Hans Walser, [20200118]

Regelmäßige Rhomboeder

Anregung: L. H., B.

1 Worum geht es?

Formel für Seitenflächenwinkel und Flächenwinkel bei regelmäßigen Rhomboedern.

2 Regelmäßiges Rhomboeder

Seitenflächen sind kongruente Rhomben. Mit α bezeichnen wir den spitzen Rhombenwinkel, mit β den stumpfen Rhombenwinkel.

An den stumpfen Winkeln der Rhomben kommen drei Rhomben zusammen.
An den spitzen Winkeln der Rhomben kommen k Rhomben zusammen.

3 Beispiele

Rhombendodekaeder: $k = 4$
Rhombentriakontaeder: $k = 5$

4 Problemstellung

Zu gegebenem k sind α, β und der Flächenwinkel φ gesucht.

5 Bearbeitung

Wir schneiden eine Ecke mit spitzen Rhombenwinkeln und eine Ecke mit stumpfen Rhombenwinkeln je mit einer Einheitskugel (Abb. 1 für das Rhombendodekaeder).

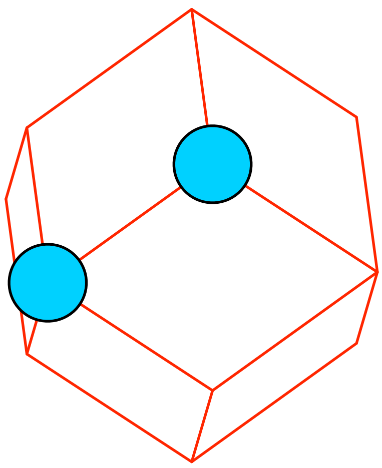

Abb. 1: Einheitskugeln in den Ecken

In einer Ecke mit k spitzen Rhombenwinkeln schneiden die Rhomben aus der Kugel ein regelmäßiges sphärisches k-Eck heraus (Abb. 2 für $k = 4$). Dieses hat die Seitenlänge α und besteht aus k gleichschenkligen sphärischen Dreiecken. Wir halbieren eines davon mit der Symmetrielinie und erhalten das in der Abbildung 2 markierte rechtwinklige sphärische Dreieck ABC.

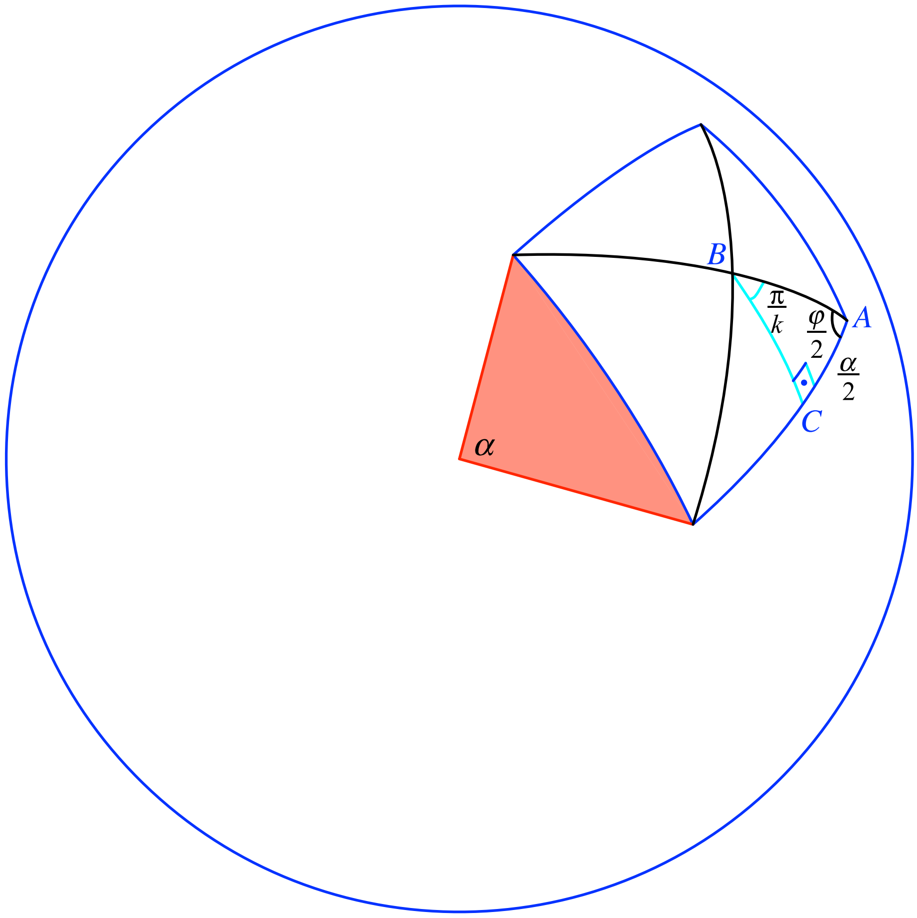

Abb.2: Regelmäßiges sphärisches *k*-Eck

Der Winkel bei A ist der halbe Flächenwinkel, also $\frac{\varphi}{2}$. Bei B haben wir den Winkel $\frac{\pi}{k}$ und bei C einen rechten Winkel. Der Bogen CA hat die Länge $\frac{\alpha}{2}$.
Dies ist Fall für den sphärischen Winkel-Kosinus-Satz. Dieser lautet allgemein:

$$\cos(\beta) = -\cos(\gamma)\cos(\alpha) + \sin(\gamma)\sin(\alpha)\cos(b) \tag{1}$$

In unserem Fall ist:

$$\begin{aligned} \cos\left(\tfrac{\pi}{k}\right) &= -\underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}_{0}\cos\left(\tfrac{\varphi}{2}\right) + \underbrace{\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}_{1}\sin\left(\tfrac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) \\ \cos\left(\tfrac{\pi}{k}\right) &= \sin\left(\tfrac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

Der reche Winkel vereinfacht die Sache.

In einer Ecke mit *drei stumpfen* Rhombenwinkeln schneiden die Rhomben aus der Kugel ein regelmäßiges sphärisches Dreieck heraus (Abb. 3). Dieses hat die Seitenlänge β und besteht aus drei gleichschenkligen sphärischen Dreiecken. Wir halbieren eines davon mit der Symmetrielinie und erhalten das in der Abbildung 3 markierte rechtwinklige sphärische Dreieck ABC.

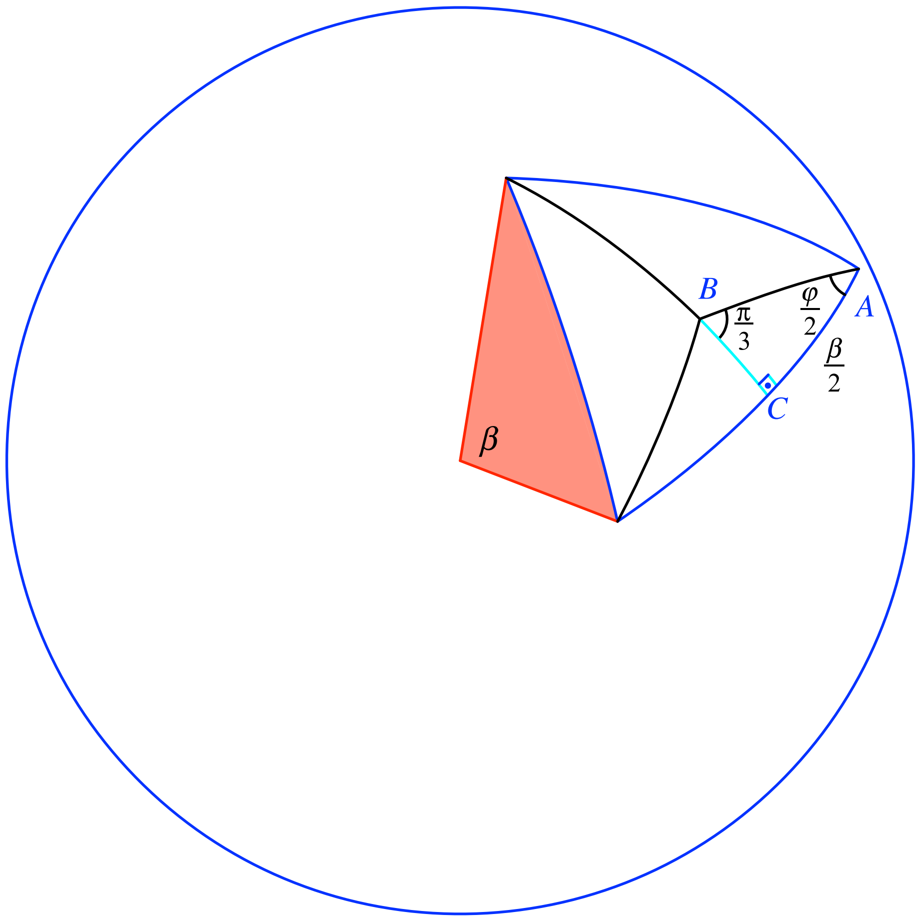

Abb. 3: Regelmäßiges sphärisches Dreieck

Der Winkel bei A ist der halbe Flächenwinkel, also $\frac{\varphi}{2}$. Bei B haben wir den Winkel $\frac{\pi}{3}$ und bei C einen rechten Winkel. Der Bogen CA hat die Länge $\frac{\beta}{2}$.

