Digitaltechnik

Andreas König
Professur Technische Informatik
Fakultät Informatik
Technische Universität Chemnitz

Wintersemester 2001/2002

Rekapitulierung zu Kapitel 2

- **Grundlagen der Informationsrepräsentation in digitalen Systemen**
- **Verschiedene Kodierungen optimiert für Randbedingungen, wie:**
  - **Kompaktheit**
  - **Fehlersicherheit**
  - **Übertragbarkeit**
  - **Speicherbarkeit**
  - **Kompatibilität zu den Anforderungen des Nutzers (MMK)**
- **Schwerpunkt: Zahlendarstellung, -konversion und Arithmetik**
- **Darstellung prinzipieller Algorithmen**
- **Vorbereitung für die Umsetzung in Recheneinheiten durch konkrete (optimierte) Schaltwerke**

Vorlesungsgliederung:

1. Einführung
2. Kodierung und Arithmetik
3. Grundlagen der Booleschen Algebra
4. Entwurf zweistufiger kombinatorischer Logik
5. Zieltechnologien und Technologieanpassung
6. Zeitliches Verhalten kombinatorischer Schaltnetze
7. Entwurf sequentieller Schaltwerke
8. Funktionsblöcke digitaler Rechner und Systeme
9. Entwurf von Systemen der Digitaltechnik
10. Ausblick

Kapitelgliederung:

3. Grundlagen der Booleschen Algebra

3.1 Algebraische Strukturen
3.2 Schaltalgebra
3.3 Boolesche Elementaroperationen
3.4 Schaltfunktionen
3.5 Hauptsatz der Schaltalgebra
3.6 Basissysteme
3.7 Entwicklungssatz der Schaltalgebra
3.8 Unvollständig definierte Funktionen
3.9 Negative Logik
3.10 Weitere Beschreibungsformen

- Die Schaltwerke der Digitaltechnik unterliegen den Regeln der sogenannten Schaltalgebra
- Diese soll im folgenden motiviert und dann im Detail vorgestellt und angewendet werden
- Eine detailliertere und profundere Darstellung des mathematischen Hintergrunds ist z.B. in [Lipp 99], Kap. 5 zu finden
- Weiterhin: Vorlesung Diskrete Mathematik
- Im vorhergehenden Kapitel wurden implizit Mengen (z.B. Zeichenvorrat) eingeführt
- Auf Mengen M und zugehöriger Potenzmenge P(M) sind Operationen, wie Schnittmenge $\cap$ oder Vereinigungsmenge $\cup$ definiert, die bestimmten Regeln genügen
- Ein solches Gebilde aus Operanden und Regeln wird algebraische Struktur genannt bzw. für Mengen als Operanden Mengenalgebra:

$$MA = \left[P(M), \cap, \cup, C_M, \emptyset, M\right]$$

- Eine Vielzahl algebraischer Strukturen angebar, deren Eigenschaften sich nach Definition von Operanden und Operatoren unterscheiden
- Viele dieser Algebren rückführbar auf wenige Grundtypen
- Interpretationen gegebener Grundtypen
- Zentrale Rolle: Algebren die auf die Arbeiten von G. Boole (1815-1864) zurückgehen (Boolesche Algebren)
- Eine Boolesche Algebra:

$$BA = \left[K, T, \perp, \bar{\ }, O, I\right]$$

- Menge K mit zwei zweistelligen Verknüpfungen T und $\perp$, einstelliger Relation $\bar{\ }$ und zwei universellen Schranken O und I wobei für die Elemente aus K eine Reihe von Regeln gelten
- **Satz 3.1**: Ist P(M) die Potenzmenge einer beliebigen Menge M, so ist das Verknüpfungsgebilde [P(M),$\cap$, $\cup$,C_M, $\emptyset$,M] stets eine Boolesche Algebra
- **Satz 3.2:** Bei jeder Booleschen Algebra gilt für die Menge K: $|K|=2^n$ (n=1,2,....)

- Notation von Mengenoperationen in tabellarischer Form:

$\cup$	$\varnothing$	**M**
$\varnothing$	$\varnothing$	**M**
M	**M**	**M**

$\cap$	$\varnothing$	**M**
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
M	$\varnothing$	**M**

C_M	
$\varnothing$	**M**
M	$\varnothing$

- Abtraktion von einer speziellen Mengeninterpretation (|P(M)=2|, $\varnothing$**=0,** M=1 sowie $\cap$ = T und $\cup$ = $\perp$):

$\perp$	**0**	**1**
0	**0**	**1**
1	**1**	**1**

T	**0**	**1**
0	**0**	**0**
1	**0**	**1**

$\overline{}$	
0	**1**
1	**0**

- Nächste Boolesche Algebra ist vierwertig (|K|= 2^2 =4)

Algebraische Strukturen

Digitaltechnik
Grundlagen der Booleschen Algebra

- Bei einer Booleschen Algebra gilt allgemein das Dualitätsprinzip:
  - Wird in einem Satz unter alleiniger Verwendung der Operatoren T, $\perp$ und eine Vertauschung von T mit $\perp$ bzw. umgekehrt vorgenommen so erhält man den sog. Dualen Satz
  - Enthält der Satz die neutralen Elemente O und I so müssen auch diese vertauscht werden
  - Wichtige Aussage für Beweisführungen und Anwendung Boolescher Algebren
- Begründung von Regeln auf axiomatische Weise von großer mathematischer Bedeutung
- Huntington erreichte dies für Boolesche Algebren
- Für eine Grundmenge K und beliebige Elemente a, b, c aus K stellte er ein System aus fünf Axiomen auf (*Huntingtonsche Axiome*)

Algebraische Strukturen

H1: Abgeschlossenheit $a,b \in K$

$a \top b \in K$ $a \perp b \in K$

Das Ergebnis der Anwendung der Operatoren T, ⊥ ist stets in K.

H2: Kommutativ-Gesetz $a,b \in K$

$a \top b = b \top a$ $a \perp b = b \perp a$

Die Reihenfolge der Operanden ist vertauschbar, die Operatoren T, ⊥ sind kommutativ.

H3: Distributiv-Gesetz $a,b,c \in K$

$(a \perp b) \top c = (a \top c) \perp (b \top c)$ $(a \top b) \perp c = (a \perp c) \top (b \perp c)$

Jeder der beiden Operatoren T, ⊥ distribuiert über den anderen.

Algebraische Strukturen

H4: Existenz eines neutralen Elements

$a, I \in K$ $O, a \in K$

$I \top a = a$ $O \perp a = a$

Zu jedem Operator T, ⊥ existiert ein neutrales Element, so dass jedes beliebige Element aus der Menge K bezüglich des Operators T, ⊥ unverändert belassen wird.

H5: Komplement $a,k \in K$

$a \top k = O$ $a \perp k = I$

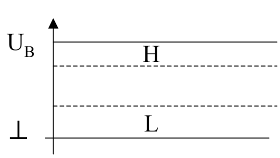
Zu jedem Element a aus der Menge K gibt es ein Element $\bar{a} = k$ ebenfalls aus K, das komplementär zu a ist. Die Verknüpfung von k mit a durch T, ⊥ führt zum neutralen Element O, I.

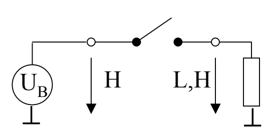
Algebraische Strukturen

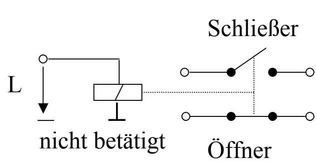
- Forderungen an ein solches Axiomensystem:
  - Freiheit von logischen Widersprüchen
  - Unabhängigkeit der Axiome
  - Vollständigkeit
- Grundlage für die Formulierung weiterer Regeln
- Verknüpfungsgebilde, die durch Abstraktion auf bestimmtes Axiomensystem rückführbar sind: Interpretation des Systems
- Beispiel von Interpretationen:
  - Boolesche Algebra mit zwei Werten $BA_2 = [\{0,1\}, T, \perp, \bar{\ }, 0,1]$
  - Aussagenlogik: AL=[{wahr, falsch}, UND, ODER, NICHT, stets falsch, stets wahr]
  - Mengenalgebra mit zwei Elementen: $MA_2 = [\{\emptyset,M\},\cap, \cup, C_M, \emptyset, M]$
  - Mengenalgebra allgemein: $MA = [P(M),\cap, \cup, C_M, \emptyset, M]$
- Elementarste Interpretationen: Algebraische Verknüpfungsgebilde, die nur auf zwei Elementen beruhen ($\emptyset$ und M bzw. 0 und 1)
- Bezug: Binärsignale mit L und H bzw. bereits als 0 und 1 bezeichnet

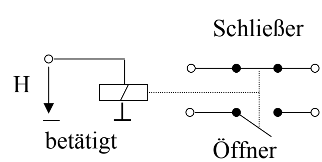
Schaltalgebra

- Verknüpfungsgebilde mit Binärsignalen Interpretation des Axiomensystems nach Huntington ?
- Anschauliche Betrachtung unter Verwendung von:
  - Zweiwertiger Signaldarstellung {L,H}
  - Bauelement Relais mit Öffnungs- bzw. Schließfunktion beim Schalten
  - Verbindungsmöglichkeiten: Serien- bzw. Parallelschaltung (*ser*; *par*)



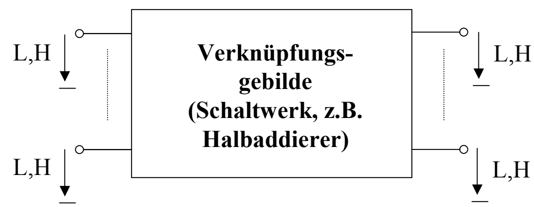






- Relaiskontakte können beliebig zusammengeschaltet werden, da sie potenzialfrei sind
- Eine Zusammenschaltung solcher Relais realisiert bezüglich der Signale L und H ein Verknüpfungsgebilde (Schaltwerk)

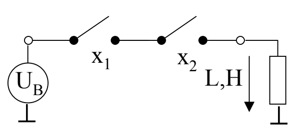
Schaltungseingänge **Schaltungsausgänge**



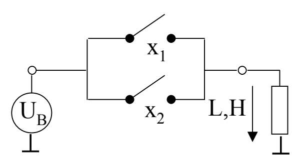
$X=(x_n, ..., x_2, x_1)$
$n \geq 1$

$Y=(y_m, ..., y_2, y_1)$
$m \geq 1$

S1:

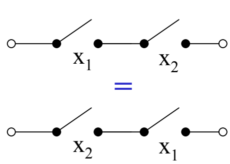


x_1 ser $x_2 \in \{L,H\}$

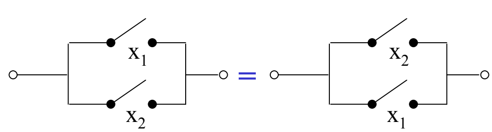


x_1 par $x_2 \in \{L,H\}$

S2:

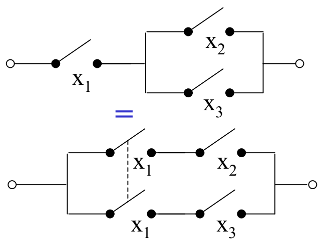


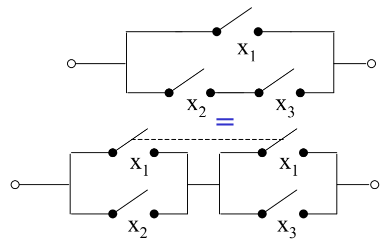
x_1 ser $x_2 = x_2$ ser x_1



x_1 par $x_2 = x_2$ par x_1

S3:

