Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ
Series A. I. Mathematica
Volumen 3, 1977, 277-300

ZUR KORREKTHEIT ELLIPTISCHER FASTLINEARER GEMISCHTER RANDWERTAUFGABEN IN $\boldsymbol{R}^2$

VEIKKO T. PURMONEN

Einleitung

In dieser Arbeit untersuchen wir, in einzuführendem Sinne, die Korrektheit nichtlinearer gemischter Randwertaufgabe

$$\begin{cases} Au + \mathscr{A}(u) = f & \text{in } \Omega \\ B_j^{\pm} u + \mathscr{B}_j^{\pm}(u) = g_j^{\pm} & \text{auf } \Gamma_{\pm}, \end{cases}$$

wobei Ω ein glattes Gebiet des euklidischen Raumes $\boldsymbol{R}^2$ mit dem Rand $\Gamma = \bar{\Gamma}_+ \cup \bar{\Gamma}_-$ ist. Unsere Aufgabe wird als fastlinear bezeichnet, weil ihre Nichtlinearität gering ist.

Die allgemeine Aufgabenstellung führen wir in I aus (Aufgabe ($\mathscr{F}\,bd$)). Die Lösungsmethode beruht, insbesondere die Nichtlinearität betreffend, auf elliptischen fastlinearen Abbildungen in (komplexen) Hilberträumen. Diese Abbildungen führen wir zu Beginn von II ein. Sie sind Spezialfälle der im Sinne von A. V. Babin [2] quasilinearen Abbildungen in (reellen) Banachräumen; die Hilbertraum-Situation bringt jedoch sowohl einige Vereinfachungen als auch weitere Züge mit. Wir stellen ferner in II eine elliptische fastlineare Aufgabe in Hilberträumen (Aufgabe ($\mathscr{F}$)) und untersuchen dann ihre Lösbarkeit von der Korrektheitsforderung ausgehend.

In III zeigen wir zuerst, daß die da genau zu formulierende gemischte Randwertaufgabe ($\mathscr{F}\,bd$) unter gewissen Voraussetzungen fastlinear und elliptisch ist. Dann können wir Aufgabe ($\mathscr{F}\,bd$) als eine Realisierung von Aufgabe ($\mathscr{F}$) lösen. Am Schluß finden sich einige ergänzende Bemerkungen, enthaltend auch ein Beispiel über die Nichtelliptizität quasilinearer, parametrisch elliptischer gemischter Randwertaufgabe.

Danksagung. Der Emil Aaltonen -Stiftung bin ich wegen finanzieller Unterstützung zu großem Dank verpflichtet.

doi:10.5186/aasfm.1977.0322

I. Allgemeine Aufgabenstellung

1. Grundberiffe und Bezeichnungen

1.1. Für einen Multiindex $p=(p_1, \ldots, p_n)\in \boldsymbol{N}^n$ setzen wir $|p|:=p_1+\ldots+p_n$, $\xi^p:=\xi_1^{p_1}\ldots\xi_n^{p_n}$ für $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)\in \boldsymbol{R}^n$ und $D^p:=D_1^{p_1}\ldots D_n^{p_n}$ mit $D_k=-i\ \partial/\partial x_k$.

1.2. Ein beschränktes Gebiet $\Omega\subset \boldsymbol{R}^n$ $(n\geqq 2)$ heißt glatt, falls sein Rand Γ eine $(n-1)$-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit ist, d.h. eine C^∞-Koordinatenüberdeckung (einen Atlas) besitzt. Wir setzen voraus, daß der Rand Γ glatt zergelegt ist: Es gilt $\Gamma=\Gamma_+\cup\Gamma_-\cup\Gamma_0$ für offene (und zusammenhängende) Γ_+ und Γ_- mit $\Gamma_+\cap\Gamma_-=\emptyset$ derart, daß $\Gamma_0=\bar{\Gamma}_+\cap\bar{\Gamma}_-$ eine $(n-2)$-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit ist.

Für alle $s\in \boldsymbol{R}$ $(s\geqq 0)$ führen wir die (komplexen) Sobolevräume $H^s(\Omega)$, $H^s(\Gamma)$ und $H^s(\Gamma_\pm)$ ein und bezeichnen ihre Skalarprodukte und entsprechenden Normen mit $(\cdot|\cdot)_{s,\Omega}$ bzw. $\|\cdot\|_{s,\Omega}$, usw.; speziell gilt $H^0(\Omega)=L^2(\Omega)$. Der Spuroperator (der Ordnung 0) sei mit γ_0 bezeichnet. (Wegen der expliziten Definitionen siehe man J. L. Lions—E. Magenes [9], Kap. 1; vgl. auch [15].)

