs („Fußballs“) zu gestalten. Damit diese aber auch tatsächlich fliegen konnten, war zunächst Einiges an Recherche und vor allem Rechenarbeit nötig. Eine Bedingung für die Flugfähigkeit war zum Beispiel, dass die Auftriebskraft größer sein muss als die Gewichtskraft der Ballonhülle. Um dies bestimmen zu können, benötigte man wiederum das Volumen und die Oberfläche der genannten Polyeder. Hierfür waren offensichtlich einige Rechenschritte notwendig und somit konnte die Rechenkompetenz alltagsbezogen angewandt und gefördert werden.

Konvexe Polyeder eignen sich aber auch hervorragend dafür, die Rechenkompetenz im Themengebiet der Vektoren zu stärken. Aufgrund der Vielzahl an Symmetrieebenen und Parallelitäten zwischen Flächen bzw. Kanten, ergibt sich insbesondere die Chance, das Verständnis für die lokale Ungebundenheit von Vektoren trainieren zu können – eine Eigenschaft, die den SchülerInnen oftmals Probleme bereitet, weswegen ihr dementsprechend besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden muss.

In den folgenden zwei Unterkapiteln befinden sich konkrete Unterrichtsaufgaben, die gezielt beinahe alle Kenntnisse und Fähigkeiten einfordern, die zum Themenbereich der Vektoren im Lehrplan der fünften und sechsten Klasse stehen.

7.2.3.1 Rechnen und Operieren mit Vektoren in zueinander dualen Körpern

Die Behandlung von Vektoren im dreidimensionalen Raum findet in simplifizierter Form schon in der fünften Klasse statt. Mit dem Einführen der mathematischen Darstellungsweisen von Ebenen durch Vektoren in der sechsten Klasse ergeben sich zusätzlich zahlreiche weitere Möglichkeiten, die zu lernenden Kenntnisse und Fähigkeiten an Polyedern zu üben. In dieser Unterrichtsplanung macht man sich die Eigenschaft der Dualität von Hexaeder und Oktaeder zunutze, um daran in allen drei Komplexitätsbereichen (Einsetzen von Grundkenntnissen und Grundfertigkeiten, Herstellen von Verbindungen, Einsetzen von Reflexionswissen/ Reflektieren, vgl. BIFIE 2013, 5f.) das Wissen über Vektoren zu erweitern und zu festigen.

Voraussetzungen:

Die SchülerInnen sollten über ein grundlegendes Wissen und über grundlegende Fertigkeiten im Themenbereich der Vektoren im dreidimensionalen Raum verfügen. Insbesondere werden in dieser Unterrichtsplanung folgende Kenntnisse gefordert: die Bildung und Bedeutung des Normalvektors und des Einheitsvektors, der Betrag eines Vektors bzw. die Berechnung der Länge eines Vektors, beide mathematische Darstellungsmöglichkeiten einer Ebene, die Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren, die Aufstellung der Parameterform einer Geraden, die Berechnung eines Schnittpunktes bzw. einer Schnittgeraden und die Bestimmung der Lagebeziehung zwischen Geraden.

Von Vorteil wäre außerdem das Wissen um die Dualität von Polyedern. Da diese in minimaler Form auch auf dem Arbeitsblatt erklärt wird, ist es jedoch nicht zwingend notwendig, sie zuvor im Unterricht zu behandeln.

Ablauf und Organisation:

Auf dem Arbeitsblatt (siehe Kapitel „9.4 Anhang zu ‚Rechnen und Operieren mit Vektoren in zueinander dualen Körpern‘“) befinden sich drei Aufgaben, die voneinander unabhängig sind und deswegen in unterschiedlicher Reihenfolge bearbeitet werden können. Allein die Unteraufgaben können teilweise zusammenhängen und sollten daher in der Abfolge behandelt werden, die das Arbeitsblatt vorschlägt. Da die einzelnen Aufgaben dieses Übungsblattes von

unterschiedlicher Schwierigkeit und Komplexität sind und es bekanntlich gilt, dass *variatio delectat* (bekannte lateinische Phrase für ‚Abwechslung erfreut‘), empfiehlt es sich verschiedene Methoden anzuwenden.

In der ersten Aufgabe wird die Dualität zwischen Würfel und Oktaeder thematisiert und rechnerisch mittels Vektoren untersucht. Hierbei sollen einzelne Eckpunkte (Teilaufgabe a), eine diese Punkte beinhaltende Ebene (Teilaufgabe b) und ein Winkel (Teilaufgabe c) berechnet werden.

Für Aufgabe 1 a) eignet sich besonders die Methode „Schreibgespräch“ (vgl. Barzel, Büchter, Leuders 2011, 192-197), da sie einerseits mehrere Arbeitsschritte benötigt und daher im Hinblick auf die Bearbeitungsdauer passend ist, und andererseits weder zu schwer noch zu leicht ist, um eine Über- oder Unterforderung hervorzurufen. Bei dieser Methode notiert jede/r Schüler/in auf einem Blatt Papier seine/ihre Ideen zur Berechnung der Punkte S, T und U. Diese Ideen können von unterschiedlichster Art sein: Manche SchülerInnen verschriftlichen zuerst nur grob ihre Strategien, andere beginnen vielleicht gleich mit der Berechnung einzelner Punkte, wieder andere kennzeichnen graphisch in einer Skizze verschiedene Möglichkeiten, die Punkte zu berechnen.

Nach ungefähr fünf Minuten wird das Blatt an eine/n andere/n Schüler/in weitergereicht, der/die die schriftlichen Notizen begutachtet und die bisherigen Ideen, Rechnungen, Skizzen, etc. auf seine/ihre eigene Art weiterführt. Die SchülerInnen sollen demnach offen für andere Vorgehensweisen sein, diese nachvollziehen und nach eigenem Ermessen fortführen, abändern oder – falls sie fehlerhaft sind – korrigieren. Wichtig dabei ist, dass dies weiterhin in schriftlicher Form stattfindet. Ein mündlicher Austausch ist in dieser Methode nicht erlaubt und wäre auch nicht förderlich, da eine zu frühe Kritik mögliche Ideen unterbinden und vielfältigste Vorgehensweisen auf eine einzige einschränken kann.

Die SchülerInnen erhalten bei dieser Methode die Möglichkeit, selbst über die Aufgabe nachzudenken und eigene Sichtweisen und Strategien zu entwickeln. Die Verschriftlichung der Ideen stellt dabei eine gesonderte Herausforderung dar, da sie leserlich und vor allem strukturiert und auf verständliche Weise schriftlich wiedergegeben werden müssen, damit der/die Nächste die Gedanken nachvollziehen und darauf aufbauen kann.

Das Blatt wird so lange im Fünf- bis Zehn-Minuten-Takt weitergereicht, bis auf jedem Blatt die richtigen Lösungen für die Punkte S, T und U stehen. Befinden sich auf einem Blatt bereits sehr früh die korrekten Ergebnisse, soll der/die jeweilige Schüler/in, der/die dieses Blatt gerade bearbeitet, alternative Lösungswege notieren oder die vorhandene

Rechenstrategie geometrisch veranschaulichen, zum Beispiel durch Einzeichnen der errechneten und verwendeten Vektoren in eine Skizze.

Die Bearbeitung der Aufgabe dauert mit dieser Methode zwar etwas länger als bei einem alleinigen Vorgehen, allerdings haben die SchülerInnen hier den klaren Vorteil, eine Fülle an unterschiedlichen Herangehensweisen betrachten und erlernen zu können.

Für die Aufgaben 1 b) und c) ist diese Methode nicht ganz so geeignet, da weniger Arbeitsschritte nötig sind und das Blatt maximal einmal weitergegeben werden würde. Eine alleinige Bearbeitung dieser Teilaufgaben wäre daher zu empfehlen, wobei sich bei der Berechnung der Normalvektorform in Aufgabe 1 b) ein Sonderfall ergibt, der zunächst mit einem/einer Lernpartner/in und anschließend in der ganzen Klasse besprochen werden soll. Die Ebene verläuft nämlich parallel zu der Ebene, die die x- und die z-Achse aufspannen. Somit ergibt sich als einzige Bedingung, um als Punkt zur errechneten Ebene zu gehören, dass die y-Komponente den Wert „zwei“ haben muss.

Die Aufgabe 2, bei der ebenfalls die Dualität von Würfel und Oktaeder behandelt wird, jedoch mit dem Unterschied, dass diesmal das duale Oktaeder dem Würfel umschrieben wird, erfordert die meiste Denkarbeit und sollte erst bearbeitet werden, wenn die SchülerInnen vernetzt mit Ebenen- und Geradengleichungen umgehen sowie Schnittgeraden und -punkte berechnen können. Auch die Bedeutung eines Normalvektors sollten sie erfasst und verinnerlicht haben. Eine alleinige Bearbeitung der Aufgabe könnte besonders für schwächere SchülerInnen verunsichernd oder gar frustrierend sein, weshalb eine Methode vonnöten ist, die einen Austausch von Ideen und Erkenntnissen ermöglicht. Die bereits in Kapitel „7.2.2.1 Beweis über die Anzahl der platonischen Körper“ vorgestellte Ich-Du-Wir-Methode wäre in dieser Situation ebenfalls passend. Jede/r Schüler/in kann dabei zunächst alleine überlegen, Erkenntnisse gewinnen und diese verschriftlichen, bevor er/sie in der zweiten Phase die Ideen mit einem/einer Lernpartner/in teilt. Dabei können sie ihre Ansätze vergleichen und überdenken und mögliche Probleme klären oder zumindest gemeinsam für Phase Drei durchdenken und formulieren. In dieser letzten Phase gehen die SchülerInnen in Kleingruppen zusammen und tauschen sich über ihre Strategien aus. Sollten die SchülerInnen in dieser Phase zu keiner (vollständigen) Lösung der Problemstellung kommen, kann die Lehrperson auch helfend mit Tipps zur Seite stehen.

Am Ende sollte zumindest die Rechenstrategie von allen verschriftlicht worden sein. Sollte die Zeit nicht mehr für eine Berechnung der Punkte A', B' und D' reichen, kann der

Rechenvorgang auf Basis der Rechenstrategie als Hausübung durchgeführt und in der nächsten Unterrichtseinheit verglichen und final besprochen werden.

Aufgabe 3 ist wieder einfacher zu lösen. Hier geht es darum, die Lagebeziehungen zwischen Geraden zu bestimmen. Wurden alle möglichen Lagebeziehungen bereits im Unterricht besprochen, dürfte diese Aufgabe kein Problem darstellen, sondern als bloßes Übungsbeispiel zur Festigung dieses Wissens dienen. Daher kann diese Aufgabe als Einzelarbeit oder gemeinsam mit einem/einer Lernpartner/in behandelt werden. Auch als Hausübung ist sie aufgrund des niedrigen Schwierigkeitsgrades bestens geeignet.

Zusätzliche Erläuterungen zum Arbeitsblatt:

Wie bereits erwähnt weisen die einzelnen (Unter-) Aufgaben unterschiedliche Komplexität auf, wobei Aufgabe 1 in erster Linie zum Komplexitätsbereich K2 (Herstellen von Verbindungen) gehört. Aufgrund der empfohlenen Methode sind die SchülerInnen aber auch damit konfrontiert, über die von den KollegInnen gegebenen Lösungsansätze und Vorgehensweisen nachzudenken, wodurch die Behandlung der Aufgabe zwischenzeitlich auch in den Komplexitätsbereich K3 (Einsetzen von Reflexionswissen/Reflektieren) fallen kann. Aufgabe 2 erfordert ein starkes Kombinieren bzw. Vernetzen des Wissens und der Fertigkeiten, weswegen genügend Zeit und die Möglichkeit eines Austausches der Ideen eingeplant werden soll. Von einem erstmaligen Einsatz dieser Aufgabe in einer Schularbeit ist daher unbedingt abzuraten! Aufgabe 3 wiederum ist einfacher gehalten und deckt andere Grundkompetenzen ab, wobei es in den Komplexitätsbereich K1 (Einsetzen von Grundkenntnissen und Grundfertigkeiten) fällt.

Für alle Aufgaben wurden bewusst ganze Zahlen gewählt, damit sich die SchülerInnen besser auf die Strategie und den Rechenvorgang konzentrieren können sowie anhand der Skizze einschätzen können, ob ihre errechnete Lösung korrekt sein kann. Die Aufgaben 1 und 2 eignen sich daher auch gut, um gezielt das Kombinieren und Vernetzen von Wissen zu trainieren.

Zu Aufgabe 2 sei an dieser Stelle für die Lehrperson auch eine grobe Rechenstrategie gegeben: Mit der Information, dass der Vektor \overrightarrow{MV} normal auf die Ebene steht, die die Punkte B' , D' und A' beinhaltet, lässt sich die Normalvektordarstellung dieser Ebene ermitteln. Kombiniert man weiters den Mittelpunkt M mit einem beliebigen Vielfachen des Vektors

\overline{WV} , kann man die Parameterform für die Gerade aufstellen, die durch die Punkte M und A' verläuft. Schneidet man nun die errechnete Ebene mit dieser Geraden, erhält man den Punkt A' (= (0|0|8)). Anschließend berechnet man die Normalvektorform der Ebene, die die Punkte B', D' und W beinhaltet, und schneidet diese mit der zuerst berechneten Ebene. Man erhält damit die Gerade, die durch die Punkte B' und D' verläuft. Stellt man nun die Normalvektorform der Ebene auf, die die Punkte B', A' und P beinhaltet, kann man diese Ebene mit der zuerst berechneten Ebene schneiden und erhält eine weitere Gerade, die durch die Punkte B' und A' verläuft. Schneidet man die beiden zuletzt berechneten Geraden, bekommt man die Koordinaten des Punktes B' (= (0|-6|2)). Für die Berechnung des letzten Punktes D' kreuzt man die Vektoren $\overline{MA'}$ und $\overline{MB'}$, ermittelt davon den Einheitsvektor, multipliziert diesen mit der Länge von $\overline{MA'}$ und erhält so, mit zusätzlicher Addition des Punktes M, den Punkt D' (= (6|0|2)).

Dauer:

Eine Einführung in das Arbeitsblatt, die insbesondere eine Erklärung der Dualität beinhaltet, dauert in etwa fünf Minuten. Die Erläuterung der Methode Schreibgespräch sowie die Durchführung von dieser bei der Berechnung der Aufgabe 1 a) benötigen ungefähr 45 Minuten. Die Bearbeitung der übrigen Unteraufgaben b) und c) geht wiederum schneller vonstatten und sollte insgesamt nicht länger als 20 Minuten dauern.

Aufgabe 2 ist am zeitintensivsten, da sowohl das Finden einer Rechenstrategie als auch deren Durchführung viel Zeit in Anspruch nimmt. Für jede der drei Arbeitsphasen der Ich-Du-Wir-Methode sollte ungefähr 10-20 Minuten eingerechnet werden, weshalb ein Zeitraum von ungefähr einer Unterrichtseinheit zu empfehlen ist. Sollte diese für eine vollständige Ermittlung der Punkte nicht ausreichen, können die SchülerInnen die finalen Rechenvorgänge mithilfe der im Unterricht erarbeiteten Strategie als Hausaufgabe erledigen.

Aufgabe 3 benötigt nur den Einsatz von Grundkompetenzen, womit man inhaltlich im Komplexitätsbereich K1 verbleibt. Es ist demnach keine lange Denkphase nötig und eine Bearbeitung beider Unteraufgaben sollte daher nur ungefähr 15-20 Minuten dauern.

Handlungsbereiche:

Wie die Überschrift der Zielsetzung verrät, ist vor allem der Handlungsbereich des Rechnens und Operierens vertreten. Durch die Einbindung der empfohlenen Methoden erweitert sich das Spektrum jedoch. Im ersten Schritt des Schreibgesprächs steht zum Beispiel noch das Rechnen und Operieren im Vordergrund. Ab der Weitergabe bzw. dem Erhalt eines anderen Blattes jedoch wird auch der Handlungsbereich „Interpretieren“ miteinbezogen, da die SchülerInnen die schriftlichen Ideen des/der vorherigen Blattbesitzers/-besitzerin analysieren und interpretieren müssen, um darauf aufbauend die Aufgabe weiter bearbeiten zu können. Je nach Richtigkeit der bisherigen Ideen und Notizen könnte auch der Handlungsbereich „Argumentieren und Begründen“ aktiviert werden, wenn die SchülerInnen Fehler ausbessern und ihr derartiges Vorgehen erklären müssen. Sollten die SchülerInnen ihre Rechenstrategie auch geometrisch darstellen, fällt das in den Handlungsbereich des Darstellens und Modellbildens. Auch bei der Ich-Du-Wir-Methode in Aufgabe 2 werden im direkten mündlichen Austausch mit den KollegInnen zusätzlich zum Rechnen und Operieren die anderen Handlungsbereiche eingebunden. Die kurze Aufgabe 3 wiederum beschränkt sich großteils auf den hauptsächlichen Handlungsbereich dieser Zielsetzung, das Rechnen und Operieren.

