Dämpfung

- Grundlagen
- Viskose Dämpfung
- Modale Dämpfung
- Rayleigh-Dämpfung
- Strukturdämpfung

1. Grundlagen

- Dämpfung ist ein Prozess, bei dem Energie dissipiert wird.
- Mechanische Energie wird in Wärme umgewandelt.
- Dämpfung kann durch makroskopische oder mikroskopische Effekte verursacht werden.

1. Grundlagen

- Makroskopische Effekte:
  - Reibung
  - Kontakt
  - Zähe Strömungen
  - Schallabstrahlung
- Mikroskopische Effekte:
  - Innere Reibung
  - Plastizität

1. Grundlagen

- Dämpfungsmodelle:
  - Die meisten Vorgänge, die zu Dämpfung führen, sind nichtlinear.
  - In der Praxis wird Dämpfung meist näherungsweise mit linearen Dämpfungsmodellen beschrieben.
  - Die Parameter der linearen Dämpfungsmodelle werden so angepasst, dass die während einer Periode dissipierte Energie mit dem beobachteten Wert übereinstimmt.

1. Grundlagen

- Dissipierte Energie pro Periode:
  - Die Leistung der Dämpfungskraft F_D berechnet sich zu

$$\dot{E}_D = F_D \dot{u}$$

  - Integration über eine Periode ergibt die während einer Periode dissipierte Energie:

$$E_D = \int_0^T F_D \dot{u}\, dt$$

1. Grundlagen

– Wenn die Dämpfungskraft und die Verschiebung einen harmonischen Zeitverlauf haben, gilt:

$$F_D(t) = \hat{F}_D \exp(i\Omega t) + \bar{\hat{F}}_D \exp(-i\Omega t)$$

$$u(t) = \hat{u} \exp(i\Omega t) + \bar{\hat{u}} \exp(-i\Omega t)$$

$$\dot{u}(t) = i\Omega\left(\hat{u} \exp(i\Omega t) - \bar{\hat{u}} \exp(-i\Omega t)\right)$$

1. Grundlagen

– Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
&F_D \dot{u} \\
&= i\Omega\left(\hat{F}_D \exp(i\Omega t) + \bar{\hat{F}}_D \exp(-i\Omega t)\right)\left(\hat{u}\exp(i\Omega t) - \bar{\hat{u}}\exp(-i\Omega t)\right) \\
&= i\Omega\left(\hat{F}_D \hat{u}\exp(2i\Omega t) + \bar{\hat{F}}_D \hat{u} - \hat{F}_D \bar{\hat{u}} - \bar{\hat{F}}_D \bar{\hat{u}}\exp(-2i\Omega t)\right) \\
&= i\Omega\left[\bar{\hat{F}}_D \hat{u} - \overline{\left(\bar{\hat{F}}\hat{u}\right)} + \hat{F}_D \hat{u}\exp(2i\Omega t) - \overline{\left(\hat{F}_D \hat{u}\exp(2i\Omega t)\right)}\right] \\
&= -2\Omega\left[\Im\left(\bar{\hat{F}}_D \hat{u}\right) + \Im\left(\hat{F}_D \hat{u}\exp(2i\Omega t)\right)\right]
\end{aligned}
$$

1. Grundlagen

- Damit berechnet sich die während einer Periode dissipierte Energie zu

$$\boxed{E_D = -2\,\Omega\,T\,\Im\left(\bar{\hat{F}}_D\,\hat{u}\right) = -4\,\pi\,\Im\left(\bar{\hat{F}}_D\,\hat{u}\right)}$$

- Dabei wurde

$$\int_0^T \exp(2\,i\,\Omega\,t)\,dt = \int_0^T \cos(2\,\Omega\,t)\,dt + i\int_0^T \sin(2\,\Omega\,t)\,dt = 0$$

und

$$\int_0^T \exp(-2\,i\,\Omega\,t)\,dt = \int_0^T \cos(2\,\Omega\,t)\,dt - i\int_0^T \sin(2\,\Omega\,t)\,dt = 0$$

benutzt.

2. Viskose Dämpfung

- Viskose Dämpfung im Zeitbereich:
  - Das einfachste lineare Dämpfungsmodell ist eine Dämpfungskraft, die proportional zur Geschwindigkeit ist:

$$F_D(t) = B\dot{u}(t)$$

  - Dieses Dämpfungsmodell wird als viskose Dämpfung bezeichnet.

