Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2014**

Einführung in die mathematische Logik

Vorlesung 4

Der Vollständigkeitssatz der Aussagenlogik I

Wir zeigen, dass für die Aussagenlogik die Ableitbarkeitsbeziehung mit der Folgerungsbeziehung übereinstimmt. Im Beweisaufbau orientieren wir uns an dem Vollständigkeitssatz für die Prädikatenlogik.

DEFINITION 4.1. Eine Teilmenge $\Gamma \subseteq L^V$ zu einer Menge V an Aussagenvariablen heißt *maximal widerspruchsfrei*, wenn Γ widerspruchsfrei ist und jede echt größere Menge $\Gamma \subset \Gamma'$ widersprüchlich ist.

LEMMA 4.2. *Es sei L^V die Sprache der Aussagenlogik zu einer Aussagenvariablenmenge V und es sei β eine Wahrheitsbelegung der Variablen mit zugehöriger Interpretation I. Dann ist $I^{\vDash}$ maximal widerspruchsfrei.*

Beweis. Siehe Aufgabe 4.1. □

LEMMA 4.3. *Es sei V eine Menge an Aussagevariablen und $\Gamma \subseteq L^V$ eine maximal widerspruchsfreie Teilmenge der zugehörigen Sprache der Aussagelogik. Dann gelten folgende Aussagen.*

1. *Für jedes $\alpha \in L^V$ ist entweder $\alpha \in \Gamma$ oder $\neg\alpha \in \Gamma$.*
2. *Aus $\Gamma \vdash \alpha$ folgt $\alpha \in \Gamma$.*
3. *Es ist $\alpha \wedge \beta \in \Gamma$ genau dann, wenn $\alpha \in \Gamma$ und $\beta \in \Gamma$.*
4. *Es ist $\alpha \vee \beta \in \Gamma$ genau dann, wenn $\alpha \in \Gamma$ oder $\beta \in \Gamma$.*
5. *Es ist $\alpha \rightarrow \beta \in \Gamma$ genau dann, wenn $\alpha \notin \Gamma$ oder $\beta \in \Gamma$.*

Beweis. (1). Wegen der Widerspruchsfreiheit kann nicht p als auch $\neg p$ zu Γ gehören. Wenn weder p noch $\neg p$ zu Γ gehören, so ist entweder $\Gamma \cup \{p\}$ oder $\Gamma \cup \{\neg p\}$ widerspruchsfrei. Wären nämlich beide widersprüchlich, so würde für einen beliebigen Ausdruck q sowohl

$$\Gamma \cup \{p\} \vdash q$$

als auch

$$\Gamma \cup \{\neg p\} \vdash q$$

gelten. Dies bedeutet

$$\Gamma \vdash p \rightarrow q$$

und

$$\Gamma \vdash \neg p \rightarrow q\,,$$

woraus aufgrund der Fallunterschiedungsregel

$$\Gamma \vdash q$$

folgt. Dies bedeutet aber, dass Γ widersprüchlich ist. (2). Sei $\Gamma \vdash p$. Nach (1) ist $p \in \Gamma$ oder $\neg p \in \Gamma$. Das zweite kann nicht sein, da sich daraus sofort ein Widerspruch ergeben würde. Also ist $p \in \Gamma$. Wenn $\alpha \wedge \beta \in \Gamma$ ist, so folgt, da $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$ und $\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$ Tautolgien sind, nach (2), dass α und β zu Γ gehören. Nehmen wir umgekehrt an, dass $\alpha, \beta \in \Gamma$ ist, aber $\alpha \wedge \beta \notin \Gamma$. Dann ist nach (1) $\neg(\alpha \wedge \beta) \in \Gamma$. Nach (2) ist somit $(\neg\alpha) \vee (\neg\beta) \in \Gamma$ bzw. $\alpha \rightarrow \neg\beta \in \Gamma$. Wegen $\alpha \in \Gamma$ ergibt sich nach (2) die Zugehörigkeit $\neg\beta \in \Gamma$ im Widerspruch zur Voraussetzung. (4) folgt aus (3) durch Negation unter Verwendung von (1). (5) folgt aus (4). $\square$

Oben haben wir gesehen, dass Interpretationen maximal widerspruchsfreie Ausdrucksmengen liefern. Davon gilt auch die Umkehrung.