7.2.3.2 Rechnen und Operieren mit Vektoren im Kuboktaeder

In dieser Unterrichtsplanung geht es darum, den Nutzen von Parallelität zu erkennen und die lokale Ungebundenheit von Vektoren besser zu begreifen und gewinnbringend einzusetzen. Zusätzlich sollen sich die SchülerInnen daran gewöhnen, nicht nur mit ganzen Zahlen zu rechnen und sich nicht von Dezimalzahlen beirren zu lassen.

Voraussetzungen:

Neben dem grundlegenden Wissen über Vektoren im dreidimensionalen Raum und über deren Rechengesetze sollten die SchülerInnen Kenntnis über die beiden Darstellungsmöglichkeiten von Ebenen, über die Berechnung des Abstands eines Punktes zu einer Ebene und über das Verschieben von Vektoren bzw. deren lokaler Ungebundenheit besitzen. Für Aufgabe 1 wird

überdies ein grundlegendes Wissen über regelmäßige Dreiecke und deren Höhenberechnung vorausgesetzt.

Ablauf und Organisation:

Aufgabe 1 des Arbeitsblattes (siehe Kapitel „9.5 Anhang zu ‚Rechnen und Operieren mit Vektoren im Kuboktaeder‘“), bei der es um die Bestimmung eines unbekanntes Punktes in einem Kuboktaeder geht, zielt auf die Parallelität und die Kongruenz der beiden Dreiecksflächen $IE'H'$ und $C'B'K$ ab. Sobald man das erkannt hat, ist die Berechnung des Punktes K nicht mehr sonderlich schwierig, weswegen keine Bearbeitung in großen Gruppen nötig ist, sondern eine PartnerInnenarbeit ausreichend ist. Sollten die beiden LernpartnerInnen die Parallelität und/oder die Kongruenz nicht erkennen, steht es der Lehrperson frei, unterstützend mit einem entsprechenden Tipp einzugreifen. Nach einem angemessenen Zeitraum (von ungefähr 15-20 Minuten) wird die Aufgabe noch im Plenum besprochen und die Ergebnisse verglichen.

Auch bei Aufgabe 2, die das Aufstellen einer Ebene auf Basis bestimmter Punkte des zugrundeliegenden Kuboktaeders fordert, ist die Eigenschaft der Parallelität der entscheidende Hinweis. Da für die Ermittlung der Ebene ε viel Überlegungsarbeit nötig ist, ein Austausch mit LernpartnerInnen förderlich wäre und die Bearbeitung mehrere Arbeitsschritte verlangt, ist hier eine Abwandlung der von Barzel, Büchter und Leuders vorgeschlagenen Ich-Du-Wir-Methode (2011, 118-123) zu einer Ich-Du-Wir-Alle-Wir-Alle-Methode zu empfehlen, die – wie man rasch erkennt – um drei Arbeitsphasen erweitert wurde.

Die ersten drei Phasen verlaufen dabei gleich wie in der Ich-Du-Wir-Methode: Zuerst überlegt jede/r Schüler/in alleine für sich, arbeitet sich in die Thematik ein, entwickelt Ideen oder sogar schon mögliche Strategien und notiert sich Fragen bzw. Problemstellungen. In der zweiten Phase werden die Gedanken im Austausch mit einem/einer Lernpartner/in erweitert, aber auch konkretisiert, Ideen und Strategien verglichen und mögliche Probleme behandelt und bestenfalls gelöst. Anschließend gehen die SchülerInnen in Kleingruppen zu ungefähr fünf Personen zusammen, wo sie die bisherigen Strategien besprechen, eventuell kombinieren, vorhandene Fehler korrigieren und gemeinsam zu einer Teillösung finden, wobei man sich gegenseitig helfen und einander erklärend zur Seite stehen soll. In der vierten Phase erarbeitet man ausgehend von den bisherigen Lösungsvorschlägen im Plenum mit

Unterstützung der Lehrperson eine Rechenstrategie, die bis zur Berechnung des Abstandes der beiden Dreiecksflächen $IE'H'$ und $C'B'K$ reicht (– eine gesamte Lösungsstrategie ist unter dem nachfolgenden Punkt „Erläuterung des Arbeitsblattes“ gegeben). Nun sind alle SchülerInnen wieder auf demselben Wissensstand und können in Phase Fünf erneut in Kleingruppen die finale Berechnung der Ebene diskutieren. Abschließend folgt eine erneute Alle-Phase, in der noch die restliche Rechenstrategie im Plenum besprochen und gegebenenfalls mit Unterstützung der Lehrperson erarbeitet wird. Effektiv wird hier also im Vergleich zur herkömmlichen Ich-Du-Wir-Phase die Besprechung einer Zwischenlösung eingeworfen, um dadurch schwächeren Kleingruppen die Chance zu geben, aufzuholen und möglicherweise selbst die finale Lösung zu ermitteln.

Erläuterung des Arbeitsblattes:

Aufgabe 1 wirkt auf den ersten Blick sehr komplex, allerdings lässt sich der Punkt K in wenigen Rechenschritten ermitteln, sobald man den Zusammenhang zwischen den Dreiecken $IE'H'$ und $C'B'K$ erkannt hat. Diese sind sowohl parallel als auch kongruent, was man schnell erkennen kann, wenn man den Aspekt mit einbezieht, dass die Kanten des Kuboktaeders die Verbindungsstrecken der Kantenmittelpunkte des Würfels sind. Somit lässt sich rasch der Punkt B' ermitteln, indem man den Vektor $\overrightarrow{H'E'}$ zum Ortsvektor C' addiert. Verwendet man nun noch das Wissen, dass man die Höhe eines regelmäßigen Dreiecks ermitteln kann, indem man die Länge der Strecke vom Mittelpunkt einer Seite zum gegenüberliegenden Eckpunkt bestimmt, ist die Aufgabe beinahe gelöst. Zunächst berechnet man den Mittelpunkt (H'') der Strecke $E'H'$ und ermittelt den Vektor $\overrightarrow{IH''}$. Diesen wiederum addiert man zum zuvor berechneten Mittelpunkt (C'') der Strecke $C'B'$ und erhält somit den gesuchten Punkt K (= (0|21|6,31)).

Aufgabe 2 erfordert mehr Arbeitsschritte sowie die Vernetzung verschiedener Kenntnisse im Bereich der Vektoren. Aufgrund der Komplexität wären die SchülerInnen bei einer erstmaligen Bearbeitung während einer Schularbeit überfordert, weswegen es sich hier um ein reines Übungsbeispiel für den Unterricht handelt.

Die Schwierigkeit in dieser Aufgabe liegt darin, zu erkennen, dass die einzelnen Ebenen – nämlich die Ebenen, die die in Aufgabe 1 behandelten Dreiecke aufspannen, sowie die Ebene ε – parallel zueinander sind, und dass die Ebene ε gleichen Abstand zu den beiden Dreiecken hat, also genau in der Mitte liegt. Hat man das erkannt, ist die nächste Herausforderung das

korrekte Durchführen der Rechenoperationen. Zunächst muss man den Abstand zwischen den Dreiecken bestimmen, um somit auch den Abstand zwischen den Dreiecken und der Ebene ε zu erhalten. In diesem Fall möchte man den Abstand vom Punkt C' zu der Ebene – bezeichnen wir sie als δ – ermitteln, die die Punkte I , E' und H' beinhaltet. Dafür muss man zunächst die Parameterform der Ebene δ bestimmen, sowie den Normalvektor dieser Ebene. Weiters stellt man mithilfe dieses Normalvektors die Parameterform der Geraden auf, die normal zur Ebene δ verläuft und durch den Punkt C' geht. Schließlich schneidet man diese Gerade mit der Ebene δ und erhält mit dem Vektor $\overline{SC'}$, wobei S der ermittelte Schnittpunkt ist, den Abstandsvektor der beiden Dreiecke. In der Ich-Du-Wir-Alle-Wir-Alle-Methode wird empfohlen, nach den ersten drei Arbeitsphasen die Rechenstrategie bis hierhin im Plenum zu besprechen und anschließend das weitere Vorgehen wieder in Kleingruppen zu diskutieren. Von hier ist es nur noch ein kleiner Schritt bis zur Parameterform der Ebene ε : Halbiert man den Vektor $\overline{SC'}$ so lässt sich ein Punkt auf der Ebene ε ermitteln, den man als Ausgangspunkt für die Parameterform wählen kann. Die noch fehlenden Richtungsvektoren hingegen kann man direkt von der Ebene δ übernehmen, da die beiden Ebenen parallel verlaufen. Die bzw.

eine Parameterform der Ebene ε lautet somit:
$$X = \begin{pmatrix} -3,75 \\ 22,25 \\ 4,53 \end{pmatrix} + \alpha * \begin{pmatrix} 3,75 \\ 3,75 \\ 5,31 \end{pmatrix} + \beta * \begin{pmatrix} -3,75 \\ 3,75 \\ 5,31 \end{pmatrix},$$
 mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Empfehlung:

Sollten die SchülerInnen trotz gemeinsamer Ideen nicht auf die Lösungsstrategie oder auf Ansätze davon kommen, kann die Lehrperson mit folgenden Tipps unterstützend zur Seite stehen:

- Tipp 1: Die Dreiecke $IE'H'$ und $C'B'K$ sowie das Sechseck $A'JF'G'LD'$, das sich in der Ebene ε befindet, liegen parallel.
- Tipp 2: Die Ebene ε liegt genau mittig zwischen den beiden Dreiecken.

Dauer:

Für Aufgabe 1 sind wenige Rechenschritte ausreichend, um zur korrekten Lösung zu gelangen, allerdings benötigt man etwas Zeit, um die Gemeinsamkeiten der Dreiecke zu erkennen. Daher ist ein Zeitraum von ungefähr 20 Minuten angemessen.

Aufgabe 2 wiederum ist etwas komplexer und für die selbständige Erarbeitung der Rechenstrategie mit der Ich-Du-Wir-Alle-Wir-Alle-Methode brauchen die SchülerInnen ausreichend viel Zeit. Die Phasen bis inklusive des ersten Vergleiches im Plenum nehmen ungefähr 35 Minuten in Anspruch, während die finale Ermittlung der Lösung mit einem Zeitraum von ca. 15 Minuten deutlich schneller geht.

Handlungsbereich:

Auch bei diesen beiden Aufgaben liegt der Fokus auf der Zielsetzung, die Rechenkompetenz zu stärken, und somit klar im Handlungsbereich „Rechnen und Operieren“. Jedoch können je nach Vorgehen in der empfohlenen Methode auch die anderen Handlungsbereiche aktiviert werden. Kennzeichnet man verschiedene Ebenen oder Geraden in der Skizze, wird der Handlungsbereich „Darstellen und Modellbilden“ angeregt; liest man Informationen aus der vorhandenen Abbildung und der Beschreibung des Kuboktaeders heraus, fällt das in den Handlungsbereich „Interpretieren“; diskutiert man mit den LernkollegInnen über die besten Vorgehensweisen und nennt dabei entsprechende Gründe für bzw. gegen eine Strategie, gehört dieses Handeln klar zum Bereich „Argumentieren und Begründen“.

8 Schlussbetrachtung

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass konvexe Polyeder durchaus im Mathematikunterricht vorkommen, sogar öfter als man vielleicht denkt. Allerdings werden sie nur selten als solche bezeichnet, geschweige denn genauer besprochen. Ich hoffe aber, dass ich durch meine Vorschläge und konkreten Unterrichtsausarbeitungen offenlegen konnte, welches Potential in diesen geometrischen Körpern steckt.

Durch die Auseinandersetzung mit Polyedern im Mathematikunterricht können die SchülerInnen zahlreiche Kompetenzen erarbeiten und stärken, die nicht nur für die Reifeprüfung sondern vor allem darüber hinaus im alltäglichen Leben relevant sein können – sei es das räumliche Vorstellungsvermögen bei der Planung der Inneneinrichtung der eigenen Wohnung, die Kompetenz des sorgfältigen und durchdachten Arbeitens bei der Strukturierung des Arbeits- oder Tagesablaufs, oder die Rechenkompetenz bei finanziellen Problemstellungen. Vieles davon mag auf den ersten Blick wenig mit konvexen Polyedern zu tun haben, aber eben diese Kompetenzen, die man benötigt, um den Alltag zu meistern, können hervorragend anhand dieser geometrischen Körper erarbeitet und trainiert werden – insbesondere deswegen, weil der Schwierigkeitsgrad bei der Behandlung der Polyeder völlig flexibel an jede Schulstufe angepasst werden kann. Von der fünften bis zur zwölften Schulstufe gibt es zahlreiche Einsatzmöglichkeiten mit adaptierbarem Schwierigkeitsniveau.

Weiters können alle Handlungsbereiche (Darstellen, Modellbilden; Rechnen, Operieren; Interpretieren; Argumentieren, Begründen) und Komplexitätsbereiche (Einsetzen von Grundkenntnissen und Grundfertigkeiten; Herstellen von Verbindungen; Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren) des neuen Kompetenzmodells bei der Auseinandersetzung mit konvexen Polyedern relativ simpel in den Unterricht integriert werden, was auch eine gute Vorbereitung für die Formate der neuen Reifeprüfung ist.

Auch für fächerübergreifende Kooperationen, die den SchülerInnen eine alltagsgetreuere Situation vermitteln, eignen sich konvexe Polyeder hervorragend, da es unzählige Berührungspunkte mit anderen Unterrichtsfächern wie Geschichte, Philosophie, Kunst, Geometrie, Biologie, etc. gibt.

Abschließend möchte ich mich bei den LeserInnen für die Aufmerksamkeit bedanken und wünsche allen Lehrenden viel Freude beim Einsetzen der Unterrichtsmaterialien und beim Verwenden von konvexen Polyedern im Mathematikunterricht!

9 Anhang

9.1 Verweise zu Falt- und Bastelanleitungen zu den platonischen Körpern

Dr. Markus Junker von der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg veröffentlichte online im Jahre 2009 eine Faltanleitung zu den platonischen Körpern Tetraeder, Würfel, Oktaeder und Ikosaeder. Die Anleitung ist unter folgendem Link zu finden (Stand: 05.08.2018): <http://home.mathematik.uni-freiburg.de/junker/preprints/platonischeKoerper.pdf>

Für das Dodekaeder empfiehlt es sich sein Körpernetz zu verwenden, das unter anderem über folgendem Link erhältlich ist (Stand: 05.08.2018): <http://www.naturstruktur.ch/download/bastelbogen/dodekaeder.pdf>

9.2 Anhang zu Stationenbetrieb „Archimedische und dual-archimedische Körper“

STATION I - Aufgabenblatt

Löst die Aufgaben immer zuerst für ein Polyeder, bevor ihr das nächste betrachtet. Löst die Aufgaben hintereinander, damit jede/r mitdenken und -schreiben kann. Jede/r notiert alle gewonnenen Erkenntnisse auf dem Arbeitsblatt!

Untergruppe	ist zuständig für Aufgabe
A	1
B	2
C	3

Aufgabe 1: Überprüft, welche Bedingungen (R1, R2 und/oder R3) das jeweilige Polyeder erfüllt und ob es somit ein archimedischer oder ein dual-archimedischer Körper ist.

Aufgabe 2: Findet für das Polyeder die dazugehörige Abbildung auf dem Arbeitsblatt. Anschließend überprüft, ob es zueinander kongruente Flächen gibt und wenn ja, wie viele solch kongruenter Flächen es gibt.

Aufgabe 3: Findet für das Polyeder den dazugehörigen Namen, indem ihr einerseits die Form(en) der begrenzenden Flächen und andererseits die in Aufgabe 2 ermittelte Anzahl an Flächen betrachtet.

Die Übersetzungshilfe Griechisch-Deutsch hilft euch bei der Suche des Namens!