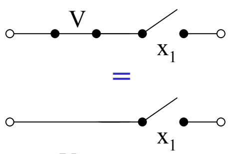


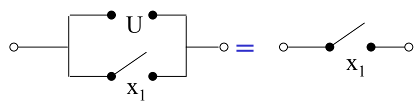


x_1 ser $(x_2$ par $x_3) =$
$(x_1$ ser $x_2)$ par $(x_1$ ser $x_3)$

x_1 par $(x_2$ ser $x_3) =$
$(x_1$ par $x_2)$ ser $(x_1$ par $x_3)$

S4:

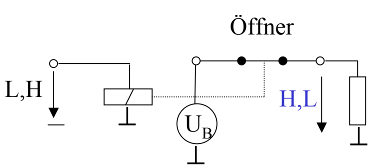


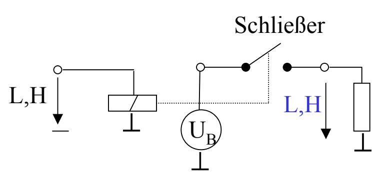


x_1 ser $V = x_1$
V: dauernde Verbindung

x_1 par $U = x_1$
U: dauernde Unterbrechung

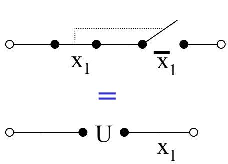
Zwei mögliche Schaltungen mit nur einem Schließer bzw. Öffner:

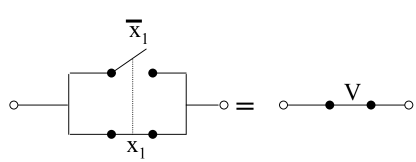




Negation **Reproduktion**

S5:



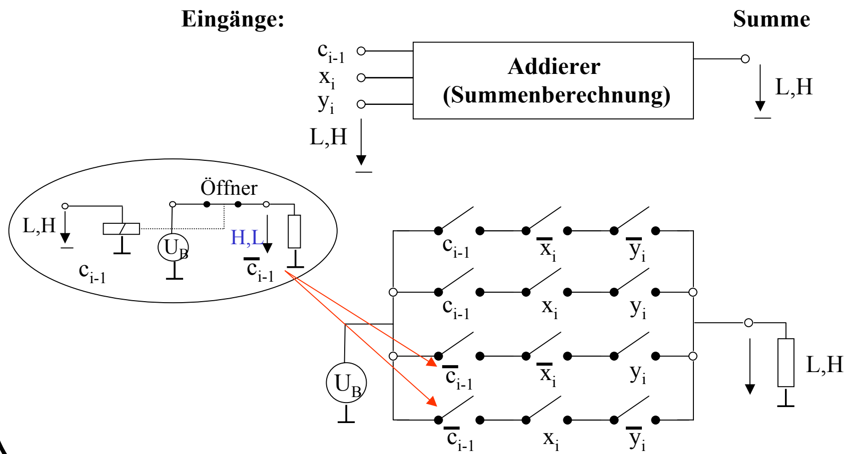


x_1 ser $\overline{x}_1 = U$

x_1 par $\overline{x}_1 = V$

Schaltalgebra

- Realisierung einer Addiererstufe für eine Binärstelle durch eine Relaisschaltung



- Eine nicht unbedingt optimale Lösung !

Schaltalgebra

- Überlegungen und Vergleich mit Verhältnissen bei Boolescher Algebra und Huntingtonschen Axiomen zeigt:
  - Kontaktschaltungen stellen zulässige Interpretation dieser Axiome dar
  - Kontaktalgebra bzw. Schaltalgebra [Shannon 38]
  - Verknüpfungsgebilde Schaltalgebra definiert durch

$$SA = [\{0,1\}, \&, \vee, \overline{}, 0, 1]$$

  - Dabei entsprechen die Signalzuordnungen {L, H} nun {0,1}, die Verknüpfungen ser, par und ¯ entsprechen den zweistelligen Verknüpfungen & (Konjunktion), ∨ (Disjunktion) und ¯ der einstelligen Verknüpfung (Negation). Die beiden neutralen Elemente 0 und 1 entsprechen U und V in den Relaisbetrachtungen.
  - Symbole für die Operatoren der Schaltalgebra nicht eindeutig
  - Konjunktion: & sowie ∧ oder •
  - Disjunktion: ∨ sowie + oder |
  - Negation**:** ¯ sowie ¬ oder ´
- Zusammenstellung von Regeln auf Basis der schaltalgebraischen Interpretation, die auf die Axiome zurückgehen oder abgeleitet werden

Schaltalgebra

(R1)	$x + 0 = x$	(R1´)	$x \bullet 1 = x$	Identität
(R2)	$x + 1 = 1$	(R2´)	$x \bullet 0 = 0$	Eins/Nullelement
(R3)	$x + x = x$	(R3´)	$x \bullet x = x$	Idempotenz
(R4)	$\overline{\overline{x}} = x$	(R4´)	$\overline{1} = 0$	Involution
(R5)	$x + \overline{x} = 1$	(R5´)	$x \bullet \overline{x} = 0$	Komplement
(R6)	$x + y = y + x$	(R6´)	$x \bullet y = y \bullet x$	Kommutativität

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(R7)} & (x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z \\ \text{(R7´)} & (x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z) = x \bullet y \bullet z \end{array}\right\} \text{Assoziativität}$$

Schaltalgebra

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(R8)} & x \bullet y + x \bullet z = x \bullet (y + z) \\ \text{(R8´)} & (x + y) \bullet (x + z) = x + y \bullet z \end{array}\right\} \text{Distributivität}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(R9)} & \overline{(x + y)} = \overline{x} \bullet \overline{y} \\ \text{(R9´)} & \overline{(x \bullet y)} = \overline{x} + \overline{y} \end{array}\right\} \text{De Morgan}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(R9)} & \overline{(x_1 + \ldots + x_n)} = \overline{x}_1 \bullet \ldots \bullet \overline{x}_n \\ \text{(R9´)} & \overline{(x_1 \bullet \ldots \bullet x_n)} = \overline{x}_1 + \ldots + \overline{x}_n \end{array}\right\} \text{Generalisierter De Morgan}$$

$$\left.\begin{array}{llll} \text{(R10)} & x + (\overline{x} \bullet y) = x + y & \text{(R10´)} & x \bullet (\overline{x} + y) = x \bullet y \\ \text{(R11)} & x + x \bullet y = x & \text{(R11´)} & x \bullet (x + y) = x \end{array}\right\} \text{Absorption}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(R12)} & x \bullet y + \overline{x} \bullet z + y \bullet z = x \bullet y + \overline{x} \bullet z) \\ \text{(R12´)} & (x + y) \bullet (\overline{x} + z) \bullet (y + z) = (x + y) \bullet (\overline{x} + z) \end{array}\right\} \text{Konsensus}$$

Schaltalgebra

- Die in den Regeln wiedergegebenen Beziehungen der Schaltalgebra sind zunächst Aussage über die Gleichheit beider Seiten
- Gleichheit beider Seiten bedeutet, dass für alle möglichen Belegungen der Variablen des schaltalgebraischen Ausdrucks beide Seiten gleich sind
- Die gegebenen Regeln erlauben also die systematische Ersetzung von Termen in schaltalgebraischen Ausdrücken und deren Umstrukturierung
- **Ziel**: Vereinfachung des Ausdrucks auf minimal erforderlichen Aufwand
- Die algebraische Umformung ist nur eine Möglichkeit der Minimierung
- Weitere Ziele:
  - Ausdrücke in anderer Form darstellen
  - Bestimmte Operatoren zu eliminieren bzw. sich bei der Darstellung der Operatoren auf bestimmte Operatoren zu beschränken (Technologiebezug)
- Vereinfachungsbeispiel:

$$z = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 = \bar{x}_1 \vee (x_2 \vee \bar{x}_2) \vee x_3 \qquad \text{R5}$$

$$= \bar{x}_1 \vee 1 \vee x_3 \qquad \text{R2}$$

$$z = 1$$

Schaltalgebra

- Weiteres Vereinfachungsbeispiel:

$$z = (a \wedge b \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee \left(\overline{\bar{b} \vee (\bar{a} \wedge a)}\right) \qquad \text{R5}'$$

$$= (a \wedge b \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee \left(\overline{\bar{b} \vee 0}\right) \qquad \text{R1}$$

$$= (a \wedge b \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee \left(\overline{\bar{b}}\right) \qquad \text{R4}$$

$$= (a \wedge b \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee b \qquad \text{R11}$$

$$= (a \wedge b \wedge c) \vee b \qquad \text{R11}$$

$$z = b$$

Schaltalgebra

- Umformung in Und-Oder-Form:

$$z = ((a \vee b) \wedge c) \vee d \vee (b \wedge c) \qquad \text{R8}$$
$$= (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \vee d \vee (b \wedge c) \qquad \text{R3}$$
$$z = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \vee d$$

- In Form <u>*ohne*</u> Oder-Operator bringen:

$$z = (a \wedge b) \vee (c \wedge d) \vee e \qquad \text{R4}$$
$$= \overline{\overline{(a \wedge b) \vee (c \wedge d) \vee e}} \qquad \text{R9}$$
$$= \overline{\overline{(a \wedge b) \vee (c \wedge d)} \wedge \overline{e}} \qquad \text{R9}$$
$$z = \overline{\overline{(a \wedge b)} \wedge \overline{(c \wedge d)} \wedge \overline{e}}$$

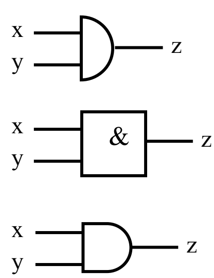
Boolesche Elementaroperationen

- Und-Verknüpfung (Konjunktion)

Wahrheitstabelle

x	y	z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Gattersymbole



DIN (alt)

IEC-Norm (IEEE Standard)

US-Norm (alt)

- 0-Dominanz
- Grössere Und-Verknüpfungen durch Zusammenschaltung bzw. Gatter mit höherer Eingangszahl
- Gatterdarstellung abstrahiert zunächst noch von Umsetzungstechnologie

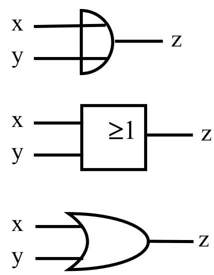
Boolesche Elementaroperationen

- Oder-Verknüpfung (Disjunktion)

Wahrheitstabelle

x	y	z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Gattersymbole



DIN (alt)

IEC-Norm (IEEE Standard)

US-Norm (alt)

- 1-Dominanz

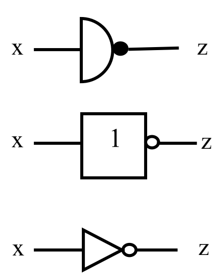
Boolesche Elementaroperationen

- Negation

Wahrheitstabelle

x	z
0	1
1	0

Gattersymbole



DIN (alt)

IEC-Norm (IEEE Standard)

US-Norm (alt)

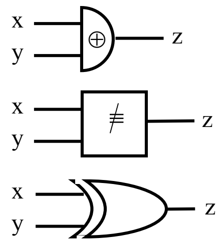
- Bisherige Gatter repräsentieren die drei Operatoren der Booleschen Algebra
- Durch die Anwendung der Verknüpfungsregeln können Boolesche Ausdrücke auch durch Kombinationen repräsentiert werden
- Für diese erweitert sich der entsprechende *Gattervorrat*

- EXOR-Verknüpfung (Exklusiv-Oder bzw. Antivalenz)

