5. Ebene Probleme

5.1 Ebener Spannungszustand

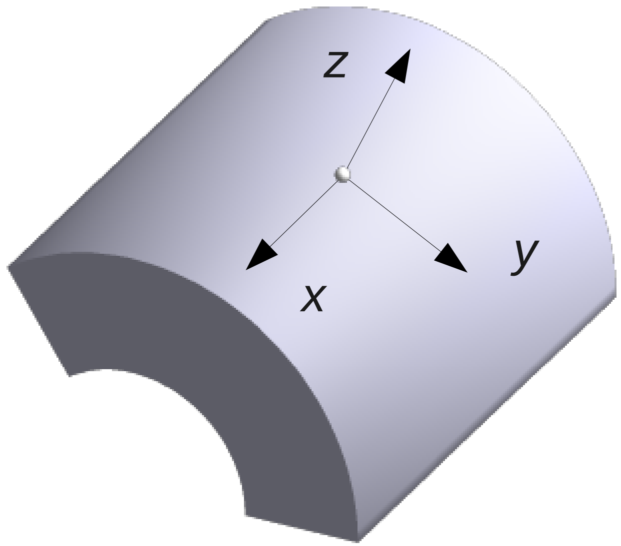
- Definition:
  - Bei einem ebenen Spannungszustand ist eine Hauptspannung null.
  - Das Koordinatensystem kann so gewählt werden, dass die *z*-Achse mit der Hauptachse zur Hauptspannung null zusammenfällt.
  - Dann gilt: $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$
- Auftreten:
  - Ein ebener Spannungszustand liegt für alle unbelasteten Oberflächen vor.

5.1 Ebener Spannungszustand

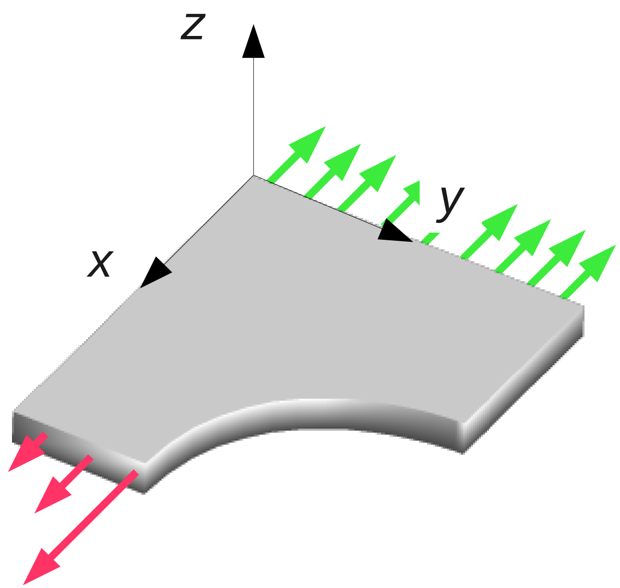
- Ein ebener Spannungszustand liegt näherungsweise in Scheiben vor.
- Eine Scheibe ist ein ebenes Bauteil,
  - dessen Dicke klein gegenüber den übrigen Abmessungen ist,
  - das nur in seiner Ebene belastet wird.
- In Scheiben hängen Spannungen, Verzerrungen und Verschiebungen nur von den Koordinaten x und y ab.

5.1 Ebener Spannungszustand

Unbelastete Oberfläche:



Scheibe:



5.1 Ebener Spannungszustand

- Gleichungen:
  - Gleichgewicht:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0$$

  - Elastizitätsgesetz:
    - Verzerrungen:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu \sigma_y\right), \quad \epsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu \sigma_x\right), \quad \gamma_{xy} = \frac{2\left(1+\nu\right)}{E}\tau_{xy}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right), \quad \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$$

5.1 Ebener Spannungszustand

- Spannungen:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\epsilon_x + \nu\,\epsilon_y\right),\quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\epsilon_y + \nu\,\epsilon_x\right),\quad \tau_{xy} = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\gamma_{xy}$$

- Die Querdehnung ε_z ist nicht null, ist aber durch die beiden anderen Dehnungen festgelegt:

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\epsilon_x + \epsilon_y\right)$$

- Kinematik: $$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},\quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

5.1 Ebener Spannungszustand

- Verträglichkeitsbedingung:
  - Es bleibt nur eine Verträglichkeitsbedingung übrig:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

- Spannungsfunktion:
  - Wenn die Volumenkräfte f_x und f_y verschwinden, können für den ebenen Spannungszustand drei Differenzialgleichungen für die Spannungen angegeben werden, die sich auf eine einzige Differenzialgleichung für eine Spannungsfunktion zurückführen lassen.