TIPP: Kommt ihr mit der Information über die Anzahl der Flächen nicht weiter, so betrachtet lieber die Form des Polyeders und erinnert euch an Folgendes: Manche Polyeder werden gebildet, indem die Ecken von platonischen Körpern abgeschnitten bzw. „abgestumpft“ werden.

STATION II - Aufgabenblatt

Löst die Aufgaben immer zuerst für ein Polyeder, bevor ihr das nächste betrachtet. Löst die Aufgaben hintereinander, damit jede/r mitdenken und -schreiben kann. Jede/r notiert alle gewonnenen Erkenntnisse auf dem Arbeitsblatt!

Untergruppe	ist zuständig für Aufgabe
A	2
B	3
C	1

Aufgabe 1: Überprüft, welche Bedingungen (R1, R2 und/oder R3) das jeweilige Polyeder erfüllt und ob es somit ein archimedischer oder ein dual-archimedischer Körper ist.

Aufgabe 2: Findet für das Polyeder die dazugehörige Abbildung auf dem Arbeitsblatt. Anschließend überprüft, ob es zueinander kongruente Flächen gibt und wenn ja, wie viele solch kongruenter Flächen es gibt.

Aufgabe 3: Findet für das Polyeder den dazugehörigen Namen, indem ihr einerseits die Form(en) der begrenzenden Flächen und andererseits die in Aufgabe 2 ermittelte Anzahl an Flächen betrachtet. Die Übersetzungshilfe Griechisch-Deutsch hilft euch bei der Suche des Namens!

TIPP: Kommt ihr mit der Information über die Anzahl der Flächen nicht weiter, so betrachtet lieber die Form des Polyeders und erinnert euch an Folgendes: Manche Polyeder werden gebildet, indem die Ecken von platonischen Körpern abgeschnitten bzw. „*abgestumpft*“ werden.

STATION III - Aufgabenblatt

Löst die Aufgaben immer zuerst für ein Polyeder, bevor ihr das nächste betrachtet. Löst die Aufgaben hintereinander, damit jede/r mitdenken und -schreiben kann. Jede/r notiert alle gewonnenen Erkenntnisse auf dem Arbeitsblatt!

Untergruppe	ist zuständig für Aufgabe
A	3
B	1
C	2

Aufgabe 1: Überprüft, welche Bedingungen (R1, R2 und/oder R3) das jeweilige Polyeder erfüllt und ob es somit ein archimedischer oder ein dual-archimedischer Körper ist.

Aufgabe 2: Findet für das Polyeder die dazugehörige Abbildung auf dem Arbeitsblatt. Anschließend überprüft, ob es zueinander kongruente Flächen gibt und wenn ja, wie viele solch kongruenter Flächen es gibt.

Aufgabe 3: Findet für das Polyeder den dazugehörigen Namen, indem ihr einerseits die Form(en) der begrenzenden Flächen und andererseits die in Aufgabe 2 ermittelte Anzahl an Flächen betrachtet. Die Übersetzungshilfe Altgriechisch-Deutsch hilft euch bei der Suche des Namens!

TIPP: Kommt ihr mit der Information über die Anzahl der Flächen nicht weiter, so betrachtet lieber die Form des Polyeders und erinnert euch an Folgendes: Manche Polyeder werden gebildet, indem die Ecken von platonischen Körpern abgeschnitten bzw. „*abgestumpft*“ werden.

Übersetzungshilfe Altgriechisch – Deutsch

Altgriechisches Wort	Aussprache	Übersetzung
ἔδρα	hedra (wird zu „eder“)	Fläche
γωνία	gonia	Ecke
τετρα	tetra	vier
πεντα	penta	fünf
ἕξα	hexa	sechs
ὀκτα	okta	acht
δωδεκα	dodeka	zwölf
εἰκοσα	eikosa (wird zu „ikosi“)	zwanzig
τριακοντα	triakonta	dreißig
ἑξηκοντα	hexekonta (wird zu „hexakonta“)	sechzig

Übersetzungshilfe Altgriechisch – Deutsch

Altgriechisches Wort	Aussprache	Übersetzung
ἔδρα	hedra (wird zu „eder“)	Fläche
γωνία	gonia	Ecke
τετρα	tetra	vier
πεντα	penta	fünf
ἕξα	hexa	sechs
ὀκτα	okta	acht
δωδεκα	dodeka	zwölf
εἰκοσα	eikosa (wird zu „ikosi“)	zwanzig
τριακοντα	triakonta	dreißig
ἑξηκοντα	hexekonta (wird zu „hexakonta“)	sechzig

Übersetzungshilfe Altgriechisch – Deutsch

Altgriechisches Wort	Aussprache	Übersetzung
ἔδρα	hedra (wird zu „eder“)	Fläche
γωνία	gonia	Ecke
τετρα	tetra	vier
πεντα	penta	fünf
ἕξα	hexa	sechs
ὀκτα	okta	acht
δωδεκα	dodeka	zwölf
εἰκοσα	eikosa (wird zu „ikosi“)	zwanzig
τριακοντα	triakonta	dreißig
ἑξηκοντα	hexekonta (wird zu „hexakonta“)	sechzig

Stationenbetrieb „Archimedische und dual-archimedische Körper“ - Arbeitsblatt

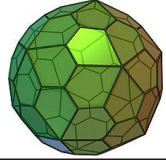
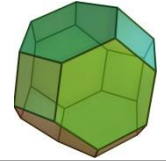
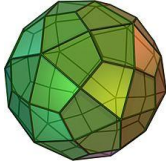
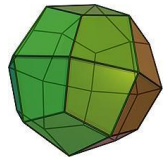
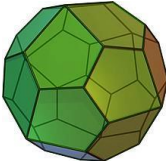




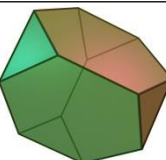
Bedingung (R1): Alle Flächen sind regelmäßige Vielecke.

Bedingung (R2): Alle Flächen sind zueinander kongruent.

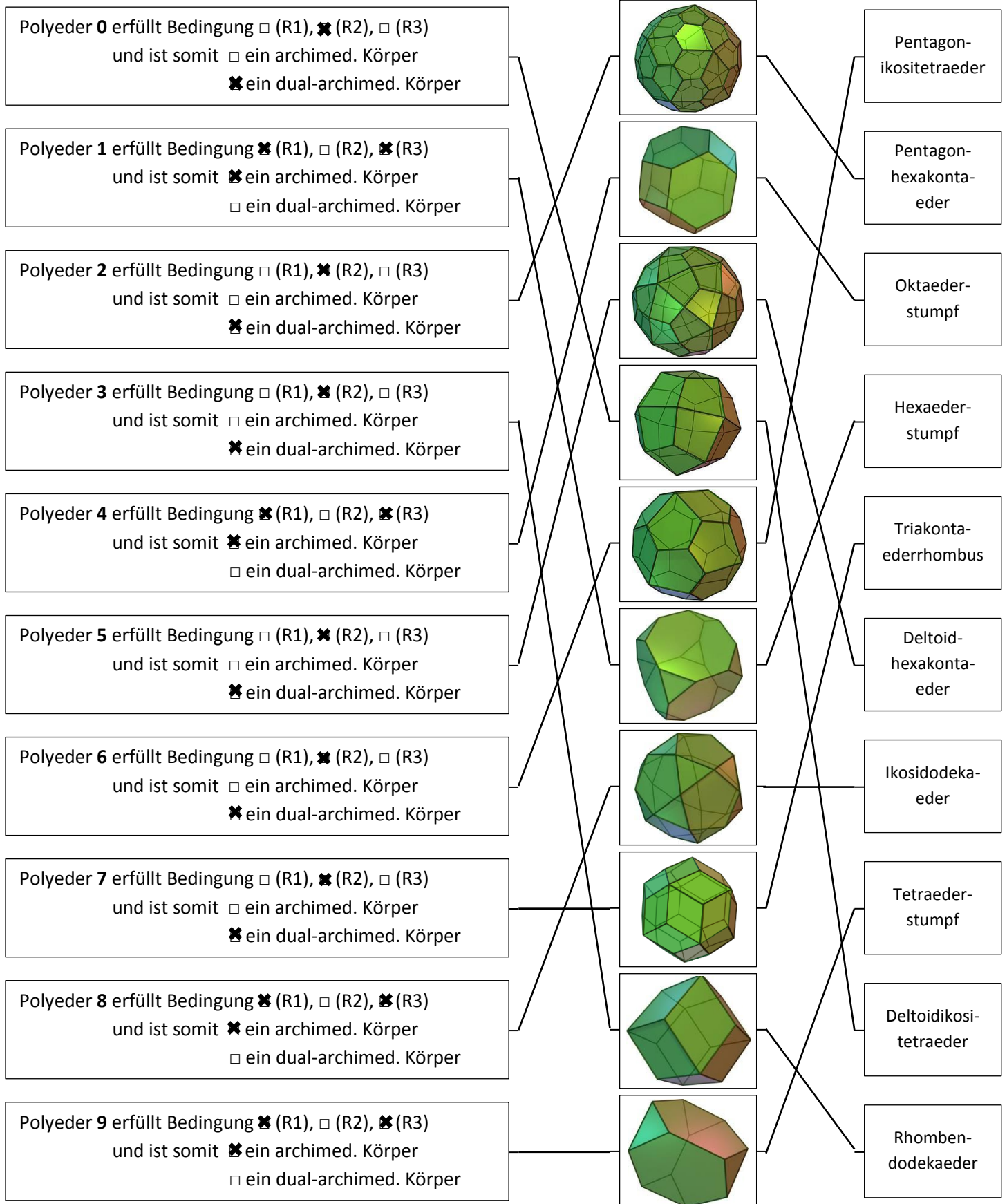
Bedingung (R3): Es herrschen kongruente Eckenumgebungen.

Archimedische Körper sind konvexe Polyeder, die die Bedingungen (R1) und (R3) erfüllen.

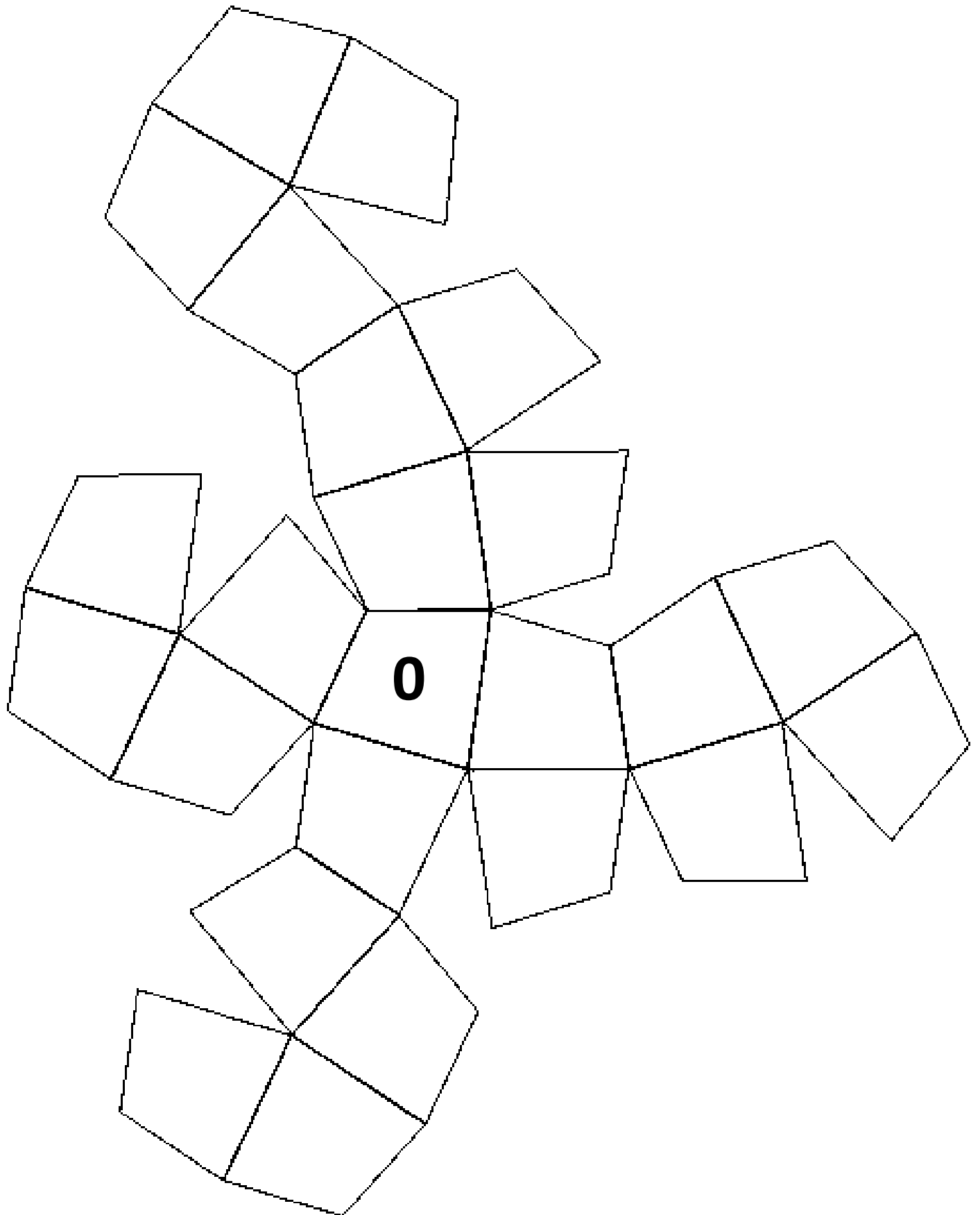
Dual-archimedische Körper sind konvexe Polyeder, die die Bedingung (R2) erfüllen.

<p>Polyeder 0 erfüllt Bedingung <input type="checkbox"/> (R1), <input checked="" type="checkbox"/> (R2), <input type="checkbox"/> (R3) und ist somit <input type="checkbox"/> ein archimed. Körper <input checked="" type="checkbox"/> ein dual-archimed. Körper</p>		<p>Pentagon- ikositetraeder</p>
<p>Polyeder 1 erfüllt Bedingung <input type="checkbox"/> (R1), <input type="checkbox"/> (R2), <input type="checkbox"/> (R3) und ist somit <input type="checkbox"/> ein archimed. Körper <input type="checkbox"/> ein dual-archimed. Körper</p>		<p>Pentagon- hexakonta- eder</p>
<p>Polyeder 2 erfüllt Bedingung <input type="checkbox"/> (R1), <input type="checkbox"/> (R2), <input type="checkbox"/> (R3) und ist somit <input type="checkbox"/> ein archimed. Körper <input type="checkbox"/> ein dual-archimed. Körper</p>		<p>Oktaeder- stumpf</p>
<p>Polyeder 3 erfüllt Bedingung <input type="checkbox"/> (R1), <input type="checkbox"/> (R2), <input type="checkbox"/> (R3) und ist somit <input type="checkbox"/> ein archimed. Körper <input type="checkbox"/> ein dual-archimed. Körper</p>		<p>Hexaeder- stumpf</p>
<p>Polyeder 4 erfüllt Bedingung <input type="checkbox"/> (R1), <input type="checkbox"/> (R2), <input type="checkbox"/> (R3) und ist somit <input type="checkbox"/> ein archimed. Körper <input type="checkbox"/> ein dual-archimed. Körper</p>		<p>Triakonta- ederrhombus</p>
<p>Polyeder 5 erfüllt Bedingung <input type="checkbox"/> (R1), <input type="checkbox"/> (R2), <input type="checkbox"/> (R3) und ist somit <input type="checkbox"/> ein archimed. Körper <input type="checkbox"/> ein dual-archimed. Körper</p>		<p>Deltoid- hexakonta- eder</p>
<p>Polyeder 6 erfüllt Bedingung <input type="checkbox"/> (R1), <input type="checkbox"/> (R2), <input type="checkbox"/> (R3) und ist somit <input type="checkbox"/> ein archimed. Körper <input type="checkbox"/> ein dual-archimed. Körper</p>		<p>Ikosidodeka- eder</p>
<p>Polyeder 7 erfüllt Bedingung <input type="checkbox"/> (R1), <input type="checkbox"/> (R2), <input type="checkbox"/> (R3) und ist somit <input type="checkbox"/> ein archimed. Körper <input type="checkbox"/> ein dual-archimed. Körper</p>		<p>Tetraeder- stumpf</p>
<p>Polyeder 8 erfüllt Bedingung <input type="checkbox"/> (R1), <input type="checkbox"/> (R2), <input type="checkbox"/> (R3) und ist somit <input type="checkbox"/> ein archimed. Körper <input type="checkbox"/> ein dual-archimed. Körper</p>		<p>Deltoidikosi- tetraeder</p>
<p>Polyeder 9 erfüllt Bedingung <input type="checkbox"/> (R1), <input type="checkbox"/> (R2), <input type="checkbox"/> (R3) und ist somit <input type="checkbox"/> ein archimed. Körper <input type="checkbox"/> ein dual-archimed. Körper</p>		<p>Rhomben- dodekaeder</p>

