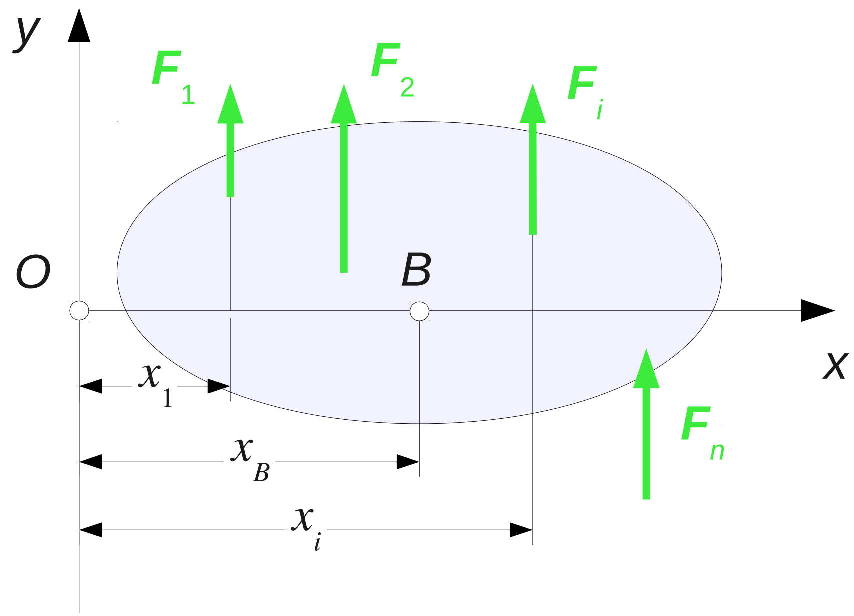
1. Gruppe paralleler Kräfte

- Einzelkräfte in einer Ebene:
  - Betrachtet wird ein starrer Körper, an dem eine Gruppe von parallelen Kräften angreift, die alle in einer Ebene liegen.
  - Das Koordinatensystem kann so gewählt werden, dass die Kräfte in *y*-Richtung wirken.



1. Gruppe paralleler Kräfte

- Zusammenfassen der Kräfte am Punkt *B* ergibt:

$$F_R = \sum_{i=1}^{n} F_i , \quad M^B = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_B \right) F_i$$

- Für den *Kräftemittelpunkt S* muss gelten:

$$0 = M^S = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_S \right) F_i \;\rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} x_i F_i = x_S \sum_{i=1}^{n} F_i = x_S F_R$$

- Mit $M^O = \sum_{i=1}^{n} x_i F_i$ folgt:

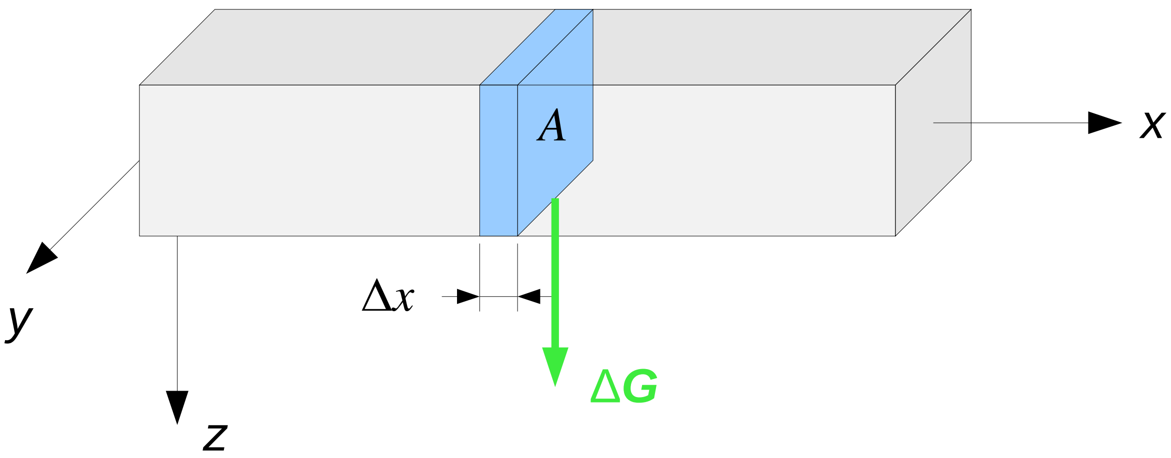
$$\boxed{x_S = \frac{1}{F_R} \sum_{i=1}^{n} x_i F_i = \frac{M^O}{F_R}}$$

