Theoretische Informatik und Logik
Übungsblatt 2 (2020W)
Lösungsvorschlag

Aufgabe 2.1 Geben Sie jeweils eine kontextfreie Grammatik an, welche die folgenden Sprachen erzeugt, sowie eine Linksableitung und einen Ableitungsbaum für ein von Ihnen gewähltes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq 8$.

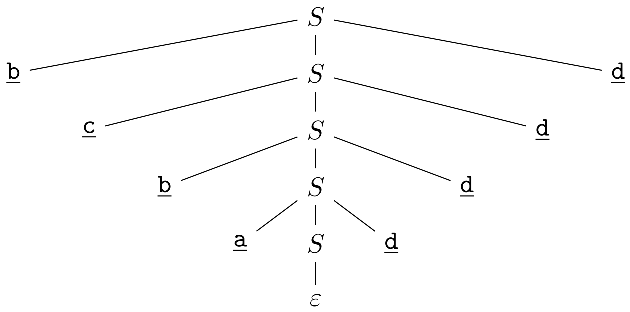
a) $L = \{w\underline{\mathtt{d}}^{|w|} \mid w \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}^*\}$

b) $L = \{ww^r \mid w \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}^*\} \ \cap \ \{\underline{\mathtt{a}}^n\underline{\mathtt{b}}^k\underline{\mathtt{a}}^n \mid k, n \geq 0\}$
(*Hinweis*: Bestimmen Sie zunächst L.)

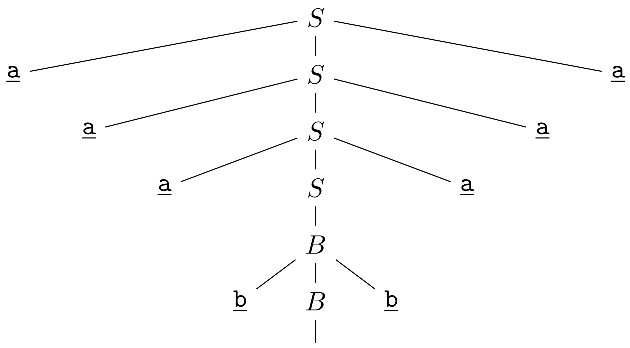
c) $L = \{(\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}})^i\underline{\mathtt{c}}^i(\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}})^j\underline{\mathtt{c}}^j \mid i, j \geq 0\}$

Lösung

a) $G = (\{S\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}, \underline{\mathtt{d}}\}, \{S \to \underline{\mathtt{a}}S\underline{\mathtt{d}} \mid \underline{\mathtt{b}}S\underline{\mathtt{d}} \mid \underline{\mathtt{c}}S\underline{\mathtt{d}} \mid \varepsilon\}, S)$
Linksableitung für $w = \underline{\mathtt{bcbadddd}}$:
$S \Rightarrow \underline{\mathtt{b}}S\underline{\mathtt{d}} \Rightarrow \underline{\mathtt{bc}}S\underline{\mathtt{dd}} \Rightarrow \underline{\mathtt{bcb}}S\underline{\mathtt{ddd}} \Rightarrow \underline{\mathtt{bcba}}S\underline{\mathtt{dddd}} \Rightarrow \underline{\mathtt{bcbadddd}}$
Ableitungsbaum für $w = \underline{\mathtt{bcbadddd}}$:



b) Wir überlegen zunächst, dass $L = \{\underline{\mathtt{a}}^n\underline{\mathtt{b}}^{2m}\underline{\mathtt{a}}^n \mid n, m \geq 0\}$,
Eine kontextfreie Grammatik für L ist z.B.:
$G = (\{S, B\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}, \{S \to \underline{\mathtt{a}}S\underline{\mathtt{a}} \mid B, \quad B \to \underline{\mathtt{b}}B\underline{\mathtt{b}} \mid \varepsilon\}, S)$
Linksableitung für $w = \underline{\mathtt{a}}^3\underline{\mathtt{b}}^2\underline{\mathtt{a}}^3$:
$S \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}S\underline{\mathtt{a}} \Rightarrow \underline{\mathtt{aa}}S\underline{\mathtt{aa}} \Rightarrow \underline{\mathtt{aaa}}S\underline{\mathtt{aaa}} \Rightarrow \underline{\mathtt{aaa}}B\underline{\mathtt{aaa}} \Rightarrow \underline{\mathtt{aaab}}B\underline{\mathtt{baaa}} \Rightarrow \underline{\mathtt{aaabbaaa}}$
Ableitungsbaum für $w = \underline{\mathtt{aaabbaaa}}$:

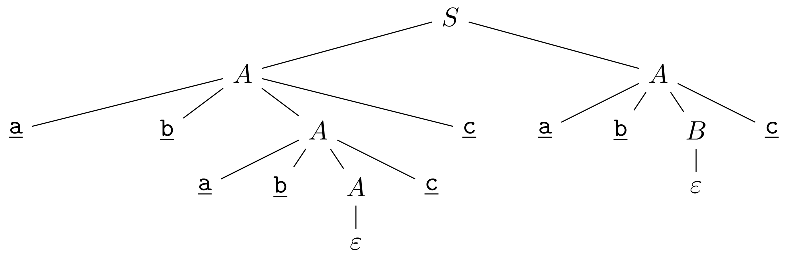


c) $G = (\{S, A\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}, \{S \to AA, \quad A \to \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}A\underline{\mathtt{c}} \mid \varepsilon\}, S)$

Linksableitung für $w = \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{c}}\underline{\mathtt{c}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{c}}$:

$S \Rightarrow AB \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}A\underline{\mathtt{c}}B \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}A\underline{\mathtt{c}}\underline{\mathtt{c}}B \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{c}}\underline{\mathtt{c}}B \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{c}}\underline{\mathtt{c}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}B\underline{\mathtt{c}} \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{c}}\underline{\mathtt{c}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{c}}$

Ableitungsbaum für $w = \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{c}}\underline{\mathtt{c}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{c}}$:



Aufgabe 2.2 Sind folgende Sprachen L kontextfrei? Falls ja, so beweisen Sie dies mit Hilfe des Satzes von Chomsky-Schützenberger (indem Sie entsprechende Sprachen D_n und R sowie einen entsprechenden Homomorphismus h angeben). Ist hingegen L nicht kontextfrei, so beweisen Sie dies mittels entsprechender Abschlusseigenschaften. (Sie können davon ausgehen, dass eine Sprache der Form $\{\underline{\mathtt{0}}^{kn}\underline{\mathtt{1}}^{ln}\underline{\mathtt{2}}^{mn} \mid n \geq 0\}$ für beliebige (von Ihnen frei wählbare) Konstanten $k, l, m > 0$ als nicht kontextfrei bekannt ist).

a) $L = \{\underline{\mathtt{a}}^n\underline{\mathtt{b}}^k\underline{\mathtt{c}}^{n-k} \mid n \geq k \geq 0\}$

b) $L = \{w \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^* \mid |w|_{\underline{\mathtt{a}}} = 2|w|_{\underline{\mathtt{b}}}\}$ (*Hinweis*: $|w|_{\underline{\mathtt{a}}}$ bezeichnet die Anzahl der Symbole $\underline{\mathtt{a}}$ in w)

c) $L = \{\underline{\mathtt{a}}^k w \underline{\mathtt{a}}^k w^r \underline{\mathtt{a}}^k \mid w \in \{\underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}^+, k > 0\}$

d) $L = \{(\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}})^{3k}\underline{\mathtt{c}}^j(\underline{\mathtt{d}}\underline{\mathtt{e}})^{3k}\underline{\mathtt{f}}^{2j} \mid j, k \geq 0\} \cap \{(\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}})^j\underline{\mathtt{c}}^{2j}\underline{\mathtt{a}}^{4m}(\underline{\mathtt{d}}\underline{\mathtt{e}})^k\underline{\mathtt{f}}^{4j} \mid j, k, m \geq 0\}$
(*Hinweis*: Bestimmen Sie zunächst L.)