LEMMA 4.4. *Es sei V eine Menge an Aussagevariablen und $\Gamma \subseteq L^V$ eine maximal widerspruchsfreie Teilmenge der zugehörigen Sprache der Aussagelogik. Dann ist Γ erfüllbar.*

Beweis. Da Γ maximal widerspruchsfrei ist, gilt für jede Variable die Alternative $p \in \Gamma$ oder $\neg p \in \Gamma$. Wegen der Widerspruchsfreiheit kann nicht beides gelten, wenn beide Aussagen nicht zu Γ gehören würden, könnte man die echt größere Menge $\Gamma \cup \{p\}$ betrachten, die ebenfalls widerspruchsfrei wäre. Wir betrachten nun die Wahrheitsbelegung

$$\beta(p) = \begin{cases} 1 \text{ falls } p \in \Gamma \\ 0 \text{ falls } \neg p \in \Gamma\,. \end{cases}$$

Wir behaupten

$$I^{\vDash} = \Gamma,$$

was wir über den Aufbau der Sprache beweisen. Der Induktionsanfang ist durch die gewählte Belegung gesichert, der Induktionsschritt folgt aus Lemma 4.3. $\square$

Wir wollen zeigen, dass jede widerspruchsfreie Ausdrucksmenge erfüllbar ist. Die Strategie ist hierbei, sie zu einer maximal widerspruchsfreien Ausdrucksmenge aufzufüllen und dann die vorstehende Aussage anzuwenden. Wir unterscheiden die beiden Fälle, wo die Aussagenvariablenmenge abzählbar ist und den allgemeinen Fall einer beliebigen Aussagenvariablenmenge. Letzteres erfordert stärkere mengentheoretische Hilfsmittel, nämlich das Lemma von Zorn.

LEMMA 4.5. *Es sei V eine abzählbare Menge an Aussagevariablen und $\Gamma \subseteq L^V$ eine widerspruchsfreie Teilmenge der zugehörigen Sprache der Aussagelogik. Dann kann man Γ durch Hinzunahme von entweder p_n oder $\neg p_n$ und durch Abschluss unter der Ableitungsbeziehung zu einer maximal widerspruchsfreien Teilmenge $\Gamma' \supseteq \Gamma$ ergänzen.*

Beweis. Die Voraussetzung bedeutet gerade, dass $\Gamma_0 = \Gamma^{\vdash}$ keinen Widerspruch enthält. Wir konstruieren eine (endliche oder abzählbar unendliche) Folge von aufsteigenden widerspruchsfreien Teilmengen $\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1}$, wobei in Γ_n für jede Variable p_i, $1 \leq i \leq n$, die Alternative entweder $p_i \in \Gamma_n$ oder $\neg p_i \in \Gamma_n$ gilt. Das Konstruktionsverfahren und diese Aussage beweisen wir durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Für Γ_0 ist dies richtig. Sei Γ_n schon konstruiert. Bei $p_{n+1} \in \Gamma_n$ oder $\neg p_{n+1} \in \Gamma_n$ setzen wir

$$\Gamma_{n+1} := \Gamma_n.$$

Wegen der Widerspruchsfreihet von Γ_n können nicht sowohl p_{n+1} als auch $\neg p_{n+1}$ zu Γ_n gehören. Wenn weder p_{n+1} noch $\neg p_{n+1}$ zu Γ_n gehört, so setzen wir

$$\Gamma_{n+1} := (\Gamma_n \cup p_{n+1})^{\vdash}$$

(man könnte genauso gut $\neg p_{n+1}$ hinzunehmen). Nach Konstruktion ist Γ_{n+1} abgeschlossen unter der Ableitungsbeziehung und erfüllt die Alternative für alle Variablen p_i, $i \leq n$. Wenn Γ_{n+1} widersprüchlich wäre, so gelte insbesondere $\Gamma_n, p_{n+1} \vdash \neg p_{n+1}$. Dann würde aber auch $\Gamma_n \vdash p_{n+1} \to \neg p_{n+1}$ gelten und somit nach der Fallunterscheidungsregel auch $\Gamma_n \vdash \neg p_{n+1}$, also $\neg p_{n+1} \in \Gamma_n$ im Widerspruch zu dem Fall, in dem wir uns befinden. □

Beispiel 4.6. Wir betrachten die Aussagenvariablenmenge $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ und die Ausdrucksmenge

$$\Gamma = \{p_1 \to p_2,\ p_2 \to p_3,\ p_3 \to p_4,\ \ldots\}.$$

Diese wollen wir zu einer maximal widerspruchsfreien Menge gemäß Lemma 4.5 ergänzen. Wenn wir im ersten Schritt p_1 hinzunehmen, so ergibt sich sukzessive $p_i \in \Gamma_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Es ist dann Γ_1 schon maximal widerspruchsfrei. Wählt man hingegen im ersten Schritt $\neg p_1$, so gehört weder p_2 noch $\neg p_2$ zu Γ_1. Beim zweiten Schritt hat man dann die Freiheit, ob man ist p_2 oder $\neg p_2$ zur Definition von Γ_2 hinzunimmt.

Abbildungsverzeichnis