1. Gruppe paralleler Kräfte

- Streckenlasten:
  - Eine Streckenlast ist eine Kraft, die entlang einer Linie eines Bauteils verteilt angreift.
  - Ihre Einheit ist Kraft pro Länge: $\mathrm{N/m}$
  - Streckenlasten werden zur Beschreibung von Lasten verwendet, die an Bauteilen angreifen, deren Querschnittsabmessungen klein gegenüber ihrer Länge sind:
    - Eigengewicht von Balken
    - Schneelast auf Balken
    - Windlasten auf Balken
    - Auftriebsverteilung am Tragflügel

1. Gruppe paralleler Kräfte

- Beispiel: Eigengewicht

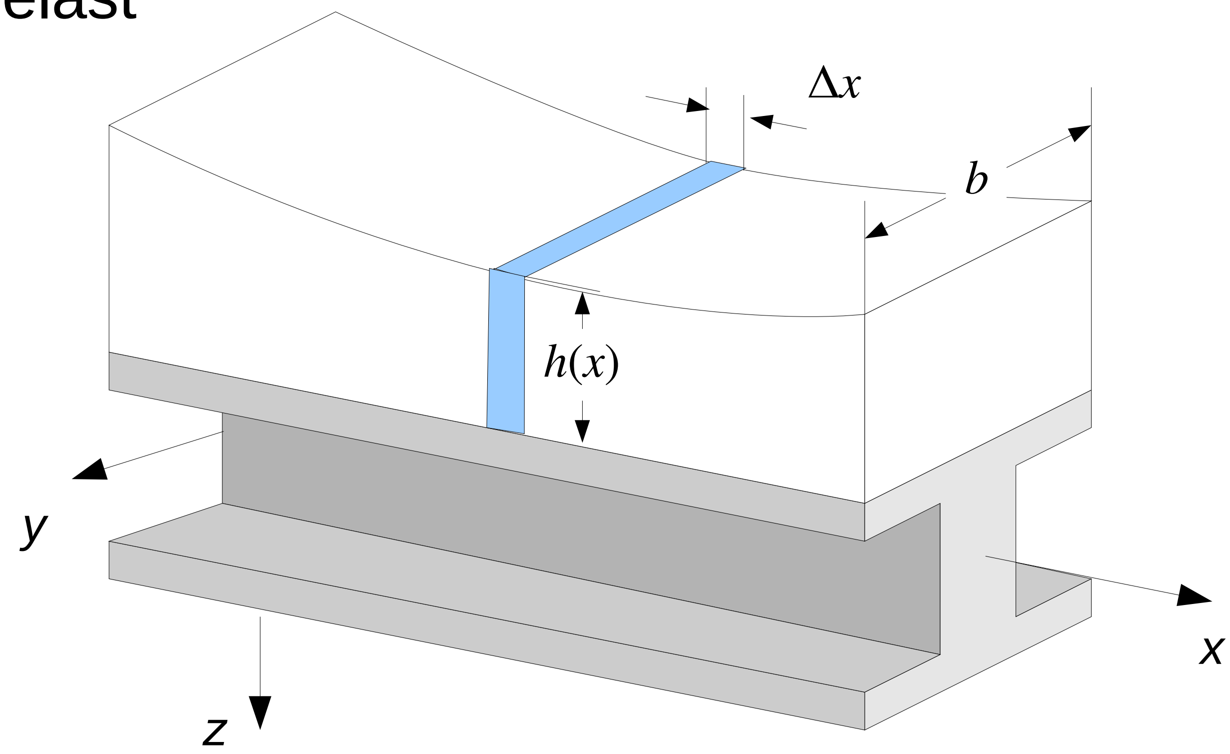


$$\Delta G = \rho\, g\, \Delta V = \rho\, g\, A\, \Delta x \;\rightarrow\; q = \frac{\Delta G}{\Delta x} = \rho\, g\, A$$