5.1 Ebener Spannungszustand

- Einsetzen des Elastizitätsgesetzes für die Verzerrungen in die Verträglichkeitsbedingung ergibt:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

- Aus den Gleichgewichtsbedingungen folgt durch partielles Ableiten und Addition:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right)$$

5.1 Ebener Spannungszustand

- Damit lässt sich die Schubspannung aus der ersten Gleichung eliminieren:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}=0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=0$$

- Zusammen mit den beiden Gleichgewichtsbedingungen stehen zur Bestimmung der Komponenten des Spannungstensors die folgenden drei Gleichungen zur Verfügung:

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=0}$$

5.1 Ebener Spannungszustand

- Zur Lösung wurde von G. B. Airy im Jahre 1862 der folgende Ansatz gemacht:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

- Mit diesem Ansatz sind die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt.
- Aus der dritten Gleichung folgt:

$$\boxed{\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0}$$

- Die Funktion F heißt *Airysche Spannungsfunktion*.

5.1 Ebener Spannungszustand

- Die Airysche Spannungsfunktion muss eine sogenannte Bipotentialgleichung erfüllen.
- In Polarkoordinaten gilt:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right)^2 F=0$$

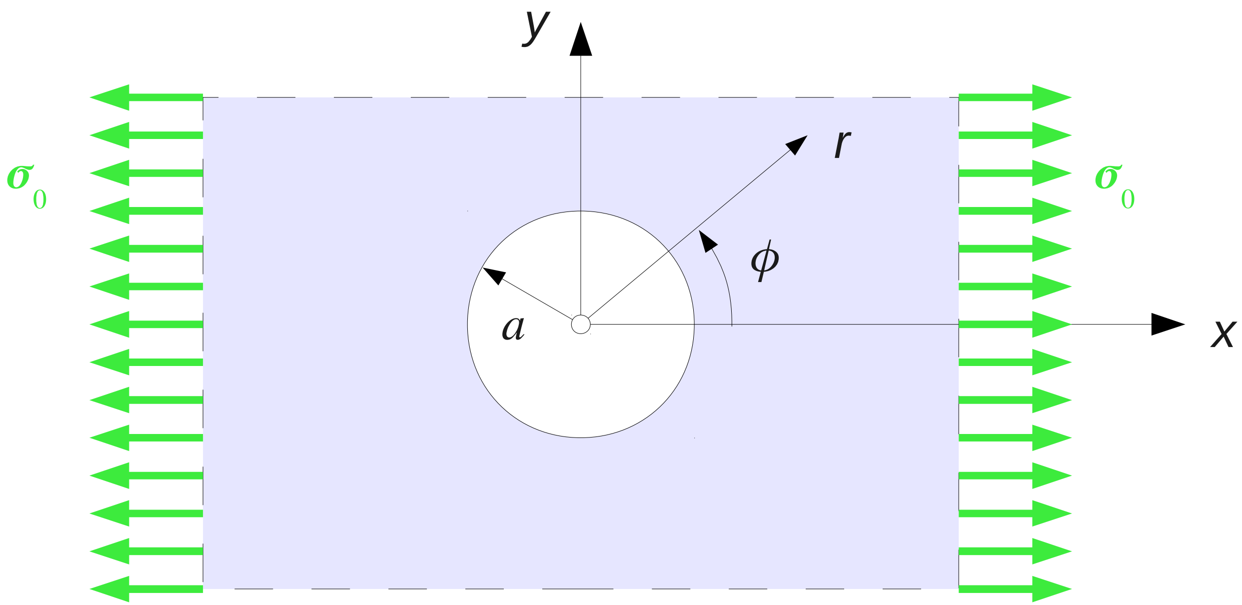
$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2},\quad \sigma_\phi=\frac{\partial^2 F}{\partial r^2},\quad \tau_{r\phi}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \phi}\right)$$

