Angewandte Stochastik Blatt 8

1. (Studentsche t–Verteilung) Seien $Z_0, Z_1, \dots, Z_n$ unabhängige $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen. Zeige, daß die Zufallsvariable

$$Z_0 \Big/ \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2}$$

die t–Verteilung mit n Freiheitsgraden besitzt.

2. (Asymptotik der Varianz von erwartungstreuen Schätzern)

a) Gegeben sei ein reguläres statistisches Modell mit Likelihoodfunktion

$$f(x\,|\,\theta), \quad x \in \mathfrak{X} \subset \mathbb{R}^k,\ \theta \in \Theta \subset \mathbb{R},$$

und Fisher-Information I. Zeige: Für jeden erwartungstreuen Schätzer T_n für θ basierend auf n unabhängigen Stichproben gilt

$$\mathrm{Var}_\theta(T_n) \geq \frac{1}{nI(\theta)} \quad \text{für alle } \theta \in \Theta.$$

b) Ein Computer erzeuge n Zufallszahlen aus dem Intervall $[0, \theta]$. Zeige, daß

$$T_n(x_1, \dots, x_n) := \max(x_1, \dots, x_n)\frac{n+1}{n}$$

ein erwartungstreuer Schätzer für θ ist mit

$$\mathrm{Var}_\theta(T_n) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}.$$

Wie verträgt sich dies mit dem Resultat in a) ?

3. (Rao-Blackwellisierung). Seien $X_1, \cdots, X_n$ unabhängige Stichproben von einer Poissonverteilten Zufallsgröße mit Parameter $\lambda > 0$. Dann ist $T := I_{\{X_1=0\}}$ ein erwartungstreuer Schätzer für

$$g(\lambda) \; := \; e^{-\lambda} \; = \; \pi_\lambda(0) \; .$$

Konstruiere einen besseren Schätzer durch Rao-Blackwellisierung.

4. (Existenz erwartungstreuer Schätzer). Gegeben sei das bedingte Poisson-Modell $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), P_\theta : \theta > 0)$ mit

$$P_\theta(\{n\}) = \pi_\lambda(\{n\} \,|\, \mathbb{N}) = \frac{\theta^n}{n!(e^\theta - 1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeige: Der einzige erwartungstreue Schätzer für $g(\theta) = 1 - e^{-\theta}$ ist der sinnlose Schätzer $T(n) = 1 + (-1)^n, n \in \mathbb{N}$.

5. (Quadratischer Fehler). Die Zufallsvariable Y sei exponentialverteilt mit Parameter $1/\theta, \theta > 0$. Zeige: Y ist erwartungstreuer Schätzer für θ mit minimaler Varianz. Für welches a wird der quadratische Fehler $\mathbb{E}[(aY - \theta)^2]$ minimiert ?