1.3. Eine Funktion heiße glatt, falls sie eine C^∞-Funktion oder eine Hölderfunktion mit hinreichend großem Exponent ist (vgl. [1], S. 9—12). Ist $k\in \boldsymbol{N}$, so gilt $H^s(\Omega)\subset C^k(\bar{\Omega})$ für $s>k+n/2$; deshalb kann man mit jedem $u\in H^s(\Omega)$ die Funktion $\partial_k(u)\colon \Omega\to \boldsymbol{C}^{(k)}$ mit den Komponenten $D^\alpha u$, $|\alpha|\leqq k$, verknüpfen, wobei $(k):=\sum_{|\alpha|\leqq k} 1$ ist. Daher ist etwa für eine in $\bar{\Omega}\times \boldsymbol{C}^{(k)}$ definierte Funktion a der Ausdruck $a(x, \partial_k(u))$ stets wohlerklärt für $u\in H^s(\Omega)$ mit $s>k+n/2$.

1.4. Von nun an sei ein glattes Gebiet Ω in $\boldsymbol{R}^2$ mit glatt zerlegtem Rand Γ fixiert. In diesem Fall besteht die Menge $\Gamma_0=\bar{\Gamma}_+\cap\bar{\Gamma}_-$ also aus zwei Punkten, die den Rand Γ zerlegen.

2. Aufgabe $(\mathscr{F}bd)$

2.1. Es sei

$$A = A(x, D) = \sum_{|p|\leqq 2m} a_p(x)D^p$$

ein linearer Differentialoperator der Ordnung $2m$ mit $m\geqq 1$, definiert in Ω, und für $j=0, \ldots, m-1$ seien

$$B_j^\pm = B_j^\pm(x, D) = \sum_{|p|\leqq m_j^\pm} b_{jp}^\pm(x)\gamma_0 D^p$$

lineare Randoperatoren der Ordnungen $m_j^\pm$ mit $0\leqq m_j^\pm\leqq 2m-1$, definiert auf $\Gamma_\pm$. Vorausgesetzt sei, daß $a_p\in C^\infty(\bar{\Omega})$ und $b_{jp}^\pm\in C^\infty(\bar{\Gamma}_\pm)$ gilt; wir können tatsächlich auch $b_{jp}^\pm\in C^\infty(\Gamma)$ annehmen.

Weiter sei $\mathscr{A}$ ein nichtlinearer Differentialoperator der Ordnung $2m-1$ in Ω und $\mathscr{B}_j^{\pm}$, $j=0, \ldots, m-1$, nichtlineare Randoperatoren der Ordnungen $m_j^{\pm}-1$ auf $\Gamma_{\pm}$ derart, daß die Beziehungen

$$\mathscr{A}(u) = \mathscr{A}(x, D)(u) = a\big(x, \partial_{2m-1}(u)\big)$$

und

$$\mathscr{B}_j^{\pm}(u) = \mathscr{B}_j^{\pm}(x, D)(u) = b_j^{\pm}\big(x, \gamma_0 \partial_{m_j^{\pm}-1}(u)\big)$$

(z. B. für $u \in H^{2m}(\Omega)$) mit wie oben glatten Funktionen a und $b_j^{\pm}$ gelten; hierbei ist $\gamma_0 \partial_{m_j^{\pm}-1}(u)$ natürlicherweise definiert.