2. Viskose Dämpfung

- In vielen Fällen hängt die Dämpfungskraft jedoch nicht nur von der augenblicklichen Geschwindigkeit, sondern auch von den Geschwindigkeiten in der Vergangenheit ab.
- Das trifft z.B. bei Flüssigkeitsdämpfern zu.
- Ein allgemeiner linearer Zusammenhang zwischen der Dämpfungskraft und der Geschwindigkeit, der auch die Vergangenheit berücksichtigt, ist gegeben durch

$$F_D(t) = \int_{-\infty}^{\infty} b(t-\tau)\,\dot{u}(\tau)\,d\tau$$

2. Viskose Dämpfung

- Die Funktion *b(t-τ)* beschreibt den Einfluss, den die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt *τ* auf die Dämpfungskraft zum Zeitpunkt *t* hat.
- Da die Dämpfungskraft nicht von Geschwindigkeiten in der Zukunft abhängen kann, muss gelten:

$$b(t-\tau)=0 \quad \text{für} \quad \tau > t$$

- Diese Bedingung wird als Kausalitätsbedingung bezeichnet.

2. Viskose Dämpfung

- Viskose Dämpfung im Frequenzbereich:
  - Der Übergang vom Zeitbereich in den Frequenzbereich erfolgt durch eine Fourier-Transformation.
  - Für die viskose Dämpfung folgt:

$$\hat{F}_D(\Omega) = i\,\Omega\,B\,\hat{u}(\Omega)$$

  - Die während einer Periode dissipierte Energie berechnet sich zu

$$E_D = -4\pi\,\Im\left(\bar{\hat{F}}_D\,\hat{u}\right) = -4\pi\,\Im\left(-i\,\Omega\,B\,\bar{\hat{u}}\,\hat{u}\right)$$

2. Viskose Dämpfung

– Bei viskoser Dämpfung gilt also:

$$\boxed{E_D = 4\pi\,\Omega\,B\,|\hat{u}|^2}$$

– Die dissipierte Energie ist proportional zum Quadrat der Amplitude der Verschiebung und zur Erregerfrequenz.

2. Viskose Dämpfung

– Wenn die Dämpfungskraft durch

$$F_D(t) = \int_{-\infty}^{\infty} b(t-\tau)\,\dot{u}(\tau)\,d\tau$$

gegeben ist, führt die Fourier-Transformation auf

$$\hat{F}_D(\Omega) = i\,\Omega\,B(\Omega)\,\hat{u}(\Omega)$$

– Dabei ist

$$B(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} b(t)\exp(-i\,\Omega\,t)\,dt$$

die Fourier-Transformierte von *b(t)*.

2. Viskose Dämpfung

– Eine frequenzabhängige Dämpfungskonstante *B(Ω)* zeigt also an, dass die Dämpfungskraft von den Geschwindigkeiten in der Vergangenheit abhängt.

– Aus der Kausalitätsbedingung folgt, dass zwischen dem Real- und dem Imaginärteil der Dämpfungskonstante die folgenden Beziehungen bestehen:

$$\Re\left[B(\Omega)\right]=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im\left[B(\bar{\omega})\right]}{\bar{\omega}-\omega}d\bar{\omega},\quad \Im\left[B(\Omega)\right]=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Re\left[B(\bar{\omega})\right]}{\bar{\omega}-\omega}d\bar{\omega}$$

2. Viskose Dämpfung

– Für eine Berechnung müssen also Real- und Imaginärteil oder Amplitude und Phase der frequenzabhängigen Dämpfungskonstanten gegeben sein.
– Eine Vernachlässigung des Imaginärteils führt zu physikalisch sinnlosen Ergebnissen.

