4 Relativbewegung eines Massenpunkts

Die Differentiationsregeln für Geschwindigkeit und Beschleunigung sowie der Impulssatz gelten in ihrer einfachen Form nur bezüglich eines raumfesten Koordinatensystems, das auch als Inertialsystem bezeichnet wird. Häufig kann die Bewegung oder Teilbewegung einer zusammengesetzten Bewegung jedoch in einem bewegten Koordinatensystem einfacher beschrieben werden, wie bereits die Verwendung von Zylinderkoordinaten zeigte. In diesem Fall ist es günstig, parallel mit zwei Koordinatensystemen zu arbeiten, einem raumfesten und einem bewegten.

Ein Vektor ist eine gerichtete Größe im Raum und damit in seiner physikalischen Bedeutung unabhängig von Koordinatensystemen. Die Darstellung eines solchen Vektors in verschieden Koordinatensystemen ist im Allgemeinen dagegen unterschiedlich. Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Darstellungen kann über eine orthogonale Drehungsmatrix hergestellt werden.

Damit ergeben sich auch unterschiedliche Interpretationen bei der Beobachtung eines zeitlich veränderlichen Vektors. Beobachtet man einen Lagevektor von einem raumfesten Koordinatensystem aus, ergeben sich durch Differentiation Absolutgeschwindigkeiten bzw. Absolutbeschleunigungen. Differenziert man dagegen einen im bewegten Koordinatensystem beschriebenen Vektor, ergeben sich daraus Relativgeschwindigkeiten und -beschleunigungen. Jede dieser Größen kann anschließend in beiden Koordinatensystemen dargestellt werden, behält dabei aber ihre physikalische Bedeutung.

Die Anwendung des Impulssatzes erfordert die Verwendung einer Absolutbeschleunigung. Möchte man den Impulssatz in einem bewegten System formulieren, muss man zusätzliche Terme ergänzen, die sich aus der Bewegung des Koordinatensystems ergeben. Ein bewegter Beobachter empfindet diese Trägheitsterme als nichterklärbare zusätzliche Kräfte, weshalb sie auch als Scheinkräfte bezeichnet werden.

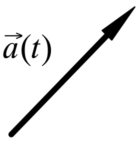
Schiff in Strömung

Fahrgast in Straßenbahn

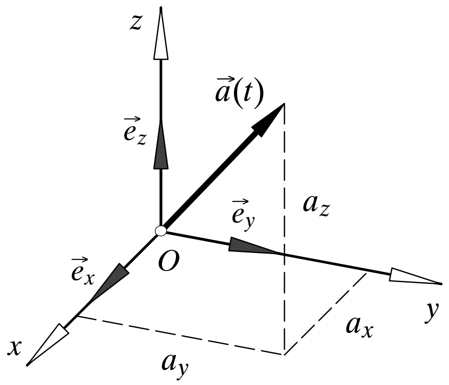
4.1 Koordinatentransformation

Koordinatendarstellung eines Vektors

Vektor $\vec{a}(t)$



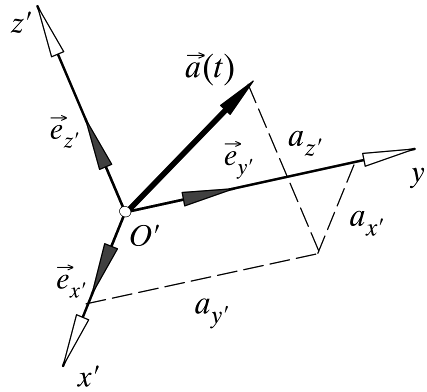
Koordinatensystem $K\left\{O,\, \vec{e}_x\,,\, \vec{e}_y\,,\, \vec{e}_z\right\}$



$$\vec{a} = a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y + a_z\,\vec{e}_z$$

$$\boldsymbol{a}_K = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

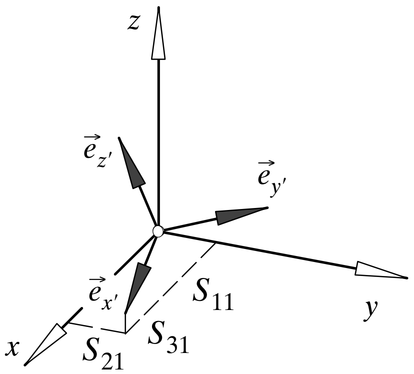
Koordinatensystem $K'\left\{O',\, \vec{e}_{x'}\,,\, \vec{e}_{y'}\,,\, \vec{e}_{z'}\right\}$



$$\vec{a} = a_{x'}\,\vec{e}_{x'} + a_{y'}\,\vec{e}_{y'} + a_{z'}\,\vec{e}_{z'}$$

$$\boldsymbol{a}_{K'} = \begin{bmatrix} a_{x'} \\ a_{y'} \\ a_{z'} \end{bmatrix}$$