Wahrheitstabelle

x	y	z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Gattersymbole



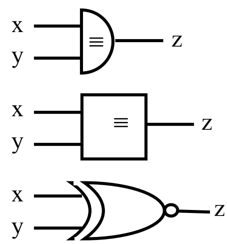
DIN (alt)

IEC-Norm (IEEE Standard)

US-Norm (alt)

- XNOR-Verknüpfung (Äquivalenz)

x	y	z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



DIN (alt)

IEC-Norm (IEEE Standard)

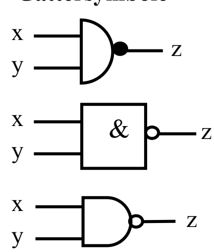
US-Norm (alt)

- NAND-Verknüpfung (Negation-Konjunktion)

Wahrheitstabelle

x	y	z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Gattersymbole



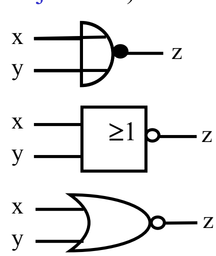
DIN (alt)

IEC-Norm (IEEE Standard)

US-Norm (alt)

- NOR-Verknüpfung (Negation-Disjunktion)

x	y	z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



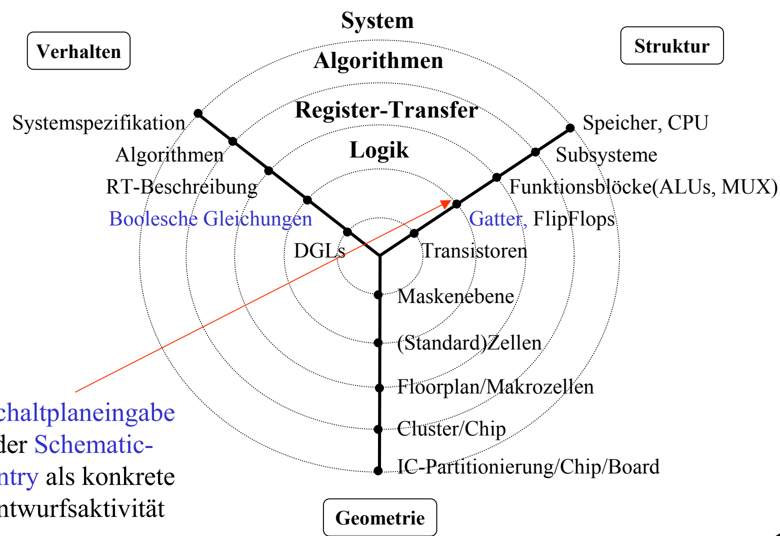
DIN (alt)

IEC-Norm (IEEE Standard)

US-Norm (alt)

Einschub: Schematic-Entry

- Zusammensetzung von Booleschen Ausdrücken unter Verwendung der eingeführten Gattersymbole



- Schaltplaneingabe oder Schematic-Entry als konkrete Entwurfsaktivität

Einschub: Schematic-Entry

- Beispielausdruck:

$$C_{out} = BC_{in} + AC_{in} + AB$$

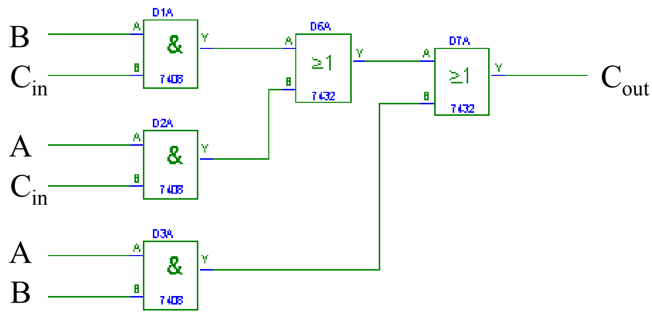
- Schaltplaneingabe in PSPICE:
  - Ursprünglich Schaltkreissimulator basierend auf Berkeley SPICE
  - Erweiterung um Mixed-Signal-Entwurfsmerkmale
  - Damit ist Entwurf und Simulation von Digitalsystemen möglich
  - Frei verfügbar
  - Reine Digitalteile werden aufwandsgünstig (Logiksimulation) simuliert

Einschub: Schematic-Entry

- Beispielausdruck:

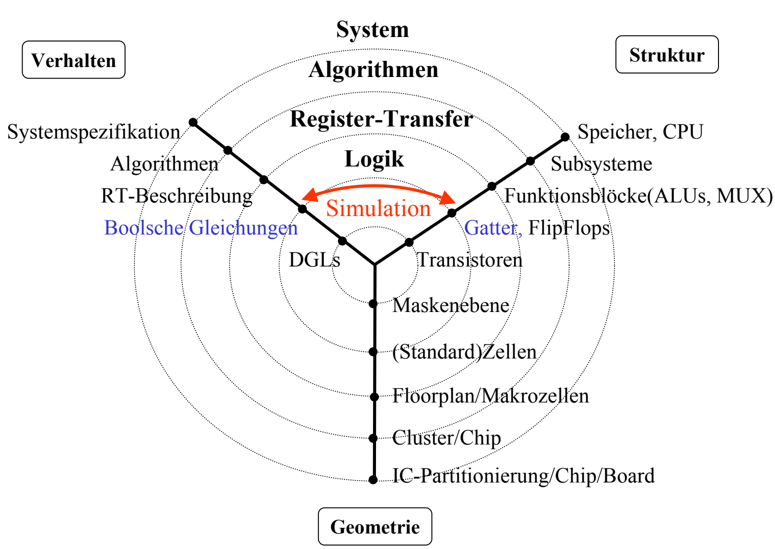
$$C_{out} = BC_{in} + AC_{in} + AB$$

- Schaltplaneingabe in PSPICE:



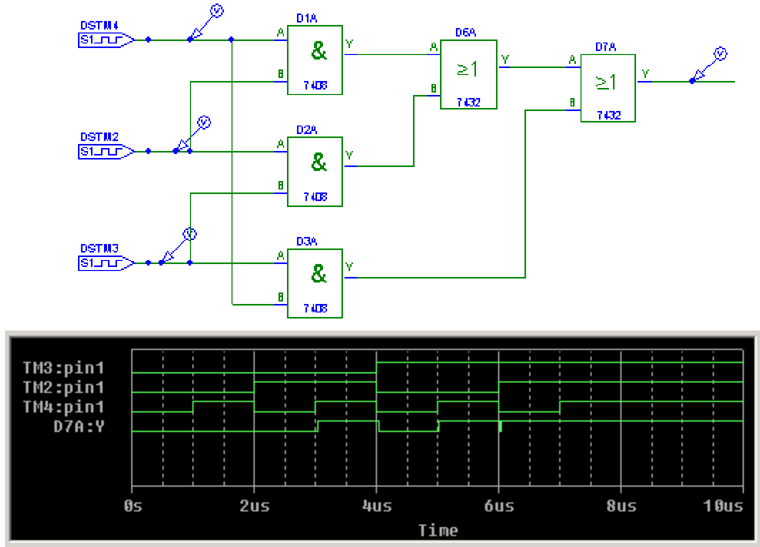
Einschub: Simulation

- Simulation des Gatternetzwerkes (Logiksimulation/Timing-Simulation)



Einschub: Simulation

- Logiksimulation des einfachen Digitalteils für gesamte Wahrheitstabelle:



Schaltfunktionen

- Entwicklung der Schaltalgebra als theoretisches Handwerkszeug für die formale Entwicklung von binären Digitalschaltungen (Schaltwerken)
- Eine solche Schaltfunktion gibt eine Beschreibung einer gewünschten Abbildung durch das Ein-/Ausgangsverhalten ohne sich dabei bezüglich der Innenstruktur (Realisierungsform) festzulegen

- Die Funktionsbeziehung wird ausgedrückt durch: $f:\{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$
- Für Funktionen mit mehreren Ausgangsgrößen (Funktionsbündel) gilt: $f:\{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}^m$
- Für den Eingangsvektor X gibt es $|\{0,1\}^n|=2^n$ verschiedene Belegungen

Schaltfunktionen

- Darstellungsmöglichkeiten einer Schaltfunktion:
  - Algebraische Darstellung (Schaltalgebraische Darstellung)
  - Funktionstabelle
  - Darstellung durch Graphen (*Binary Decision Diagrams*, BDDs)
  - Graphische Darstellung durch Tafeln (Karnaugh-Veitch- bzw. Symmetriediagramme)
- Beispiel einer Funktionstabelle für den Fall der Erkennung einer Pseudotetrade bei der Darstellung von BCD-Zahlen:
- Schreibweise: $f(x_1x_2x_3x_4)$, z.B. f(1,0,1,0)=1
- Erkennbar: exponentielles Wachstum der Tabelle mit entsprechendem Darstellungsproblem

Dualzahl $x_4x_3x_2x_1$	BCD Pseudotetrade
0 0 0 0	0
0 0 0 1	0
0 0 1 0	0
0 0 1 1	0
0 1 0 0	0
0 1 0 1	0
0 1 1 0	0
0 1 1 1	0
1 0 0 0	0
1 0 0 1	0
1 0 1 0	1
1 0 1 1	1
1 1 0 0	1
1 1 0 1	1
1 1 1 0	1
1 1 1 1	1

Schaltfunktionen

- Erweiterung der Darstellung der Schaltfunktion in der Tabelle um dezimale Notation oder Indizierung der möglichen Wertekombinationen der Eingangsvariablen
- Mögliche Repräsentation der Funktion durch die Menge aller Wertekombinationen mit f=1 (Einsstellenmenge)

  f={10,11,12,13,14,15}

- Entsprechend Repräsentation durch Nullstellen-menge:

  f={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}

Dez.	$x_4x_3x_2x_1$	f
0	0 0 0 0	0
1	0 0 0 1	0
2	0 0 1 0	0
3	0 0 1 1	0
4	0 1 0 0	0
5	0 1 0 1	0
6	0 1 1 0	0
7	0 1 1 1	0
8	1 0 0 0	0
9	1 0 0 1	0
10	1 0 1 0	1
11	1 0 1 1	1
12	1 1 0 0	1
13	1 1 0 1	1
14	1 1 1 0	1
15	1 1 1 1	1

Schaltfunktionen

- Graphische Darstellung durch Tafeln (Karnaugh-Veitch- bzw. Symmetrie-Diagramme)
- Intuitiverer Zugang für die manuelle Repräsentation und Minimierung von Schaltfunktionen
- Auch hier: exponentielles Wachstum der Tafel mit entsprechendem Darstellungsproblem
- Praktisch geeignet für Variablenzahl n<=6
- Beispiel anhand der Und-Funktion:

KV-Diagramm für zwei Variablen

		x
	0	1
y	2	3

Wahrheitstabelle

x	y	z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

KV-Diagramm mit Funktionswerten

		x
	0	0
y	0	1

Schaltfunktionen

- Beispiel mit n=4 für BCD-Pseudotetraden-detektion:

		x_1	x_1		
	0	1	5	4	
x_2	2	3	7	6	
x_2	10	11	15	14	x_4
	8	9	13	12	x_4
			x_3	x_3	

Symmetriediagramm

Dez.	$x_4x_3x_2x_1$	f
0	0 0 0 0	0
1	0 0 0 1	0
2	0 0 1 0	0
3	0 0 1 1	0
4	0 1 0 0	0
5	0 1 0 1	0
6	0 1 1 0	0
7	0 1 1 1	0
8	1 0 0 0	0
9	1 0 0 1	0
10	1 0 1 0	1
11	1 0 1 1	1
12	1 1 0 0	1
13	1 1 0 1	1
14	1 1 1 0	1
15	1 1 1 1	1

- Beispiel mit n=4 für BCD-Pseudotetraden-detektion:

x_3

	0	4	12	8	
x_1	1	5	13	9	
x_1	3	7	15	11	x_2
	2	6	14	10	x_2

x_4

KV-Diagramm

• Im folgenden wird die Notation der Symmetriediagramme verwendet!