5.1 Ebener Spannungszustand

- Für eine Reihe von einfachen Problemen lassen sich Lösungen finden, indem elementare Lösungen so kombiniert werden, dass die Randbedingungen erfüllt sind.
- Mit Hilfe von komplexen Spannungsfunktionen lassen sich auch kompliziertere Probleme analytisch lösen, da sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil einer komplexen stetig differenzierbaren Funktion die Bipotentialgleichung automatisch erfüllt.
- Die meisten analytischen Lösungen gelten nur für Probleme mit stark idealisierten Randbedingungen.

5.1 Ebener Spannungszustand

- Scheibe mit Kreisloch:
  - Betrachtet wird eine unendlich ausgedehnte Scheibe mit Kreisloch, bei der im Unendlichen eine Spannung σ_0 in *x*-Richtung wirkt.



5.1 Ebener Spannungszustand

- Für dieses Problem wurde im Jahre 1898 von G. Kirsch die folgende Spannungsfunktion gefunden:

$$F(r,\phi)=\frac{\sigma_0}{4}\left[r^2-2a^2\ln(r)-\frac{\left(r^2-a^2\right)^2}{r^2}\cos(2\phi)\right]$$

- Daraus ergeben sich die Spannungen:

$$\sigma_r(r,\phi)=\frac{\sigma_0}{2}\left[1-\frac{a^2}{r^2}+\left(1-4\frac{a^2}{r^2}+3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos(2\phi)\right]$$

$$\sigma_\phi(r,\phi)=\frac{\sigma_0}{2}\left[1+\frac{a^2}{r^2}-\left(1+3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos(2\phi)\right]$$

5.1 Ebener Spannungszustand

$$\tau_{r\phi}(r,\phi)=\frac{\sigma_0}{2}\left(-1-2\frac{a^2}{r^2}+3\frac{a^4}{r^4}\right)\sin(2\phi)$$

- Am Lochrand ($r = a$) gilt:

$$\sigma_r=0,\quad \sigma_\phi=\sigma_0\left(1-2\cos(2\phi)\right),\quad \tau_{r\phi}=0$$

- Für $r\rightarrow\infty$ gilt:

$$\sigma_{r\infty}=\frac{\sigma_0}{2}\left(1+\cos(2\phi)\right),\quad \sigma_{\phi\infty}=\frac{\sigma_0}{2}\left(1-\cos(2\phi)\right)$$
$$\tau_{r\phi\infty}=-\frac{\sigma_0}{2}\sin(2\phi)$$

5.1 Ebener Spannungszustand

- Im *xy*-Koordinatensystem folgt daraus:

$$\sigma_{x\infty}=\sigma_0,\quad \sigma_{y\infty}=\tau_{xy\infty}=0$$

- Aufspalten der Spannungen ergibt:

$$\sigma_r=\sigma_{r\infty}-\frac{\sigma_0}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left[1+\left(4-3\frac{a^2}{r^2}\right)\cos(2\phi)\right]$$

$$\sigma_\phi=\sigma_{\phi\infty}+\frac{\sigma_0}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left[1-3\frac{a^2}{r^2}\cos(2\phi)\right]$$

$$\tau_{r\phi}=\tau_{r\phi\infty}-\frac{\sigma_0}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(2-3\frac{a^2}{r^2}\right)\sin(2\phi)$$

5.1 Ebener Spannungszustand

- Für die Größenordnung der durch das Loch hervorgerufenen Störungen gilt:

$$\frac{\sigma_0}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left|1+\left(4-3\frac{a^2}{r^2}\right)\cos(2\phi)\right|<\frac{5}{2}\sigma_0\left(\frac{a}{r}\right)^2$$

$$\frac{\sigma_0}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left|1-3\frac{a^2}{r^2}\cos(2\phi)\right|<2\sigma_0\left(\frac{a}{r}\right)^2$$