Koordinatentransformation



$$\vec{e}_{x'} = S_{11}\,\vec{e}_x + S_{21}\,\vec{e}_y + S_{31}\,\vec{e}_z \;\rightarrow\; \boldsymbol{e}_{x'K} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{21} \\ S_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\sphericalangle xx') \\ \cos(\sphericalangle yx') \\ \cos(\sphericalangle zx') \end{bmatrix}$$

$$\vec{e}_{y'} = S_{12}\,\vec{e}_x + S_{22}\,\vec{e}_y + S_{32}\,\vec{e}_z \;\rightarrow\; \boldsymbol{e}_{y'K} = \begin{bmatrix} S_{12} \\ S_{22} \\ S_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\sphericalangle xy') \\ \cos(\sphericalangle yy') \\ \cos(\sphericalangle zy') \end{bmatrix}$$

$$\vec{e}_{z'} = S_{13}\,\vec{e}_x + S_{23}\,\vec{e}_y + S_{33}\,\vec{e}_z \;\rightarrow\; \boldsymbol{e}_{z'K} = \begin{bmatrix} S_{13} \\ S_{23} \\ S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\sphericalangle xz') \\ \cos(\sphericalangle yz') \\ \cos(\sphericalangle zz') \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} = a_{x'}\,\vec{e}_{x'} + a_{y'}\,\vec{e}_{y'} + a_{z'}\,\vec{e}_{z'}$$

Darstellung in K

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_K &= a_{x'}\,\boldsymbol{e}_{x'K} + a_{y'}\,\boldsymbol{e}_{y'K} + a_{z'}\,\boldsymbol{e}_{z'K}\\ &= a_{x'}\begin{bmatrix}S_{11}\\S_{21}\\S_{31}\end{bmatrix} + a_{y'}\begin{bmatrix}S_{12}\\S_{22}\\S_{32}\end{bmatrix} + a_{z'}\begin{bmatrix}S_{13}\\S_{23}\\S_{33}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{a}_K} = \underbrace{\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & S_{13}\\ S_{21} & S_{22} & S_{23}\\ S_{31} & S_{32} & S_{33}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{S}_{KK'}}\underbrace{\begin{bmatrix}a_{x'}\\a_{y'}\\a_{z'}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{a}_{K'}}$$

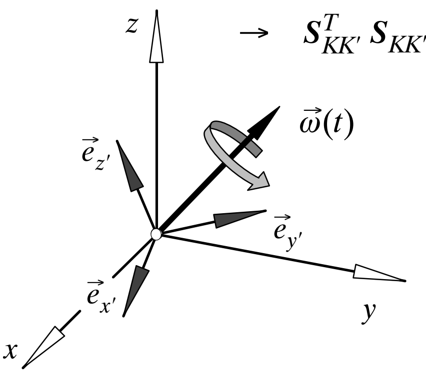
$\boldsymbol{S}_{KK'}$: *Transformationsmatrix* $K' \to K$ *(Drehungsmatrix)*

Eigenschaften der Drehungsmatrix

Drehungsmatrix: $\boldsymbol{S}_{KK'} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_{x'K} & \boldsymbol{e}_{y'K} & \boldsymbol{e}_{z'K}\end{bmatrix}$

Es gilt: $\|\vec{e}_{x'}\| = \|\vec{e}_{y'}\| = \|\vec{e}_{z'}\| = 1, \quad \vec{e}_{x'}\cdot\vec{e}_{y'} = \vec{e}_{x'}\cdot\vec{e}_{z'} = \vec{e}_{y'}\cdot\vec{e}_{z'} = 0.$

Daraus folgt: $$\boldsymbol{S}^T_{KK'}\,\boldsymbol{S}_{KK'} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}^T_{x'K}\\ \boldsymbol{e}^T_{y'K}\\ \boldsymbol{e}^T_{z'K}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_{x'K} & \boldsymbol{e}_{y'K} & \boldsymbol{e}_{z'K}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}^T_{x'}\boldsymbol{e}_{x'} & \boldsymbol{e}^T_{x'}\boldsymbol{e}_{y'} & \boldsymbol{e}^T_{x'}\boldsymbol{e}_{z'}\\ \boldsymbol{e}^T_{y'}\boldsymbol{e}_{x'} & \boldsymbol{e}^T_{y'}\boldsymbol{e}_{y'} & \boldsymbol{e}^T_{y'}\boldsymbol{e}_{z'}\\ \boldsymbol{e}^T_{z'}\boldsymbol{e}_{x'} & \boldsymbol{e}^T_{z'}\boldsymbol{e}_{y'} & \boldsymbol{e}^T_{z'}\boldsymbol{e}_{z'}\end{bmatrix}_K = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$