Dez.	$x_4x_3x_2x_1$	f
0	0 0 0 0	0
1	0 0 0 1	0
2	0 0 1 0	0
3	0 0 1 1	0
4	0 1 0 0	0
5	0 1 0 1	0
6	0 1 1 0	0
7	0 1 1 1	0
8	1 0 0 0	0
9	1 0 0 1	0
10	1 0 1 0	1
11	1 0 1 1	1
12	1 1 0 0	1
13	1 1 0 1	1
14	1 1 1 0	1
15	1 1 1 1	1

- Beispiel mit n=4 für BCD-Pseudotetraden-detektion:

x_3

x_2x_1 \ x_4x_3	00	01	11	10	
00	0	4	12	8	
01 (x_1)	1	5	13	9	
11 (x_1)	3	7	15	11	x_2
10	2	6	14	10	x_2

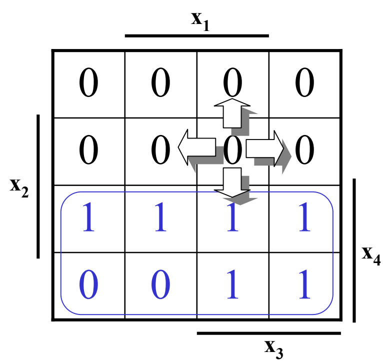
x_4

Alternative KV-Diagrammbeschriftung

Dez.	$x_4x_3x_2x_1$	f
0	0 0 0 0	0
1	0 0 0 1	0
2	0 0 1 0	0
3	0 0 1 1	0
4	0 1 0 0	0
5	0 1 0 1	0
6	0 1 1 0	0
7	0 1 1 1	0
8	1 0 0 0	0
9	1 0 0 1	0
10	1 0 1 0	1
11	1 0 1 1	1
12	1 1 0 0	1
13	1 1 0 1	1
14	1 1 1 0	1
15	1 1 1 1	1

Schaltfunktionen

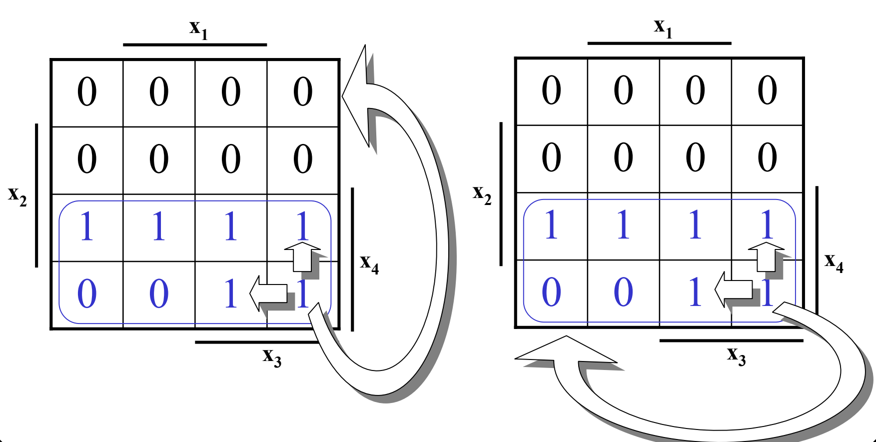
- Im KV-Diagramm ändert sich beim Wechsel von einem Feld zum nächsten immer nur eine Variable !



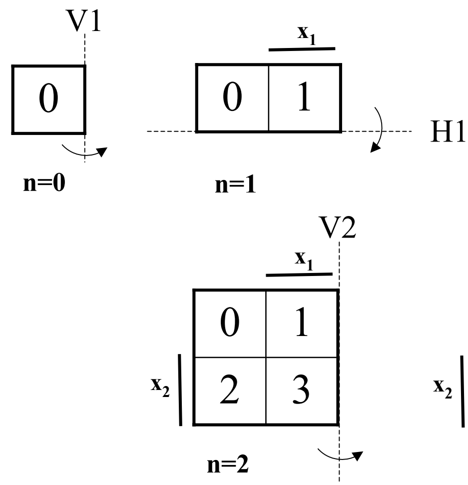
Dez.	$x_4x_3x_2x_1$	f
0	0 0 0 0	0
1	0 0 0 1	0
2	0 0 1 0	0
3	0 0 1 1	0
4	0 1 0 0	0
5	0 1 0 1	0
6	0 1 1 0	0
7	0 1 1 1	0
8	1 0 0 0	0
9	1 0 0 1	0
10	1 0 1 0	1
11	1 0 1 1	1
12	1 1 0 0	1
13	1 1 0 1	1
14	1 1 1 0	1
15	1 1 1 1	1

Schaltfunktionen

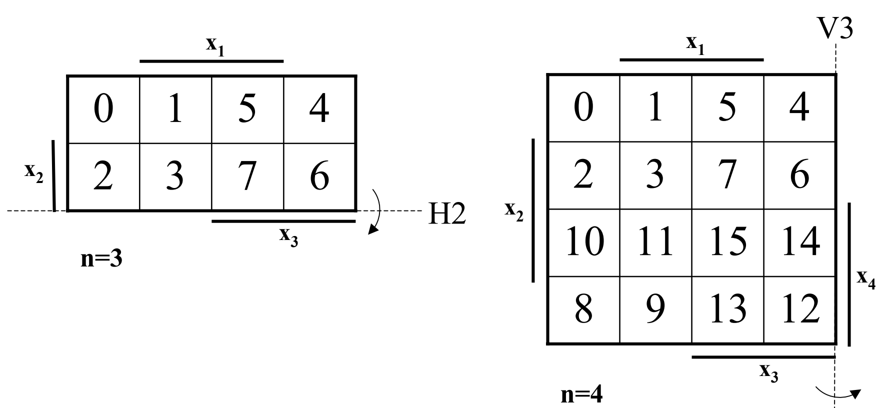
- Auch beim Wechsel von einem Randfeld zum nächsten ändert sich im KV-Diagramm immer nur eine Variable !



- Konstruktion von KV- bzw. Symmetriediagrammen mit wachsendem n



- Konstruktion von KV-Diagrammen mit wachsendem n



- Konstruktion von KV-Diagrammen mit wachsendem n

x_1 x_1

0	1	5	4	20	21	17	16
2	3	7	6	22	23	19	18
10	11	15	14	30	31	27	26
8	9	13	12	28	29	25	24

x_2 x_4 x_3 x_5

H3

n=5

Schaltfunktionen

Digitaltechnik
Grundlagen der Booleschen Algebra

x_1 x_1

0	1	5	4	20	21	17	16
2	3	7	6	22	23	19	18
10	11	15	14	30	31	27	26
8	9	13	12	28	29	25	24
40	41	45	44	60	61	57	56
42	43	47	46	62	63	59	58
34	35	39	38	54	55	51	50
32	33	37	36	52	53	49	48

n=6

x_2 x_6 x_2 x_4 x_3 x_5

Schaltfunktionen

- Typen von Schaltfunktionen für gegebenes n

$$\{0,1\}^n \xrightarrow{f} \{0,1\}$$

- Obere Grenze für die Zahl möglicher Funktionen:

$$MF = 2^{(2^n)}$$

- Beispiel:

n=0	MF=2
n=1	MF=4
n=2	MF=16
n=3	MF=256
⋮	
n=10	MF=2^{1024}

- Für n=0 nur Konstante 0 und 1, für n=2 zwei Konstante Funktionen, eine Reproduktion und eine Negation

Schaltfunktionen

- Darstellung möglicher Funktionen für n=2 (MF=16!)

$x_2\,x_1$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}	y_{16}
0 0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0 1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1 0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	—	neg. Disjunktion	(neg. Implikation)	— neg. x_2	neg. Implikation	— neg. x_1	Antivalenz	neg. Konjunktion	Konjunktion	Äquivalenz	—	Implikation	—	(Implikation)	Disjunktion	—

- Hälfte der Fkt. Nur Negation der anderen Hälfte, zwei Konst., vier hängen nur von einer Variablen (direkt/negiert) ab, Operatoren Schaltalgebra !
- Anschluss der Schaltfunktionen an axiomatisches Gebäude

Hauptsatz der Schaltalgebra

- Veranschaulichung der Wirkung von Konjunktion und Disjunktion im KV-Diagramm für wachsendes n:

n=2

$$y = x_1 \wedge x_2$$

x_1

	0	0
x_2	0	1

$$y = x_1 \vee x_2$$

x_1

	0	1
x_2	1	1

n=3

$$y = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$$

x_1

	0	0	0	0
x_2	0	0	1	0

x_3

$$y = x_1 \vee x_2 \vee x_3$$

x_1

	0	1	1	1
x_2	1	1	1	1

x_3

Hauptsatz der Schaltalgebra

- Veranschaulichung der Wirkung von Konjunktion und Disjunktion im KV-Diagramm für wachsendes n:

$$y = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$$

$$y = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$$

n=4

x_1

	0	0	0	0	
x_2	0	0	0	0	
x_2	0	0	1	0	x_4
	0	0	0	0	x_4

x_3

x_1

	0	1	1	1	
x_2	1	1	1	1	
x_2	1	1	1	1	x_4
	1	1	1	1	x_4

x_3

Hauptsatz der Schaltalgebra

- Erkennbar lässt sich für beliebiges n über Konjunktion bzw. Disjunktion und eine entsprechende Belegung eine ein Funktionswert konstruieren

Konjunktion	(1,1,1,....,1)
Disjunktion	(0,0,0,....,0)

- Ausgangsbasis für Bauprinzip beliebiger Schaltfunktionen
- Anlehnung an den Begriff der Reihenentwicklung bzw. der näherungsweisen oder exakten Darstellungen von Funktionen durch gewichtete Zusammenfassung von Basisfunktionen:

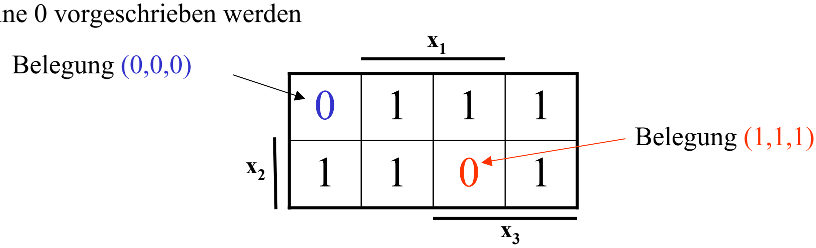
$$y = f(x) = A_0 b_0(x) + A_1 b_1(x) + \ldots + A_{N-1} b_{N-1}(x) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k b_k(x)$$

- Besonders günstig sind Basisfunktionen die zueinander orthogonal sind:

$$b_k(x) b_{l1}(x) = 0 \quad \forall \quad k \neq l$$

Hauptsatz der Schaltalgebra

- Lassen sich nun beliebige Schaltfunktionen mit geeigneten Basisfunktionen und Koeffizienten nach gleichem Bauschema darstellen ?
- Besondere Randbedingungen: Binäre Funktionswerte und endliche Belegungsmengen !
- **Problem:** Bislang kann durch die Konjunktion nur für die Belegungn (1,1,1,....,1) und für die Disjunktion für die Belegung (0,0,0,....,0) eine 1 bzw. eine 0 vorgeschrieben werden



