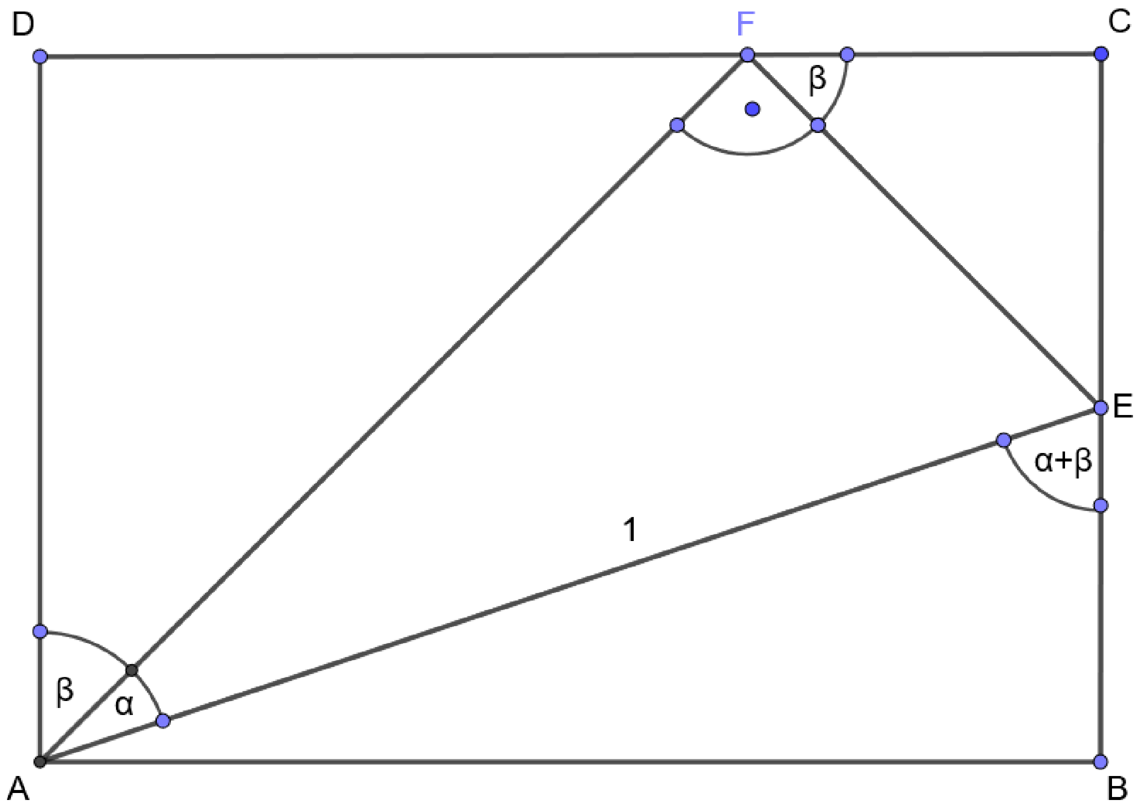
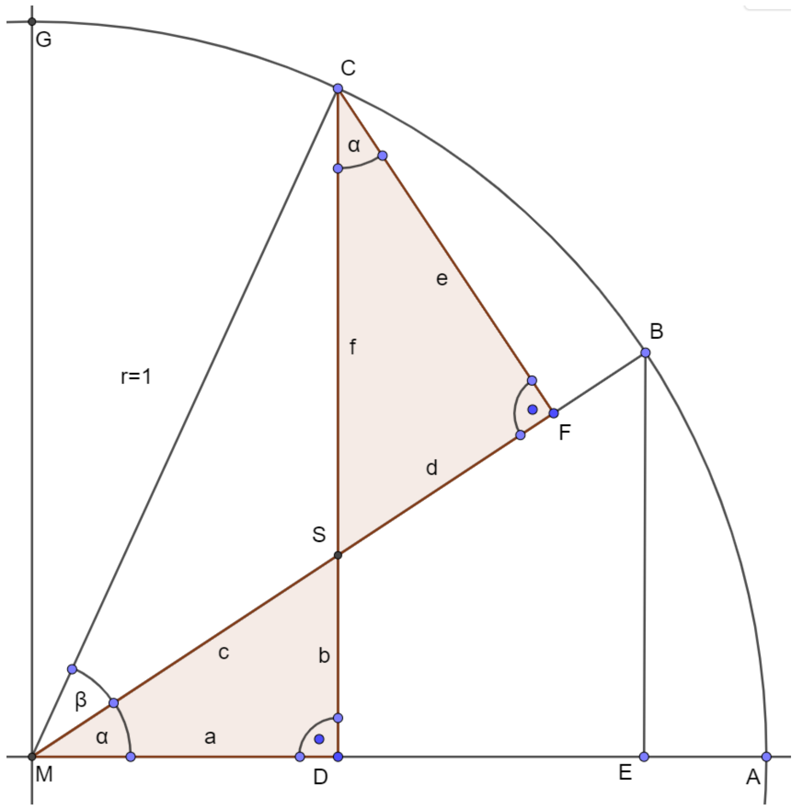
Einige Herleitungen der trigonometrischen Additionstheoreme