$\rightarrow \quad \boldsymbol{S}^T_{KK'}\,\boldsymbol{S}_{KK'} = \boldsymbol{S}_{KK'}\,\boldsymbol{S}^T_{KK'} = \boldsymbol{E}$ Drehungsmatrix ist orthogonal

- ◇ $\boldsymbol{S}^{-1}_{KK'} = \boldsymbol{S}^T_{KK'}$
- ◇ $\det \boldsymbol{S}_{KK'} = 1$
- ◇ $\dot{\boldsymbol{S}}_{KK'}\,\boldsymbol{S}^T_{KK'} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_K = \begin{bmatrix}0 & -\omega_z & \omega_y\\ \omega_z & 0 & -\omega_x\\ -\omega_y & \omega_x & 0\end{bmatrix}$

$\rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}_K = \begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}$ *Winkelgeschwindigkeitsvektor dargestellt in K*

Rücktransformation

$$\boldsymbol{a}_{K'} = \boldsymbol{S}^T_{KK'}\,\boldsymbol{a}_K$$

$$\boldsymbol{S}_{K'K} = \boldsymbol{S}^T_{KK'}$$

4.2 Relativkinematik

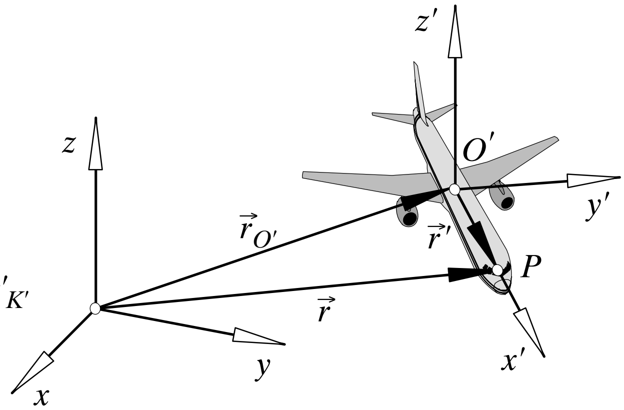
Annahmen: raumfestes Koordinatensystem $K\left\{O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right\}$

bewegtes Koordinatensystem $K'\left\{O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}\right\}$

abgekürzte Schreibweise: $\boldsymbol{S}_{KK'} =: \boldsymbol{S}\,,\quad \boldsymbol{S}^T_{KK'} =: \boldsymbol{S}^T$

Lagebeschreibung

z.B. Pilot P : $\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}\,'$



Koordinatendarstellung

in K : $\boldsymbol{r}_K = \boldsymbol{r}_{O'K} + \boldsymbol{r}'_K = \boldsymbol{r}_{O'K} + \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{r}'_{K'}$

in K' : $\boldsymbol{r}_{K'} = \boldsymbol{r}_{O'K'} + \boldsymbol{r}'_{K'} = \boldsymbol{S}^T\boldsymbol{r}_{O'K} + \boldsymbol{r}'_{K'}$

Geschwindigkeit

Absolutgeschwindigkeit: $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\vec{r}_{O'}}{dt} + \dfrac{d\vec{r}\,'}{dt}$

Ableitung im **raumfesten** Koordinatensystem K :

$$\boldsymbol{v}_K = \dot{\boldsymbol{r}}_K = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}_{O'K} + \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{r}'_{K'}\right)$$

$$= \dot{\boldsymbol{r}}_{O'K} + \dot{\boldsymbol{S}}\,\boldsymbol{r}'_{K'} + \boldsymbol{S}\,\dot{\boldsymbol{r}}'_{K'}$$

$$\boldsymbol{v}_K = \boldsymbol{v}_{O'K} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_K\boldsymbol{r}'_K + \boldsymbol{v}'_K$$

Dies entspricht einer Koordinatendarstellung der Vektorbeziehung

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{r}\,' + \vec{v}\,'$$

Verschiedene Geschwindigkeitsdefinitionen:

Größe	physikalische Bedeutung	Darstellung
$\boldsymbol{v}_K = \dot{\boldsymbol{r}}_K$	**Absolut**geschwindigkeit (relativ zu K)	in K
$\boldsymbol{v}_{K'} = \boldsymbol{S}^T \boldsymbol{v}_K$	**Absolut**geschwindigkeit (relativ zu K)	in K'
$\dot{\boldsymbol{r}}_{K'}$	keine	
$\boldsymbol{v}'_{K'} = \dot{\boldsymbol{r}}'_{K'}$	**Relativ**geschwindigkeit (relativ zu K')	in K'
$\boldsymbol{v}'_K = \boldsymbol{S}\, \boldsymbol{v}'_{K'}$	**Relativ**geschwindigkeit (relativ zu K')	in K
$\dot{\boldsymbol{r}}'_K$	keine	