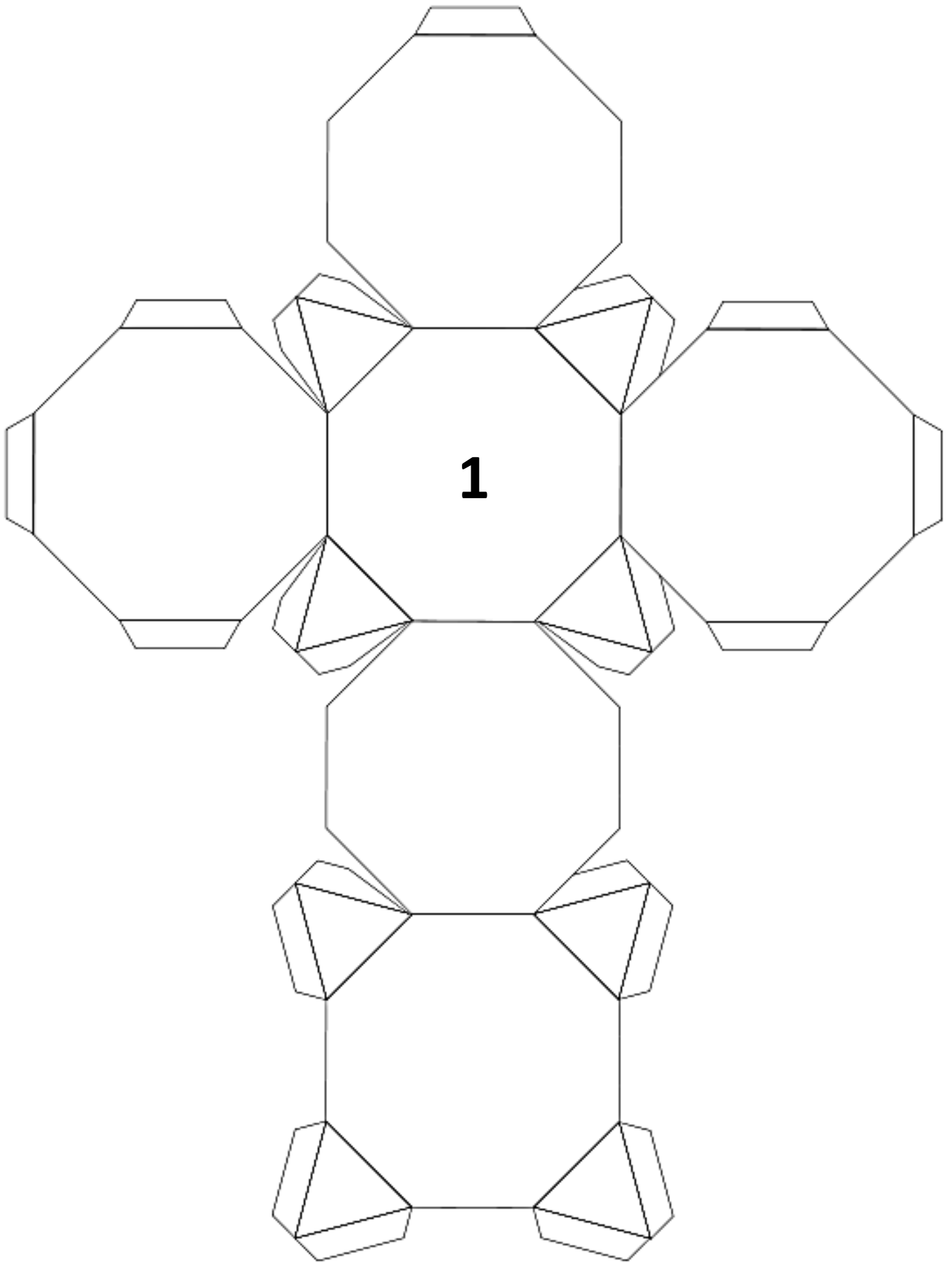
Lösungsblatt zum Stationenbetrieb „Archimedische und dual-archimedische Körper“:



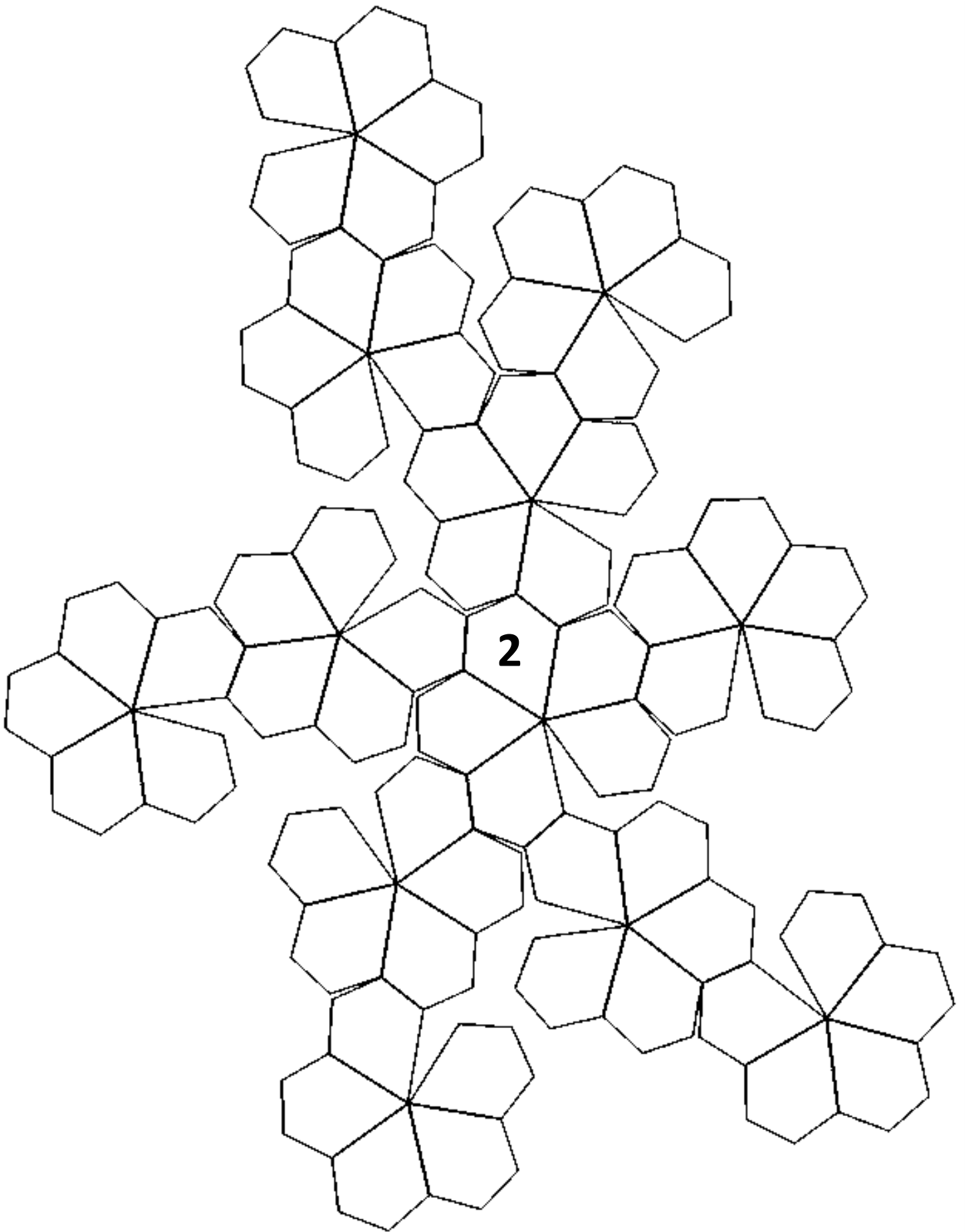
Für die Erstellung folgender konvexer Polyeder ist es ratsam, stärkeres Papier zu verwenden.