Lösung

a) **Kontextfrei.** $L = \{\underline{\mathtt{a}}^n\underline{\mathtt{b}}^k\underline{\mathtt{c}}^{n-k} \mid n \geq k \geq 0\}$ ist kontextfrei, da $L = h(D_2 \cap R)$, wobei

$$R = \{\underline{(}\}^*\{\underline{[}\}^*\{\underline{]}\}^*\{\underline{)}\}^*$$

und

$$h : \{\underline{[}, \underline{]}, \underline{(}, \underline{)}\}^* \longrightarrow \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}^* \quad \text{mit} \quad h(\underline{(}) = h(\underline{[}) = \underline{\mathtt{a}}, \quad h(\underline{]}) = \underline{\mathtt{b}}, \quad h(\underline{)}) = \underline{\mathtt{c}}$$

b) **Kontextfrei.**
$L = \{w \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^* \mid |w|_{\underline{\mathtt{a}}} = 2|w|_{\underline{\mathtt{b}}}\}$ ist kontextfrei, da $L = h(D_8 \cap R)$, wobei mit $\Gamma_8 = \{(_i,)_i \mid 1 \leq i \leq 8\}$ und $\Gamma_6 = \{(_i,)_i \mid 1 \leq i \leq 6\}$

$$R = (\quad \{(_7\}\cdot\Gamma_6^*\cdot\{)_7\}\cdot\Gamma_6^*\cdot\{(_8)_8\}\Gamma_6^* \quad \cup \quad \{(_7\}\cdot\Gamma_6^*\cdot\{(_8)_8\}\cdot\Gamma_6^*\cdot\{)_7\}\Gamma_6^* \quad \cup \quad \{(_8)_8\}\cdot\Gamma_6^*\{(_7\}\cdot\Gamma_6^*\cdot\{)_7\}\Gamma_6^* \quad)^*$$

und

$$h : \Gamma_8^* \longrightarrow \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^*$$

mit

$$h((_1) = \underline{\mathtt{a}}, \quad h()_1) = \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}, \quad h((_2) = \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}, \quad h()_2) = \underline{\mathtt{b}}$$
$$h((_3) = \underline{\mathtt{b}}, \quad h()_3) = \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}, \quad h((_4) = \underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}, \quad h()_4) = \underline{\mathtt{a}}$$

$$h((_5) = \underline{\mathtt{a}}, \quad h()_5) = \underline{\mathtt{b}}\,\underline{\mathtt{a}}, \quad h((_6) = \underline{\mathtt{a}}\,\underline{\mathtt{b}}, \quad h()_6) = \underline{\mathtt{a}}$$
$$h((_7) = h()_7) = \underline{\mathtt{a}}, \quad h((_8) = \underline{\mathtt{b}}, \quad h()_8) = \varepsilon$$

Anmerkung: Dieses Beispiel ist unbeabsichtigterweise komplexer als ursprünglich gedacht ausgefallen. Die reguläre Menge R ist hier weitestgehend an eine Grammatik für diese Sprache (siehe z.B. Folie 132) angelehnt.

c) **Nicht kontextfrei.**

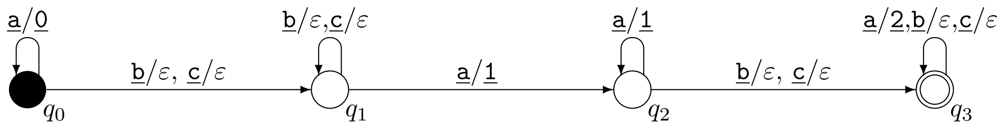
$L = \{\underline{\mathtt{a}}^k w \underline{\mathtt{a}}^k w^r \underline{\mathtt{a}}^k \mid w \in \{\underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}^+, k > 0\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis indirekt. Angenommen, die Sprache L ist kontextfrei. Sei dann