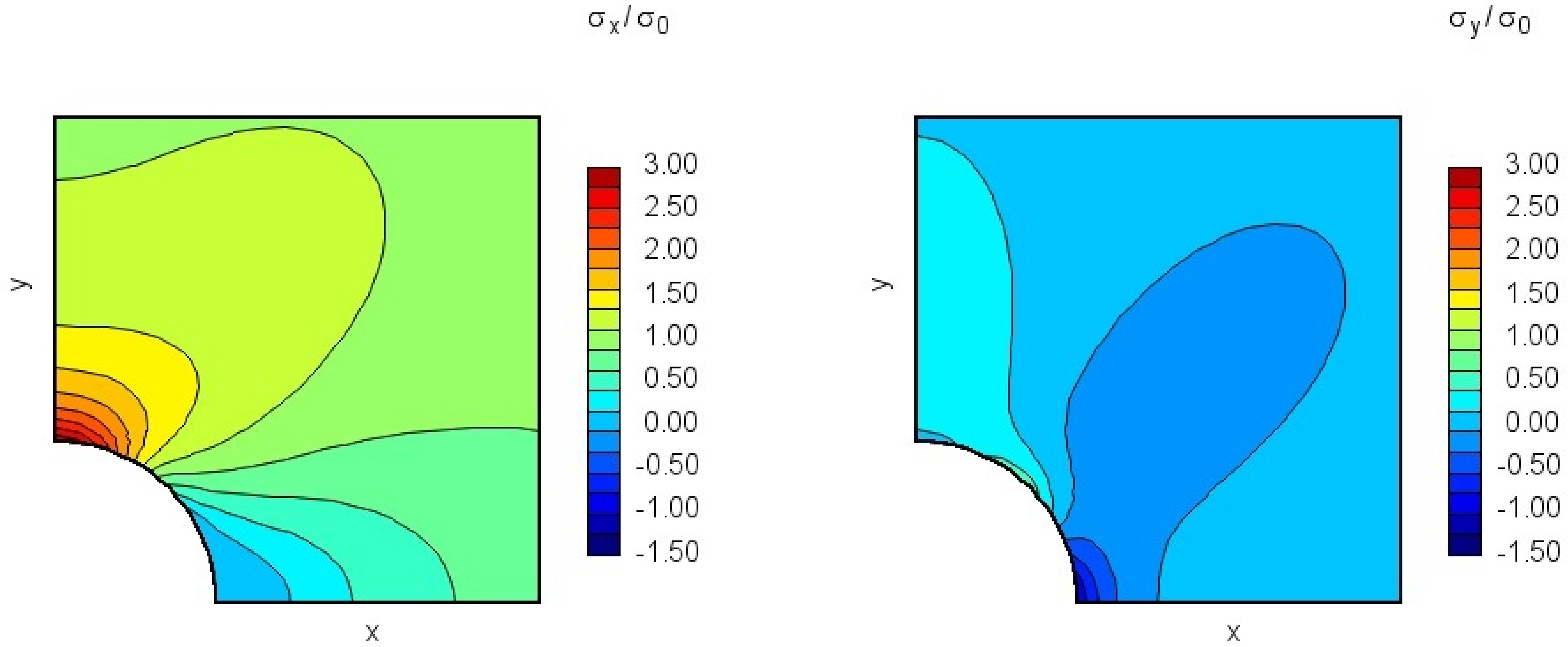
$$\frac{\sigma_0}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left|\left(2-3\frac{a^2}{r^2}\right)\sin(2\phi)\right|<\sigma_0\left(\frac{a}{r}\right)^2$$