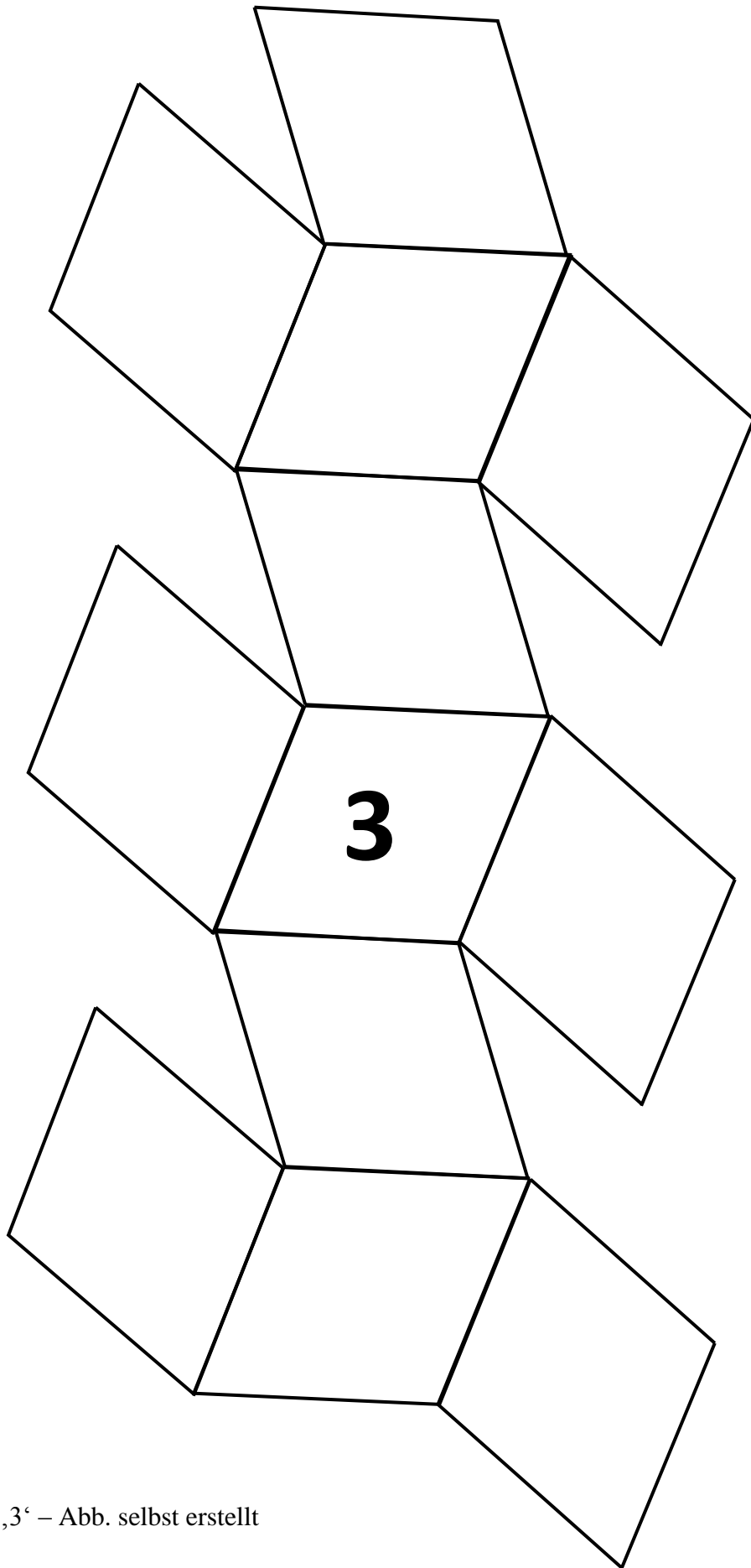
Polyeder „0“ – Abb. 99



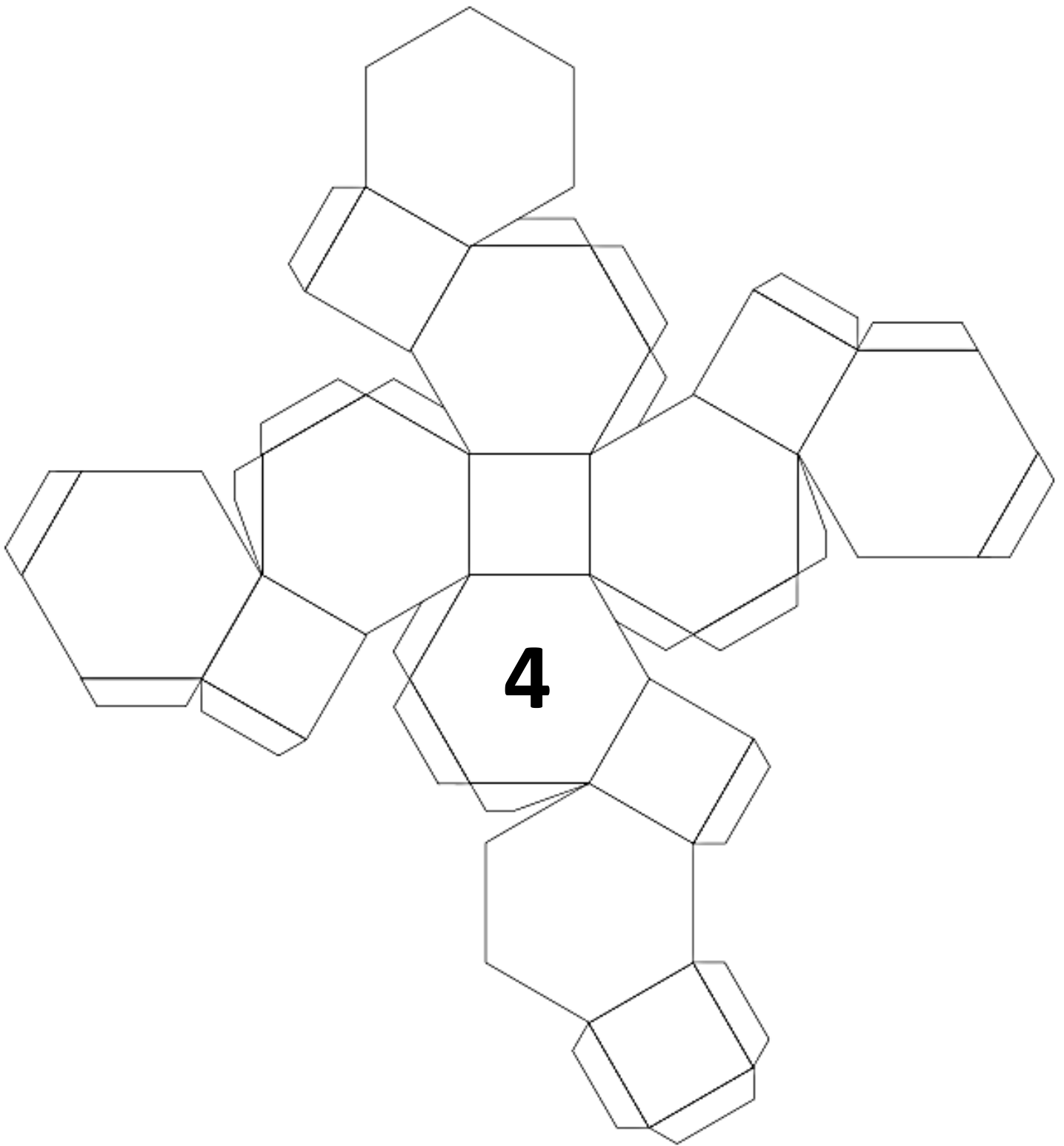
Polyeder ,1' – Abb. 100



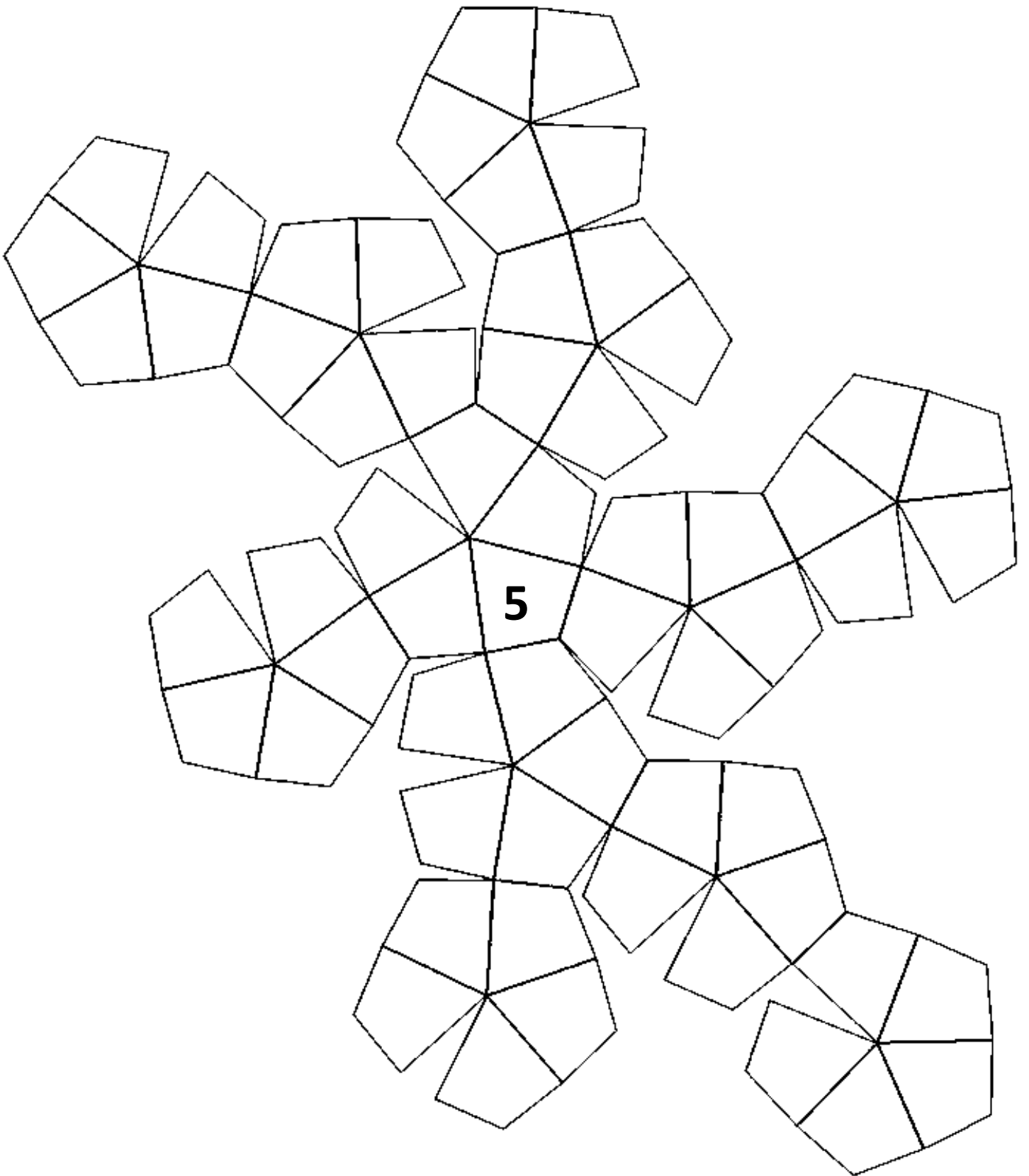
Polyeder ,2' – Abb. 101



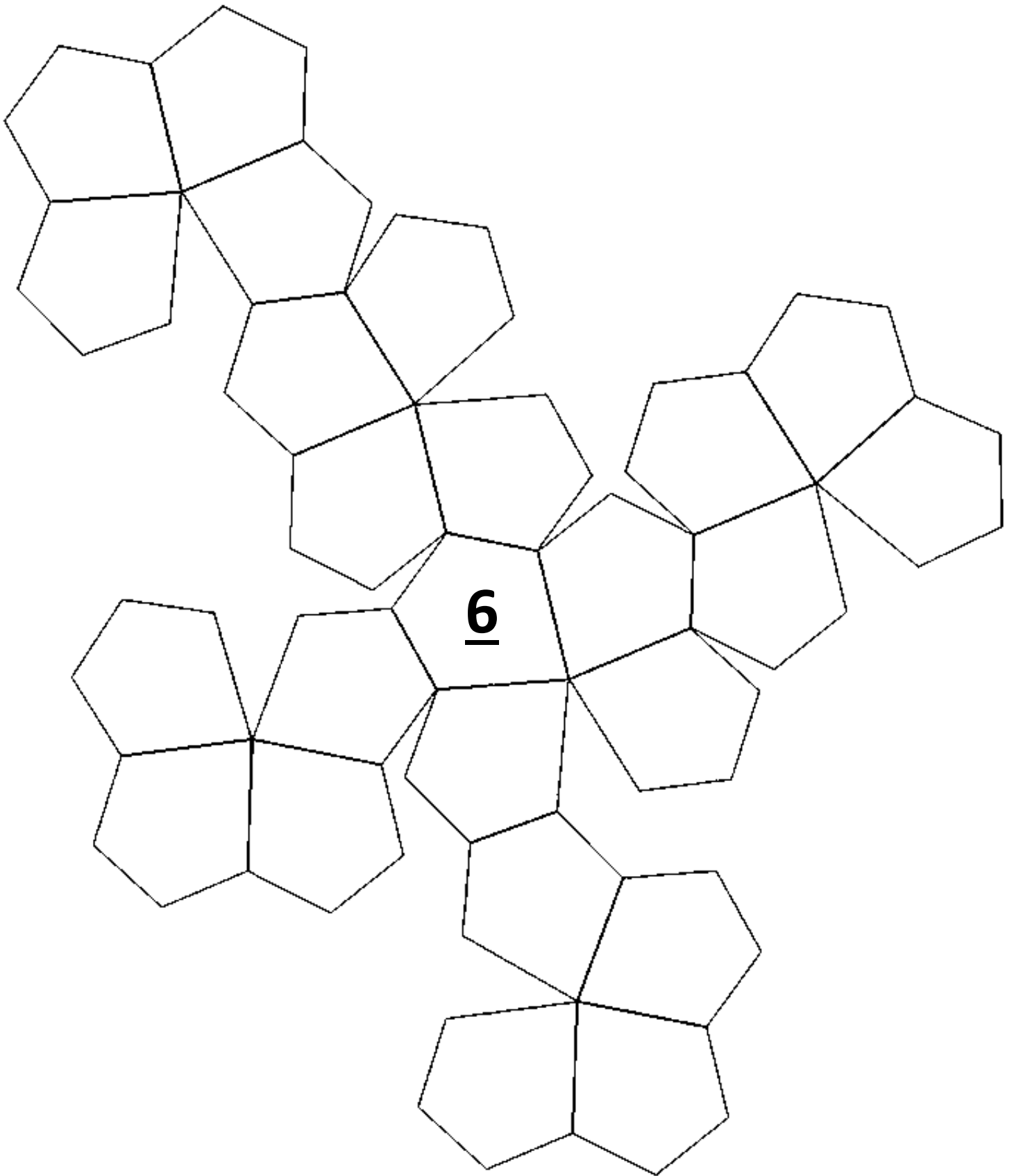
Polyeder ,3' – Abb. selbst erstellt



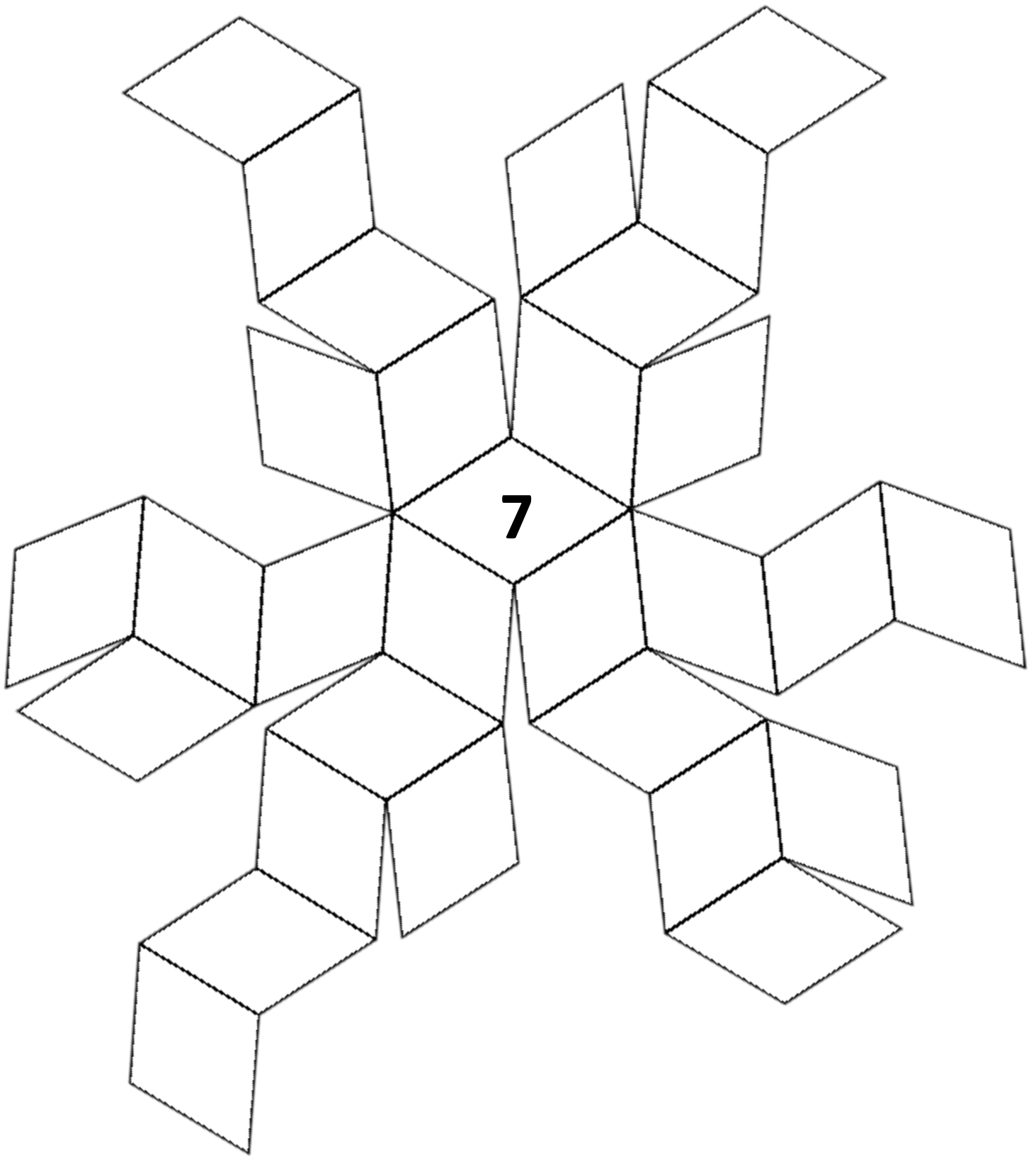
Polyeder ,4' – Abb. 102



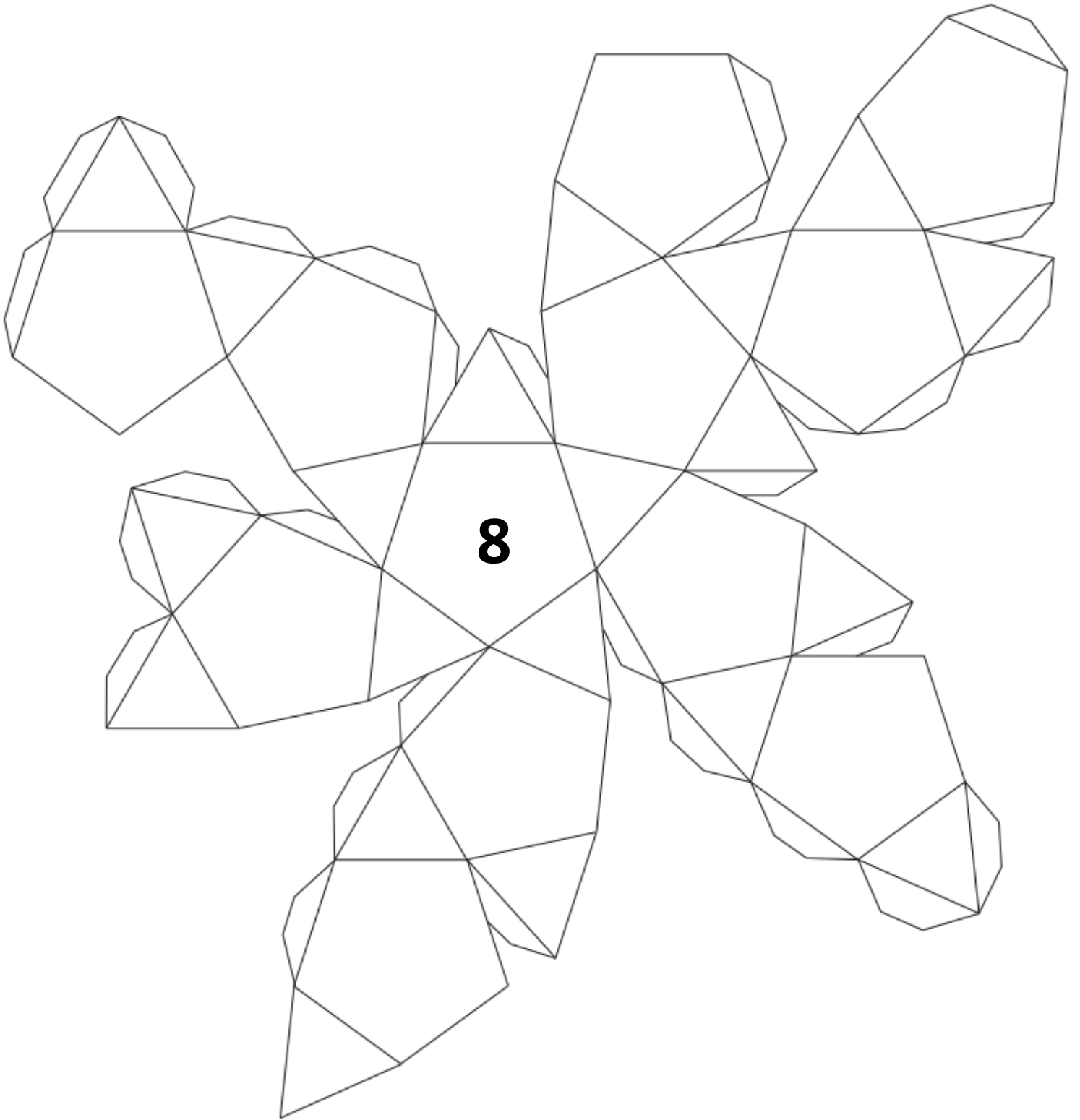
Polyeder ,5' – Abb. 103



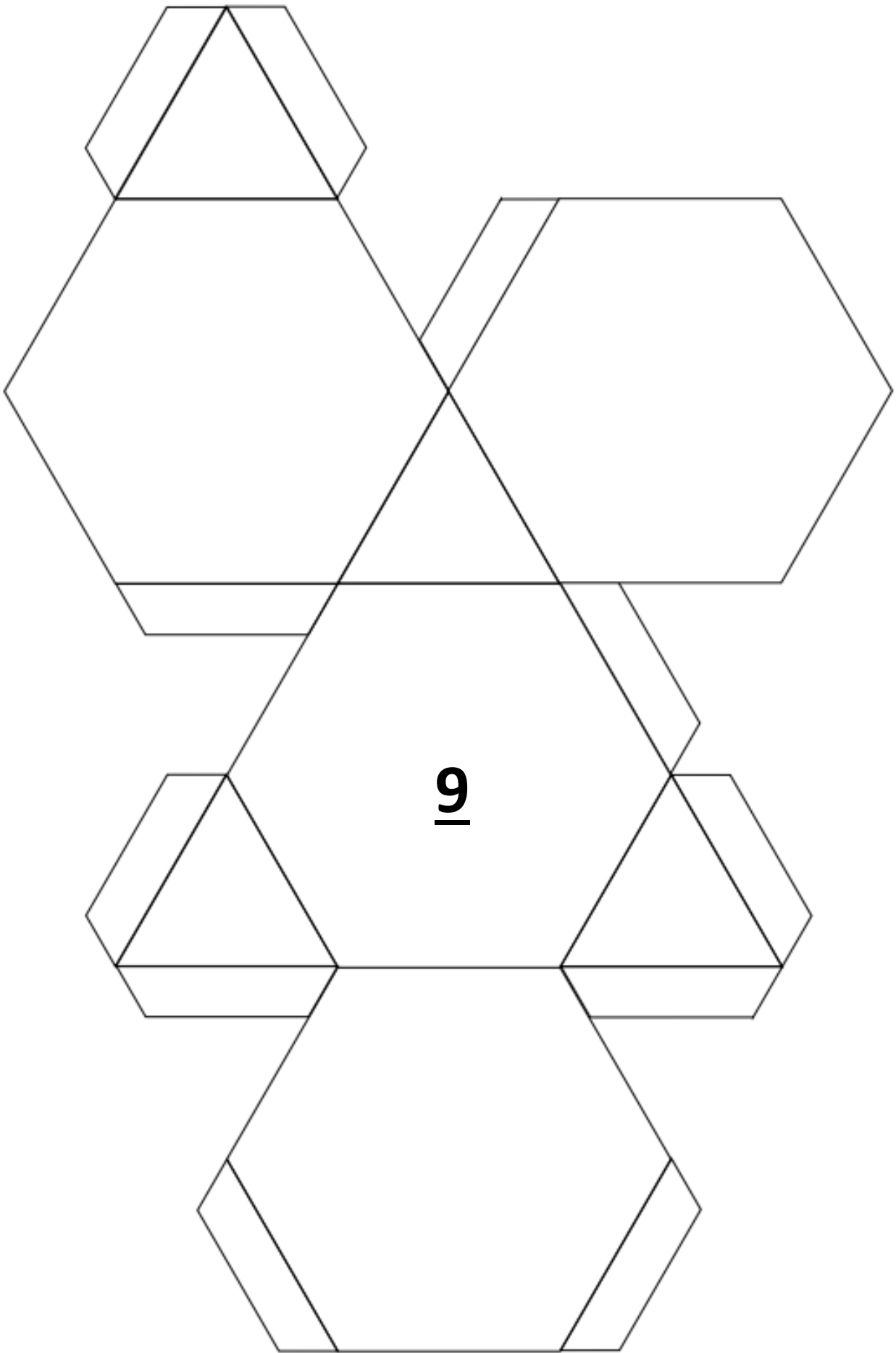
Polyeder ,6' – Abb. 104



Polyeder ,7' – Abb. 105



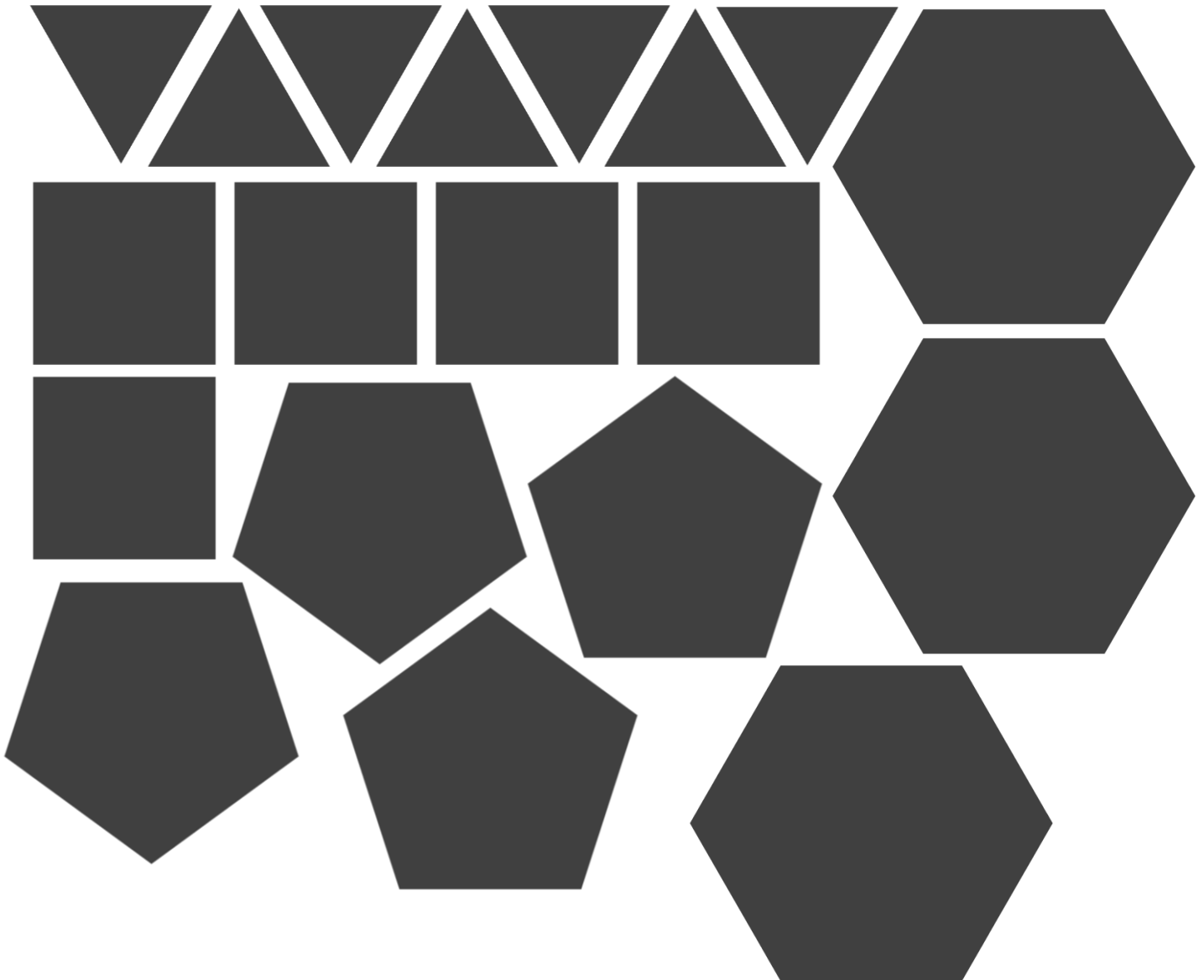
Polyeder ,8' – Abb. 106



Polyeder ,9' – Abb. 107

9.3 Anhang zu „Beweis über die Anzahl der platonischen Körper“

Anzahl der platonischen Körper - Regelmäßige Figuren



Anzahl der platonischen Körper - Arbeitsblatt

Folgende Bedingungen müssen für platonische Körper immer erfüllt sein:

Der Körper ist konvex .	Alle Flächen sind zueinander kongruent .
Alle Flächen sind regelmäßige Vielecke .	Es herrschen kongruente Eckenumgebungen .

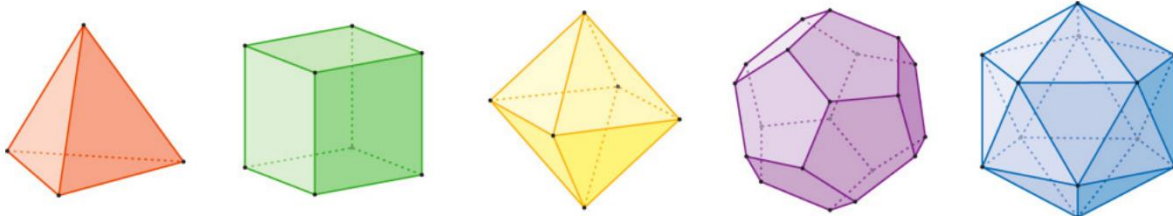
Überprüfe:

Gibt es weitere platonische Körper neben den fünf bisher gelernten?

Folgende Leitfragen helfen dir bei deinen Überlegungen:

- Alle begrenzenden Flächen sind regelmäßig. Was bedeutet das für die Innenwinkel der Flächen? Was bedeutet es insbesondere für die Innenwinkel eines Dreiecks? Was für die eines Quadrats? Was für die eines Fünfecks? Was für die eines Sechsecks?
- Warum ist es wichtig, dass der Winkeldefekt einer Ecke größer als 0° ist? Was passiert mit der Ecke, wenn der Winkeldefekt gleich oder kleiner als 0° ist?
- Warum ist folgende Aussage zutreffend oder nicht zutreffend? „Alle Überlegungen, die man für eine Ecke eines platonischen Körpers anstellt, gelten auch für alle übrigen Ecken dieses Körpers.“
- Welche Vielecke können sich so zusammenfügen, dass eine räumliche Ecke mit allen geforderten Eigenschaften von platonischen Körpern entsteht? Die ausgeschnittenen Figuren helfen dir vielleicht bei deinen Überlegungen.

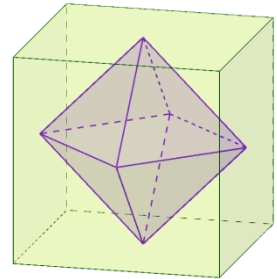
