Übungsblatt 1

Lorenz Leutgeb

30. März 2015

Aufgabe 1.1

Annahmen ohne Einschränkungen: $P_1 \subseteq \Sigma$ und $P_1 \subseteq \Gamma$. Per Definitionem der Reduktion:

$$P_1 \leq P_2 \quad \rightarrow \quad \exists f : \Sigma^* \longrightarrow \Gamma^*$$

wobei f total und berechenbar, genau so, dass:

$$\forall w \in \Sigma^* : w \in P_1 \Leftrightarrow f(w) \in P_2$$

Sei M_2 eine TM, die P_2 löst und M_1 eine TM, die M_1 löst, indem sie ihre Eingabe zuerst mit Hilfe von f in eine Instanz von P_2 übersetzt und diese durch eine Art „Unterprogrammaufruf“ von M_2 löst.

Außerdem sei $P_3 = P_2 - \{\forall w \in P_1 : f(w)\}$ alle Instanzen von P_2, die man nicht durch Anwendung von f auf Instanzen von P_1 berechnen kann und $P_4 = P_2 - P_3$.

a) P_2 ist entscheidbar $\rightarrow$ M_2 hält $\rightarrow$ M_1 hält $\rightarrow$ P_1 ist entscheidbar. Korrekt.

b) Falsch. Indirekt: Aus der Reduktion und der Entscheidbarkeit von P_2 folgt, dass P_1 entscheidbar ist. Somit folgt aus der Behauptung, dass P_1 unentscheidbar und entscheidbar ist.

c) Falsch. M_2 könnte für alle Instanzen P_4 halten, und für keine der Instanzen P_3.

d) Falsch. P_2 könnte unentscheidbar sein, weil M_2 für Instanzen aus P_3 nicht hält. Womöglich hält M_2 aber trotzdem für alle Instanzen von P_4.
P_1 induziert mit f eine Untermenge von P_2, die Aussage schließt jedoch von einer Eigenschaft von P_1 auf eine Eigenschaft von P_2 als Ganzes, daher kann man diese Aussage im Allgemeinen nicht treffen.

e) Falsch. Analog zu d).

Aufgabe 1.2

Es sei $\Sigma = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ ein Alphabet und $L_1(\Sigma) = \emptyset$ sowie $L_2(\Sigma) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ zwei reguläre Sprachen.

a) Nach dem Satz von Rice **unentscheidbar**, da $P_1(L) = \{L \mid L = \emptyset\}$ nicht trivial, da $L_1 \in P_1,\ L_2 \notin P_1$

b) Nach dem Satz von Rice **entscheidbar**, da $P_2(L) = \{L \mid L \text{ ist nicht rekursiv aufzählbar}\} = \emptyset$ trivial. P_2 kommt keiner rekursiv aufzählbaren Sprache zu, da keine rekursiv aufzählbare Sprache nicht rekursiv aufzählbar ist und entartet daher zur leeren Aussage.

c) Nach dem Satz von Rice **unentscheidbar**, da $P_3(L) = \{L \mid |L| \geq 10\}$ nicht trivial, da $L_2 \in P_3,\ L_1 \notin P_3$

d) Konstruiere eine Turingmaschine die die von der Eigenschaft beschriebene Turingmaschine mit leerem Band simuliert („Simulator"). Terminiert die simulierte Turingmaschine bevor sie mehr als 1000 Bewegungen macht, terminiert und verwirft der Simulator. Macht die simulierte Maschine jedoch mehr als 1000 Bewegungen, akzeptiert der Simulator. Da der Simulator immer terminiert, ist die Eigenschaft **entscheidbar**. Der Satz von Rice ist nicht anwendbar, da es sich nicht um eine Eigenschaft der akzeptierten Sprache handelt.

e) **Entscheidbar** da allgemein gültig.

Aufgabe 1.3

a) Falsch. Gegenbeispiel: $L = \{\varepsilon\}$

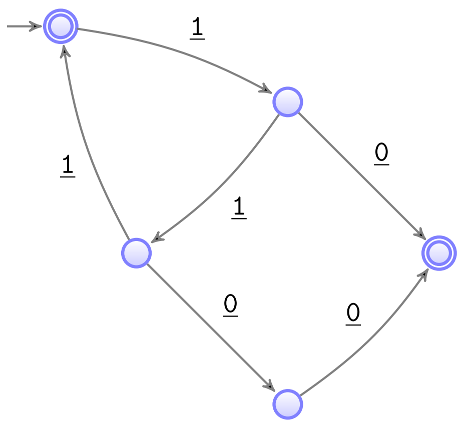
b) Falsch. Gegenbeispiel: $L_1(\Sigma) = \Sigma^*, L_3 =$ beliebige nicht reguläre Sprache $\subset \Sigma^*,\ L_2(\Sigma) = L_3 \cup \{\varepsilon\}$

c) Korrekt, reguläre Sprachen sind unter der Bildung des Komplements abgeschlossen.