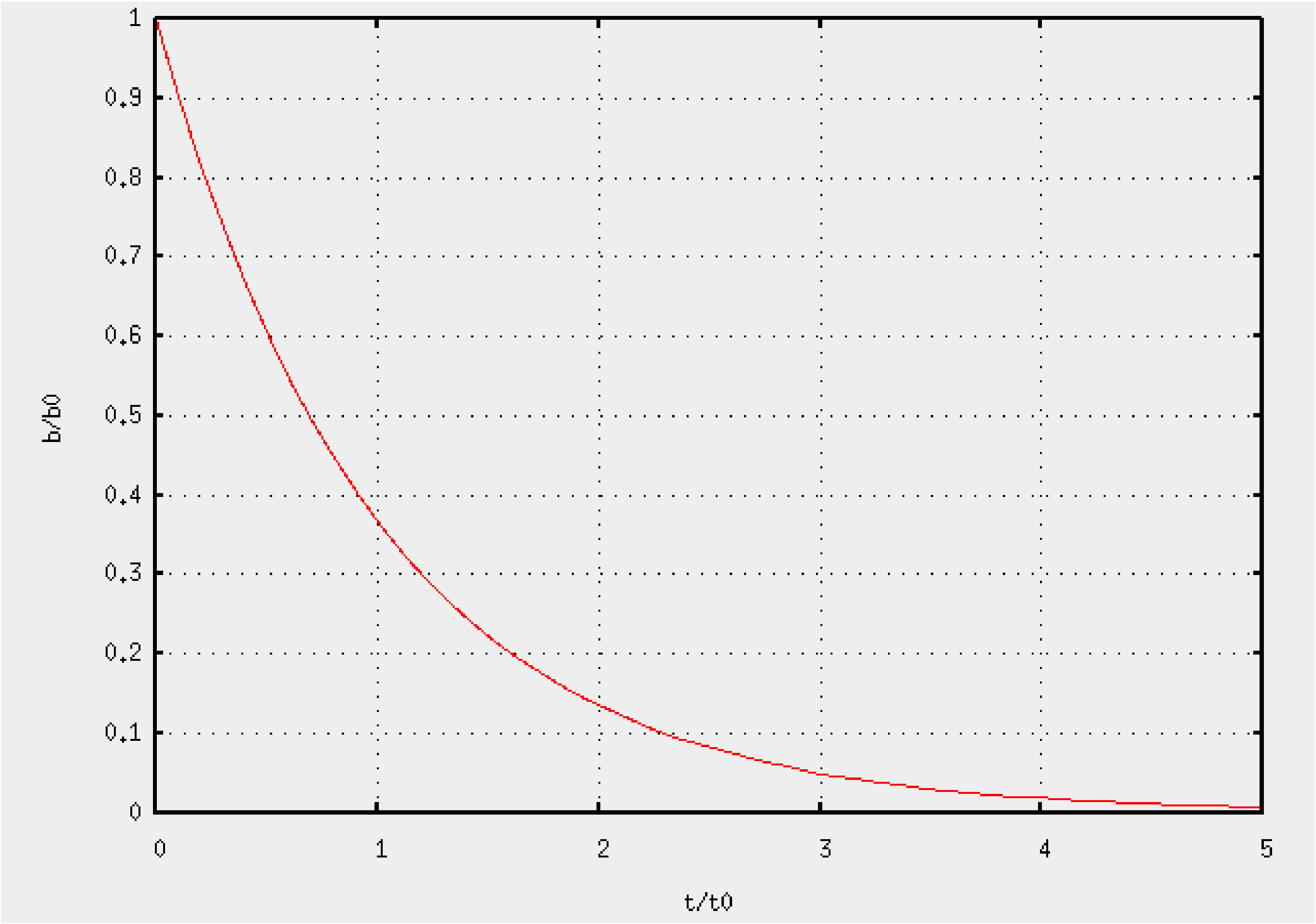
2. Viskose Dämpfung

- Beispiel:
  - Der Dämpfer wird durch die Abklingfunktion

$$b(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ b_0 \exp(-t/t_0) & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

    beschrieben.
  - Dabei sind b_0 und t_0 Konstanten.

2. Viskose Dämpfung



2. Viskose Dämpfung

– Fourier-Transformation:

$$B(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} b(t)\exp(-i\,\Omega\, t)\,dt=b_0\int_{0}^{\infty}\exp(-t/t_0-i\,\Omega\, t)\,dt$$

$$=-\frac{b_0}{1/t_0+i\,\Omega}\left[\exp(-t/t_0-i\,\Omega\, t)\right]_0^{\infty}=\frac{b_0}{1/t_0+i\,\Omega}$$

$$\boxed{B(\Omega)=b_0 t_0\frac{1-i\,\Omega\, t_0}{1+\left(\Omega\, t_0\right)^2}}$$

2. Viskose Dämpfung

– Die Dämpfungskraft berechnet sich zu

$$F_D(\Omega) = i\,\Omega\,B(\Omega)\,\hat{u}(\Omega) = b_0\,t_0\,\frac{i\,\Omega + \Omega^2\,t_0}{1+\left(\Omega\,t_0\right)^2}\,\hat{u}(\Omega)$$

$$= \left[K(\Omega) + i\,\Omega\,\Re\left(B(\Omega)\right)\right]\hat{u}(\Omega)$$

