Exkurs: Komplexifizieren von $\mathbb{R}$-Bilinearformen

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. $V_{\mathbb{C}} := \{u + iv \mid u, v \in V\} = (V \times V)$.
Addition und Muptiplikation :

- $u + iv + u' + iv' = (u + u') + i(v + v')$.
- Für $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ wir definieren $(\alpha + i\beta)(u + iv) = (\alpha u - \beta v) + i(\alpha v + \beta u)$.

Wir haben letztes Mal gesehen, dass wir jedem Endomorphismus $\phi : V \to V$ einen eindeutigen Endomorphismus $\phi_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ zuordnen können, sodass $\phi_{\mathbb{C}}$ eingeschränkt auf $\{u + i\vec{0} \mid u \in V\}$ mit ϕ übereinstimmt (wenn wir den Untervektorraum $\{u + i\vec{0} \mid u \in V\}$ wie folgt natürlich mit V identifizieren: das Element $u + i\vec{0}$ identifizieren wir mit $u \in V$).

Bemerkung. Letztes mal haben wir jedoch dieses Ergebnis anders formuliert: Wir haben gezeigt, dass die Abbildung $\phi_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$, definiert durch

$$\phi_{\mathbb{C}}(u + iv) = \phi(u) + i\phi(v) \qquad (*)$$

ein Endomorphismus von $V_{\mathbb{C}}$ ist.

Dieser Endomorphismus hat offensichtlich die Eigenschaft, dass er eingeschränkt auf $\{u + i\vec{0} \mid u \in V\}$ mit ϕ übereinstimmt. In der Tat, wenn wir einen Vektor der Form $u + i\vec{0}$ in $(*)$ einsetzen, bekommen wir den Vektor $\phi_{\mathbb{C}}(u + i\vec{0}) = \phi(u) + i\vec{0}$, den wir mit $\phi(u)$ identifiziert haben.

Bemerkung. Letztes mal haben wir jedoch dieses Ergebnis anders formuliert: Wir haben gezeigt, dass die Abbildung $\phi_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$, definiert durch

$$\phi_{\mathbb{C}}(u + iv) = \phi(u) + i\phi(v) \qquad (*)$$

ein Endomorphismus von $V_{\mathbb{C}}$ ist.
Dieser Endomorphismus hat offensichtlich die Eigenschaft, dass er eingeschränkt auf $\{u + i\vec{0} \mid u \in V\}$ mit ϕ übereinstimmt. In der Tat, wenn wir einen Vektor der Form $u + i\vec{0}$ in $(*)$ einsetzen, bekommen wir den Vektor $\phi_{\mathbb{C}}(u + i\vec{0}) = \phi(u) + i\vec{0}$, den wir mit $\phi(u)$ identifiziert haben.

Fortsetzung der Bemerkung. Dass ein solcher Endomorphismus von $V_{\mathbb{C}}$ (d.h. einer mit der Eigenschaft, dass die Einschränkung auf $\{u + i\vec{0} \mid u \in V\}$ mit ϕ übereinstimmt) eindeutig ist, folgt (mindestens für endlichdimensionale Vektorräume) aus der letztes Mal bewiesenen Aussage, dass für eine Basis $(b_1, ..., b_n)$ von V das Tupel $(b_1 + i\vec{0}, ..., b_n + i\vec{0})$ eine Basis von $V_{\mathbb{C}}$ ist. Da die Bilder von Basiselementen einen Endomorphismus eindeutig bestimmen, gibt es höchstens einen Endomorphismus von $V_{\mathbb{C}}$ mit der Eigenschaft, dass die Beschränkung auf $\{u + i\vec{0} \mid u \in V\}$ mit ϕ übereinstimmt.

Kann man die Bilinearformen und eventuell das Skalarprodukt komplexifizieren?

Zwischenfrage: Was sollte man dazu verlangen? Beim Komplexifizieren von Endomorphismen haben wir verlangt/erreicht, dass

1. $\phi_{\mathbb{C}}$ mit ϕ auf Vektoren der Form $u + i\vec{0}$ übereinstimmt und dass
2. $\phi_{\mathbb{C}}$ ein Endomorphismus ist.

Wenn wir analog vorgehen, sollten wir auch beim Komplexifizieren einer Bilinearform verlangen, dass (für eine Bilinearform σ auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum V)

1. $\sigma_{\mathbb{C}}$ mit σ auf Vektoren der Form $u + i\vec{0}$ übereinstimmt und dass
2. $\sigma_{\mathbb{C}}$ eine Bilinearform ist.