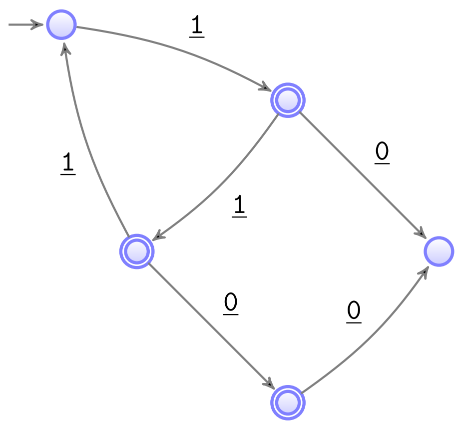
d) Falsch. Gegenbeispiel: Für die irreguläre Sprache $L_1 = \{a^n b^n | n \geq 0\}$ lässt sich immer eine reguläre Sprache $L_2 = \{\{a\}^*\{b\}^*\}$ so konstruieren, dass $L_1 \subseteq L_2$ gilt.

Aufgabe 1.4

a) Graphische Darstellung:



Graphische Darstellung des Komplements:

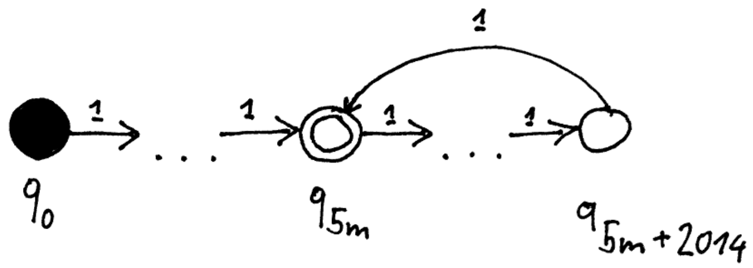


b) $\Sigma = \{\underline{1}\},\ L(\Sigma) = \{\underline{1}^{5m}\}\{\underline{1}^{2015}\}^*,\ Q = \{q_i \mid 0 \leq i \leq 5m + 2014\}$

Es gelte $\forall q_i \in Q :\ \exists q_{i+1} \rightarrow \delta(q_i, \underline{1}) = q_{i+1}$ und ein Spezialfall $\delta(q_{5m+2014}, \underline{1}) = q_{5m}$

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q_{5m}\})$$

Graphische Darstellung:

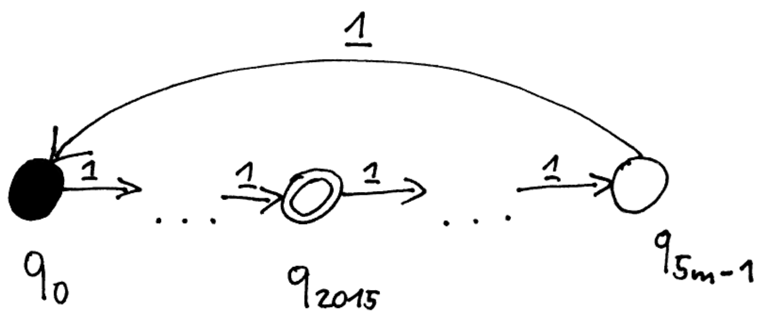


c) $\Sigma = \{\underline{1}\},\ L(\Sigma) = \{\underline{1}^{5m}\}^*\{\underline{1}^{2015}\},\ Q = \{q_i \mid 0 \leq i < 5m\}$

Es gelte $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \delta(q_{n \bmod |Q|}, \underline{1}) = q_{n+1 \bmod |Q|}$

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q_{2015}\})$$

Graphische Darstellung:



Aufgabe 1.5

Für die folgenden induktiven Definitionen wird die jeweilige Sprache L durch die Grundmenge L_0 und eine Bildungsregel $f(x)$, die auf ein Wort x angewandt alle daraus ableitbaren Wörter erzeugt, definiert:

$$L_{i+1} = L_i \cup \{f(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in L_i\}$$

$$L = \bigcup_{i \geq 0} L_i$$

Um zu zeigen, dass L irregulär ist, wird aus dem Pumping Lemma für reguläre Sprachen eine Kontradiktion abgeleitet.