2.2. Die in dieser Arbeit zu betrachtende Aufgabe formulieren wir jetzt folgendermaßen:

Aufgabe ($\mathscr{F}$ *bd*). *Gegeben seien Funktionen*

$$f \in H^{s-2m}(\Omega)$$

und

$$g_j^{\pm} \in H^{s-m_j^{\pm}-1/2}(\Gamma_{\pm}), \quad j=0, \ldots, m-1.$$

Untersucht ist die Lösbarkeit der Aufgabe

$$\left\{\begin{array}{ll} Au+\mathscr{A}(u)=f & \text{in } \Omega \\ B_j^{\pm}u+\mathscr{B}_j^{\pm}(u)=g_j^{\pm} & \text{auf } \Gamma_{\pm}, \quad j=0, \ldots, m-1 \end{array}\right. \tag{2.1}$$

in folgendem Sinne:

(i) *Aufgabe (2.1) soll für eine „hinreichend umfangreiche“ Menge $\mathscr{V}$ der Funktionen f und $g_j^{\pm}$ lösbar in einer Menge $\mathscr{U} \subset H^s(\Omega)$ sein;*

(ii) *Durch Einschränkung auf eine Teilmenge von $\mathscr{U}$ kann man die Eindeutigkeit von Lösungen der Aufgabe (2.1) gewinnen;*

(iii) *„Beliebig kleine“ Änderungen in den Anfangsbedingungen sollen nur „beliebig kleine“ Änderungen in der Lösung verursachen.*

Mit anderen Worten, wir untersuchen die Korrektheit der Aufgabe (1.1) in dem später durch Präzisierung der Forderungen (i)—(iii) zu definierenden Sinne.

Unser Begriff der Korrektheit läßt sich aus den allgemeinen Prinzipien der Hadamardschen Korrektheit herleiten und ist mit dem Begriff der Tihonovschen Korrektheit verwandt (man siehe J. Hadamard [5], §§ 15—27, M. M. Lavrentiev [7], § 1, A. N. Tihonov—V. K. Ivanov—M. M. Lavrent'ev [18]; vgl. auch F. John [6], § 4.5, H. M. Lieberstein [8], Kap. 5).

II. Elliptische fastlineare Aufgaben in Hilberträumen

3. Vorbemerkungen

3.1. Für zwei (komplexe) Banachräume X und Y sei $\mathscr{L}(X; Y)$ der Banachraum der linearen Abbildungen $X \to Y$.

Es sei $L \in \mathscr{L}(X; Y)$. Mit $\mathscr{N}(L)$ bezeichnen wir den Kern, mit $\mathscr{R}(L)$ die Wertemenge des Operators L; $\alpha(L) = \dim \mathscr{N}(L)$ sei die Dimension von $\mathscr{N}(L)$ und $\beta(L) = \operatorname{codim} \mathscr{R}(L)$ der Defekt von $\mathscr{R}(L)$ in Y. Als Index von L definiert man dann die Zahl $\varkappa(L) := \alpha(L) - \beta(L)$, sofern mindestens eine von den beiden Zahlen $\alpha(L)$ und $\beta(L)$ endlich ist (vgl. [4], S. 102).

3.2. Wir sagen, daß zwei separable (komplexe) Hilberträume H und H_0 ein Raumpaar $[H, H_0]$ bilden, falls es eine kompakte Einbettung $H \to H_0$ gibt.

3.3. Sind $\mathscr{M}$ und $\mathscr{N}$ zwei Teilräume eines Hilbertraumes H, so bezeichnen wir ihre orthogonale direkte Summe mit $\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}$; für einen abgeschlossenen Teilraum $\mathscr{N}$ gilt dann $H = \mathscr{N} \oplus \mathscr{N}^{\perp}$, wobei $\mathscr{N}^{\perp}$ das orthogonale Komplement von $\mathscr{N}$ ist.

4. Elliptische fastlineare Abbildungen

4.1. Es seien H, H_0 und Π separable Hilberträume, deren Skalarpodukte mit $(\cdot|\cdot)$, $(\cdot|\cdot)_0$ bzw. $((\cdot|\cdot))$ und entsprechende Normen mit $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_0$ bzw. $|||\cdot|||$ bezeichnet werden. Über die Räume H und H_0 setzen wir voraus, daß sie ein Raumpaar bilden.

Wir setzen

Definition 4.1. *Eine Abbildung*

$$T : H \to \Pi$$

heißt fastlinear bezüglich des Raumpaars $[H, H_0]$, *falls* T *eine Abbildung der Gestalt*

$$T(u) = Lu + S(u), \qquad u \in H,$$

so ist, daß gilt:

1) $L \in \mathscr{L}(H; \Pi)$,
2) $S \colon H \to \Pi$ *genügt der Lipschitzbedingung*

$$|||S(u) - S(v)||| \leqq C(\|u\|_0, \|v\|_0) \|u - v\|_0, \qquad u, v \in H. \tag{4.1}$$

Dabei haben wir die auch im folgenden oft vorkommende Bezeichnung $C(.\,, \ldots)$ für eine nichtnegative Funktion reeller Veränderlichen mit der Eigenschaft benutzt, daß sie beschränkt in beschränkten Mengen bleibt.

