

FEM Lösungsblatt 3.2

Aufgabe 1:

a) Formänderungsenergie:

Für die konstante Spannung im Stab gilt $\sigma_x = \frac{F}{A}$.

Die Dehnung berechnet sich zu $\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{F}{EA}$.

Damit berechnet sich die spezifische Formänderungsenergie zu

$$e^F = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x = \frac{1}{2} \frac{F^2}{EA^2} .$$

Integration über das Volumen des Stabes ergibt

$$E^F = \frac{1}{2} \int_V \frac{F^2}{EA^2} dV = \frac{1}{2} \frac{F^2}{EA^2} \int_V dV = \frac{1}{2} \frac{F^2}{EA^2} V = \frac{1}{2} \frac{F^2 L}{EA} .$$

b) Von der Kraft verrichtete Arbeit:

Die Verschiebung am rechten Stabende berechnet sich zu

$$u = \epsilon L = \frac{FL}{EA} .$$

Daraus folgt für die Kraft: $F(u) = EA \frac{u}{L}$

Für die Arbeit gilt:

$$W(u) = \int_0^u F(\bar{u}) d\bar{u} = \frac{EA}{L} \int_0^u \bar{u} d\bar{u} = \frac{EA}{2L} u^2 = \frac{EA}{2L} \left(\frac{FL}{EA} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{F^2 L}{EA}$$

Aufgabe 2:

a) Formänderungsenergie:

Für das konstante Biegemoment im Balken gilt (z.B. durch Summation über den rechten Teilbalken):

$$M_b(x) = -M$$

Für die Normalspannung folgt: $\sigma_x(x, z) = \frac{M_b}{I_y} z = -\frac{M}{I_y} z$

Für die Dehnung gilt: $\epsilon_x(x, z) = \frac{\sigma_x(x, z)}{E} = -\frac{M}{E I_y} z$

Die spezifische Formänderungsenergie berechnet sich zu

$$e^F(x, z) = \frac{1}{2} \frac{M^2}{E I_y^2} z^2 .$$

Integration über das Volumen ergibt die gesamte Formänderungsenergie:

$$E^F = \frac{1}{2} \frac{M^2}{E I_y^2} \int_0^L \left(\int_A z^2 dA \right) dx = \frac{1}{2} \frac{M^2 L}{E I_y}$$

Zahlenwert:

$$E^F = \frac{1}{2} \frac{1000^2 \text{ N}^2 \text{ mm}^2 \cdot 1000 \text{ mm}}{3,5 \cdot 10^7 \text{ N mm}^2} = 14,29 \text{ Nmm} = \underline{1,429 \cdot 10^{-2} \text{ J}}$$

b) Biegewinkel:

Für die vom angreifenden Moment verrichtete Arbeit gilt $W = \frac{1}{2} M \phi$.

Diese Arbeit muss gleich der Formänderungsenergie sein:

$$\frac{1}{2} M \phi = \frac{1}{2} \frac{M^2 L}{E I_y} \rightarrow \phi = \frac{M L}{E I_y}$$

Zahlenwert:

$$\phi = \frac{1000 \text{ N mm} \cdot 1000 \text{ mm}}{3,5 \cdot 10^7 \text{ N mm}^2} = \underline{0,02857}$$