Finde eine Möglichkeit, mit diesen gewonnenen Erkenntnissen systematisch alle platonischen Körper zu finden!



9.4 Anhang zu „Rechnen und Operieren mit Vektoren in zueinander dualen Körpern“

Rechnen und Operieren in dualen Körpern - Arbeitsblatt

Die beiden platonischen Körper „Hexaeder“ (= Würfel) und „Oktaeder“ sind zueinander „dual“, bzw. es besteht eine „Dualität“ zwischen diesen Polyedern. Das bedeutet, dass man jeweils einen der beiden Körper in den anderen so einschreiben kann, dass die Mittelpunkte der Flächen des größeren Körpers zugleich die Eckpunkte des kleineren, eingeschriebenen Körpers sind.



Aufgabe 1:

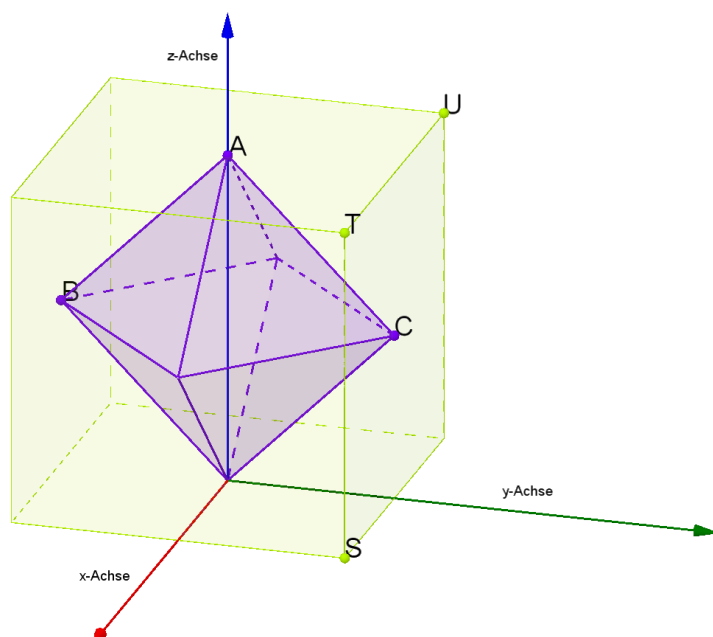
In einen Würfel wird das duale Oktaeder eingeschrieben, wobei die Koordinaten der Ecken A, B und C des Oktaeders folgendermaßen gegeben sind.

$$A = (0|0|4)$$

$$B = (0|-2|2)$$

$$C = (0|2|2)$$

- Berechnet in einem „Schreibgespräch“ die Würfecken S, T und U.
- Ermittle die Parameterform und die Normalvektorform der Ebene, die die Punkte S, T und U beinhaltet. Was fällt dir bei der Normalvektorform auf? Tausche dich darüber mit einem/einer Lernpartner/in aus.
- Berechne den Winkel $\sphericalangle BCA$.



Aufgabe 2:

Dem Würfel wird das duale Oktaeder (hier braun dargestellt) umschrieben, das heißt die Ecken des Würfels sind die Mittelpunkte der Dreiecksflächen des Oktaeders. Dabei gilt: Jeder Vektor vom Mittelpunkt M zu einer Ecke des Würfels steht **im rechten Winkel** zu der Dreiecksfläche des Oktaeders, in der dieser Eckpunkt des Würfels liegt. Zusätzlich sei noch erwähnt, dass beide Polyeder, der Würfel und das Oktaeder, denselben Körpermittelpunkt M besitzen.

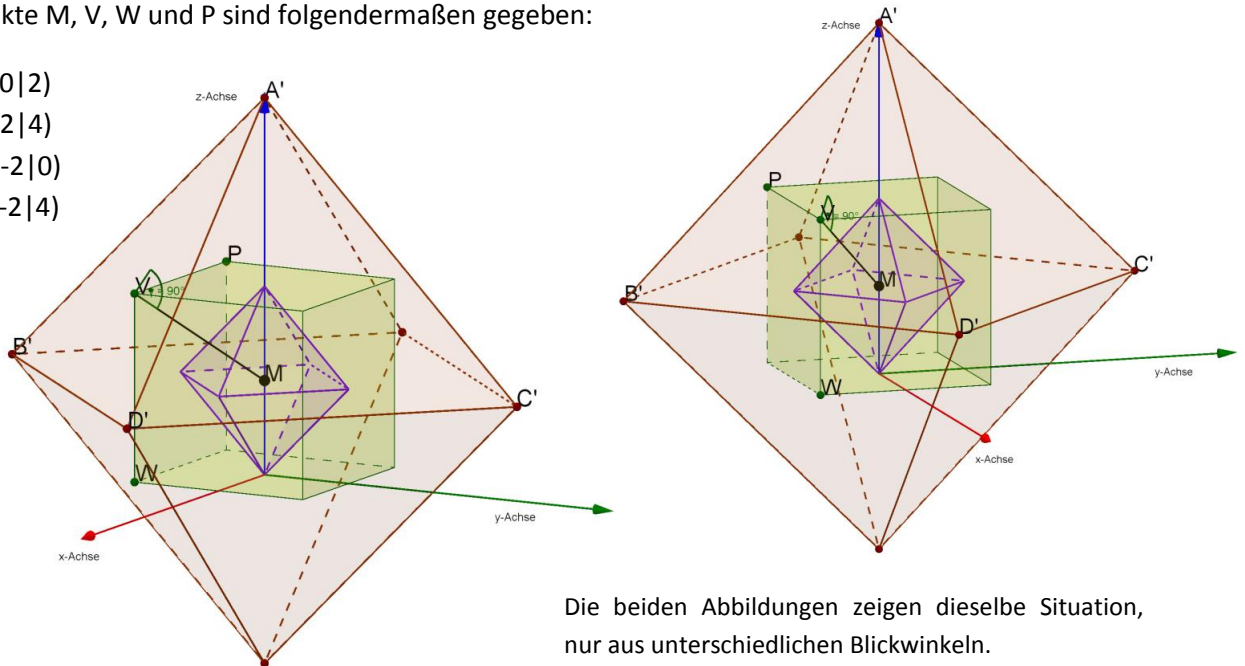
Die Punkte M , V , W und P sind folgendermaßen gegeben:

$$M = (0|0|2)$$

$$V = (2|-2|4)$$

$$W = (2|-2|0)$$

$$P = (-2|-2|4)$$



Die beiden Abbildungen zeigen dieselbe Situation, nur aus unterschiedlichen Blickwinkeln.

→ Berechne die Punkte A' , B' und D' allein UND mit deinen KollegInnen mit der „Ich-Du-Wir-Methode“.