- Damit müsste ein Term erzeugt werden mit: $y = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$

Hauptsatz der Schaltalgebra

- Entsprechend gilt für die Disjunktion:

Belegung (0,0,0)

Belegung (1,1,1)

	x_1	x_1	
1	0	0	0
0 (x_2)	0	1	0
		x_3	x_3

- Damit müsste ein Term erzeugt werden mit: $y = \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3$

- In allgemeiner Schreibweise für die beliebige Platzierung einer 1 im KV-Diagramm wird notiert [Lipp 99]: $y = \ddot{x}_1 \wedge \ddot{x}_2 \wedge \ddot{x}_3$

- Dahinter steht die Konvention für eine 1 in der gewünschten Belegung die Variable x_i einzusetzen, für eine 0 die invertierte Variable $\overline{x}_i$

Hauptsatz der Schaltalgebra

- Vom konkreten Beispiel für drei Variablen lässt sich der gefundene Zusammenhang für die Konjunktion auf n Variable verallgemeinern:

$$y = \ddot{x}_n \wedge \ddot{x}_{n-1} \wedge \ldots \wedge \ddot{x}_1 \qquad \ddot{x} = \begin{cases} x & \text{für} \quad 1 \\ \overline{x} & \text{für} \quad 0 \end{cases}$$

- Entsprechend folgt für die Disjunktion aus Gründen der Dualität:

$$y = \ddot{x}_n \vee \ddot{x}_{n-1} \vee \ldots \vee \ddot{x}_1 \qquad \ddot{x} = \begin{cases} \overline{x} & \text{für} \quad 1 \\ x & \text{für} \quad 0 \end{cases}$$

Hauptsatz der Schaltalgebra

- Auf Grund ihrer zentralen Bedeutung zur Beschreibung Boolescher Funktionen haben diese speziellen Funktionen aus n Variablen die folgenden Namen erhalten:

$$m_j = \ddot{x}_n \wedge \ddot{x}_{n-1} \wedge \ldots \wedge \ddot{x}_1 \qquad \text{Minterm(funktion)}$$

$$M_j = \ddot{x}_n \vee \ddot{x}_{n-1} \vee \ldots \vee \ddot{x}_1 \qquad \text{Maxterm(funktion)}$$

- Es gilt für Minterme und Maxterme allgemein:

$$m_j \vee m_k = 0 \qquad M_j \vee M_k = 1 \qquad j \neq k, 0 \leq j, k \leq 2^n - 1$$

$$\overline{m}_j = M_j \qquad \overline{M}_j = m_j$$

$$m_j \wedge M_j = 0 \qquad m_j \vee M_j = 1$$

- Damit stehen also orthogonale Basisfunktionen zur Verfügung !

Hauptsatz der Schaltalgebra

- Veranschaulichung für n=2:

$$m_0 = \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_1 \quad m_1 = \overline{x}_2 \wedge x_1 \quad m_2 = x_2 \wedge \overline{x}_1 \quad m_3 = x_2 \wedge x_1$$

$$M_0 = x_2 \vee x_1 \quad M_1 = x_2 \vee \overline{x}_1 \quad M_2 = \overline{x}_2 \vee x_1 \quad M_3 = \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_1$$

$$m_0 \wedge m_1 = \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_1 \quad = \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_1 \wedge x_1 \quad = 0$$

$$M_0 \vee M_1 = x_2 \vee x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_1 \quad = x_2 \vee x_1 \vee \overline{x}_1 \quad = 1$$

- Damit ist die Orthogonalität der Minterme bzw. Maxterme offensichtlich
- Grundlage für das Zusammensetzen einer beliebigen Funktion

Hauptsatz der Schaltalgebra

- Darstellung einer (trivialen) Funktion aus Mintermen:

$y =$	$m_0 \vee$	$m_1 \vee$	$m_2 \vee$	$m_3 \vee$	$m_4 \vee$	$m_5 \vee$	$m_6 \vee$	m_7	x_3	x_2	x_1	j_O
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	2
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	3
1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	4
1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	5
1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	6
1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	7

- Greift man nun die Idee der Reihenentwicklung wieder auf, so könnte man für eine nichttriviale Funktion jeden Minterm mit einem Faktor A_i gewichten, mit

$$A_i \in \{0,1\}$$

Hauptsatz der Schaltalgebra

- Damit werden die Basisfunktionen gezielt ein- bzw. ausgeschaltet, um die gewünschte Funktion zusammenzusetzen:

$y =$	$m_0 \vee$	$m_1 \vee$	$m_2 \vee$	$m_3 \vee$	$m_4 \vee$	$m_5 \vee$	$m_6 \vee$	m_7	x_3	x_2	x_1	j_O
A_0	A_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A_1	0	A_1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
A_2	0	0	A_2	0	0	0	0	0	0	1	0	2
A_3	0	0	0	A_3	0	0	0	0	0	1	1	3
A_4	0	0	0	0	A_4	0	0	0	1	0	0	4
A_5	0	0	0	0	0	A_5	0	0	1	0	1	5
A_6	0	0	0	0	0	0	A_6	0	1	1	0	6
A_7	0	0	0	0	0	0	0	A_7	1	1	1	7

- Beschreibt nun f_j den Funktionswert der gewünschten Funktion y für die Belegung j, so ist mit gegebenem Schema jede beliebige Funktion darstellbar ($A_j = f_j$):

$$y = (f_{2^n-1} \wedge m_{2^n-1}) \vee (f_{2^n-2} \wedge m_{2^n-2}) \vee \ldots \vee (f_1 \wedge m_1) \vee (f_0 \wedge m_0)$$

- Dies lässt sich kompakter schreiben als:

$$y = \bigvee_{j=0}^{2^n-1} (f_j \wedge m_j)$$

- Dieser Ausdruck wird als die Disjunktive Normalform (DNF) einer Schaltfunktion bezeichnet
- Diese Form der Darstellung wird auch als kanonisch bezeichnet

- Entsprechend gilt nun dual:

$$y = (f_{2^n-1} \vee M_{2^n-1}) \wedge (f_{2^n-2} \vee M_{2^n-2}) \wedge \ldots \wedge (f_1 \vee M_1) \wedge (f_0 \vee M_0)$$

- Dies lässt sich entsprechend wieder kompakter schreiben als:

$$y = \bigwedge_{j=0}^{2^n-1} (f_j \vee M_j)$$

- Dieser Ausdruck wird als die konjunktive Normalform (KNF) einer Schaltfunktion bezeichnet
- Diese Form der Darstellung wird ebenso als kanonisch bezeichnet

Hauptsatz der Schaltalgebra

- Veranschaulichung der Funktionsdarstellung durch DNF und KNF
- Detektion einer Pseudotetrade für BCD-Darstellung:

		x_1	x_1		
	0	0	0	0	
x_2	0	0	0	0	
x_2	1	1	1	1	x_4
	0	0	1	1	x_4
			x_3	x_3	

DNF:

$$y = x_4 x_3 x_2 x_1 \vee x_4 x_3 x_2 \bar{x}_1 \vee x_4 x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_4 x_3 \bar{x}_2 x_1 \vee x_4 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 \vee x_4 \bar{x}_3 x_2 x_1$$

KNF:

$$y = (x_4 \vee x_3 \vee x_2 \vee x_1) \wedge (x_4 \vee x_3 \vee x_2 \vee \bar{x}_1) \wedge (x_4 \vee x_3 \vee \bar{x}_2 \vee x_1) \wedge (x_4 \vee x_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1) \wedge (x_4 \vee \bar{x}_3 \vee x_2 \vee \bar{x}_1) \wedge (x_4 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1) \wedge (x_4 \vee \bar{x}_3 \vee x_2 \vee x_1) \wedge (x_4 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \vee x_1) \wedge (\bar{x}_4 \vee x_3 \vee x_2 \vee x_1) \wedge (\bar{x}_4 \vee x_3 \vee x_2 \vee \bar{x}_1)$$

Hauptsatz der Schaltalgebra

- Damit kann nun der **Hauptsatz der Schaltalgebra** **formuliert werden:**

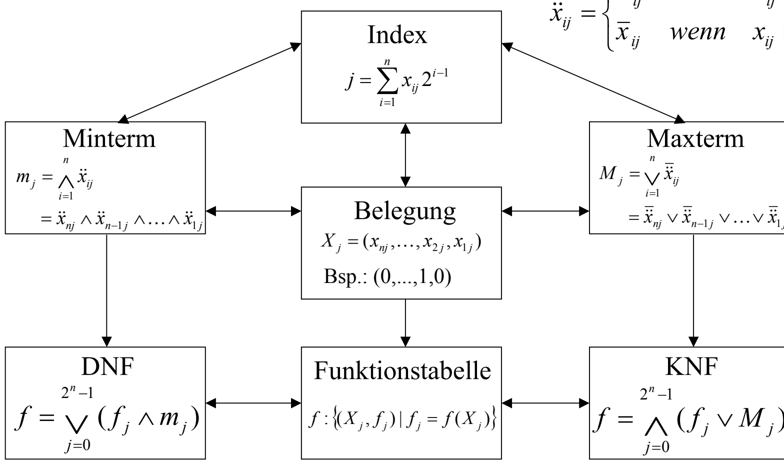
> **Satz 3.3:** Jede beliebige Schaltfunktion $y=f(x_n,\ldots,x_1)$ lässt sich als Disjunktion von Mintermen [Konjunktion von Maxtermen] eindeutig darstellen. In der Disjunktion [Konjunktion] treten genau diejenigen Minterme [Maxterme] auf, die zu den Einstellen [Nullstellen] der Schaltfunktion gehören.

- Damit liegt das Rüstzeug vor, beliebige Schaltfunktion eindeutig zu beschreiben und in Gatternetze für Anwendungen umzusetzen
- Allerdings sagt die Eindeutigkeit der Beschreibung noch nichts über ihre Optimalität aus
- Für die technische Realisierung von Schaltfunktionen ist aus technisch und wirtschaftlichen Randbedingungen intuitiv klar, dass eine Aufwandsminimierung im Entwurf erforderlich ist
- Dies ist Gegenstand folgender Kapitel !

