Übersicht

Die *pre**-Operation

Definition 3.3.1

Es sei $G = (N, T, P, S)$ eine CFG und $L \subseteq (N \cup T)^*$ eine beliebige Sprache.

Wir definieren

$$pre^*_G(L) = \{\, \alpha \in (N \cup T)^* \mid \alpha \stackrel{*}{\Rightarrow}_G \beta \text{ für ein } \beta \in L \,\}.$$

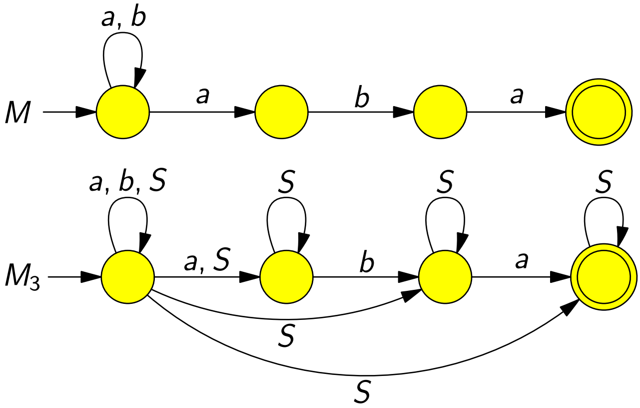
Satz 3.3.2

Falls L regulär ist, dann ist auch $pre^*_G(L)$ regulär.

Satz 3.3.2

Falls L regulär ist, dann ist auch $pre^*_G(L)$ regulär.

$G: \quad S \to aSa \mid bSb \mid aSb \mid \epsilon$



Sättigungsschritte

Sei $L = L(M)$ für einen NFA M.

Wir transformieren M in einen NFA M' mit $L(M') = pre^*_G(L)$ durch folgende Regeln:

Falls

1. $A \to \alpha \in P$ und
2. $p \in \hat{\delta}(q, \alpha)$

dann füge den Übergang $q \xrightarrow{A} p$ zum Automaten hinzu.

Wiederhole dies, bis nichts mehr hinzugefügt werden kann.

Definition 3.3.3

Es sei $G = (N, T, P, S)$ *eine CFG und* $M = (Q, \Sigma, \delta_0, q_0, F)$ *ein NFA mit* $\Sigma = N \cup T$.

Wir definieren für $k \geq 0$*:*

1. $M_0 = M$
2. $M_{k+1} = (Q, \Sigma, \delta_{k+1}, q_0, F)$ *mit*

   $\delta_{k+1}(q, a) = \delta_k(q, a)$ *falls* $a \in T$,

   $\delta_{k+1}(q, A) = \delta_k(q, A) \cup \{\, p \in Q \mid p \in \hat{\delta}_k(q, \beta) \text{ und } A \to \beta \in P \,\}$.

Definition 3.3.4

Es sei $L \subseteq \Sigma^*$ *eine Sprache und* $G = (N, T, P, S)$ *eine CFG mit* $\Sigma = N \cup T$.

1. $pre^0(L) := L$
2. $pre^{k+1}(L) := \{\, \alpha \mid \alpha \Rightarrow \beta \text{ für ein } \beta \in pre^k(L) \,\} \cup pre^k(L)$

Offensichtlich:

$$pre^*(L) = \bigcup_{n \geq 0} pre^n(L)$$

Induktion über k: $pre^k(L) \subseteq L(M_k)$

Es sei $\alpha \in pre^k(L)$. Zwei Möglichkeiten:

1. $\alpha \in pre^{k-1}(L) \overset{\text{IH}}{\subseteq} L(M_{k-1}) \subseteq L(M_k)$.
2. $\alpha \Rightarrow \beta$ und $\beta \in pre^{k-1}(L) \overset{\text{IH}}{\subseteq} L(M_{k-1})$.

   D.h. $\alpha = \alpha_1 A \alpha_2$, $\beta = \alpha_1 \gamma \alpha_2$ und $A \rightarrow \gamma \in P$.

   Nach IH gilt $\beta \in L(M_{k-1})$, also

$$q_1 \in \hat{\delta}_{k-1}(q_0, \alpha_1)$$
$$q_2 \in \hat{\delta}_{k-1}(q_1, \gamma)$$
$$q_3 \in \hat{\delta}_{k-1}(q_2, \alpha_2) \text{ mit } q_3 \in F$$

Dann gilt $q_2 \in \delta_k(q_1, A)$ und daher $q_3 \in \hat{\delta}_k(q_0, \alpha)$.

Induktion über k: $L(M_k) \subseteq pre^*(L)$

Es sei $\alpha \in L(M_k)$.

Wieder zwei Möglichkeiten:

1. $\alpha \in L(M_{k-1})$, dann $\alpha \in pre^*(L)$ nach IH.
2. Sonst:

   $\alpha = \alpha_0\, A_0\, \alpha_1\, A_1\, \ldots\, \alpha_m\, A_m\, \alpha_{m+1}$

   $\beta = \alpha_0\, \beta_0\, \alpha_1\, \beta_1\, \ldots\, \alpha_m\, \beta_m\, \alpha_{m+1}$

   und $\beta \in L(M_{k-1})$, $A_i \to \beta_i \in P$ für $0 \leq i \leq m$.

   Nach IH gilt $\beta \in pre^*(L)$.

   Es gilt $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} \beta$ und damit auch $\alpha \in pre^*(L)$.

Beweis der zentralen Aussage

Satz 3.3.2

Falls L regulär ist, dann ist auch $pre^*_G(L)$ *regulär.*

Beweis.

Wir haben bereits gezeigt:

1. $pre^k(L) \subseteq L(M_k)$
2. $L(M_k) \subseteq pre^*(L)$

Außerdem: $L(M_m) = L(M_{m+1}) = L(M_{m+2}) = \cdots$ für ein $m \in \mathbf{N}$.

Es folgt daraus, dass $L(M_m) = pre^*(L)$.

$L(M_m)$ ist als Sprache eines NFAs regulär. □