Theoretische Informatik und Logik
Übungsblatt 1 (2016S)

Aufgabe 1.1 Sei $L = \{w\underline{\#}w^r \mid w \in \{\underline{0}, \underline{1}\}^*\}$. Geben Sie eine deterministische Turingmaschine M an, welche die Sprache L akzeptiert. Wählen Sie **mindestens einen** Unterpunkt und erläutern Sie (jeweils) auch kurz verbal die Arbeitsweise Ihrer Maschine(n).

a) Verwenden Sie das auf Folie 26 definierte Modell (mit einem Band) und simulieren Sie eine Berechnung auf der Eingabe $\underline{1}\underline{0}\underline{0}\underline{\#}\underline{0}\underline{0}\underline{1}$ (d.h., geben Sie die Übergänge von der Start- zur Endkonfiguration an).

b) Verwenden Sie das auf Folie 72 definierte Modell (mit zwei Bändern, einem Eingabe- und einem Arbeitsband). M soll dabei die Kellerautomatenbedingung erfüllen.

Aufgabe 1.2 Seien A, B, C und D Sprachen, die rekursiv aufzählbar sein können oder auch nicht. Wir wissen allerdings Folgendes:

- $A \leq B$
- $B \leq C$
- $D \leq C$

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie

- *jedenfalls* zutrifft (unabhängig davon, um welche Probleme es sich bei A bis D handelt)
- *vielleicht* zutrifft (je nach dem worum es sich bei A bis D handelt)
- *keinesfalls* zutrifft (unabhängig davon, um welche Probleme es sich bei A bis D handelt)

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) Ist C entscheidbar, so ist auch A entscheidbar.

b) Ist B unentscheidbar, so kann C entscheidbar sein.

c) Ist D rekursiv aufzählbar, so ist auch C rekursiv aufzählbar.

d) A ist rekursiv aufzählbar, und B ist entscheidbar.

e) Ist B entscheidbar, so ist auch das Komplement von A entscheidbar.

Aufgabe 1.3 Geben Sie an, ob folgende Probleme (un)entscheidbar sind, und begründen Sie jeweils Ihre Antwort. Sofern jeweils möglich, verwenden Sie dafür den Satz von Rice. (Das Alphabet ist dabei jeweils $\Sigma = \{\underline{0}, \underline{1}\}$.)

a) Enthält die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache kein Wort?

b) Hat eine Turingmaschine weniger als 20 Zustände und hält bei Eingabe $\underline{0}$?

c) Enthält die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache mindestens 10 Wörter?

d) Ist die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache überabzählbar (unendlich)?

e) Sind in der von einer Turingmaschine akzeptierten Sprache Wörter, die mit $\underline{1}\underline{0}\underline{1}$ beginnen?

f) Ist die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache eine Teilmenge von Σ^*?

Aufgabe 1.4 Sind folgende Aussagen korrekt? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) Ist die Sprache $L_1 \cdot L_2$ regulär, dann sind sowohl L_1 wie auch L_2 regulär.

b) Sei $L_1 = \{\underline{\mathtt{a}}^n \mid n \geq 0\}$ und $L_2 = \{\underline{\mathtt{b}}^{2n} \mid n \geq 0\}$. Dann gilt: $L_1 L_2 = \{\underline{\mathtt{a}}^n \underline{\mathtt{b}}^{2n} \mid n \geq 0\}$.

c) Es gibt Sprachen L, für die gilt: $(L^*)^* = L^+$.

d) Jede unentscheidbare Sprache enthält eine entscheidbare Teilmenge.

e) Für jede unentscheidbare Sprache L gibt es eine echte Obermenge, die ebenfalls unentscheidbar ist.

f) Sind L_1 und $L_1 \cap L_2$ entscheidbar, so ist auch L_2 entscheidbar.

Aufgabe 1.5

a) Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten (DEA) für die Menge aller durch 6 teilbaren positiven ganzen Zahlen in Binärdarstellung an. Sollte ihr Automat mehr als 5 Zustände haben, so minimieren Sie ihn mit Hilfe des Algorithmus von Brzozowski.

(*Hinweise*: Führende Nullen sind erlaubt, das Leerwort ε ist aber nicht in dieser Menge enthalten. Überlegen Sie, wie sich der Wert einer Binärzahl verändert, wenn man eine 0 bzw. eine 1 hinten anhängt.)

b) Sei $L = \{(\underline{\mathtt{0}}\,\underline{\mathtt{1}})^{6m}\}^*\{(\underline{\mathtt{0}}\,\underline{\mathtt{1}})^{2016}\}$ wobei m Ihre Matrikelnummer (ohne Berücksichtigung von eventuell führenden Nullen) ist. Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten (DEA) $\mathcal{A}$ mit höchstens $6m$ Zuständen an, der L akzeptiert.

Beschreiben Sie $\mathcal{A}$ sowohl durch einen Graphen als auch durch ein 5-Tupel.

c) Sei $\Sigma = \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}, \underline{\mathtt{d}}\}$ und $L = \{\underline{\mathtt{a}}^{3n}\underline{\mathtt{b}} \mid n \geq 0\} \cup \{\underline{\mathtt{a}}^{3n+1}\underline{\mathtt{c}} \mid n \geq 0\} \cup \{\underline{\mathtt{a}}^{3n+2}\underline{\mathtt{d}} \mid n \geq 0\}$. Geben Sie DEA $\mathcal{A}$ mit höchstens 5 Zuständen an, der L akzeptiert. Geben Sie weiters einen DEA $\mathcal{A}'$ an, der $\overline{L}$ (also das Komplement von L, wobei $\overline{L} = \Sigma^* - L$) akzeptiert.