Hauptsatz der Schaltalgebra

- Zusammenfassende Darstellung der eingeführten Begriffe und ihrer Beziehungen:

$$\ddot{x}_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & wenn \quad x_{ij} = 1 \\ \overline{x}_{ij} & wenn \quad x_{ij} = 0 \end{cases}$$



Basissysteme

- Die Aussagen zur DNF und KNF sowie dem Hauptsatz der Schaltalgebra selbst zeigen, dass mit den drei Grundverknüpfungen (Operatoren) Konjunktion, Disjunktion und Negation jede beliebige Schaltfunktion eindeutig dargestellt werden kann
- Daher wird [&,+,´] als ***Basissystem*** der Schaltalgebra bezeichnet. (Oft wird in diesem Zusammenhang auch von Vollständigkeit gesprochen)
- Aus praktischen Gründen stellt sich die Frage, ob es Basissysteme gibt, die mit weniger (anderen) Operatoren gleiche Eigenschaften zur Realisierung beliebiger Schaltfunktionen liefern ?
- Unter Nutzung der Regeln R9/R9´ (De Morgan) lässt sich zeigen:

$$\overline{x_2 \vee x_1} = \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_1 \qquad bzw. \qquad \overline{x_2 \wedge x_1} = \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1$$

- Mittels der Negation kann also +[&] durch &[+] ersetzt werden
- Damit sind [&,´] bzw. [+,´] ebenfalls ***Basissysteme***

Basissysteme

- Geht man direkt von der DNF bzw. KNF aus:

$$y = \bigvee_{j=0}^{2^n-1} (f_j \wedge m_j) \qquad\qquad y = \bigwedge_{j=0}^{2^n-1} (f_j \vee M_j)$$

so lässt sich dies schrittweise überführen

$$y = \overline{\overline{y}} = \overline{\overline{\bigvee_{j=0}^{2^n-1} (f_j \wedge m_j)}} \qquad\qquad y = \overline{\overline{y}} = \overline{\overline{\bigwedge_{j=0}^{2^n-1} (f_j \vee M_j)}}$$

$$y = \overline{\bigwedge_{j=0}^{2^n-1} \overline{(f_j \wedge m_j)}} \qquad\qquad y = \overline{\bigvee_{j=0}^{2^n-1} \overline{(f_j \vee M_j)}}$$

$$y = \overline{\bigwedge_{j=0}^{2^n-1} (\overline{f_j} \vee \overline{m_j})} \qquad\qquad y = \overline{\bigvee_{j=0}^{2^n-1} (\overline{f_j} \wedge \overline{M_j})}$$

Basissysteme

- Berücksichtigt man noch, dass bei der DNF nur Minterme mit f_j=1 und bei der KNF Maxterme mit f_j =0 in der Funktionsdarstellung beitragen so ist für diese Belegungen j

$$\overline{f_j} = 0 \qquad\qquad \overline{f_j} = 1$$

$$\overline{f_j} \vee \overline{m_j} = \overline{m_j} \qquad\qquad \overline{f_j} \wedge \overline{M_j} = \overline{M_j}$$

und man kürzer schreiben

$$y = \overline{\bigwedge \overline{m_j}} \;\Big|\; f_j = 1 \qquad\qquad y = \overline{\bigvee \overline{M_j}} \;\Big|\; f_j = 0$$

- **Konsequenz**: negierte Konjunktion (NAND) bzw. negierte Disjunktion (NOR) genügen ebenfalls zur Darstellung beliebiger Funktion
- [$\overline{\&}$] bzw. [$\overline{+}$] sind damit Basissysteme
- Weitere Basissysteme: [&, ≢, 1] bzw. folgende Tabelle

Basissysteme

➢ Zusammenstellung relevanter Basissysteme:

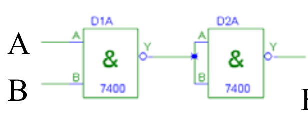
Zahl der Operatoren	Namen	Zeichen	Darstellung mit UND, ODER,NICHT	Darstellung von a´	a&b	a+b
3	NICHT UND ODER	y= a´ y=a&b y=a+b	-	a´ - -	- y=a&b -	- - y=a+b
2	NICHT UND	y= a´ y=a&b	-	a´ -	- y=a&b	$a\vee b=\overline{\overline{a\vee b}}$ $=\overline{\overline{a}\wedge\overline{b}}$
2	NICHT ODER	y= a´ y=a+b	-	a´ -	$a\wedge b=\overline{\overline{a\wedge b}}$ $=\overline{\overline{a}\vee\overline{b}}$	- y=a+b
2	UND Antivalenz	y=a&b y=a ≢ b	y=a&b $y=\overline{a}\wedge b\vee a\wedge\overline{b}$	a ≢1	y=a&b -	$a\oplus b\oplus(a\wedge b)$
1	NAND	$y=a\overline{\&}b$	$y=\overline{a\wedge b}$ $=\overline{a}\vee\overline{b}$	$a\overline{\&}a$ $1\overline{\&}a$	$\overline{a\overline{\wedge}b}=$ $(a\overline{\wedge}b)\overline{\wedge}(a\overline{\wedge}b)$	$\overline{a}\overline{\wedge}\overline{b}=$ $(a\overline{\wedge}a)\overline{\wedge}(b\overline{\wedge}b)$
1	NOR	$y=a\overline{+}b$	$y=\overline{a\vee b}$ $=\overline{a}\wedge\overline{b}$	$a\overline{+}a$ $0\overline{+}a$	$\overline{\overline{a}\vee\overline{b}}=\overline{a}\overline{\vee}\overline{b}=$ $(a\overline{\vee}a)\overline{\vee}(b\overline{\vee}b)$	$\overline{\overline{a\vee b}}=\overline{a\overline{\vee}b}=$ $(a\overline{\vee}b)\overline{\vee}(a\overline{\vee}b)$

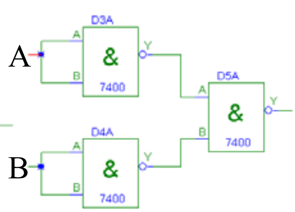
Basissysteme

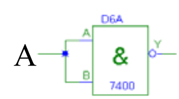
➢ Veranschaulichung in Gatterdarstellung:

UND | ODER | NICHT

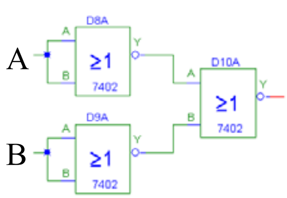
NAND-Realisierung:

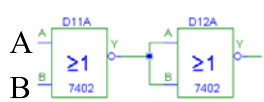


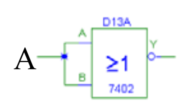




NOR-Realisierung:

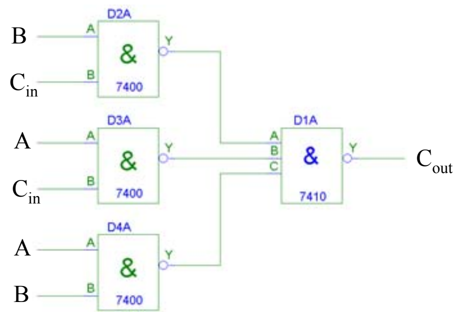






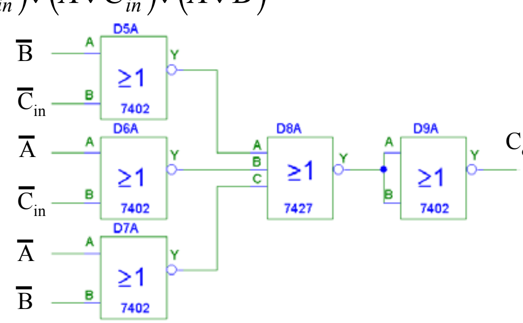
- Die folgende Schaltfunktion soll in eine reine NAND-Darstellung umgeformt werden:

$$C_{out} = BC_{in} \vee AC_{in} \vee AB$$
$$= \overline{\overline{BC_{in} \vee AC_{in} \vee AB}} = \overline{\overline{BC_{in}} \wedge \overline{AC_{in}} \wedge \overline{AB}}$$
$$= \overline{(B \overline{\wedge} C_{in}) \wedge (A \overline{\wedge} C_{in}) \wedge (A \overline{\wedge} B)} = (B \overline{\wedge} C_{in}) \overline{\wedge} (A \overline{\wedge} C_{in}) \overline{\wedge} (A \overline{\wedge} B)$$



- Die folgende Schaltfunktion soll in eine reine NOR-Darstellung umgeformt werden:

$$C_{out} = BC_{in} \vee AC_{in} \vee AB$$
$$= \overline{\overline{BC_{in} \vee AC_{in} \vee AB}} = \overline{\overline{BC_{in}} \wedge \overline{AC_{in}} \wedge \overline{AB}}$$
$$= \overline{\left(\overline{\bar{B} \vee \bar{C}_{in}}\right) \wedge \left(\overline{\bar{A} \vee \bar{C}_{in}}\right) \wedge \left(\overline{\bar{A} \vee \bar{B}}\right)} = \left(\bar{B} \overline{\vee} \bar{C}_{in}\right) \vee \left(\bar{A} \overline{\vee} \bar{C}_{in}\right) \vee \left(\bar{A} \overline{\vee} \bar{B}\right)$$
$$= \overline{\left(\bar{B} \overline{\vee} \bar{C}_{in}\right) \overline{\vee} \left(\bar{A} \overline{\vee} \bar{C}_{in}\right) \overline{\vee} \left(\bar{A} \overline{\vee} \bar{B}\right)}$$



- DNF und KNF bieten universelles Bauschema, aus dem Einstellenmenge bzw. Nullstellenmenge unmittelbar hervorgehen
- Häufig liegen jedoch schaltalgebraische Ausdrücke vor, die keiner Normalform entsprechen
- Beispielsweise zur Konstruktion der Einstellen- bzw. Nullstellenmenge kann eine Auswertung des Ausdrucks und Überführung in eine Normalformdarstellung nützlich sein
- Auswertung des Ausdrucks für jede Belegung ist zwar ein prinzipieller Weg, aber weder elegant noch effizient
- **Ausweg:** Eine geeignete, effiziente Umformung des Ausdrucks mittels des sogenannten Entwicklungssatzes der Schaltalgebra (auch Boolescher oder Shannonscher Entwicklungssatz genannt)
- **Idee:** Entwicklung der Funktion nach einer ausgewählten Variablen und zwei Restfunktionen, die von dieser Variablen unabhängig sind:

$$f = x \cdot f_x \vee \overline{x} \cdot f_{\overline{x}}$$

- Die beiden Restfunktionen $f_x, f_{\overline{x}}$ heißen auch Kofaktoren von f bzgl. x
- Sie werden dadurch bestimmt, dass x in f konstant auf entweder 0 oder 1 gesetzt wird
- Der Entwicklungssatz lautet nun allgemein:

  Satz 3.4: Jede Boolesche Funktion lässt sich nach jeder Ihrer Variablen wie folgt in zwei zueinander dualen Formen entwickeln:

$$\begin{aligned} f(x_n,\ldots,x_i,\ldots,x_1) &= [x_i \wedge f(x_n,\ldots,1,\ldots,x_1)] \vee [\overline{x_i} \wedge f(x_n,\ldots,0,\ldots,x_1)] \\ &= [x_i \wedge f|x_i = 1] \vee [\overline{x_i} \wedge f|x_i = 0] \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} f(x_n,\ldots,x_i,\ldots,x_1) &= [x_i \vee f(x_n,\ldots,0,\ldots,x_1)] \wedge [\overline{x_i} \vee f(x_n,\ldots,1,\ldots,x_1)] \\ &= [x_i \vee f|x_i = 0] \wedge [\overline{x_i} \vee f|x_i = 1] \end{aligned}$$

- Veranschaulichung im KV-Diagramm:

$$f = x_1 \vee \overline{x}_3 \overline{x}_2 \vee x_3 x_2$$

		x_1	x_1	
	1	1	1	0
x_2	0	1	1	1
			x_3	x_3

- Entwicklung nach x_2:

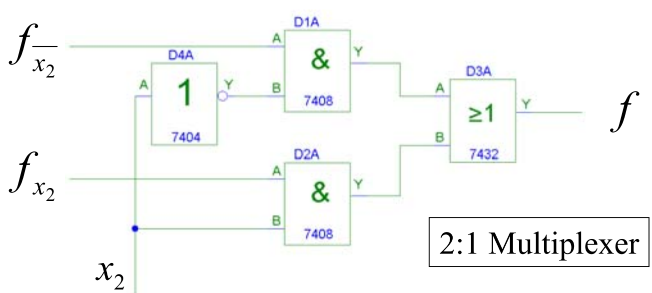
$$f = x_2 f_{x_2} \vee \overline{x_2} f_{\overline{x_2}}$$

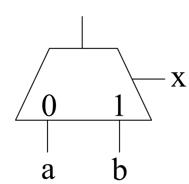
		x_1	x_1	
	1	1	1	0
x_2	0	1	1	1
			x_3	x_3