Aufgabe 3:

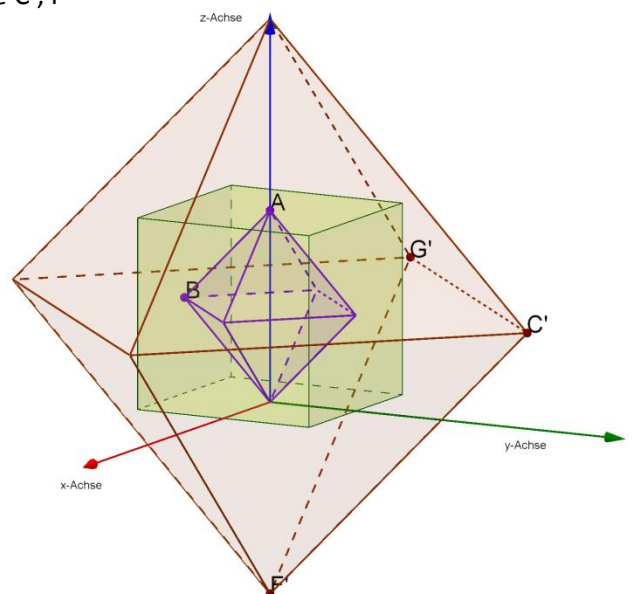
Die Punkte A und B entnimm aus Aufgabe 1. Die Punkte C' , F' und G' wiederum sind folgendermaßen gegeben:

$$C' = (0|6|2)$$

$$F' = (0|0|-4)$$

$$G' = (-6|0|2)$$

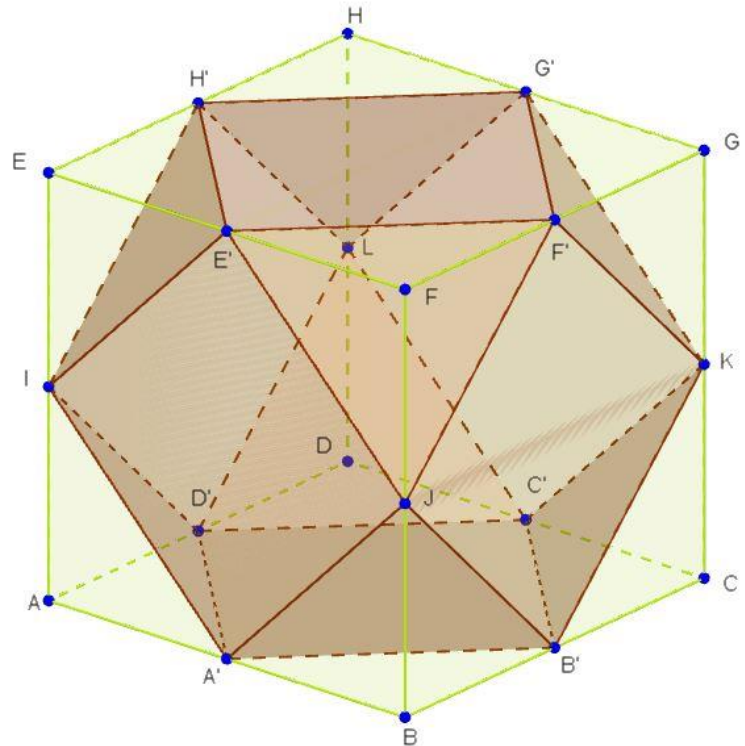
- Gib die Parameterform der Geraden i , die die Strecke AB beinhaltet, der Geraden j , die die Strecke $C'F'$ beinhaltet, und der Geraden k , die die Strecke $G'F'$ beinhaltet, an.
- Bestimme die Lagebeziehung zwischen den Geraden i und j und zwischen den Geraden i und k .



Rechnen und Operieren im Kuboktaeder - Arbeitsblatt

Das Kuboktaeder gehört zu den **archimedischen Körpern**, d.h. es ist ein konvexer Körper, der von regelmäßigen Flächen begrenzt wird und dessen Ecken kongruent sind: In jeder Ecke des Kuboktaeders stoßen abwechselnd zwei Quadrate und zwei gleichseitige Dreiecke zusammen.

Eine Möglichkeit, das Kuboktaeder zu bilden ist, die Kantenmittelpunkte eines Würfels zu bestimmen und jeden dieser Mittelpunkte mit den Mittelpunkten benachbarter Kanten zu verbinden.



Die Punkte I, E', H' und C' sind folgendermaßen gegeben:

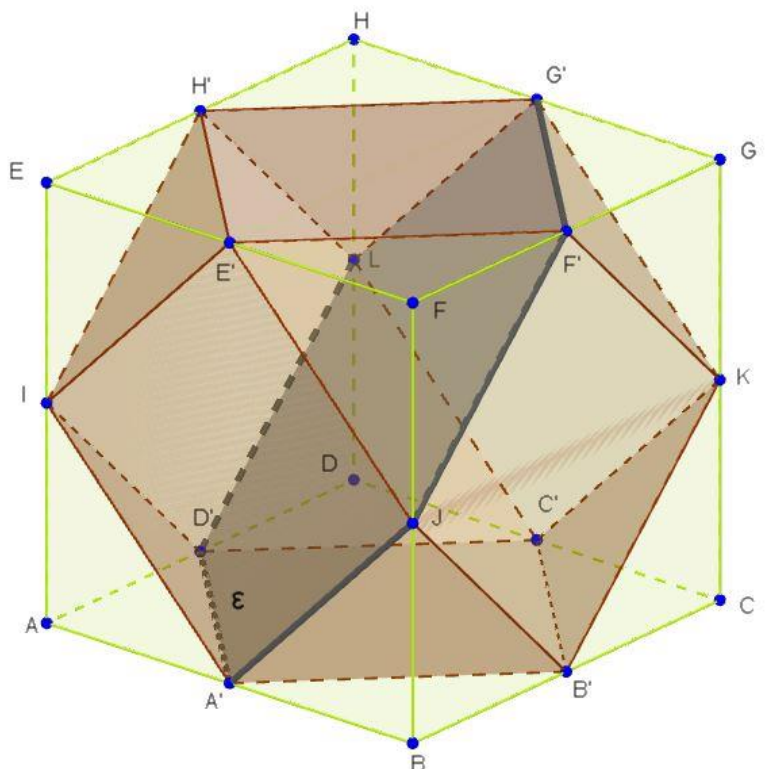
$$\begin{aligned} I &= (0|6|6,3) \\ E' &= (3,75|9,75|11,61) \\ H' &= (-3,75|9,75|11,61) \\ C' &= (-3,75|17,25|1) \end{aligned}$$

Aufgabe 1:

Berechne die Koordinaten des Punktes K.

Aufgabe 2:

Ermittle die Parameterdarstellung der Ebene ε , die die Punkte A', J, F', G', L und D' beinhaltet. Die Ebene ist in der Abbildung rechts grau angedeutet.



10 Quellenverzeichnis

10.1 Literaturverzeichnis

- Adam, P., & Wyss, A. (1994). *Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde*. Bern: Verlag Paul Haupt.
- Akiyama, J., & Matsunaga, K. (2015). *Treks into Intuitive Geometry. The World of Polygons and Polyhedra*. Tokyo/Yokohama: Springer Japan.
- Alexandrow, A. D. (1958). *Konvexe Polyeder*. (W. Süß, Übers.) Berlin: Akademie-Verlag.
- Appel, R. (2013). *3Quarks. Platonische Körper*. Abgerufen am 05. August 2018 von <http://www.3quarks.com/de/PlatonischeKoerper/index.html>
- Barzel, B., Büchter, A., & Leuders, T. (2011). *Mathematik Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe I und II* (6. Ausg.). Berlin: Cornelsen Verlag.
- Bauernfeind, D., & Kerbl, D. (2004). *Beweis der Existenz von genau 5 platonischen Körpern anhand der Eulerschen Polyederformel*. Abgerufen am 25. Juli 2018 von <http://www.risc.jku.at/people/wwindste/Teaching/LogikAlsArbeitssprache/SS04/Papers/0355750+0355507.pdf>
- Bereis, R. (1964). *Darstellende Geometrie I*. Berlin: Akademie-Verlag.
- Beutelspacher, A., & Petri, B. (1989). *Der Goldene Schnitt*. Mannheim/ Wien/ Zürich: Bibliographisches Institut Wissenschaftsverlag.
- BIFIE. (2013). *Bildungsstandards für Mathematik 8. Schulstufe*. Abgerufen am 30. Juli 2018 von https://www.bifie.at/wp-content/uploads/2017/06/bist_m_sek1_kompetenzbereiche_m8_2013-03-28.pdf
- BMBWF. (2018). *Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen, Fassung vom 01.09.2018*. Abgerufen am 27. Juli 2018 von RIS Rechtsinformationssystem des Bundes:
<https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung/Bundesnormen/10008568/Lehrpl%C3%A4ne%20%E2%80%93%20allgemeinbildende%20h%C3%B6here%20Schulen%2c%20Fassung%20vom%2001.09.2018.pdf?FassungVom=2018-09-01>
- Börgens, M. (2018). *Mathematik auf Briefmarken Nr. 95*. Abgerufen am 26. Juli 2018 von <https://homepages-fb.thm.de/boergens/marken/briefmarke095.htm>
- Braehmer, B. (2015). *Digitales Lernverhalten*. Abgerufen am 02. August 2018 von <https://intercessio.de/digitales-lernverhalten-7-ueberraschende-fakten-personaler-wissen/>
- Coxeter, H. S. (1963). *Regular Polytopes*. New York: The Macmillan Company.

- Cromwell, P. R. (1997). *Polyhedra*. Cambridge: University Press.
- Félix, L. (1964). *Géométrie*. Paris: Dunod.
- Fischer, G., Hirzebruch, F., Scharlau, W., & Törnig, W. (1990). *Ein Jahrhundert Mathematik 1890-1990. Festschrift zum Jubiläum der DMV* (Bd. 6 von Dokumente zur Geschichte der Mathematik). Braunschweig/ Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn.
- Gatschelhofer, D. (2015). *Graphentheorie*. Abgerufen am 25. Juli 2018 von Hугepdf: https://hugepdf.com/download/ausarbeitung-5ad5e813b1940_pdf
- Holden, A. (1991). *Shapes, Space, and Symmetry*. New York: Columbia University Press.
- Junker, M. (2009). *Platonische Körper falten*. Abgerufen am 25. Juli 2018 von Mathematik Uni-Freiburg: <http://home.mathematik.uni-freiburg.de/junker/preprints/platonischeKoerper.pdf>
- Kraker, M., Plattner, G., & Preis, C. (2009). *Expedition Mathematik 3*. Wien: E. Dörner.
- Kraker, M., Plattner, G., & Preis, C. (2010). *Expedition Mathematik 4*. Wien: E. Dörner.
- Malle, G., Koth, M., Woschitz, H., Malle, S., Salzger, B., & Ulovec, A. (2012). *Mathematik verstehen 8*. Wien: Österreichischer Bundesverlag.
- Malle, G., Koth, M., Woschitz, H., Malle, S., Salzger, B., & Ulovec, A. (2013). *Mathematik verstehen 7*. Wien: Österreichischer Bundesverlag.
- Meier. (kein Datum). *Polyeder Animationen*. Abgerufen am 05. August 2018 von <http://www.3d-meier.de/Videos/Polyeder/Seite0.html>
- Müller, F. (2007). *Extrusion*. Abgerufen am 25. Juli 2018 von Wikipedia: https://de.wikipedia.org/wiki/Extrusion_%28Geometrie%29#/media/File:Illu_extrusion.gif
- Müller, K. P., & Wölpert, H. (1976). *Anschauliche Topologie. Eine Einführung in die elementare Topologie und Graphentheorie*. Stuttgart: Teubner.
- Müller, R., & Hanisch, G. (2010). *Mathematik 5*. (S. Götz, & H.-C. Reichel, Hrsg.) Wien: Österreichischer Bundesverlag.
- Müller, R., & Hanisch, G. (2010). *Mathematik 6*. (S. Götz, & H.-C. Reichel, Hrsg.) Wien: Österreichischer Bundesverlag.
- Müller-Philipp, S., & Gorski, H.-J. (2009). *Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter* (4. Ausg.). Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- Nowacki, W. (1951). *Moderne Allgemeine Mineralogie (Kristallographie)*. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn.
- o.V. (2018). *Archimedische Körper*. Abgerufen am 25. Juli 2018 von Wikipedia: https://de.wikipedia.org/wiki/Archimedischer_K%C3%B6rper
- o.V. (2018). *Polyeder*. Abgerufen am 25. Juli 2018 von Wikipedia: <https://de.wikipedia.org/wiki/Polyeder>

- o.V. (kein Datum). *Dodekaedernetz*. Abgerufen am 25. Juli 2018 von Natur-Struktur:
<http://www.natur-struktur.ch/download/bastelbogen/dodekaeder.pdf>
- o.V. (kein Datum). *Geschichte der platonischen Körper*. Abgerufen am 25. Juli 2018 von Mathematik Uni-Ulm: http://www.mathematik.uni-ulm.de/ReineMath/mitarbeiter/lubo/ss07/files/Folien_Ulrich.pdf
- o.V. (kein Datum). *Konvexe Polyeder*. (TU Freiberg) Abgerufen am 25. Juli 2018 von Mathematik TU-Freiberg: <http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/konvex.html>
- o.V. (kein Datum). *Planare Graphen - die Eulersche Polyederformel*. Abgerufen am 25. Juli 2018 von Christiani Hochschule Technik: http://www.hochschule-technik.de/pdf/92880_probe.pdf
- o.V. (kein Datum). *Polyedrische Modelle. Johnson- und Catalan-Körper*. Abgerufen am 25. Juli 2018 von Bilder der Mathematik: http://www.bilder-der-mathematik.de/picturebook/pages/picturebook_pages_8_9.pdf
- Oellinger, G. (2017). *Räumliches Denken. Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens*. Abgerufen am 26. Juli 2018 von <https://www.mamiweb.de/familie/raeumliches-denken-entwicklung-des-raeumlichen-vorstellungsvermoegens/1>
- Roman, T. (1987). *Reguläre und halbrekuläre Polyeder* (2. Ausg.). Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.
- Salzger, B., Bachmann, J., Germ, A., Riedler, B., Singer, K., & Ulovec, A. (2014). *Mathematik verstehen 1*. Wien: Österreichischer Bundesverlag.
- Salzger, B., Bachmann, J., Germ, A., Riedler, B., Singer, K., & Ulovec, A. (2015). *Mathematik verstehen 2*. Wien: Österreichischer Bundesverlag.
- Schröder, E. (1980). *DÜRER Kunst und Geometrie. Dürers künstlerisches Schaffen aus der Sicht seiner »Underweysung«*. Basel/ Boston/ Stuttgart: Birkhäuser Verlag.
- Steffen. (2016). *Johnson-Polyeder*. Abgerufen am 25. Juli 2018 von Mathematik alpha: <https://mathematikalpha.de/wp-content/uploads/2016/12/13-Johnson.pdf>
- Tóth, L. F. (1965). *Reguläre Figuren*. Budapest: Akadémiai Kiadó.
- Wenninger, M. J. (1971). *Polyhedron Models*. Cambridge: University Press.
- Winchell, A. N., & Winchell, H. (1967). *Elements of Optical Mineralogy. An Introduction to Microscopic Petrography* (4. Ausg.). New York: John Wiley & Sons, Inc.

10.2 Abbildungsverzeichnis

Letzter Zugriff auf alle Onlinequellen im Abbildungsverzeichnis: 25.07.2018

Abbildungen, die im Folgenden nicht aufgelistet sind, wurden aus eigener Hand erstellt.