5.1 Ebener Spannungszustand

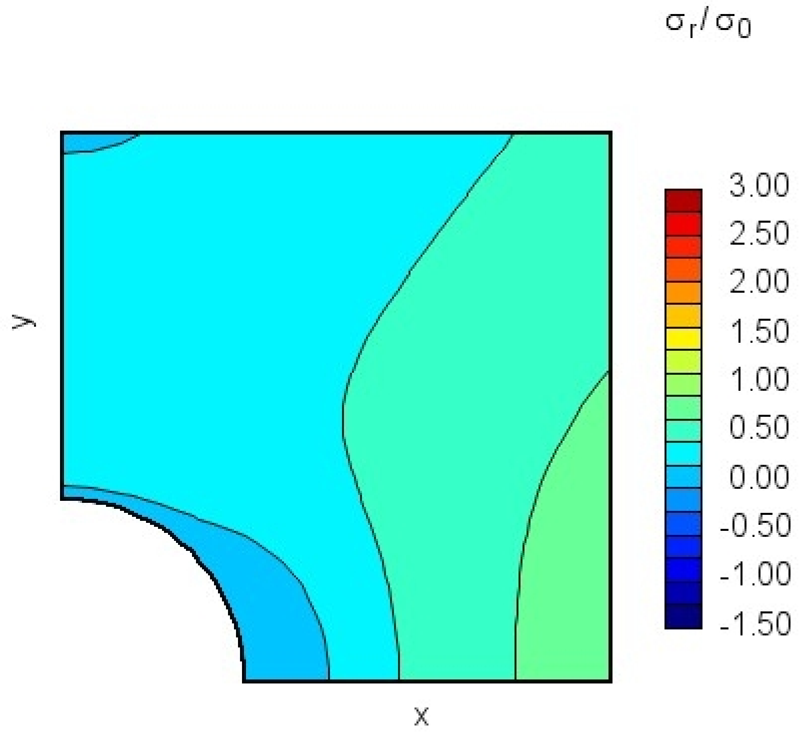
- Die Störungen nehmen umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands vom Loch ab.
- Für $r > 5a$ sind alle Störungen kleiner als 10% von σ_0.
- Die Ergebnisse für die unendlich ausgedehnte Scheibe gelten daher näherungsweise auch für Scheiben, deren Breite größer als das Fünffache des Lochdurchmessers ist.
- Die größte Spannung tritt am Lochrand auf:

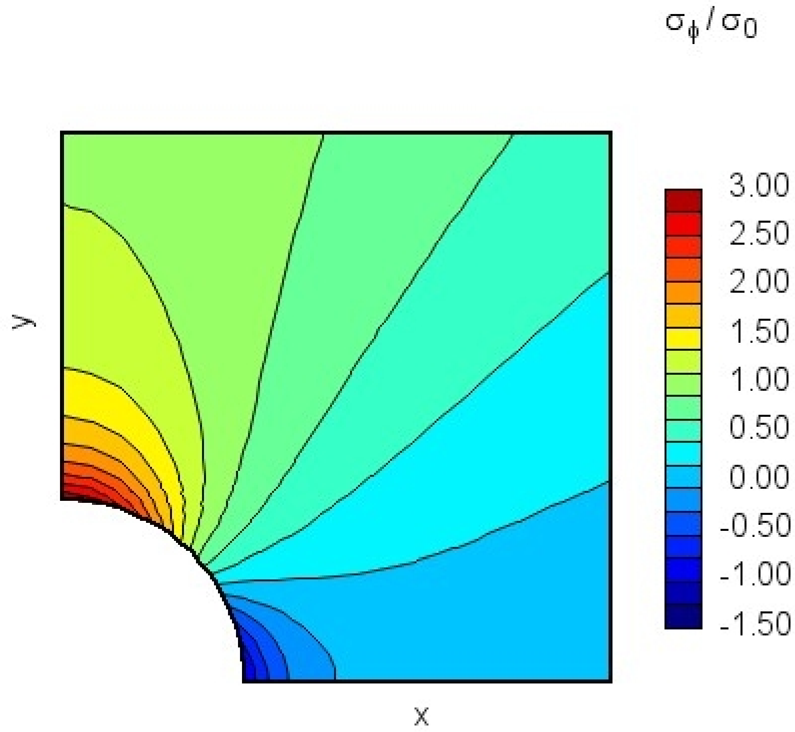
$$\sigma_{max} = \sigma_\varphi(a, 90°) = 3\sigma_0$$