Definition 4.2. *Eine bezüglich des Raumpaars* $[H, H_0]$ *fastlineare Abbildung*

$$T = L+S: H \to \Pi$$

heißt elliptisch, falls ihr linearer Teil L *ein Fredholmoperator (Noetheroperator) ist, d. h. falls gilt*

$$\alpha(L) < \infty, \qquad \beta(L) < \infty.$$

Bemerkung 4.3. a) $\mathscr{R}(L)$ ist abgeschlossen; ein Fredholmoperator in Banachräumen ist nämlich normal lösbar (vgl. [4], S. 101—103).

b) $\beta(L) = \dim \mathscr{R}(L)^{\perp}$.

5. Elliptische fastlineare Aufgabe $(\mathscr{F})$

Eine bezüglich des Raumpaars $[H, H_0]$ fastlineare Abbildung $T: H \to \Pi$ sei elliptisch. Wir stellen dann

Aufgabe $(\mathscr{F})$. *Untersucht ist, für welche* $h \in \Pi$ *die Gleichung*

$$T(u) = h \tag{5.1}$$

lösbar in H *in folgendem Sinne der Korrektheit ist:*

Gesucht ist eine derartige Schar der Paare von Teilmengen von Π *und* H, *daß für sie Gleichung (5.1) korrekt ist, d. h. im gewöhnlichen Sinne lösbar wird und der Forderung der stetigen Abhängigkeit genügt.*

6. Vorbereitende Überlegungen

Um die Lösbarkeit der Aufgabe $(\mathscr{F})$ zu untersuchen und das Resultat explizit zu formulieren gehen wir von einigen Hilfssätzen aus; die nötigen Beweise werden in § 8 durchgeführt.

6.1. Wir bezeichnen den von einer Menge $\mathscr{M} \subset H$ aufgespannten abgeschlossenen Teilraum von H mit $[\mathscr{M}]$.

Für den Operator L setzen wir

$$\alpha_0 := \alpha(L), \qquad \beta_0 := \beta(L), \qquad \varkappa_0 := \varkappa(L).$$

Es sei $(e_k) \subset H$ eine orthonormale Basis von H, die man so wählen kann, daß

$$\mathscr{N}(L) = [e_k]_{k=1}^{\alpha_0} := [\{e_k\}_{k=1}^{\alpha_0}]$$

gilt. Die abgeschlossenen Teilräume $\mathscr{N}_\alpha$ und $\mathscr{N}_{-\alpha}$ werden jetzt durch

$$\mathscr{N}_\alpha := [e_k]_{k=1}^{\alpha} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathscr{N}_{-\alpha} := \mathscr{N}_\alpha^{\perp} = [e_k]_{k=\alpha+1}^{\infty}$$

für alle $\alpha \in \boldsymbol{N}_+$ erklärt; insbesondere gilt also $\mathcal{N}_{\alpha_0} = \mathcal{N}(L)$. Die entsprechenden Orthoprojektoren seien

$$Q_\alpha : H \to \mathcal{N}_\alpha \quad \text{bzw.} \quad Q_{-\alpha} = I_H - Q_\alpha : H \to \mathcal{N}_{-\alpha},$$

wobei I_H die identische Abbildung in H ist.

Dann hat man

Lemma 6.1. a) $\|Q_\alpha\| = 1$, $\|Q_{-\alpha}\| = 1$.

b) *Es gibt eine positive Funktion* $\varepsilon(\alpha)$ *mit den Eigenschaften*

$$\lim_{\alpha \to \infty} \varepsilon(\alpha) = 0$$

und

$$\|Q_{-\alpha} u\|_0 \leqq \varepsilon(\alpha) \|Q_{-\alpha} u\|, \qquad u \in H.$$

6.2. Es gilt (man siehe J. Peetre [12])

Satz 6.2. *Es seien* E, F *und* G *reflexive Banachräume, und es gebe eine kompakte Einbettung* $E \to F$. *Für einen Operator* $\mathscr{C} \in \mathscr{L}(E; G)$ *sind die folgenden Aussagen (i) und (ii) dann äquivalent:*

(i) *Die Wertemenge* $\mathscr{R}(\mathscr{C})$ *ist abgeschlossen in* G *und* $\dim \mathcal{N}(\mathscr{C}) < \infty$.