Das ist ein sinnvoller Vorschlag. Der Nachteil davon ist, dass die positive Definitheit für Bilinearformen über $\mathbb{C}$ sinnlos ist und man deswegen ein Skalarprodukt (und das ist die „nützliche“ Bilinearform) nicht unter Verlangen von (1), (2) so komplexifizieren kann, dass die positive Definitheit erfüllt ist.

Warum gibt es kein Skalarprodukt auf einem nichtrivialen $\mathbb{C}$-Vektorraum? Weil für ein $v \neq 0$ und $\forall c \neq 0$ gilt: $\langle v, v\rangle > 0$ und $\langle cv, cv\rangle > 0$. Wenn wir über $\mathbb{C}$ arbeiten und $c = i$ nehmen, bekommen wir $\langle v, v\rangle > 0$ und $-\langle v, v\rangle > 0$, was einander widerspricht.

Komplexifizieren von Bilinearformen unter Verlangen von (1), (2)

1. $\sigma_{\mathbb{C}}$ mit σ auf Vektoren der Form $u + i\vec{0}$ übereinstimmt und dass
2. $\sigma_{\mathbb{C}}$ eine Bilinearform ist.

Sei σ eine Bilinearform auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Wir denken uns, dass V endlichdimensional ist, obwohl die Aussagen für alle Vektorräume gelten: Wir werden die Beweise am Ende des Semesters nachliefern.
Wir definieren $\sigma_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ durch

$$\sigma_{\mathbb{C}}(u + iv, \tilde{u} + i\tilde{v}) = \sigma(u, \tilde{u}) - \sigma(v, \tilde{v}) + i(\sigma(u, \tilde{v}) + \sigma(v, \tilde{u})).$$

(Vergleichen Sie diese Formel mit

$$(\alpha + i\beta) \cdot (\tilde{\alpha} + i\tilde{\beta}) = (\alpha \cdot \tilde{\alpha} - \beta \cdot \tilde{\beta}) + i(\alpha \cdot \tilde{\beta} + \beta \cdot \tilde{\alpha}).)$$

Es ist eine gute Übung zu zeigen, ähnlich wie wir das im Abschnitt "Komplexifizieren von Endomorphismen" getan haben, dass die so definierte Abbildung eine Bilinearform ist. Es ist auch offensichtlich, dass (1) erfüllt ist:
$\sigma_{\mathbb{C}}(u + i\vec{0}, \tilde{u} + i\vec{0}) = \sigma(u, \tilde{u}) - \sigma(\vec{0}, \vec{0}) + i(\sigma(u, \vec{0}) + \sigma(v, \vec{0})) = \sigma(u, \tilde{u}).$

Wir haben vorher gesehen, dass für eine Basis $(b_1, ..., b_n)$ in V das Tupel $(b_1 + i\vec{0}, ..., b_n + i\vec{0})$ eine Basis in $V_{\mathbb{C}}$ ist.
Die Gramsche Matrix der Bilinearform $\sigma_{\mathbb{C}}$ in dieser Basis ist gleich der Gramschen Matrix von σ in der Basis $(b_1, ..., b_n)$, weil die Komponenten der Gramschen Matrix durch die Formel

$$a_{ij} = \sigma(b_i, b_j)$$

gegeben sind und diese Formel für $\sigma_{\mathbb{C}}$ und für die Basis $(b_1 + i\vec{0}, ..., b_n + i\vec{0})$ wie folgt aussieht:

$$a_{ij} = \sigma(b_i + i\vec{0}, b_j + i\vec{0}) = \sigma(b_i, b_j).$$

Daraus folgt auch, dass die Bilinearform $\sigma_{\mathbb{C}}$, die die Eigenschaften (1) und (2) hat, eindeutig ist.