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}, \{\underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}, \underline{\mathtt{2}}\}, \delta, q_0, \{q_3\})$$

die (deterministische) *gsm* mit

$$\begin{array}{lll}
\delta(q_0, \underline{\mathtt{a}}) = (q_0, \underline{\mathtt{0}}), & \delta(q_0, \underline{\mathtt{b}}) = (q_1, \varepsilon), & \delta(q_0, \underline{\mathtt{c}}) = (q_1, \varepsilon), \\
\delta(q_1, \underline{\mathtt{a}}) = (q_2, \underline{\mathtt{1}}), & \delta(q_1, \underline{\mathtt{b}}) = (q_1, \varepsilon), & \delta(q_1, \underline{\mathtt{c}}) = (q_1, \varepsilon), \\
\delta(q_2, \underline{\mathtt{a}}) = (q_2, \underline{\mathtt{1}}), & \delta(q_2, \underline{\mathtt{b}}) = (q_3, \varepsilon), & \delta(q_2, \underline{\mathtt{c}}) = (q_3, \varepsilon), \\
\delta(q_3, \underline{\mathtt{a}}) = (q_3, \underline{\mathtt{2}}), & \delta(q_3, \underline{\mathtt{b}}) = (q_3, \varepsilon), & \delta(q_3, \underline{\mathtt{c}}) = (q_3, \varepsilon),
\end{array}$$



Da die Familie der kontextfreien Sprachen gegenüber beliebigen gsm-Abbildungen abgeschlossen ist, müsste auch $M(L) = \{\underline{\mathtt{0}}^n \underline{\mathtt{1}}^n \underline{\mathtt{2}}^n \mid n > 1\}$ kontextfrei sein, was aber nicht der Fall ist. Widerspruch! Somit kann auch L nicht kontextfrei sein.

d) **Nicht kontextfrei.**

Wir überlegen zunächst, dass $L = \{(\underline{\mathtt{a}}\,\underline{\mathtt{b}})^{3k} \underline{\mathtt{c}}^{6k} (\underline{\mathtt{d}}\,\underline{\mathtt{e}})^{3k} \underline{\mathtt{f}}^{12k} \mid k \geq 0\}$. L ist also nicht kontextfrei.

Beweis indirekt. Angenommen, L ist kontextfrei. Sei dann

$$h : \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}, \underline{\mathtt{d}}, \underline{\mathtt{e}}, \underline{\mathtt{f}}\}^* \longrightarrow \{\underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}, \underline{\mathtt{2}}\}^*$$

ein Homomorphismus mit

$$h(\underline{\mathtt{a}}) = \underline{\mathtt{0}}, \quad h(\underline{\mathtt{c}}) = \underline{\mathtt{1}}, \quad h(\underline{\mathtt{d}}) = \underline{\mathtt{2}}, \quad h(\underline{\mathtt{b}}) = h(\underline{\mathtt{e}}) = h(\underline{\mathtt{f}}) = \varepsilon.$$

Da die Familie der kontextfreien Sprachen gegenüber beliebigen Homomorphismen abgeschlossen ist, müsste auch $h(L) = \{\underline{\mathtt{0}}^{3n} \underline{\mathtt{1}}^{6n} \underline{\mathtt{2}}^{3n} \mid n \geq 0\}$ kontextfrei sein, was aber nicht der Fall ist. Widerspruch! Somit kann auch L nicht kontextfrei sein.