5.1 Ebener Spannugszustand

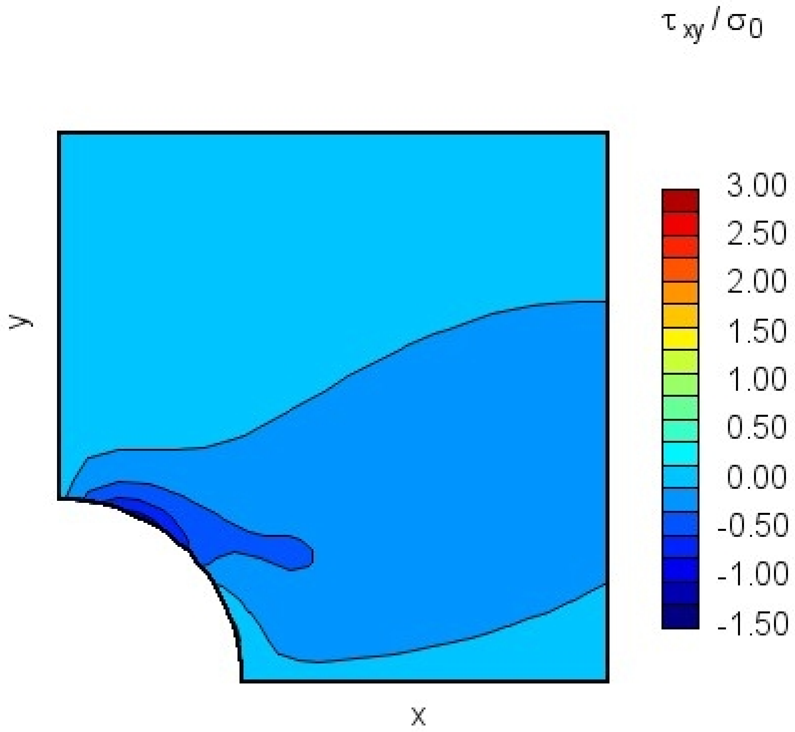


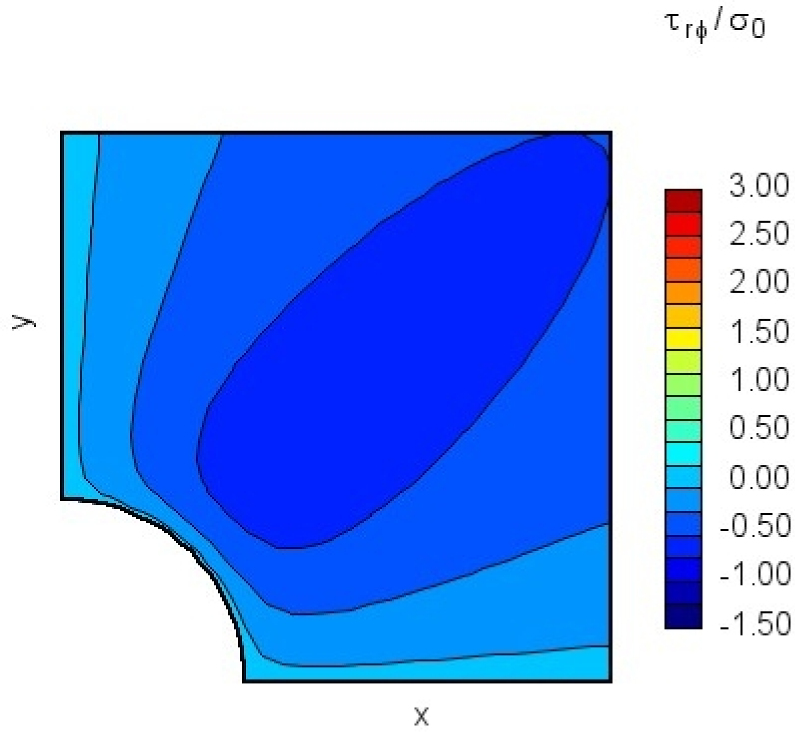
5.1 Ebener Spannungszustand





5.1 Ebener Spannungszustand

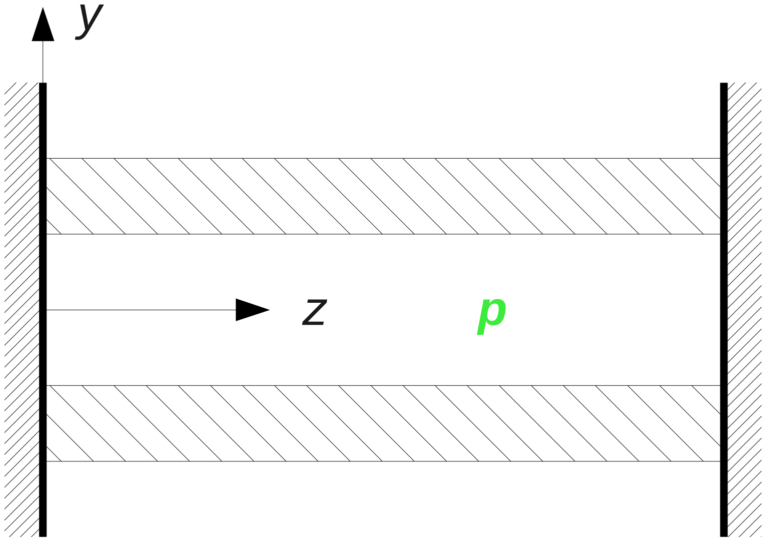


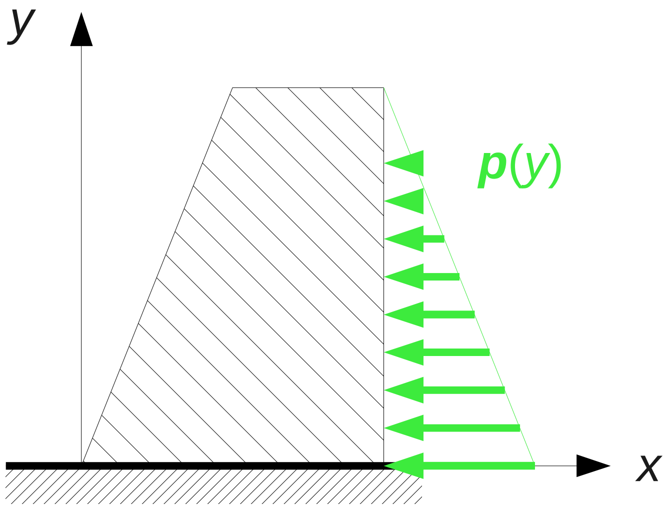


5.2 Ebener Verzerrungszustand

- Definition:
  - Beim ebenen Verzerrungszustand kann das Koordinatensystem so gewählt werden, dass die Verschiebungskomponente w null ist und die Komponenten u und v nicht von der Koordinate z abhängen.
- Auftreten:
  - Ein ebener Verzerrungszustand liegt vor bei einem prismatischen Körper, der zwischen zwei parallelen starren Wänden eingespannt ist, und dessen Belastung nicht von z abhängt:
    - Rohr unter Innendruck zwischen zwei starren Wänden
    - Staudamm

5.2 Ebener Verzerrungszustand





5.2 Ebener Verzerrungszustand

- Gleichungen:
  - Kinematik:
    - Aus $w = 0$ und $u = u(x, y)$ und $v = \mathrm{v}(x, y)$ folgt: $\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

  - Elastizitätsgesetz:
    - Spannungen: $\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\epsilon_x + \nu \epsilon_y \right]$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\nu \epsilon_x + (1-\nu)\epsilon_y \right]$$

5.2 Ebener Verzerrungszustand