Pumping Lemma: Wähle ein $w \in L$ mit $|w| \geq p$, spalte $w = xyz$, sodass gilt $|y| > 0$ und $|xy| \leq p$ und $\forall i \geq 0 : xy^iz \in L$.

a)

$$L = \{w\underline{\mathtt{c}}^n \mid w \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^*,\ n = 2|w|_{\underline{\mathtt{a}}} + |w|_{\underline{\mathtt{b}}}\}$$

$$L_0 = \{\varepsilon\},\ f(x) = \{\underline{\mathtt{a}}x\underline{\mathtt{c}}\underline{\mathtt{c}}, \underline{\mathtt{b}}x\underline{\mathtt{c}}\}$$

Mit p aus dem Pumping Lemma wähle $w = \underline{\mathtt{a}}^p\underline{\mathtt{b}}^p\underline{\mathtt{c}}^{3p} \in L$ und weiter $x = \underline{\mathtt{a}}^p\underline{\mathtt{b}}^p$, $y = \underline{\mathtt{c}}^{2p}$ und $z = \underline{\mathtt{c}}^p$. Mit $i = 0$ folgt jedoch $xy^0z = xz = \underline{\mathtt{a}}^p\underline{\mathtt{b}}^p\underline{\mathtt{c}}^p \notin L$. Widerspruch.

b)

$$L = \{ww^r \mid w \in \{\underline{\texttt{a}}, \underline{\texttt{b}}, \underline{\texttt{c}}\}^*\}$$

$$L_0 = \{\varepsilon\},\ f(x) = \{\underline{\texttt{a}}x\underline{\texttt{a}}, \underline{\texttt{b}}x\underline{\texttt{b}}, \underline{\texttt{c}}x\underline{\texttt{c}}\}$$

Mit p aus dem Pumping Lemma wähle $w = \underline{\texttt{a}}^p\underline{\texttt{b}}^p\underline{\texttt{b}}^p\underline{\texttt{a}}^p = xyz \in L$. Und weiter $x = \underline{\texttt{a}}^{p-k}$, $y = \underline{\texttt{a}}^k$ und $z = \underline{\texttt{b}}^p\underline{\texttt{b}}^p\underline{\texttt{a}}^p$. Mit $i = 2$ folgt jedoch $xy^2z = \underline{\texttt{a}}^{p-k}\underline{\texttt{a}}^{2k}\underline{\texttt{b}}^p\underline{\texttt{b}}^p\underline{\texttt{a}}^p = \underline{\texttt{a}}^{p+k}\underline{\texttt{b}}^p\underline{\texttt{b}}^p\underline{\texttt{a}}^p \notin L$. Widerspruch.

c)

$$L = \{\underline{\texttt{0}}^n\underline{\texttt{1}}^m \mid n < m\}$$

$$L_0 = \{\underline{\texttt{1}}\},\ f(x) = \{x\underline{\texttt{1}}, \underline{\texttt{0}}x\underline{\texttt{1}}\}$$

Mit p aus dem Pumping Lemma wähle $w = \underline{\texttt{0}}^p\underline{\texttt{1}}^{p+1} = xyz \in L$. Wähle $x = \underline{\texttt{0}},\ z = \underline{\texttt{1}}$ und die einzig mögliche Belegung für $y = \underline{\texttt{1}}$. Mit $i = 0$ folgt jedoch $xy^iz = xz = \underline{\texttt{01}} \notin L$. Widerspruch.

d)

$$L = \{\underline{\texttt{0}}^n\underline{\texttt{1}}^m \mid n > m\}$$

$$L_0 = \{\underline{\texttt{0}}\},\ f(x) = \{\underline{\texttt{0}}x, \underline{\texttt{0}}x\underline{\texttt{1}}\}$$

Mit p aus dem Pumping Lemma wähle $w = \underline{\texttt{0}}^{p+1}\underline{\texttt{1}}^p = xyz \in L$. Wähle $x = \underline{\texttt{0}},\ z = \underline{\texttt{1}}$ und die einzig mögliche Belegung für $y = \underline{\texttt{0}}$. Mit $i = 0$ folgt jedoch $w = xy^iz = xz = \underline{\texttt{01}} \notin L$. Widerspruch.