Was, wenn wir unbedingt positive Definitheit wollen? Hermitesche Formen

Def. Eine hermitesche Form auf einem $\mathbb{C}-$ Vektorraum U ist eine Abbildung $\sigma : U \times U \to \mathbb{C}$, die die folgenden Eigenschaften (für alle $u, v, u', v' \in U$ und $\alpha + i\beta, \alpha' + i\beta' \in \mathbb{C}$) hat:

(a) Linearität bzgl. 2tem Argument:

$$\sigma(u, (\alpha+i\beta)v+(\alpha'+i\beta')v') = (\alpha+i\beta)\sigma(u,v)+(\alpha'+i\beta')\sigma(u,v').$$

(b) "Antilinearität" bzgl. 1tem Argument:

$$\sigma((\alpha+i\beta)u+(\alpha'+i\beta')u', v) = \underbrace{(\alpha - i\beta)}_{\overline{\alpha+i\beta}}\sigma(u,v)+\underbrace{(\alpha' - i\beta')}_{\overline{\alpha'+i\beta'}}\sigma(u',v).$$

(c) $\sigma(x,y) = \overline{\sigma(y,x)}$ ("Hermitesche Symmetrie").

Dabei bezeichnet "$\overline{}$" komplexe Konjugation.

Bemerkung. Für die Reihenfolge von linearem und antilinearem Argument gibt es unterschiedliche Konventionen.

Def. Eine hermitesche Form auf einem $\mathbb{C}-$ Vektorraum U ist eine Abbildung $\sigma : U \times U \to \mathbb{C}$, die die folgenden Eigenschaften (für alle $u, v, u', v' \in U$ und $\alpha + i\beta, \alpha' + i\beta' \in \mathbb{C}$) hat:

(a) Linearität bzgl. 2tem Argument:

$$\sigma(u, (\alpha + i\beta)v + (\alpha' + i\beta')v') = (\alpha + i\beta)\sigma(u, v) + (\alpha' + i\beta')\sigma(u, v').$$

(b) "Antilinearität" bzgl. 1tem Argument:

$$\sigma((\alpha + i\beta)u + (\alpha' + i\beta')u', v) = \underbrace{(\alpha - i\beta)}_{\overline{\alpha+i\beta}}\sigma(u, v) + \underbrace{(\alpha' - i\beta')}_{\overline{\alpha'+i\beta'}}\sigma(u', v).$$

(c) $\sigma(x, y) = \overline{\sigma(y, x)}$ ("Hermitesche Symmetrie").

Bsp. Hermitesche Standard-Form auf $\mathbb{C}^n$: Für $x, y \in \mathbb{C}^n$ definiert man $\sigma(x, y) = \langle x, y\rangle = \sum \bar{x}_i y_i = \bar{x}_1 y_1 + ... + \bar{x}_n y_n$.

Hauptbsp. Wir betrachten eine $n \times n$-Matrix $A \in Mat(n, n, \mathbb{C})$ mit $A^t = \overline{A}$ und definieren eine hermitesche Form auf $\mathbb{C}^n$:

$$\sigma(x, y) = \underbrace{(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)}_{\bar{x}^t} Ay = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_i y_j.$$

Eigenschaften (a), (b), (c) sind einfache Übungen .

Positive Definitheit

Def. Eine hermitesche Form σ auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist positiv definit, wenn für jedes $v \in V$ mit $v \neq \vec{0}$ gilt: $\sigma(v, v) > 0$.
Bsp. Wir betrachten die hermitesche Standard-Form auf $\mathbb{C}^n$:
$\sigma(x, y) = \langle x, y \rangle = \sum \bar{x}_i y_i = \bar{x}_1 y_1 + ... + \bar{x}_n y_n$. Sie ist positiv definit, da $\sigma(x, x) = \bar{x}_1 x_1 + ... + \bar{x}_n x_n$ und $\bar{x}_i x_i \geq 0$ und > 0 für $x_i \neq 0$.
Fakt (wird nicht bewiesen). Jede positiv definite hermitesche Form (auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum) ist die hermitesche Standard-Form in einer geeigneten Basis.

Man kann eine Bilinearform σ von einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V auf $V_{\mathbb{C}}$ wie folgt fortsetzen: Man setze

$$\sigma_{\mathbb{C}}(u + iv, u' + iv') = (\sigma(u, u') + \sigma(v, v')) + i(-\sigma(v, u') + \sigma(u, v')).$$

(Vergleichen Sie diese Formel mit

$$\overline{(\alpha + i\beta)} \cdot (\alpha' + i\beta') = (\alpha \cdot \alpha' + \beta \cdot \beta') + i(-\beta \cdot \alpha' + \alpha \cdot \beta').)$$

Man kann zeigen, dass $\sigma_{\mathbb{C}}$ hermitesch ist und dass wenn σ positiv definit ist, auch $\sigma_{\mathbb{C}}$ positiv definit ist.