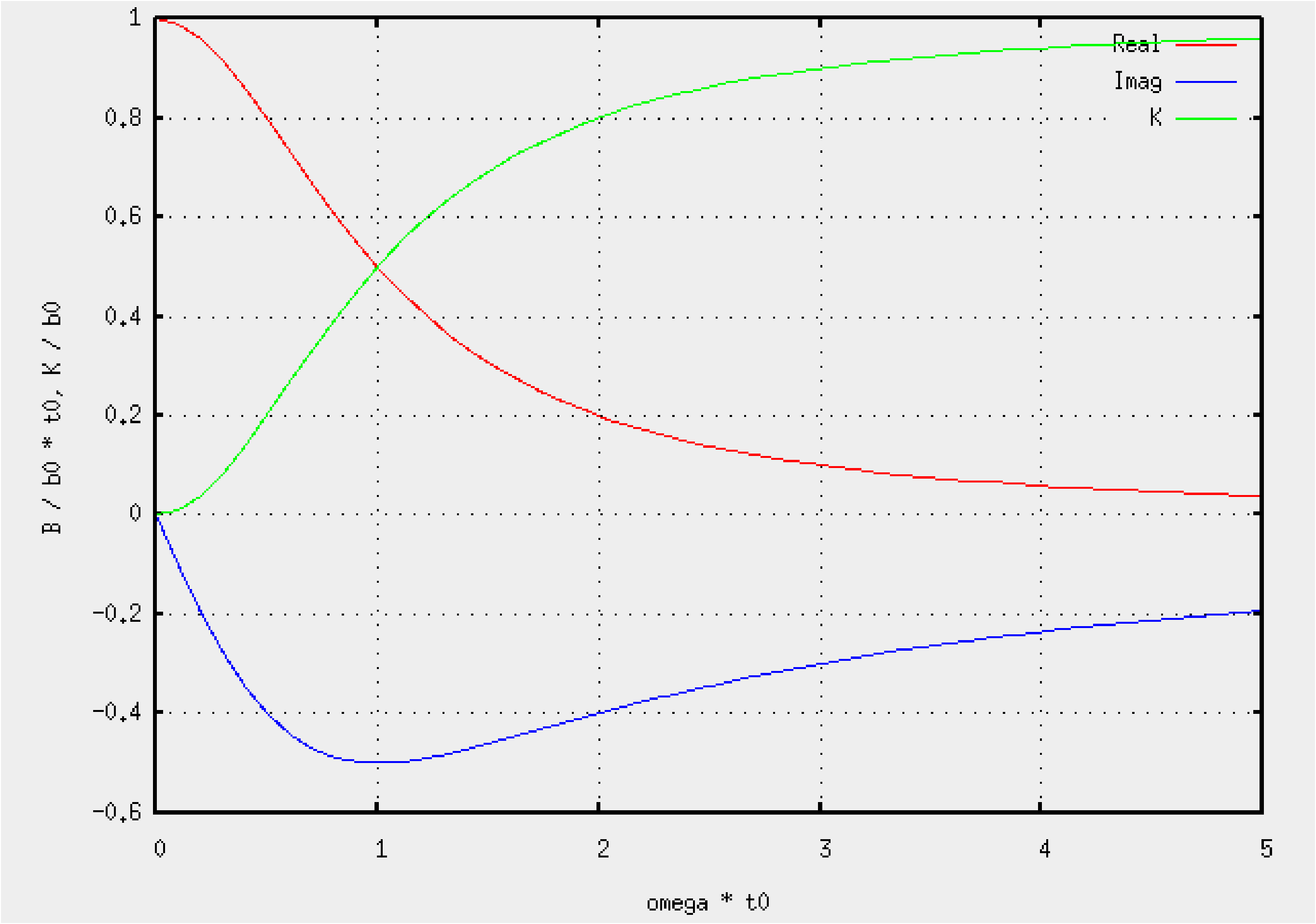
– Dabei ist

$$K(\Omega) = i\,\Omega\,\Im\left(B(\Omega)\right) = b_0\,\frac{\left(\Omega\,t_0\right)^2}{1+\left(\Omega\,t_0\right)^2}$$

2. Viskose Dämpfung

- Der Realteil der Dämpfungskonstante definiert eine Dämpfung.
- Der Imaginärteil der Dämpfungskonstante definiert eine Steifigkeit.

2. Viskose Dämpfung



3. Modale Dämpfung

- Der modalen Dämpfung liegt die Annahme zugrunde, dass jede Eigenschwingung für sich gedämpft wird.
- Die Kopplung zwischen den Eigenschwingungen infolge der Dämpfung wird vernachlässigt.
- Jede Eigenschwingung wird durch eine modale Dämpfungskraft gedämpft, die proportional zur modalen Geschwindigkeit ist.

3. Modale Dämpfung

- Für die modale Dämpfungskraft gilt:

$$F_{D\nu}(t) = 2\omega_\nu D_\nu \dot{q}_\nu(t)$$

  - D_ν ist das Lehrsche Dämpfungsmaß der ν-ten Eigenschwingung.
  - ω_ν ist die Eigenkreisfrequenz der ν-ten Eigen-schwingung.