- Bei veränderlichem Querschnitt gilt: $q(x) = \rho\, g\, A(x)$

1. Gruppe paralleler Kräfte

- Beispiel: Schneelast

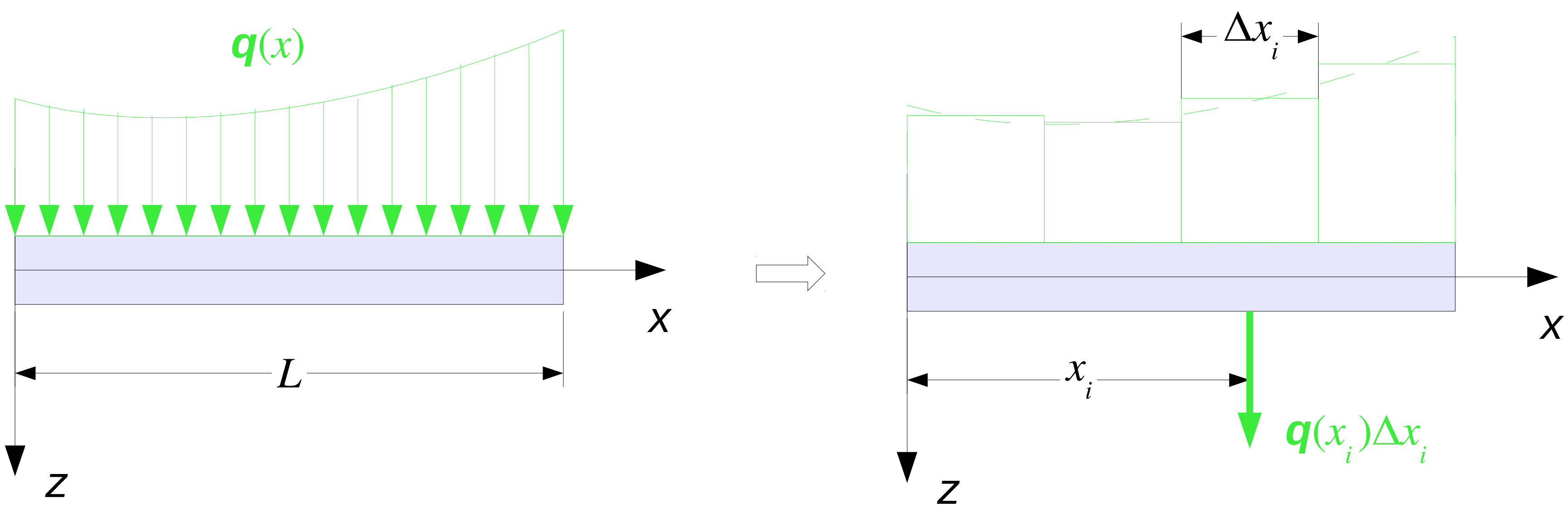


$$\Delta G_S = \rho_S\, g\, \Delta V = \rho_S\, g\, b\, h(x)\, \Delta x$$

$$\rightarrow \quad q_S(x) = \frac{\Delta G_S}{\Delta x} = \rho_S\, g\, b\, h(x)$$

1. Gruppe paralleler Kräfte

- Zur Ermittlung des Kräftemittelpunkts wird die Streckenlast zunächst durch eine abschnittsweise konstante Streckenlast approximiert:



1. Gruppe paralleler Kräfte

- Für die Approximation gilt:

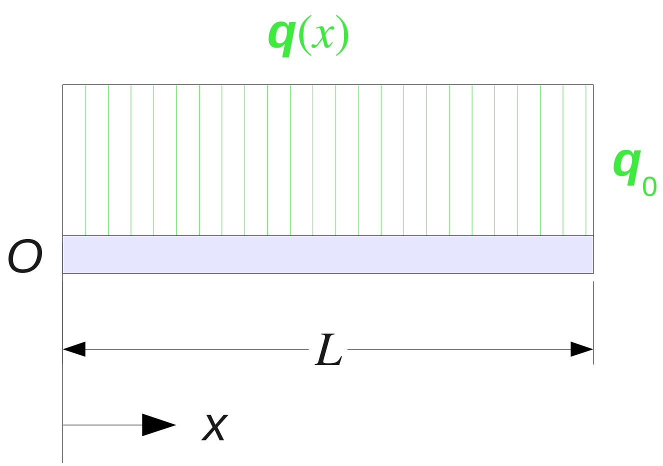
$$F_R \approx \sum_i q(x_i)\Delta x_i, \quad x_S \approx \frac{1}{F_R}\sum_i x_i q(x_i)\Delta x_i$$

- Der Grenzübergang $\Delta x_i \rightarrow 0$ ergibt:

$$\boxed{F_R = \int_0^L q(x)\,dx, \quad x_S = \frac{1}{F_R}\int_0^L x\,q(x)\,dx}$$

1. Gruppe paralleler Kräfte

- Beispiel: Konstante Streckenlast



  - Streckenlast: $q(x) = q_0$

- Resultierende Kraft:

$$F_R = \int_0^L q(x)\,dx = q_0 \int_0^L dx = q_0 L$$

- Resultierendes Moment:

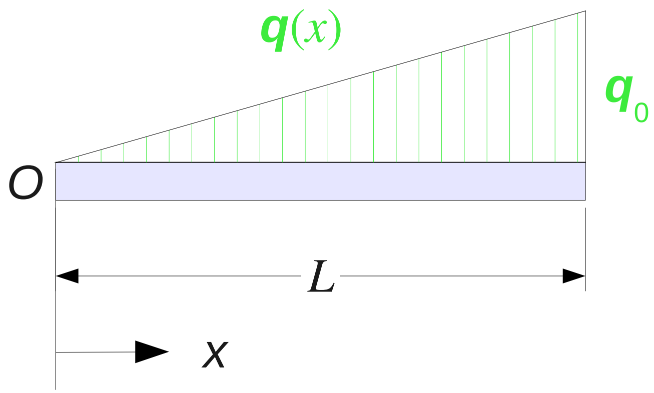
$$M^O = \int_0^L x\,q(x)\,dx = q_0 \int_0^L x\,dx$$

$$= q_0 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=L} = \frac{1}{2} q_0 L^2$$

- Angriffspunkt: $x_S = \frac{1}{2} L$

1. Gruppe paralleler Kräfte

- Beispiel: Lineare Streckenlast



- Streckenlast:

$$q(x) = q_0 \frac{x}{L}$$

- Resultierende Kraft:

$$F_R = \int_0^L q(x)\,dx = q_0 \int_0^L \frac{x}{L}\,dx$$

$$= q_0 \left[\frac{x^2}{2L} \right]_{x=0}^{x=L} = \frac{1}{2} q_0 L$$

- Resultierendes Moment:

$$M^O = \int_0^L x\,q(x)\,dx = q_0 \int_0^L \frac{x^2}{L}\,dx$$

$$= q_0 \left[\frac{x^3}{3L} \right]_{x=0}^{x=L} = \frac{1}{3} q_0 L^2$$

1. Gruppe paralleler Kräfte

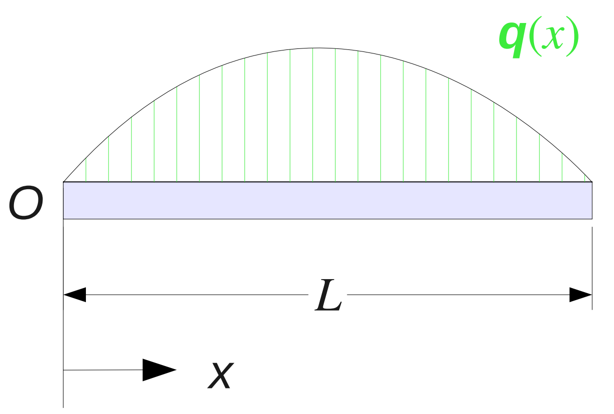
- Angriffspunkt:

$$x_S = \frac{2}{3} L$$

- Streckenlast:

$$q(x) = 4 q_0 \frac{x}{L}\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

- Beispiel: Parabolische Streckenlast



- Resultierende Kraft:

$$F_R = \int_0^L q(x)\,dx = 4 q_0 \int_0^L \frac{x}{L}\left(1 - \frac{x}{L}\right) dx$$

$$= 4 q_0 \left[\frac{x^2}{2L} - \frac{x^3}{3L^2} \right]_{x=0}^{x=L} = \frac{2}{3} q_0 L$$

1. Gruppe paralleler Kräfte

- Resultierendes Moment:

$$M^O = \int_0^L x\,q(x)\,dx$$

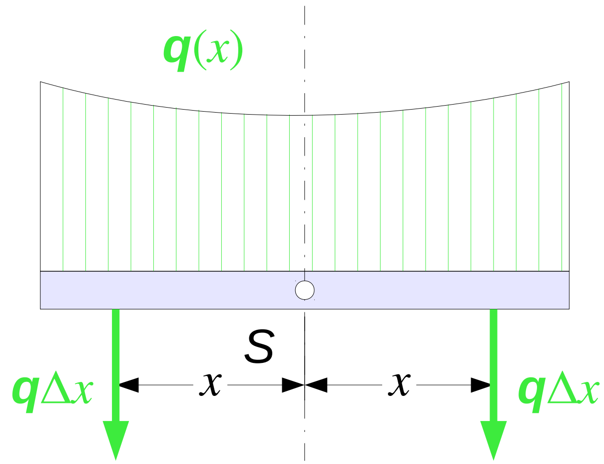
$$= 4 q_0 \int_0^L \frac{x^2}{L}\left(1 - \frac{x}{L}\right) dx$$

$$= 4 q_0 \left[\frac{x^3}{3L} - \frac{x^4}{4L^2} \right]_{x=0}^{x=L}$$

$$= \frac{1}{3} q_0 L^2$$

- Angriffspunkt: $x_S = \frac{1}{2} L$

• Symmetrische Strecken-last:



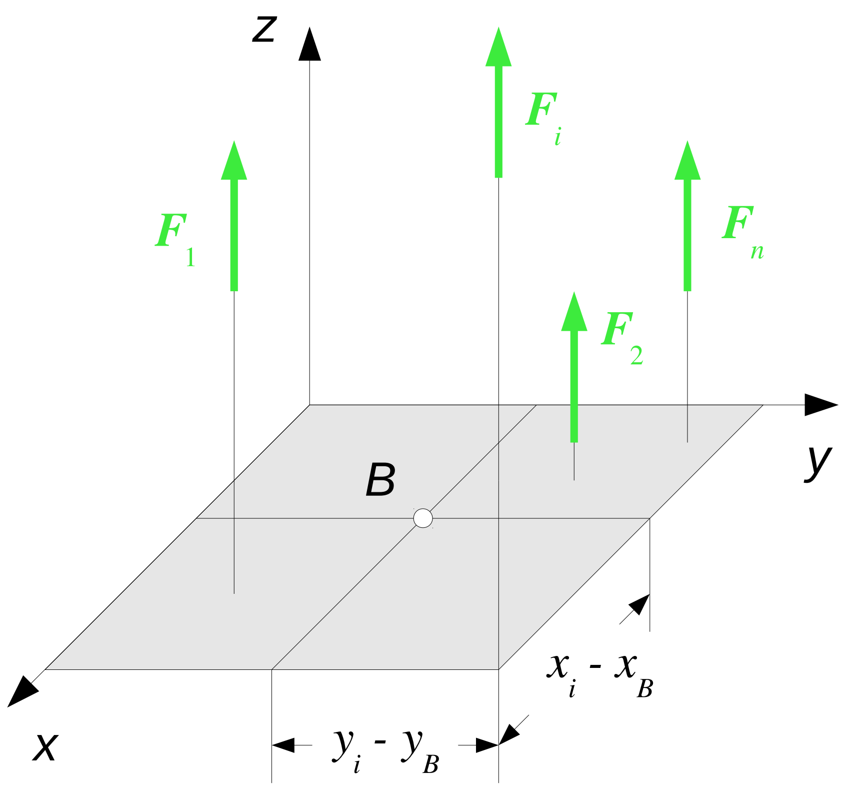
- Der Kräftemittelpunkt liegt auf der Symmetrieachse.