Wiederum ein Fall für den sphärischen Winkel-Kosinus-Satz (1). In unserem Fall ist nun:

$$\begin{gathered}\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{\frac{1}{2}}=-\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)+\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\\ \frac{1}{2}=\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)=\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}\right)=\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\end{gathered} \tag{3}$$

Aus (2) und (3) ergibt sich durch Elimination von $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$:

$$\alpha=2\arctan\left(\frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)}\right) \tag{4}$$

Daraus folgt:

$$\beta=\pi-2\arctan\left(\frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)}\right) \tag{5}$$

Schließlich erhalten wir aus (3):

$$\varphi=2\arcsin\left(\frac{1}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) \tag{6}$$

Dies kann mit einiger Rechnung durch Einsetzen von (4) umgeformt werden zu:

$$\varphi=2\arcsin\left(\sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{k}\right)+\frac{1}{4}}\right) \tag{7}$$

Damit haben wir α,β und φ durch k ausgedrückt.

6 Numerische Werte

Die Tabelle 1 gibt die ersten numerischen Werte.

k	Spitzer Rhomben-winkel	Stumpfer Rhomben-winkel	Flächenwinkel	Bemerkungen
3	90°	90°	90°	Rhombenhexaeder (Würfel)
4	70.52877932°	109.4712207°	120°	Rhombendodekaeder
5	63.43494883°	116.5650512°	144°	Rhombentriakontaeder
6	60°	120°	180°	Rhombenparkett (Abb. 4)
7	58.05688136°	121.9431186°	180° – 28.18913834i°	komplex

Tab. 1: Numerische Werte

Für $k = 3$ ergibt sich der Würfel als Sonderfall eines regelmäßigen Rhomboeders.

Für $k = 4$ (Rhombendodekaeder) erkennen wir die kristallografischen Winkel. Diese sind auch die Diagonalenschnittwinkel in einem DIN A4-Papier (Walser 2013b). Der Flächenwinkel ist der Innenwinkel des regelmäßigen ebenen Sechseckes.

Für $k = 5$ (Rhombentriakontaeder) haben wir die Diagonalenschnittwinkel des Goldenen Rechteckes (Walser 2013a). Der Flächenwinkel ist der Innenwinkel des regelmäßigen ebenen Zehnecks.

Für $k = 6$ ergibt sich das Rhombenparkett der Abbildung 4.

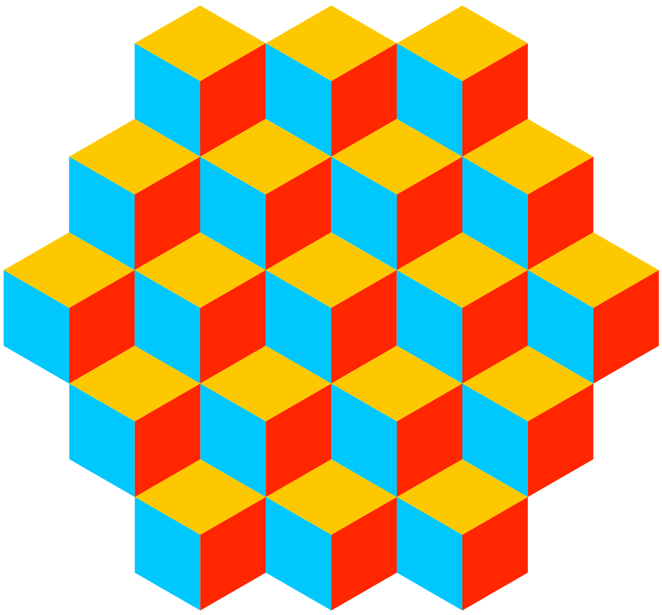

Abb. 4: Rhombenparkett

Ab $k = 7$ gibt es keine reellen Lösungen.

Websites

Hans Walser: Flächenwinkel bei regelmäßigen Polyedern
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/F/Flaechenwinkel_regelm/Flaechenwinkel_regelm.htm

Hans Walser: Flächenwinkel
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/F/Flaechenwinkel/Flaechenwinkel.htm

Hans Walser: Sphärische Trigonometrie
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Sphaer_Trigo/Sphaer_Trigo.pdf

Hans Walser: Formeln für die sphärische, euklidische und hyperbolische Geometrie
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/F/Formeln/Formeln.htm

Literatur

Walser, Hans (2013a): *Der Goldene Schnitt*. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-85-1.

Walser, Hans (2013b): *DIN A4 in Raum und Zeit*. Silbernes Rechteck – Goldenes Trapez – DIN-Quader. Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-69-1.

Walser, Hans (2017): EAGLE STARTHILFE *Kartografie*. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig. ISBN 978-3-95922-098-9.