$\boldsymbol{v}_K$, $\boldsymbol{v}_{K'}$ sind Koordinatendarstellungen der Absolutgeschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r}$

$\boldsymbol{v}'_K$, $\boldsymbol{v}'_{K'}$ sind Koordinatendarstellungen der Relativgeschwindigkeit $\vec{v}\,' = \frac{d'}{dt}\vec{r}\,'$

Allgemein gilt für die Differentiation von Vektoren:

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = \frac{d'}{dt}\vec{x} + \vec{\omega} \times \vec{x}$$

Beschleunigung

Absolutbeschleunigung: $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}\,'}{dt} + \frac{d\vec{v}\,'}{dt}$

$\frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} =: \vec{a}_{O'}$ Absolutbeschleunigung des Ursprungs O'

$\frac{d\vec{\omega}}{dt} =: \dot{\vec{\omega}}$ Drehbeschleunigung des Koordinatensystems

Anm.: $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d'\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \equiv \frac{d'\vec{\omega}}{dt}$

$$\frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \frac{d'\vec{r}\,'}{dt} + \omega \times \vec{r}\,' = \vec{v}\,' + \omega \times \vec{r}\,'$$

$$\frac{d\vec{v}\,'}{dt} = \underbrace{\frac{d'\vec{v}\,'}{dt}}_{\vec{a}\,'} + \omega \times \vec{v}\,'$$

Relativbeschleunigung von P bez. K'

eingesetzt:

$$\underbrace{\vec{a}}_{\textbf{\textit{Absolut}}\textit{beschleunigung}} = \underbrace{\vec{a}_{O'}}_{\textit{Ursprungsbeschleunigung}} + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,'}_{\textit{Eulerbeschleunigung}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\,'\right)}_{\textit{Zentripetalbeschleunigung}} + \underbrace{2\,\vec{\omega} \times \vec{v}\,'}_{\textit{Coriolisbeschleunigung}} + \underbrace{\vec{a}\,'}_{\textbf{\textit{Relativ}}\textit{beschleunigung}}$$

<u>Sonderfälle:</u>

◇ Parallelverschiebung ($\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \rightarrow \dot{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{0} \rightarrow \vec{\omega} = \vec{0}$)

$$\rightarrow \quad \vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}\,'$$
$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}\,'$$
$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}\,'$$

◇ Drehung um Fixpunkt ($\vec{v}_{O'} = \vec{0}$)

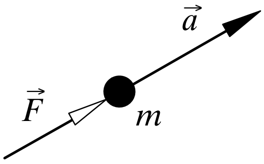
$$\rightarrow \quad \vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}\,'$$
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}\,' + \vec{v}\,'$$
$$\vec{a} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\,'\right) + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{a}\,'$$

4.3 Relativkinetik

2. Newtonsches Grundgesetz

$m\,\vec{a} = \vec{F}$

└ ***Absolut**beschleunigung*



$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{a}'$$

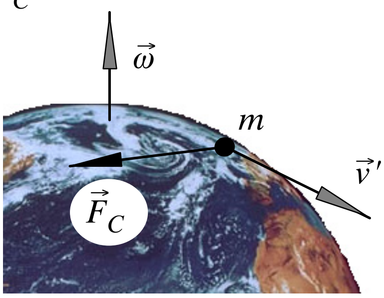
$$m\,\vec{a}_{O'} + m\,\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2m\,\vec{\omega} \times \vec{v}' + m\,\vec{a}' = \vec{F}$$

$$m\,\vec{a}' = \vec{F} - m\,\vec{a}_{O'} - m\,\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' - m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

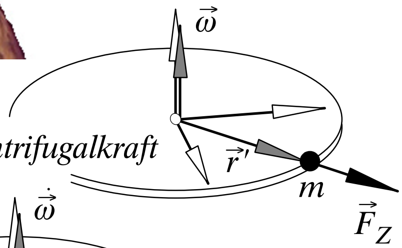
Interpretation als Scheinkräfte

$$m\,\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_T + \vec{F}_E + \vec{F}_Z + \vec{F}_C$$

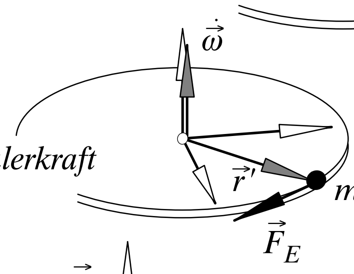
$\vec{F}_C = -\,2m\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$ *Corioliskraft*



$\vec{F}_Z = -\,m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ *Zentrifugalkraft*



$\vec{F}_E = -\,m\,\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$ *Eulerkraft*



$\vec{F}_T = -\,m\,\vec{a}_{O'}$ *Trägheitskraft*