1. Gruppe paralleler Kräfte

- Bemerkung:
  - Wenn die resultierende Kraft null ist, gibt es keinen Kräfte-mittelpunkt.
  - In diesem Fall kann das Kraftsystem durch ein resultieren-des Moment ersetzt werden.

1. Gruppe paralleler Kräfte

- Einzelkräfte im Raum:
  - Das Koordinatensystem kann so gewählt werden, dass die Kräfte in *z*-Richtung zeigen.
  - Zusammenfassen der Kräfte am Punkt *B* ergibt:



$$F_R = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

$$M_x^B = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - y_B\right) F_i, \quad M_y^B = -\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_B\right) F_i$$

1. Gruppe paralleler Kräfte

- Für den Kräftemittelpunkt *S* muss gelten:

$$0=M_x^S=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-y_S\right)F_i \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} y_i F_i=y_S\sum_{i=1}^{n} F_i=y_S F_R$$

$$0=M_y^S=-\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_S\right)F_i \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} x_i F_i=x_S\sum_{i=1}^{n} F_i=x_S F_R$$

- Daraus folgt:

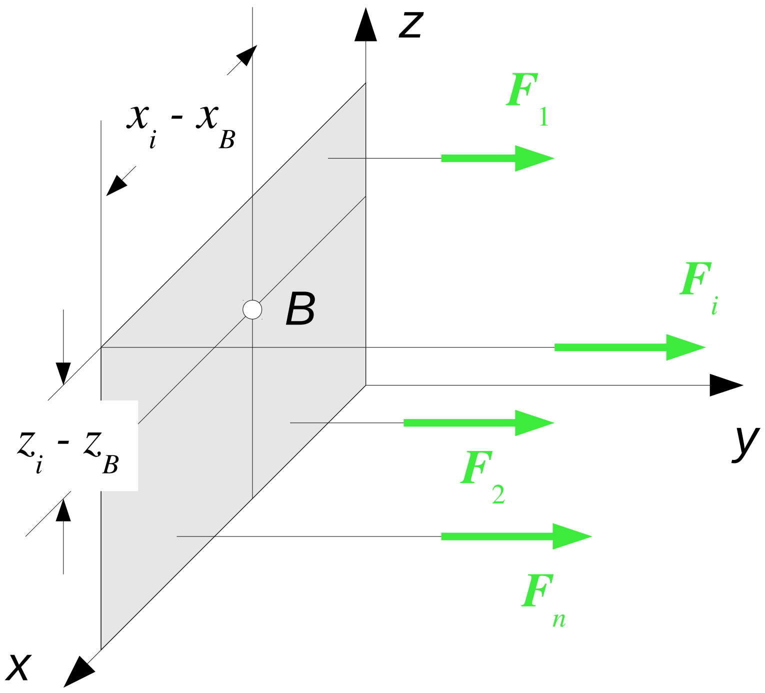
$$\boxed{x_S=\frac{1}{F_R}\sum_{i=1}^{n} x_i F_i,\quad y_S=\frac{1}{F_R}\sum_{i=1}^{n} y_i F_i}$$

1. Gruppe paralleler Kräfte

- Wirken die Kräfte entlang der *y*-Achse, so gilt:

$$M_x^B = -\sum_{i=1}^{n} \left(z_i - z_B \right) F_i$$

$$M_z^B = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_B \right) F_i$$



- Für den Kräftemittelpunkt *S* folgt:

$$\boxed{x_S = \frac{1}{F_R} \sum_{i=1}^{n} x_i F_i , \quad z_S = \frac{1}{F_R} \sum_{i=1}^{n} z_i F_i}$$