Herleitung 1:

Aufgabe: Sei $ABCD$ ein Rechteck und AEF ein rechtwinkliges Dreieck. Die Streckenlänge der Hypotenuse $\overline{AE}$ soll 1 betragen. Bestimmen Sie bitte die Streckenlängen $|\overline{AF}|$ und $|\overline{EF}|$ in Abhängigkeit von α und weiter $|\overline{AD}|$, $|\overline{DF}|$, $|\overline{CF}|$ und $|\overline{CE}|$ in Abhängigkeit von α und β und noch $|\overline{AB}|$ und $|\overline{BE}|$ in Abhängigkeit von $\alpha + \beta$. Der Vergleich der gewonnen Längendarstellungen von gegenüberliegenden Seiten liefert die zwei Additionstheoreme für den Sinus und den Cosinus. Diese besonders anschauliche Herleitung gilt allerdings nur für positive Winkel α und β mit $\alpha + \beta < 90°$. Die Lösung finden am Ende dieses Textes.



Herleitung 2: Im Einheitskreis sind die Winkel α und β, wie in der folgenden Skizze zu sehen, gegeben. Die Strecke $\overline{CD}$ mit der Länge $\sin(\alpha + \beta)$ wird durch S in die zwei Teilstrecken $\overline{CS}$ und $\overline{DS}$ mit den Streckenlängen f und b zerlegt. Fällt man nun das Lot von C auf die Strecke $\overline{BM}$, dann sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke CSF und SMD einander ähnlich. Insbesondere ist der Winkel SCF gleich α.



- Im rechtwinkligen Dreieck CMF ist $|\overline{CF}| = e = \sin\beta$ und damit gewinnt man für das rechtwinklige Dreieck CSF vermöge $\frac{e}{f} = \cos\alpha$ und $\frac{d}{f} = \sin\alpha$ die Streckenlängen

$$f = \frac{e}{\cos\alpha} = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} \quad \text{und weiter} \quad d = f \cdot \sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin\beta$$

- Im rechtwinkligen Dreieck CMF ist $|\overline{MF}| = c + d = c + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha} = \cos\beta$ und also gilt

$$c = \cos\beta - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha} = \frac{\cos\beta\cos\alpha - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha}$$

- Mit c und α können wir nun im rechtwinkligen Dreieck MDS die Streckenlängen a und b bestimmen. Es gilt dann vermöge $\frac{a}{c} = \cos\alpha$ und $\frac{b}{c} = \sin\alpha$

$$a = c\cos\alpha = \cos\alpha\frac{\cos\beta\cos\alpha - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

und

$$b = c\sin\alpha = \frac{\cos\beta\cos\alpha - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha}\sin\alpha = \sin\alpha\cos\beta - \frac{1}{\cos\alpha}\sin^2\alpha\sin\beta$$
$$= \sin\alpha\cos\beta - \frac{1}{\cos\alpha}(1-\cos^2\alpha)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta - \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$$

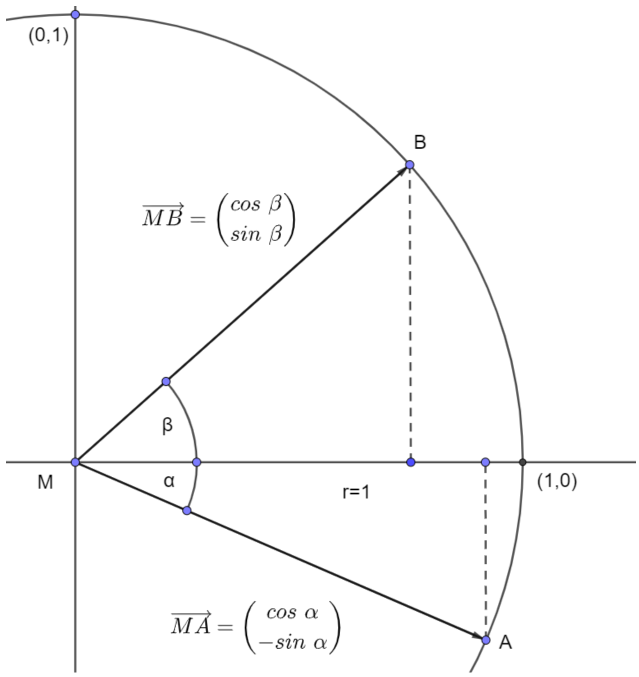
- Für die Katheten im rechtwinkligen Dreieck CMD gilt damit

$$\cos(\alpha+\beta) = |\overline{MD}| = a = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

und

$$\sin(\alpha+\beta) = |\overline{CD}| = b + f = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Herleitung 3: In der folgenden Skizze haben die Winkel α und β mit der x-Achse einen gemeinsamen Schenkel.