KAPITEL 1:

Abb. 1 – Nicht planarer und planarer Graph:

http://www.boost.org/doc/libs/1_49_0/libs/graph/doc/figs/planar_plane_straight_line.png

Abb. 2 – Durchstanzter Würfel: <http://www.natur-struktur.ch/viren/images/url.jpg>

KAPITEL 2:

Abb. 3 – Hexaeder: http://www.spagne.nl/data/image/hexaeder_198.jpg

Abb. 4 – Netz des Würfels:

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/cf/Hexahedron_flat_color.svg

Abb. 5 – Alle Würfelnetze: Bereis 1964, 124

Abb. 6 – Tetraeder: <http://rechneronline.de/pi/img/tetrahedron.png>

Abb. 7 – Alle Tetraedernetze: Bereis 1964, 120

Abb. 8 – Oktaeder: <http://www.schulbilder.org/malvorlage-geometrische-figur-oktaeder-i19237.html>

Abb. 9 – Alle Oktaedernetze: Bereis 1964, 127

Abb. 10 – Dodekaeder: <https://www.waldorf-ideen-pool.de/Schule/faecher/formenzeichnen-geometrie/MITTELSTUFE/Formensammlung/Platonische-Koerper/die-platonischen-koerper-in-der-achten-klasse>

Abb. 11 – Dodekaedernetz: Bereis 1964, 130

Abb. 12 – Ikosaeder: <http://www.grah.ch/kompetenzen/konzeption-standardapplikation/ikosaeder/>

Abb. 13 – Ikosaedernetz: <http://www.stroems.de/main/Solids/Images/Ikosae.gif>

Abb. 14 – Winkeldefekt größer 0° ermöglicht räumliche Ecke: http://www.mathematik.uni-marburg.de/~bschwarz/Sem_09W_files/03%20Irina%20Kaiser%20-%20Platonische%20K%C3%B6rper%20-%20Ausarbeitung.pdf

Abb. 15 – Dualität zwischen den Platonischen Körpern: <http://www.herzresonanz.info/wp-content/uploads/2012/11/duale-K%C3%B6rper.png>

Abb. 16 – Dualität zwischen den Platonischen Körpern: <http://www.herzresonanz.info/wp-content/uploads/2012/11/duale-K%C3%B6rper.png>

Abb. 17 – Dualität zwischen den Platonischen Körpern: <http://www.herzresonanz.info/wp-content/uploads/2012/11/duale-K%C3%B6rper.png>

Abb. 18 – Dualität zwischen den Platonischen Körpern: <http://www.herzresonanz.info/wp-content/uploads/2012/11/duale-K%C3%B6rper.png>

Abb. 19 – Dualität zwischen den Platonischen Körpern: <http://www.herzresonanz.info/wp-content/uploads/2012/11/duale-K%C3%B6rper.png>

Abb. 20 – Dualität zwischen den Platonischen Körpern: <http://www.herzresonanz.info/wp-content/uploads/2012/11/duale-K%C3%B6rper.png>

Abb. 21 – Dualität zwischen den Platonischen Körpern: <http://www.herzresonanz.info/wp-content/uploads/2012/11/duale-K%C3%B6rper.png>

Abb. 22 – Dualität zwischen den Platonischen Körpern: <http://www.herzresonanz.info/wp-content/uploads/2012/11/duale-K%C3%B6rper.png>

Abb. 23 – Dualität zwischen den Platonischen Körpern: <http://www.herzresonanz.info/wp-content/uploads/2012/11/duale-K%C3%B6rper.png>

Abb. 24 – Dualität zwischen den Platonischen Körpern: <http://www.herzresonanz.info/wp-content/uploads/2012/11/duale-K%C3%B6rper.png>

Abb. 25 – Dualität zwischen den Platonischen Körpern: <http://www.herzresonanz.info/wp-content/uploads/2012/11/duale-K%C3%B6rper.png>

Abb. 26 – Dualität zwischen den Platonischen Körpern: <http://www.herzresonanz.info/wp-content/uploads/2012/11/duale-K%C3%B6rper.png>

KAPITEL 3:

Abb. 21 – Extrusion:

https://de.wikipedia.org/wiki/Extrusion_%28Geometrie%29#/media/File:Illu_extrusion.gif

Abb. 22 – Prisma und Antiprisma: Müller/ Wölpert 1976, 143

Abb. 23 – Abstumpfung durch Durchschnittsbildung von Würfel und Oktaeder: Adam/ Wyss 1994, 50

Abb. 24 – Hexaederstumpf:

https://de.wikipedia.org/wiki/Kuboktaeder#/media/File:Uniform_polyhedron-43-t01.svg

Abb. 25 – Oktaederstumpf:

https://de.wikipedia.org/wiki/Kuboktaeder#/media/File:Uniform_polyhedron-43-t12.svg

Abb. 26 – Lückenloses Füllen des Raums mit Oktaederstümpfen: https://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/O/Origami_im_Raum/Origami_im_Raum-Dateien/image026.png

Abb. 27 – Kuboktaeder: https://de.wikipedia.org/wiki/Kuboktaeder#/media/File:Uniform_polyhedron-43-t1.svg

Abb. 28 – Dodekaederstumpf:
<https://de.wikipedia.org/wiki/Dodekaederstumpf#/media/File:Truncateddodecahedron.jpg>

Abb. 29 – Ikosaederstumpf:
<https://de.wikipedia.org/wiki/Ikosaederstumpf#/media/File:Truncatedicosahedron.jpg>

Abb. 30 – Ikosidodekaeder:
<https://de.wikipedia.org/wiki/Ikosidodekaeder#/media/File:Icosidodecahedron.jpg>

Abb. 31 – Tetraederstumpf:
<https://de.wikipedia.org/wiki/Tetraederstumpf#/media/File:Truncatedtetrahedron.jpg>

Abb. 32 – Rhombenkuboktaeder:
<https://de.wikipedia.org/wiki/Rhombenkuboktaeder#/media/File:Rhombicuboctahedron.jpg>

Abb. 33 – Kuboktaederstumpf:
https://de.wikipedia.org/wiki/Gro%C3%9Fes_Rhombenkuboktaeder#/media/File:Truncatedcuboctahedron.jpg

Abb. 34 – Rhombenikosidodekaeder:
<https://de.wikipedia.org/wiki/Rhombenikosidodekaeder#/media/File:Rhombicosidodecahedron.jpg>

Abb. 35 – Ikosidodekaederstumpf:
https://de.wikipedia.org/wiki/Gro%C3%9Fes_Rhombenikosidodekaeder#/media/File:Truncatedicosidodecahedron.jpg

Abb. 36 – Cubus simus:
https://de.wikipedia.org/wiki/Abgeschr%C3%A4gtes_Hexaeder#/media/File:Snubhexahedroncw.jpg

Abb. 37 – Cubus simus mit Rechts- bzw. Linksdrall:
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/9d/Snubcubes_in_grCO.svg

Abb. 38 – Dodecaedron simum:
https://de.wikipedia.org/wiki/Abgeschr%C3%A4gtes_Dodekaeder#/media/File:Snubdodecahedronccw.jpg

Abb. 39 – Dodecaedron simum 2:
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/0/0b/Snub_dodecahedron_cw.png/120px-Snub_dodecahedron_cw.png

Abb. 40 – Triakisoktaeder:
<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/a/a8/Triakisoctahedron.jpg/220px-Triakisoctahedron.jpg>

Abb. 41 – Tetrakishexaeder:
<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/61/Tetrakisshexahedron.jpg/220px-Tetrakisshexahedron.jpg>

Abb. 42 – Rhombendodekaeder:
<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/ba/Rhombicdodecahedron.jpg>

Abb. 43 – Lückenloses Füllen des Raums mit Rhombendodekaedern: https://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/O/Origami_im_Raum/Origami_im_Raum-Dateien/image024.png

Abb. 44 – Triakisikosaeder:
<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/d/dd/Triakisicosahedron.jpg/220px-Triakisicosahedron.jpg>

Abb. 45 – Pentakisdodekaeder:
<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/0/03/Pentakisdodecahedron.jpg/220px-Pentakisdodecahedron.jpg>

Abb. 46 – Triakontaederrhombus:
<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/2c/Rhombictriacontahedron.svg/2000px-Rhombictriacontahedron.svg.png>

Abb. 47 – Triakistetraeder:
<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/d/de/Triakistetrahedron.jpg/220px-Triakistetrahedron.jpg>

Abb. 48 – Deltoidikositetraeder:
<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/1d/Deltoidalicositetrahedron.jpg/220px-Deltoidalicositetrahedron.jpg>

Abb. 49 – Hexakisoktaeder:

<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/10/Disdyakisdodecahedron.jpg/220px-Disdyakisdodecahedron.jpg>

Abb. 50 – Deltoidhexakontaeder:

<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/ef/Deltoidalhexecontahedron.jpg/220px-Deltoidalhexecontahedron.jpg>

Abb. 51 – Hexakisikosaeder:

<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e5/Disdyakistriacontahedron.jpg>

Abb. 52 – Pentagonikositetraeder:

<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/8/8b/Pentagonalicositetrahedroncw.jpg/220px-Pentagonalicositetrahedroncw.jpg>

Abb. 53 – Pentagonhexakontaeder:

<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/9/90/Pentagonalhexecontahedronccw.jpg/220px-Pentagonalhexecontahedronccw.jpg>

Abb. 54 – Teilung von Oktaeder und Ikosaeder in die jeweiligen Elementarpolyeder:

<http://www.swetzel.ch/geomgeb/platonisch/platonisch.html>

Abb. 55 – Dreieckskuppel, J_3 : https://de.wikipedia.org/wiki/Johnson-K%C3%B6rper#/media/File:Triangular_cupola.png

Abb. 56 – Quadratkuppel, J_4 : https://de.wikipedia.org/wiki/Johnson-K%C3%B6rper#/media/File:Square_cupola.png

Abb. 57 – Fünfeckskuppel, J_5 : https://de.wikipedia.org/wiki/Johnson-K%C3%B6rper#/media/File:Pentagonal_cupola.png

Abb. 58 – Triangulare Bipyramide, J_{12} :

https://de.wikipedia.org/wiki/Deltaeder#/media/File:Triangular_dipyramid.png

Abb. 59 – Pentagonale Bipyramide, J_{13} :

https://de.wikipedia.org/wiki/Deltaeder#/media/File:Pentagonal_dipyramid.png

Abb. 60 – Dreifach erweitertes Dreiecksprisma, J_{51} :

https://de.wikipedia.org/wiki/Deltaeder#/media/File:Triaugmented_triangular_prism.png

Abb. 61 – Zweifach erweitertes Antiprisma, J_{17} :

https://de.wikipedia.org/wiki/Deltaeder#/media/File:Gyroelongated_square_dipyramid.png

Abb. 62 – Trigondodekaeder, J_{84} :

https://de.wikipedia.org/wiki/Deltaeder#/media/File:Snub_disphenoid.png

Abb. 63 – Einteilungen konvexer Polyeder mit regulären Flächen: Cromwell 1997, 90

KAPITEL 4:

Abb. 64 – Cuprit: http://www.gimizu.de/kabinett/pics_4a/4_042.jpg

Abb. 65 – Flussspat: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/24/Fluorite-191782.jpg/400px-Fluorite-191782.jpg>

Abb. 66 – Granat: <https://www.mineralicon.de/Grossular-Braun-Granat-Kristall-aus-Mali-38-Carat>

Abb. 67 – Pyrit: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5c/Pyrite_elbe.jpg

Abb. 68 – Kristalle vom „Bushy stunt“-Virus: Nowacki 1951, 58

KAPITEL 5:

Abb. 69 – Rhombenkuboktaeder:

<https://de.wikipedia.org/wiki/Rhombenkuboktaeder#/media/File:Rhombicuboctahedron.jpg>

Abb. 70 – Pseudo-Rhombenkuboktaeder:

https://de.wikipedia.org/wiki/Archimedischer_K%C3%B6rper#/media/File:Elongated_square_gyrotruncated_cuboctahedron.png

Abb. 71 – Melencolia I: <http://www.unterricht.kunstbrowser.de/images/melencoliagesamt.jpg>

KAPITEL 6:

- Abb. 72 – Geometrische Körper an Alltagsgegenständen erkennen: Salzger et al. 2014, 231
Abb. 73 – Volumsberechnungen an Quadern: Salzger et al. 2014, 247
Abb. 74 – Übungsbeispiele zum Kongruenzbegriff: Salzger et al. 2015, 160
Abb. 75 – Übungsbeispiel zum Erkennen von Prismen: Salzger et al. 2015, 247
Abb. 76 – Besondere Eigenschaften von Vielecken: Salzger et al. 2015, 237
Abb. 77 – Konvexität 1: Salzger et al. 2015, 209
Abb. 78 – Konvexität 2: Salzger et al. 2015, 235
Abb. 79 – Fußball in Form eines Ikosaederstumpfs: Salzger et al. 2015, 243
Abb. 80 – Arbeiten mit Variablen und konvexen Polyedern: Kraker, Plattner, Preis 2009, 101
Abb. 81 – Schrägriss eines Prismas zeichnen: Kraker, Plattner, Preis 2009, 81
Abb. 82 – Den Lehrsatz des Pythagoras bei Polygonen einsetzen: Kraker, Plattner, Preis 2009, 259
Abb. 83 – Den Lehrsatz des Pythagoras bei Polyedern einsetzen: Kraker, Plattner, Preis 2010, 99
Abb. 84 – Berechnungen an der Kugel durchführen: Kraker, Plattner, Preis 2010, 219
Abb. 85 – Funktionen bei Polyedern einsetzen: Kraker, Plattner, Preis 2010, 117
Abb. 86 – Sinus, Cosinus und Tangens bei Polyedern einsetzen: Müller & Hanisch, Mathematik 5, 2010, 199
Abb. 87 – Vektoren bei Polygonen einsetzen: Müller & Hanisch, Mathematik 5, 2010, 255
Abb. 88 – Gleichungen bei Polygonen: Müller & Hanisch, Mathematik 5, 2010, 95
Abb. 89 – Vektoren bei Tetraedern einsetzen: Müller & Hanisch, Mathematik 6, 2010, 61
Abb. 90 – Reihen bei Polygonen einsetzen: Müller & Hanisch, Mathematik 6, 2010, 136
Abb. 91 – Funktionen ausgehend von Polyedern erstellen und untersuchen: Malle, et al. 2013, 50
Abb. 92 – Extremwertaufgabe zum Quader: Malle, et al. 2013, 68
Abb. 93 – Extremwertaufgabe zur Pyramide: Malle, et al. 2013, 95
Abb. 94 – Änderungsgeschwindigkeit der Befüllung eines polyedrischen Gefäßes bestimmen: Malle, et al. 2013, 100
Abb. 95 – Herleitung der Volumsformel einer Pyramide: Malle, et al. 2012, 37
Abb. 96 – Verwendung von Vektoren beim Würfel: Malle, et al. 2012, 182
Abb. 97 – Verwendung von Vektoren beim Tetraeder: Malle, et al. 2012, 188
Abb. 98 – Berechnungen an einer rechteckigen Pyramide: Malle, et al. 2012, 183

KAPITEL 9:

Anhang zu Stationenbetrieb „Archimedische und dual-archimedische Körper“:

Arbeitsblatt:

Neu sind hier die Abbildungen von Hexaederstumpf und Oktaederstumpf, die aus diesem Blickwinkel zwar weniger leicht zu erkennen sind, aber dennoch ausgewählt wurden, um eine Einheitlichkeit des Arbeitsblattes gewährleisten zu können. Die Bildquellen der auf dem Arbeitsblatt von oben nach unten angeordneten Polyeder lauten wie folgt: siehe Abb.52, siehe Abb. 53, Oktaederstumpf:

<https://de.wikipedia.org/wiki/Oktaederstumpf#/media/File:Truncatedoctahedron.jpg>, Hexaederstumpf:

<https://de.wikipedia.org/wiki/Hexaederstumpf#/media/File:Truncatedhexahedron.jpg>, siehe Abb. 46, siehe Abb. 50, siehe Abb. 30, siehe Abb. 31, siehe Abb. 48, siehe Abb. 42.

Polyedernetze:

Abb. 99 – Polyeder ,0‘:

https://de.wikipedia.org/wiki/Deltoidalikositetraeder#/media/File:Deltoidalicositetraeder_net.png

Abb. 100 – Polyeder ,1‘:

<https://www.skytower.org/~ernstjgtremel/lib/exe/fetch.php?cache=&media=hexaeder:stumpf:netz-hexaeder-mit-abgeschnittenen-ecken.png>

Abb. 101 – Polyeder ,2‘:

https://de.wikipedia.org/wiki/Pentagonhexakontaeder#/media/File:Pentagonalhexecontahedron_net.png

Abb. 102 – Polyeder ,4‘:

<https://www.skytower.org/~ernstjgtremel/lib/exe/fetch.php?cache=&media=oktaeder:oktaederstumpf:netz-sechseckoktaeder.png>

Abb. 103 – Polyeder ,5‘:

https://de.wikipedia.org/wiki/Deltoidalhexakontaeder#/media/File:Deltoidalhexecontahedron_net.png

Abb. 104 – Polyeder ,6‘:

https://de.wikipedia.org/wiki/Pentagonikositetraeder#/media/File:Pentagonalicositetrahedron_net.png

Abb. 105 – Polyeder ,7‘:

https://de.wikipedia.org/wiki/Rhombentriakontaeder#/media/File:Rhombictriacontahedron_net.svg

Abb. 106 – Polyeder ,8‘: <https://www.korthalsaltes.com/pdf/icosidodecahedron.pdf>

Abb. 107 – Polyeder ,9‘:

<https://www.skytower.org/~ernstjgtremel/lib/exe/fetch.php?media=tetraeder:stumpf:netz-tetraeder-mit-abgeschnittenen-ecken.pdf>

Anhang zu „Beweis über die Anzahl der platonischen Körper“:

Arbeitsblatt:

Abbildung von den fünf platonischen Körpern: <https://www.ersonnen.de/basis/>