

**Übungsaufgaben zur Vorlesung
Elemente der Mathematik
für Regelschullehrer und Magister Bachelor)**

11.Übungsblatt - letztes Blatt (30)

Aufgabe 24 (16 Punkte, 4/4/4/4)

Gegeben seien ein Quadrat und ein Rechteck (kein Quadrat) im zweidimensionalen Raum.

- a) Man bestimme für beide geometrische Objekte je eine Gruppe mit einer maximalen Anzahl von Elementen, indem man alle Deckabbildungen betrachtet.
- b) Man bestimme hierzu alle Untergruppen.
- c) Man gebe zu a) und b) die abstrakten Gruppentafeln an.
- d) Man bestimme eine weitere Gruppentafel, die zu c) verschieden ist.

Aufgabe 25 (14 Punkte, 4/4/6)

Gegeben sei die Menge $M := \mathbb{Z} / 8\mathbb{Z}$:

- a) Man beweise, dass $G := (M, +)$ eine abelsche und zyklische Gruppe ist,
- b) Man bestimme hierzu alle Untergruppen,
- (c) Man bestimme zwei weitere Gruppen mit 8 Elementen und untersuche die Unterschiede und Gemeinsamkeiten zu der Gruppe von a).

Zusatzaufgabe (18 Punkte, 2/2/2/4/4/4)

- a) Man konstruiere auf einem Blatt Papier ein regelmäßiges Fünfeck S .
- b) Man überzeuge sich davon, dass die Menge der Drehungen von S um $0, 72, 144, 216, 288$ Grad zusammen mit der Hintereinanderausführung von Drehungen eine abelsche Gruppe C_5 der Ordnung 5 ist.
- c) Das Fünfeck S besitzt 5 Symmetrieachsen. Mit R_5 bezeichnet man die Menge der Geradenspiegelungen an diesen Symmetrieachsen. Man überzeuge sich davon, dass die Hintereinanderausführung einer Drehung und einer Spiegelung eine Spiegelung und dass die Hintereinanderausführung von zwei Spiegelungen eine Drehung von S ist.
- d) Man zeige, dass $D_{10} := C_5 \cup R_5$ eine Gruppe der Ordnung 10 ist. Man nennt D_{10} die **Diedergruppe** der Ordnung 10.
- e) Man zeige, dass diese Gruppe nicht zu $(\mathbb{Z} / 10\mathbb{Z}, +)$ isomorph ist.
- f) Man bestimme alle Untergruppen von dieser **Diedergruppe**.