3. Modale Dämpfung

- Lehrsches Dämpfungsmaß:
  - Das Lehrsche Dämpfungsmaß ist eine Funktion der Eigenschwingung, nicht der Erregerfrequenz.
  - Es beschreibt die dissipierte Energie einer Eigenschwingung infolge aller physikalischen Effekte.

4. Rayleigh-Dämpfung

- Die Rayleigh-Dämpfung wird hauptsächlich bei diskreten Systemen mit mehreren Freiheitsgraden verwendet, wie sie z.B. bei Analysen mit der Methode der Finiten Elemente auftreten.
- Die Dämpfungsmatrix ist definiert durch

$$\boldsymbol{B} = \alpha_1 \boldsymbol{K} + \alpha_2 \boldsymbol{M}$$

4. Rayleigh-Dämpfung

- Das ist ein rein mathematischer Ansatz, dem keinerlei physikalische Überlegungen zugrunde liegen.
- Die so definierte Dämpfungsmatrix wird durch die Modaltransformation auf eine Diagonalmatrix transformiert.

4. Rayleigh-Dämpfung

- Die Modaltransformation zeigt, dass die Rayleigh-Dämpfung äquivalent ist zu einer modalen Dämpfung mit

$$D_\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1}{\omega_\nu} + \alpha_2 \omega_\nu\right)$$

- Im Gegensatz zur modalen Dämpfung kann die Rayleigh-Dämpfung verwendet werden, ohne dass die Eigenschwingungen berechnet werden.

5. Strukturdämpfung

- Motivation:
  - Bei der viskosen Dämpfung ist die dissipierte Energie proportional zum Quadrat der Amplitude der Verschiebung und zur Erregerfrequenz.
  - In vielen Fällen wird beobachtet, dass die dissipierte Energie zwar proportional zum Quadrat der Amplitude der Verschiebung ist, aber kaum von der Erregerfrequenz abhängt.

5. Strukturdämpfung

- Definition:
  - Für einen diskreten Dämpfer wird die Dämpfungskonstante definiert durch

$$B(\Omega)=\frac{g}{\Omega}c$$

  - Dabei ist *c* die Steifigkeitskonstante des Dämpfers.
  - Für die dissipierte Energie gilt dann:

$$E_D=4\pi\, g\, c\, |\hat{u}|^2$$

5. Strukturdämpfung

– Entsprechend kann für ein dämpfendes Material ein komplexer Elastizitätsmodul definiert werden:

$$\hat{E} = E\left(1 + i\,g\right)$$

– Bei diskreten Systemen wird eine Dämpfungsmatrix

$$\boldsymbol{B}(\Omega) = \frac{g}{\Omega}\boldsymbol{K}$$

definiert.

– Der Faktor *g* heißt Verlustfaktor.

5. Strukturdämpfung

- Äquivalente viskose Dämpfung:
  - Für einen viskos gedämpften Schwinger gilt:

$$\left(-\Omega^2 + 2\, i\, \Omega\, \omega_0\, D + \omega_0^2\right) \hat{q} = \frac{\hat{F}}{m}$$

  - Für einen mit Strukturdämpfung gedämpften Schwinger gilt:

$$\left(-\Omega^2 + i\, g\, \omega_0^2 + \omega_0^2\right) \hat{q} = \frac{\hat{F}}{m}$$

5. Strukturdämpfung

- Beide Gleichungen sind identisch für

$$g\,\omega_0 = 2\,\Omega\,D$$

- Diese Gleichung lässt sich nur für eine Erregerfrequenz Ω exakt erfüllen.
- Da die Dämpfung den größten Einfluss für $\Omega = \omega_0$ hat, wird die äquivalente viskose Dämpfung so bestimmt, dass die Dämpfungen gleich sind, wenn die Erregerfrequenz mit der Resonanzfrequenz übereinstimmt.

5. Strukturdämpfung

– Damit gilt für die äquivalente viskose Dämpfung:

$$\boxed{D = \frac{g}{2}}$$

5. Strukturdämpfung

- Grenzen:
  - Es lässt sich zeigen, dass eine Strukturdämpfung mit einem frequenzunabhängigen Verlustfaktor die Kausalitätsbedingung verletzt.
  - Bei einer Berechnung im Zeitbereich kann die Strukturdämpfung daher zu physikalisch sinnlosen Ergebnissen führen.
  - Strukturdämpfung darf nicht verwendet werden, wenn gedämpfte Eigenschwingungen ermittelt werden sollen.