(ii) *Es besteht die Ungleichung*

$$\|u\|_E \leqq C(\|\mathscr{C} u\|_G + \|u\|_F), \qquad u \in E,$$

mit einer positiven Konstanten C.

Daraus ergibt sich

Lemma 6.3. *Es existiert eine Konstante* $C_0 > 0$ *derart, daß*

$$\|u\| \leqq C_0 |||Lu|||, \qquad u \in \mathcal{N}_{-\alpha},$$

mit jedem $\alpha \geqq \alpha_0$ *gilt.*

Die Einschränkung des Operators L auf $\mathcal{N}_{-\alpha}$, $\alpha \geqq \alpha_0$, besitzt also den inversen Operator, der mit $L_{-\alpha}^{-1}$ bezeichnet werde,

$$L_{-\alpha}^{-1} : L(\mathcal{N}_{-\alpha}) \to \mathcal{N}_{-\alpha}.$$

Wir haben auch (vgl. [4], S. 104)

Lemma 6.4. *Für jedes* $\alpha \geqq \alpha_0$ *ist* $L(\mathcal{N}_{-\alpha})$ *ein abgeschlossener Teilraum von* Π *mit dem Defekt* $\alpha - \varkappa_0$, *d. h.*

$$\dim L(\mathcal{N}_{-\alpha})^\perp = \alpha - \varkappa_0.$$

Es sei $P_{-\alpha} : \Pi \to L(\mathcal{N}_{-\alpha})$ der Orthoprojektor von Π auf $L(\mathcal{N}_{-\alpha})$, so daß $\|P_{-\alpha}\| = 1$ ist.

6.3. Für $\alpha \in N_+$ und für positive Zahlen r, r_-, ϱ erklären wir die abgeschlossenen Kugeln

$$B(r) := \{u \in H \mid \|u\| \leqq r\} \subset H,$$

$$B_\alpha(r) := \{u \in \mathcal{N}_\alpha \mid \|u\| \leqq r\} \subset \mathcal{N}_\alpha,$$

$$B_{-\alpha}(r_-) := \{u \in \mathcal{N}_{-\alpha} \mid \|u\| \leqq r_-\} \subset \mathcal{N}_{-\alpha},$$

$$\Sigma_{-\alpha}(\varrho) := \{h \in L(\mathcal{N}_{-\alpha}) \mid |||h||| \leqq \varrho\} \subset L(\mathcal{N}_{-\alpha})$$

und den Zylinder

$$Z_{-\alpha}(\varrho) := \Sigma_{-\alpha}(\varrho) + L(N_{-\alpha})^\perp \subset \Pi.$$

Nun gilt

Satz 6.5. *Gegeben seien $r > 0$ und $r_- > 0$. Dann gibt es $\alpha(r, r_-) \in N_+$ so, daß für jedes $\alpha \geqq \alpha(r, r_-)$ die Abbildung T die folgenden Eigenschaften hat:*

(i) *Für alle $w, z \in B(r)$ und alle $u, v \in B_{-\alpha}(r_-)$ besteht die Ungleichung*

$$\|u - v\| \leqq C(r, r_-)\|w - z\| + C|||P_{-\alpha}T(w+u) - P_{-\alpha}T(z+v)|||; \tag{6.1}$$

(ii) *Die Einschränkung von T auf die Menge $w + B_{-\alpha}(r_-)$,*

$$T: w + B_{-\alpha}(r_-) \to T(w + B_{-\alpha}(r_-)) \subset \Pi,$$

ist ein Homöomorphismus für alle $w \in B(r)$;

(iii) *Für alle $w \in B(r)$ gilt*

$$P_{-\alpha}(T(w) + Z_{-\alpha}(\varrho)) \subset P_{-\alpha}T(w + B_{-\alpha}(r_-))$$

mit $\varrho \leqq r_-/(2C_0)$.