Aufgabe 2.3 Sind folgende Aussagen korrekt? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) Zu jeder kontextfreien Sprache gibt es eine eindeutige kontextfreie Grammatik in Chomsky Normalform.

b) Jede kontextsensitive Sprache hat ein unendliches Komplement.

c) Seien A und B rekursiv aufzählbar. Dann ist auch $A - B$ rekursiv aufzählbar.

d) Zu jeder Sprache, die von einem Kellerautomaten akzeptiert wird, gibt es eine reguläre Grammatik, die sie erzeugt.

e) Es gibt formale Sprachen L, für die L^* endlich ist.

f) Die Grammatik $G = (\{S, A, B, C\}, \{\underline{a}\}, \{S \to ABC, ABC \to S\}, S)$ erzeugt eine unentscheidbare Sprache.

Lösung

a) **Falsch.** Zwar ist richtig, dass es zu jeder kontextfreien Sprache kontextfreie Grammatik in Chomsky Normalform gibt. Allerdings gibt es (inhärent) mehrdeutige kontextfreie Sprachen, zu welchen es keine eindeutige kontextfreie Grammatik gibt.

b) **Falsch.** Sei z.B. $L = \{\underline{0}\}^+$ eine Sprache über $\Sigma = \{\underline{0}\}$. Dann ist L sicher kontextsensitiv. (L ist ja regulär, und deshalb, auf Grund der Chomsky Hierarchie, auch kontextfrei und kontextsensitiv.) Nun ist aber $\overline{L} = \{\varepsilon\}$, also eine endliche Sprache.

c) **Falsch.** Wir betrachten folgendes Gegenbeispiel: Sei $A = \{\underline{0}, \underline{1}\}^*$ und $B = L_u$, also das Halteproblem. Dann sind A wie auch B jedenfalls rekursiv aufzählbar. Allerdings ist dann $A - B$ das Komplement des Halteproblems, welches nicht rekursiv aufzählbar ist (denn sonst wäre das Halteproblem ja entscheidbar).

d) **Falsch.** Wird eine Sprache von einem Kellerautomaten akzeptiert, dann ist sie kontextfrei. Reguläre Grammatiken hingegen erzeugen reguläre Sprachen. Es ist aber nicht jede kontextfreie Sprache regulär! (Die Familie der regulären Sprachen ist eine echte Teilmenge der Familie der kontextfreien Sprachen.)

e) **Richtig.** Allerdings gibt es nur zwei Sprachen, auf die das zutrifft: $\{\}$ und $\{\varepsilon\}$, denn $\{\}^* = \{\varepsilon\}^* = \{\varepsilon\}$. Für alle anderen Sprachen L ist L^* hingegen in der Tat unendlich.

f) **Falsch.** Die von der Grammatik G erzeugte Sprache $L(G) = \{\}$ ist eine reguläre Sprache, und damit, auf Grund der Chomsky Hierarchie, auch kontextfrei, kontextsensitiv, entscheidbar, und rekusiv aufzählbar.

Aufgabe 2.4 Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob diese korrekt ist, oder nicht, und begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) Wenn $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ dann gibt es eine Sprache, die in $\mathbf{P}$ aber nicht in $\mathbf{NP}$ liegt.

b) Ist A **NP**-vollständig, so ist das Komplement von A von einer deterministischen Turingmaschine entscheidbar.

c) Wenn $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ dann kann jedes **NP**-harte Problem in polynomiell beschränkter Zeit gelöst werden.

d) Sei $A \leq_p B$ und A **NP**-hart. Dann ist $B \in \mathbf{NP}$.

e) Sei $A \leq_p B$. Dann gilt: Wenn das Komplement von B endlich ist, dann ist $A \in \mathbf{P}$.

f) Ist A **NP**-vollständig, so ist das Komplement von A in **NP**.