- Realisierung durch eine spezielle Schaltung:

$$f = x_2 f_{x_2} \vee \overline{x_2} f_{\overline{x_2}}$$

		x_1	x_1	
	1	1	1	0
x_2	0	1	1	1
			x_3	x_3





2:1 Multiplexer

Entwicklungssatz der Schaltalgebra

- Bestimmung der Kofaktoren durch Einsetzen der Konstanten 0 bzw. 1 und Vereinfachung der resultierenden Terme

$$f = x_2 f_{x_2} \vee \overline{x_2} f_{\overline{x_2}}$$

		x_1	x_1	
	1	1	1	0
x_2	0	1	1	1
			x_3	x_3

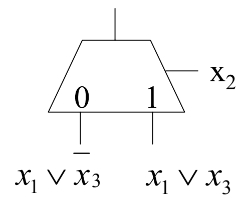
$$f_{x_2} = x_1 \vee \overline{x}_3 \overline{1} \vee x_3 1$$

$$f_{x_2} = x_1 \vee 0 \vee x_3 = x_1 \vee x_3$$

$$f_{\overline{x_2}} = x_1 \vee \overline{x}_3 \overline{0} \vee x_3 0$$

$$f_{\overline{x_2}} = x_1 \vee \overline{x}_3$$

$$f = x_2 (x_1 \vee x_3) \vee \overline{x_2} (x_1 \vee \overline{x_3})$$



Entwicklungssatz der Schaltalgebra

- Die Entwicklung kann sukzessive nach mehreren oder allen Variablen durchgeführt werden
- Im letzteren Fall ist dann keine der Restfunktionen mehr von einer Variablen abhängig, d.h. die Kofaktoren sind Konstante (0 oder 1)
- Diese Kofaktoren entsprechen den Funktionswerten für eine jeweilige Belegung, die sonst durch sukzessives Einsetzen bestimmt worden wären
- Beispiel für eine Funktion $y=f(x_2,x_1)$ von zwei Variablen für die die DNF bestimmt werden soll:

$$y = f(x_2, x_1) = x_1 \wedge f(x_2,1) \vee \overline{x_1} \wedge f(x_2,0) \qquad \text{Entwicklung nach } x_1$$

$$= x_2 \wedge \left[x_1 \wedge f(1,1) \vee \overline{x_1} \wedge f(1,0)\right] \vee \qquad \text{Entwicklung nach } x_2$$

$$\overline{x_2} \wedge \left[x_1 \wedge f(0,1) \vee \overline{x_1} \wedge f(0,0)\right]$$

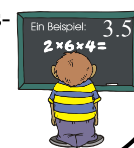
- Unter Einsatz des Assoziativ- und Distributivgesetzes umformen

Entwicklungssatz der Schaltalgebra

- Aus Umformung erhält man:

$$\begin{aligned} y = f(x_2, x_1) &= x_2 \wedge x_1 \wedge f(1,1) \vee x_2 \wedge \overline{x_1} \wedge f(1,0) \vee \\ &\quad \overline{x_2} \wedge x_1 \wedge f(0,1) \vee \overline{x_2} \wedge \overline{x_1} \wedge f(0,0) \\ &= m_3 \wedge f_3 \vee m_2 \wedge f_2 \vee m_2 \wedge f_2 \vee m_1 \wedge f_1 \\ &= \bigvee_{j=0}^{3} m_j \wedge f_j \end{aligned}$$

- Damit resultiert aus der Entwicklung die DNF
- Damit Terme nach fallendem Index j geordnet entstehen, Entwicklung von der mit niedrigstem zu der mit höchstem Index indizierten Variablen
- Ist rasche Vereinfachung der Kofaktoren gewünscht, Entwicklungs-reihenfolge durch Auftrittshäufigkeiten der Variablen bestimmen



Unvollständig definierte Funktionen

- Die bisherige Betrachtung von Schaltfunktionen muss noch um einen praktischen Aspekt erweitert werden
- Bislang wurde für jede mögliche Belegung ein Funktionswert vorgeschrieben
- Eine solche Schaltfunktion heißt vollständig (definiert), wenn für alle Belegungen X_j ein Funktionswert $f_j \in \{0,1\}$ fest zugeordnet wird
- In technischen Anwendungen werden häufig nicht alle Belegungen ausgenutzt und somit nicht alle möglichen Funktionswerte spezifiziert !
- Entsprechend heißt eine solche Schaltfunktion unvollständig (definiert), wenn es mindestens eine Belegungen X_j gibt, für die keine Zuordnung zu einem Funktionswert $f_j \in \{0,1\}$ besteht
- Diese nicht spezifizierten Funktionswerte werden mit d für don´t care gekennzeichnet.
- Damit ergibt sich zur Nullstellen- und Einstellenmenge einer Funktion eine dritte Menge, die hier als d-Stellenmenge bezeichnet wird

Unvollständig definierte Funktionen

- Veranschaulichung für das Beispiel der Parity-Berechnung für BCD-Ziffern
- Für Pseudotetraden braucht keine Parity-Berechnung durchgeführt werden bzw. das Ergebnis ist irrelevant oder d
- Erlaubte und vorkommende Kombinationen
- Erkennbar sind die drei Mengen paarweise disjunkt
- Ihre Summe ist 1 !
- Die dritte Menge ist als Komplement der Summe der beiden anderen Mengen bestimmbar

Dez.	$x_4x_3x_2x_1$	f
0	0 0 0 0	0
1	0 0 0 1	1
2	0 0 1 0	1
3	0 0 1 1	0
4	0 1 0 0	1
5	0 1 0 1	0
6	0 1 1 0	0
7	0 1 1 1	1
8	1 0 0 0	1
9	1 0 0 1	0
10	1 0 1 0	d
11	1 0 1 1	d
12	1 1 0 0	d
13	1 1 0 1	d
14	1 1 1 0	d
15	1 1 1 1	d

Unvollständig definierte Funktionen

- Darstellung einer unvollständig spezifizierten Funktion im KV-Diagramm:

x_1 (columns 2–3), x_2 (rows 2–3), x_4 (rows 3–4), x_3 (columns 3–4)

0	1	0	1
1	0	1	0
d	d	d	d
1	0	d	d

Dez.	$x_4x_3x_2x_1$	f
0	0 0 0 0	0
1	0 0 0 1	1
2	0 0 1 0	1
3	0 0 1 1	0
4	0 1 0 0	1
5	0 1 0 1	0
6	0 1 1 0	0
7	0 1 1 1	1
8	1 0 0 0	1
9	1 0 0 1	0
10	1 0 1 0	d
11	1 0 1 1	d
12	1 1 0 0	d
13	1 1 0 1	d
14	1 1 1 0	d
15	1 1 1 1	d

Unvollständig definierte Funktionen

- Die vorliegenden d-Werte können nun nach praktischen Erwägungen im Entwurf der Einsstellen- bzw. Nullstellenmenge zugeschlagen werden
- Für n vorliegende d-Stellen gibt es also 2^n Möglichkeiten der Bildung einer vollständig definierten Funktion

x_1, x_2, x_3, x_4

0	1	0	1
1	0	1	0
0	0	0	0
1	0	0	0

Variante 1 von 64

....

x_1, x_2, x_3, x_4

0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	1
1	0	1	1

Variante 64 von 64

Unvollständig definierte Funktionen

- Bei der Zuordnung der d-Werte werden praktischen Erwägungen der Zusammenfassung von Belegungen im KV-Diagramm bzw. allgemeine Minimierungsrandbedingung zur Auswahl einer der möglichen Varianten führen:

x_1, x_2, x_3, x_4

0	1	0	1
1	0	1	0
1	0	1	0
1	0	0	1

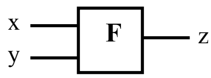
- Beschreibung mit geringerem Aufwand durch Zusammenfassung !

Negative Logik

- Bislang wurde implizit von der Verwendung einer positiven Logik ausgegangen, d.h. den elektrischen Spannungswerten L und H wurden als Konvention die logischen Werte 0 und 1 zugeordnet:

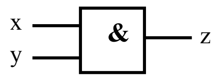
Wahrheitstabelle mit Spannungswerten H und L

x	y	z
L	L	L
L	H	L
H	L	L
H	H	H



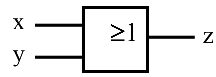
Positive Logik

x	y	z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Negative Logik

x	y	z
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0



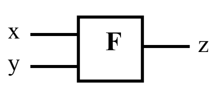
- Sogenannte low-aktive Aus- bzw. Eingänge ($\overline{\text{NMI}}$) bedingen negative Logik

Negative Logik

- Durch die gegebene Dualität vertauscht der Übergang von positiver zu negativer Logik die Rolle von Und- und Oder-Operation
- Ebenso wird aus der NOR-Operation bei positiver Logik eine NAND-Operation bei negativer Logik

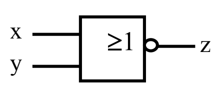
Wahrheitstabelle mit Spannungswerten H und L

x	y	z
L	L	H
L	H	L
H	L	L
H	H	L



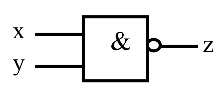
Positive Logik

x	y	z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



Negative Logik

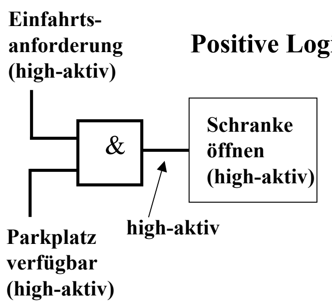
x	y	z
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

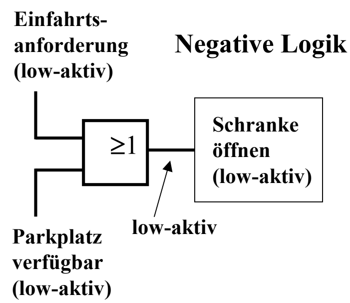


- Der Übergang von high zu low-aktiv bzw. von positiver zu negativer Logik eines Aus- bzw. Eingangs erfordert eine entsprechende Negation

Negative Logik

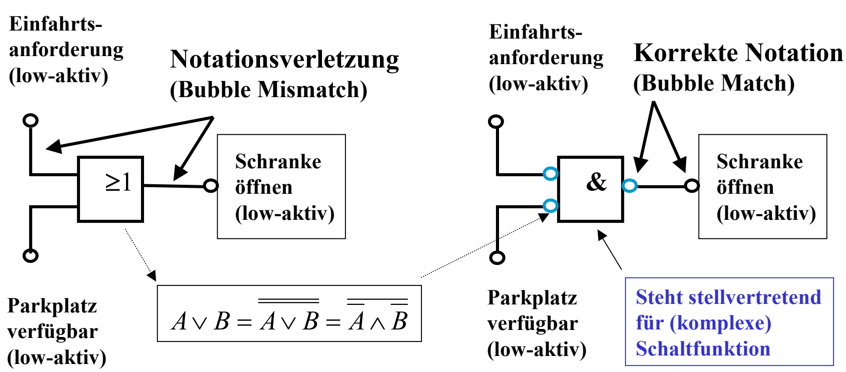
- Der gemischte Entwurf mit positiver und negativer Logik ist fehleranfällig aber nicht immer zu vermeiden
- Mittels einer Notation bzw. Konvention kann das Fehlerrisiko im Entwurf reduziert werden
- Dabei wird die Schaltfunktion weiterhin durch durch positive Logik beschrieben und Ein- bzw. Ausgänge, die low-aktiv sein sollen explizit durch ein Negationssymbol (Bubble) gekennzeichnet und negiert werden
- **Beispiel Parkhaus:**