$$\sigma_z = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\epsilon_x + \epsilon_y\right), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$$

- Die Spannung σ_z ist durch die Spannungen σ_x und σ_y festgelegt:

$$\sigma_z = \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$$

- Verzerrungen:

$$\epsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right), \quad \epsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x\right)$$

$$\gamma_{yx} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}$$

5.2 Ebener Verzerrungszustand

- Mit

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \nu' = \frac{\nu}{1-\nu}$$

folgt:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E'}\left(\sigma_x - \nu' \sigma_y\right), \quad \epsilon_y = \frac{1}{E'}\left(\sigma_y - \nu' \sigma_x\right), \quad \gamma_{xy} = \frac{2\left(1+\nu'\right)}{E'} \tau_{xy}$$

- Diese Beziehungen stimmen mit den entsprechenden Beziehungen des ebenen Spannungszustands überein.

– Gleichgewicht:

- Die Gleichgewichtsbedingungen stimmen mit denen des ebenen Spannungszustands überein.

5.2 Ebener Verzerrungszustand

- Ergebnis:
  - Für den ebenen Verzerrungszustand gelten dieselben Gleichungen wie für den ebenen Spannungszustand, wenn die elastischen Konstanten durch

$$\boxed{E' = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \nu' = \frac{\nu}{1-\nu}}$$

ersetzt werden.