Theoretische Informatik und Logik
Übungsblatt 1 (2015S)

Aufgabe 1.1 Seien P_1 und P_2 Probleme und $P_1 \leq P_2$. (Es gibt eine Reduktion von P_1 auf P_2). Sind folgende Aussagen korrekt? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) Ist P_2 entscheidbar, so ist auch P_1 entscheidbar.

b) Ist P_1 unentscheidbar, so kann P_2 entscheidbar sein.

c) Ist P_2 unentscheidbar, dann muss P_1 auch unentscheidbar sein.

d) Ist P_1 entscheidbar, so ist auch P_2 entscheidbar.

e) Ist P_1 rekursiv aufzählbar, so ist auch P_2 rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 1.2 Geben Sie an, ob folgende Probleme (un)entscheidbar sind, und begründen Sie jeweils Ihre Antwort. Sofern jeweils möglich, verwenden Sie dafür den Satz von Rice.

a) Ist die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache leer?

b) Ist die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache nicht rekursiv aufzählbar?

c) Enthält die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache mindestens 10 Wörter?

d) Macht eine Turingmaschine mehr als 1000 Bewegungen, wenn sie mit einem leeren Band gestartet wird?

e) Ist die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache eine Menge von Wörtern?

Aufgabe 1.3 Sind folgende Aussagen korrekt? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) Für jede Sprache L gilt: $|L| < |L^*|$ (wobei $|A|$ die Anzahl der Elemente in A bezeichnet).

b) Ist die Sprache $L_1 \cdot L_2$ regulär, dann sind sowohl L_1 wie auch L_2 regulär.

c) Sei L eine Sprache über Σ. Ist $\Sigma^* - L$ regulär, dann ist auch L regulär.

d) Ist L_2 regulär und $L_1 \subseteq L_2$, dann ist auch L_1 regulär.

Aufgabe 1.4

a) Sei $\Sigma = \{\underline{0}, \underline{1}\}$ sowie $L = \{\underline{1}^n \underline{0}^{n \bmod 3} \mid n \geq 0\}$. Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten (DEA) für die Sprache L sowie ihr Komplement $\overline{L} = \Sigma^* - L$ an. (Graphische Darstellung genügt.) (*Hinweis:* $n \bmod 3$ steht für den Rest der (ganzzahligen) Division von n durch 3.)

b) Sei $L = \{\underline{1}^{5m}\}\{\underline{1}^{2015}\}^*$ wobei m Ihre Matrikelnummer (ohne Berücksichtigung von eventuell führenden Nullen) ist. Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten (DEA) $\mathcal{A}$ an, der L akzeptiert.

Beschreiben Sie $\mathcal{A}$ sowohl durch einen Graphen als auch durch ein 5-Tupel.

c) Sei $L = \{\underline{1}^{5m}\}^*\{\underline{1}^{2015}\}$ wobei m Ihre Matrikelnummer (ohne Berücksichtigung von eventuell führenden Nullen) ist. Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten (DEA) $\mathcal{A}$ mit höchstens $5m$ Zuständen an, der L akzeptiert.

Beschreiben Sie $\mathcal{A}$ sowohl durch einen Graphen als auch durch ein 5-Tupel.

ACHTUNG: Aufgabe 1.5 ist auf der nächsten Seite!

Aufgabe 1.5 Geben Sie für die folgenden Sprachen L jeweils eine induktive Definition an, und beweisen Sie mithilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen, dass diese Sprachen nicht regulär sind.
(Wählen Sie mindestens zwei Unterpunkte.)

a) $L = \{w\underline{\mathtt{c}}^n \mid w \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^*, n = 2|w|_{\underline{\mathtt{a}}} + |w|_{\underline{\mathtt{b}}}\}$.
   (*Hinweis*: $|w|_a$ bezeichnet die Anzahl der Symbole a in w.)

b) $L = \{ww^r \mid w \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}^*\}$. (*Hinweis*: w^r bezeichnet das Spiegelbild von w.)

c) $L = \{\underline{\mathtt{0}}^n\underline{\mathtt{1}}^m \mid n < m\}$

d) $L = \{\underline{\mathtt{0}}^n\underline{\mathtt{1}}^m \mid n > m\}$