Der Winkel $\alpha + \beta$ kann nun als Winkel zwischen den Vektoren

$$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$

gedeutet werden. Mit dem *Skalarprodukt* $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = \left|\overrightarrow{MA}\right|\left|\overrightarrow{MB}\right| \cos(\alpha + \beta)$ und $\left|\overrightarrow{MA}\right| = 1 = \left|\overrightarrow{MB}\right|$ gewinnt man dann sofort das Additionstheorem für den Cosinus

$$\cos(\alpha + \beta) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Sei nun $\mathfrak{a} := \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{b} := \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \\ 0 \end{pmatrix}$ und $0 \leq \alpha + \beta \leq 180°$ dann folgt mit dem Betrag des Vektorproduktes $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = |\mathfrak{a}||\mathfrak{b}|\sin(\alpha + \beta)$ das Additionstheorem für den Sinus vermöge

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}}{|\mathfrak{a}||\mathfrak{b}|} = \left|\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \\ 0 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{pmatrix}\right| = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Herleitung 4: Die Funktionen e^x, $\cos x$ und $\sin x$ lassen sich als Potenzreihen schreiben. Mit

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad \text{und} \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

folgert man die *Eulersche Formel*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Ersetzt man in dieser Formel x durch $\alpha + \beta$, so gilt einerseits

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

und andererseits

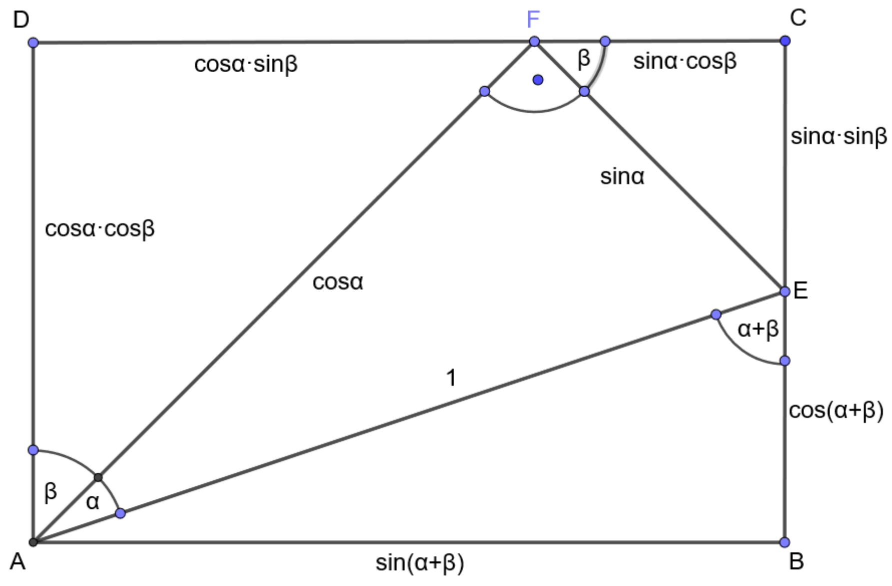
$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha + i\beta} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)$$

Da zwei komplexe Zahlen dann und nur dann gleich sind, wenn sie in ihren Realteilen und Imaginärteilen übereinstimmen folgt

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad \text{und} \quad \sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$

.

Lösungsskizze zur Herleitung 1:



Bemerkungen:

- Für die Prüfung reicht es, wenn Sie eine dieser Herleitungen beherrschen.
- Die Additionstheoreme

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} \quad \text{und} \quad \cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$$

gewinnt man aus den Identitäten $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$ und $\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$. Die Vorgehensweise zur Herleitung zeigen die folgenden Zeilen am Beispiel der Tangensfunktion.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\frac{\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\beta+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

- Versuchen Sie doch bitte aus den Additionstheorem die folgenden Formeln zu gewinnen

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}} \quad \text{und} \quad \sin\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}$$

und finden Sie damit auch einen weiteren Weg zur *Ceulenschen Verdoppelungsformel*.