Lösung

a) **Falsch.** Das kann nicht der Fall sein. Denn bereits auf Grund der Definition der beiden Komplexitäetsklassen gilt: $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$. (Es ist allerdings nicht bekannt, ob diese Inklusion echt ist.) Damit gilt aber für jede Sprache $L \in \mathbf{P}$ zugleich auch $L \in \mathbf{NP}$.

b) **Richtig.** Jede Sprache in **NP** ist entscheidbar, insbesondere also auch A. Nachdem entscheidbare Sprachen unter Komplement abgeschlossen sind, ist damit sicher auch $\overline{A}$ entscheidbar.

c) **Falsch.** Ist ein Problem A **NP**-hart, so kann jedes Problem in **NP** in polynomieller Zeit auf A reduziert werden. Das Problem A selbst muss deshalb aber nicht in **NP** bzw. **P** liegen, sondern kann durchaus schwieriger sein (also außerhalb von **NP** sein).

d) **Falsch.** Diese Aussage ist nur dann möglicherweise korrekt, wenn $A \in \mathbf{NP}$ und somit **NP**-vollständig ist. Ist dies aber nicht der Fall, so kann B wegen $A \leq_p B$ keinesfalls in **NP** sein.

e) **Richtig.** Wenn das Komplement von B endlich ist, dann ist B regulär. Somit gilt sicher $B \in \mathbf{P}$, da die regulären Sprachen eine Teilmenge von **P** sind. Dann muss aber, nachdem $A \leq_p B$, auch $A \in \mathbf{P}$ gelten.

f) Diese Frage ist mit dem heutigen Wissensstand nicht eindeutig zu beantworten. Es ist nämlich nach wie vor ungeklärt, ob die Komplexitätsklasse **NP** unter Komplement abgeschlossen ist.

Aufgabe 2.5 Zeigen Sie mit Hilfe einer entsprechenden polynomiellen Reduktion, dass das folgende Problem **NP**-hart ist.
(*Hinweis*: Es bietet sich an, dafür die **NP**-Vollständigkeit des Problems SAT zu nützen, wobei Sie davon ausgehen können, dass entsprechende Formeln bereits in konjunktiver Normalform (KNF) vorliegen.)

Gegeben:	Aussagenlogische Formel α in disjunktiver Normalform
Gefragt:	Ist α widerlegbar?

Lösung
Sei DNF die Menge aller aussagenlogischen Formeln in DNF. Wir betrachten also

$$L = \{F \in DNF \mid F \text{ ist keine Tautologie}\}$$

Um die NP-Härte von L zu beweisen, zeigen wir $SAT \leq_p L$. Die Grundidee dabei ist, die de Morgan'schen Gesetze auszunutzen, denn negiert man eine Formel in KNF, so erhält man eine Formel in DNF. Offensichtlich gilt außerdem: F ist genau dann unerfüllbar, wenn $\neg F$ eine Tautologie ist.

Aus einer Formel F in KNF konstruieren wir eine Formel F' wie folgt:

Wir ersetzen in F alle Variablen durch ihre Negation, alle Konjunktionen ($\wedge$) durch Disjunktionen ($\vee$) und alle Disjunktionen ($\vee$) durch Konjunktionen ($\wedge$). Nach erschöpfender Anwendung der de Morgan'schen Gesetze gilt also schließlich $F' = \neg F$. Offensichtlich ist $f(F) = F'$ in polynomieller Zeit berechenbar.
Es bleibt zu zeigen, dass f die gewünschte Reduktionsfunktion ist:

- Sei $F \in SAT$. Dann enthält jede Klausel mindestens ein wahres Literal. Somit hat jeder Konjunktionsterm von F' mindestens ein falsches Literal. Nachdem F' in DNF ist, gilt also $F' \in L$.

- Sei $F \notin SAT$. Dann gibt es mindestens eine Klausel, die kein wahres Literal enthält. Somit gibt es in F' mindestens einen Konjunktionterm, der nur wahre Literale enthält. Da alle Konjunktionsterme durch Disjunktionen verbunden werden, ist F' eine Tautologie. Somit gilt $F' \notin L$.