Negative Logik

- **Fortsetzung des Beispiels Parkhaus:**



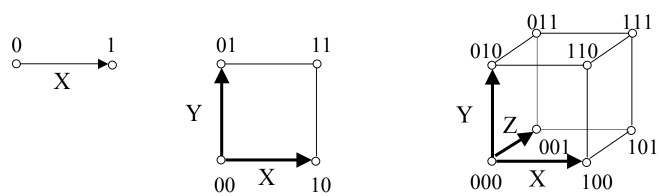
- Ein- bzw. Ausgänge negativer Logik werden durch Bubbles gekennzeichnet
- Sie müssen negiert werden, damit die Gatterlogik der Schaltfunktion in positiver Logik ausgeführt werden kann (*Bubble Match*)
- Notation ist Hilfsmittel ! (Minimalere Lösungen möglich)

Weitere Beschreibungsformen

- Zusätzlich zu den bislang betrachteten Darstellungsformen von Booleschen Funktion sollen im folgenden zwei weitere Möglichkeiten kurz aufgezeigt werden
- **Problem bisheriger Darstellungen**:
  - Schlechte Eignung zur Verarbeitung in Rechnern
  - Mangelnde Effizienz der Darstellung
- Exponentieller Aufwand bei der Darstellung von Funktionen
- Effizienzproblem bei Anwendung von Operationen
- Besonders wichtig für rechnergestützten Entwurf größerer Funktionen
- Zwei relevante Darstellungsformen:
  - Boolesche Würfel
  - Binary Decision Diagrams

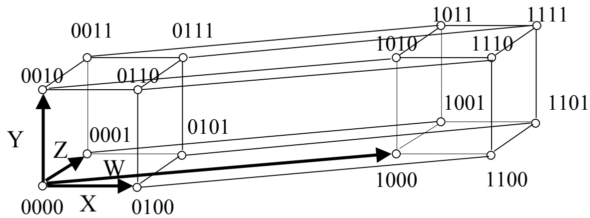
Boolesche Würfel

- Üblicherweise versteht man unter einem Würfel ein solides Objekt mit sechs quadratischen Seitenflächen und acht Ecken
- Dieses Modell kann auf andere Dimensionen verallgemeinert werden
- Ein nulldimensionaler Würfel ist ein Punkt
- Ein eindimensionaler Würfel ist eine Linie mit zwei Ecken
- Ein zweidimensionaler Würfel ist eine Fläche mit vier Ecken
- Bei Dimensionen größer als drei wird von einem Hyperwürfel gesprochen

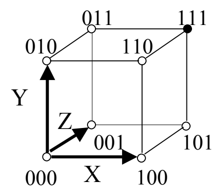


Boolesche Würfel

- Beispiel eines Hyperwürfels für vier Dimensionen:



- Ein Würfel dient zur Darstellung eines Produktterms
- Entsprechend der vorgegebenen Zuordnung werden die entsprechenden Ecken des Würfels gefüllt (f=1) oder ungefüllt (f=0) dargestellt:



f(1,1,1)=1

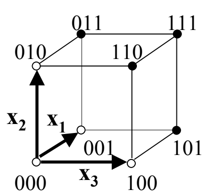
Boolesche Würfel

- Korrespondenz der Würfeldarstellung zum KV-Diagramm:

$$C_{out} = BC_{in} + AC_{in} + AB$$

bzw.

$$y = x_1 x_3 + x_2 x_3 + x_2 x_1$$



			x_1	x_1	
		0	0	1	0
x_2		0	1	1	1
				x_3	x_3

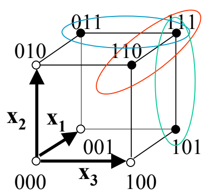
Boolesche Würfel

- Belegungskorrespondenz in Würfeldarstellung bzw. im KV-Diagramm:

$$C_{out} = BC_{in} + AC_{in} + AB$$

bzw.

$$y = x_1 x_3 + x_2 x_3 + x_2 x_1$$

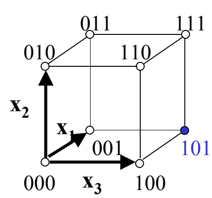


		x_1	x_1	
	0	0	1	0
x_2	0	1	1	1
			x_3	x_3

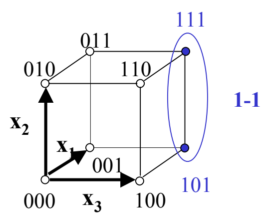
Digitaltechnik
Grundlagen der Booleschen Algebra

Boolesche Würfel

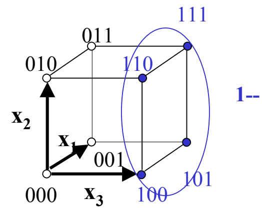
- Demnach entspricht eine aktive Ecke einem Minterm:



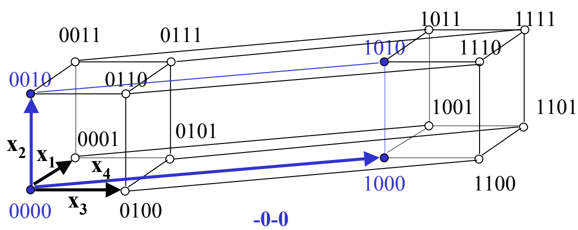
- Eine Kante impliziert eine redundante Variable:



- Eine Fläche impliziert zwei redundante Variable :



- Verallgemeinerung auf vier Dimensionen:



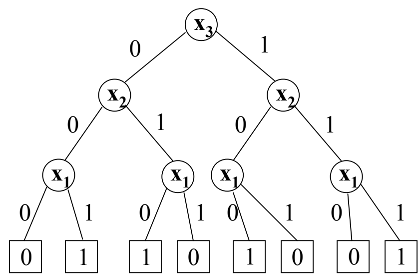
- Würfel eignen sich zur Darstellung und Minimierung von Funktionsbündeln
- Ein Würfel kann dargestellt werden als ein n+m-dimensionaler Vektor:

$$c = (x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n) \quad mit \quad x_i \in \{0,1,-\} \ und \ y_i \in \{0,1\}$$

- Der n-dimensionale Teilvektor heißt Eingabewürfel, der m-dimensionale Teilvektor Ausgabewürfel
- Mit – werden Variablen des Eingabewürfels gekennzeichnet, die durch Zusammenfassungen nicht im Produktterm enthalten sind
- Die Anzahl dieser nicht enthaltenen Variablen wird als Dimension des Würfels bezeichnet
- Mit y_i=1 wird im Ausgabewürfel gekennzeichnet, ob der Produktterm zur Funktion beiträgt
- Bei Einzelfunktionen kann die Darstellung auf Würfel mit f(x)=1 beschränkt werden
- Durch systematische Operationen auf Würfeln wird für zweistufige disjunktive Formen eine Minimierung vorgenommen [Eschermann 92]

- Zur rechnergestützte Manipulation wird über die vorgestellten Würfel hinaus eine effiziente Möglichkeit der Funktionsrepräsentation benötigt
- Gemäß dem Entwicklungssatz kann eine Schaltfunktion nach ihren Variablen entwickelt werden, bis die Kofaktoren nur noch Konstante sind
- Es resultiert ein Binärbaum:

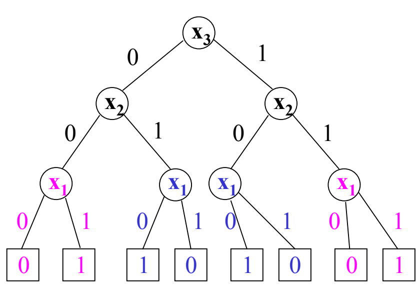
j	$x_3x_2x_1$	f
0	0 0 0	0
1	0 0 1	1
2	0 1 0	1
3	0 1 1	0
4	1 0 0	1
5	1 0 1	0
6	1 1 0	0
7	1 1 1	1

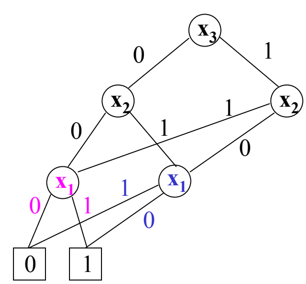


Binary-Decision-Diagrams

Digitaltechnik
Grundlagen der Booleschen Algebra

- Der resultierende Entscheidungsbaum kann vereinfacht werden
- Es existieren gleiche Unterbäume, die zusammengefasst werden können:



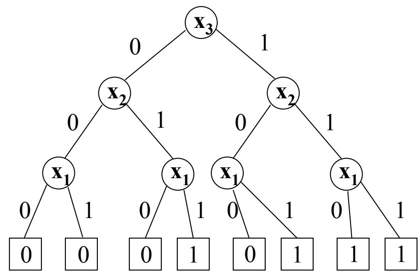


- Aufwandseinsparung, dadurch, dass gemeinsame Teilbäume nur einmal dargestellt werden und die Aufspaltung nach einer Variablen x_i unterbleibt, wenn die darzustellende Teilfunktion unabhängig von x_i ist

Binary-Decision-Diagrams

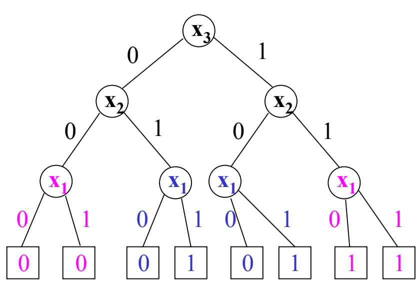
- Anderes Beispiel einer Funktion, die immer 1 ist, wenn mindestens zwei Eingangsvariablen 1 sind:

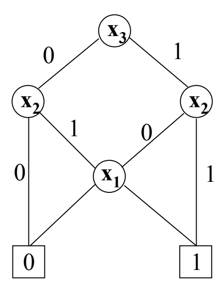
j	$x_3x_2x_1$	f
0	0 0 0	0
1	0 0 1	0
2	0 1 0	0
3	0 1 1	1
4	1 0 0	0
5	1 0 1	1
6	1 1 0	1
7	1 1 1	1



Binary-Decision-Diagrams

- Vereinfachung des Entscheidungsbaumes:
- Es existieren Unterbäume, die unabhängig von x_1 sind





- Zwei gleiche Unterbäume können zusammengefasst werden
- Alle gleichen Blätter können zusammengefasst werden
- Resultat: Binärer Graph der **B**inary **D**ecision **D**iagram (BDD) genannt wird

Binary-Decision-Diagrams

- Die BDD Darstellung erlaubt prinzipiell eine speichereffizientere Repräsentation und aufwandsgünstigere Repräsentation [Eschermann 92]
- Von Bryant 1986 zur Darstellung Boolescher Funktionen eingesetzt
- Bezüge zurückgehend bis zu den grundlegenden Arbeiten von Shannon (Relaiskontaktnetze, vierziger Jahre)
- Signifikanter Einfluss auf Logiksynthese sowie Logikverifikation etc.
- Zum Stand der Technik verbreitete Verwendung in CAD-Werkzeugen
- **Problem 1:** Zahlreiche Varianten von BDDs, z.B. durch Entwicklungs-reihenfolge möglich
- **Problem 2:** Resultierende BDD-Größe abhängig von der gewählten Variablenreihenfolge
- **Eine Lösung zu Problem 1**: **R**educed **O**rdered **B**inary **D**ecision **D**iagrams (OBDDs)
- **Eine Lösung zu Problem 2**: Heuristische Bestimmung günstiger Entwicklungsreihenfolgen, z.B. Gewichtsmethode, ...

⇒ Vertiefungsveranstaltungen