Folgerung 6.6. *Für gegebene $\varrho > 0$ und $r > 0$ existieren $r_-(\varrho, r) > 0$ und $\alpha(\varrho, r, r_-) \in N_+$ derart, daß mit $r_- \geqq r_-(\varrho, r)$, $\alpha \geqq \alpha(\varrho, r, r_-)$*

$$\Sigma_{-\alpha}(\varrho) \subset P_{-\alpha}T(w + B_{-\alpha}(r_-))$$

für alle $w \in B(r)$ ist.

Bemerkung 6.7. *Die Abbildung $S: H \to \Pi$ genüge statt (4.1) der gleichmäßigen Lipschitzbedingung*

$$|||S(u) - S(v)||| \leqq C\|u - v\|_0, \qquad u, v \in H. \tag{6.2}$$

Dann gibt es $\alpha' \in N_+$ so, daß für jedes $\alpha \geqq \alpha'$ gilt:

(i) *Für alle $w, z \in H$ und alle $u, v \in \mathcal{N}_{-\alpha}$ ist die Abschätzung*

$$\|u - v\| \leqq C(\|w - z\| + |||P_{-\alpha}T(w+u) - P_{-\alpha}T(z+v)|||) \tag{6.3}$$

erfüllt;

(ii) *Die Einschränkung von T auf $w + \mathcal{N}_{-\alpha}$,*

$$T: w + N_{-\alpha} \to T(w + N_{-\alpha}) \subset \Pi,$$

ist ein Homöomorphismus für alle $w \in H$;

(iii) *Für alle $w \in H$ ist*

$$P_{-\alpha}T(w + \mathcal{N}_{-\alpha}) = L(\mathcal{N}_{-\alpha}).$$

7. Lösung der Aufgabe ($\mathscr{F}$)

7.1. Zuerst leiten wir für die Existenz einer Lösung der Gleichung (5.1) eine Bedingung her, die der bekannten Orthogonalitätsbedingung des linearen Falls entspricht.

Es sei also $h \in \Pi$ vorgegeben. Dann gilt $h \in Z_{-\alpha}(\varrho)$ mit geeignetem ϱ, und aus Folgerung 6.6 und Satz 6.5 ergibt sich, daß die Gleichung

$$P_{-\alpha} T(u) = P_{-\alpha} h \tag{7.1}$$

eindeutig lösbar in der Menge $w + B_{-\alpha}(r_-)$ mit gegebenem $w \in B(r)$ für hinreichend große r_- und α ist. Daraus folgt

$$T(u) - h \in L(\mathscr{N}_{-\alpha})^{\perp},$$

so daß $u \in w + B_{-\alpha}(r_-)$ eine Lösung der Gleichung

$$T(u) = h$$

genau dann ist, wenn

$$(I_{\Pi} - P_{-\alpha})\big(T(u) - h\big) = 0$$

gilt.

Die mit den gegebenen $h \in Z_{-\alpha}(\varrho)$ und $w \in B(r)$ verknüpfte Lösung von (7.1) werden wir mit $u_{-\alpha, w}(h)$ bezeichnen. Somit besitzen die Gleichungen

$$T(u) = h, \qquad Q_{\alpha} u = w \tag{7.2}$$

eine Lösung $u \in B_{\alpha}(r) + B_{-\alpha}(r_-)$, falls die Beziehung

$$J\big(T(u_{-\alpha, w}(h)) - h\big) = 0$$

besteht, wobei

$$J : L(\mathscr{N}_{-\alpha})^{\perp} \to \boldsymbol{C}^{\alpha - \varkappa_0}$$

ein isometrischer Isomorphismus ist.

Definieren wir nun eine Funktion

$$\Phi_{\alpha} \colon B_{\alpha}(r) \times Z_{-\alpha}(\varrho) \to \boldsymbol{C}^{\alpha - \varkappa_0}$$

durch

$$\Phi_{\alpha}(w, h) := J\big(T(u_{-\alpha, w}(h)) - h\big),$$

so erhält die Bedingung für die Existenz der Lösung von (7.2) schließlich die Gestalt

$$\Phi_{\alpha}(w, h) = 0.$$

7.2. Die Funktion Φ_{α} wird charakterisiert durch

Lemma 7.1. *Mit gegebenen $\varrho > 0$ und $r > 0$ seien $r_-(\varrho, r) > 0$ und $\alpha(\varrho, r, r_-) \in N_+$ wie in Folgerung 6.6. Dann hat die Funktion*

$$\Phi_{\alpha} \colon B_{\alpha}(r) \times Z_{-\alpha}(\varrho) \to \boldsymbol{C}^{\alpha - \varkappa_0}$$

für $r_- \geqq r_-(\varrho, r)$ und $\alpha \geqq \alpha(\varrho, r, r_-)$ folgende Eigenschaften:

(i) *Für alle* $w, z \in B_\alpha(r)$ *und alle* $h, g \in Z_{-\alpha}(\varrho)$ *gilt*

$$|\Phi_\alpha(w, h) - \Phi_\alpha(z, g)| \leqq C(r, r_-)(\|w-z\| + |||h-g|||);$$

(ii) *Für jedes* $w \in B_\alpha(r)$ *und jedes* $\mu \in \boldsymbol{C}^{\alpha-\varkappa_0}$ *bildet der Projektor* $P_{-\alpha}$ *die Niveaumenge*

$$\mathscr{S}_{\mu, w}(\varrho) := \{h \in Z_{-\alpha}(\varrho) | \Phi_\alpha(w, h) = \mu\}$$

homöomorph auf die Menge

$$P_{-\alpha}(\mathscr{S}_{\mu, w}(\varrho)) = \Sigma_{-\alpha}(\varrho) \subset L(\mathscr{N}_{-\alpha})$$

ab.

Bemerkung 7.2. *Im Falle von Bemerkung 6.7 läßt sich die Funktion* Φ_α *in* $\mathscr{N}_\alpha \times \Pi$ *für alle* $\alpha \geqq \alpha'$ *erklären, und es gilt:*

(i) *Es besteht die Abschätzung*

$$|\Phi_\alpha(w, h) - \Phi_\alpha(z, g)| \leqq C(\|w-z\| + |||h-g|||)$$

für alle $w, z \in \mathscr{N}_\alpha$ *und alle* $h, g \in \Pi$*;*

(ii) *Der Projektor* $P_{-\alpha}$ *ist ein Homöomorphismus von*

$$\mathscr{S}_{\mu, w} := \{h \in \Pi | \Phi_\alpha(w, h) = \mu\}$$

auf $L(\mathscr{N}_{-\alpha})$ *für jedes* $w \in \mathscr{N}_\alpha$ *und jedes* $\mu \in \boldsymbol{C}^{\alpha-\varkappa_0}$.

Es sei $\mathscr{S}_w(\varrho) := \mathscr{S}_{0, w}(\varrho)$ bzw. $\mathscr{S}_w := \mathscr{S}_{0, w}$ geschrieben.

7.3. Wir geben jetzt die Lösung der Aufgabe ($\mathscr{F}$), formuliert wie folgt:

Satz 7.3. *Mit den Bezeichnungen von Folgerung 6.6 gelte es* $r_- \geqq r_-(\varrho, r)$ *und* $\alpha \geqq \alpha(\varrho, r, r_-)$ *mit vorgegebenen* $\varrho > 0$ *und* $r > 0$. *Dann ist Aufgabe* ($\mathscr{F}$) *korrekt gestellt für die Schar der Mengenpaare*

$$\mathscr{S}_w \subset \Pi, \quad w + B_{-\alpha}(r_-) \subset H, \qquad w \in B_\alpha(r),$$

d. i., für die Gleichungen

$$T(u) = h, \qquad Q_\alpha u = w \tag{7.3}$$

mit gegebenen $h \in Z_{-\alpha}(\varrho)$ *und* $w \in B_\alpha(r)$ *gilt:*

(i) *Es gibt eine Lösung* $u \in B_\alpha(r) + B_{-\alpha}(r_-)$ *für (7.3) genau dann, wenn* $\Phi_\alpha(w, h) = 0$ *ist;*

(ii) *Die Lösung* $u \in B_\alpha(r) + B_{-\alpha}(r_-)$ *von (7.3) ist eindeutig bestimmt;*

(iii) *Für alle* $u, v \in B_\alpha(r) + B_{-\alpha}(r_-)$ *gilt*

$$\|u - v\| \leqq C|||T(u) - T(v)||| + C(r, r_-)\|Q_\alpha u - Q_\alpha v\|.$$

Beweis. Behauptung (i) ergibt sich aus 7.1 und Behauptung (ii) aus Satz 6.5. Sind $u, v \in B_\alpha(r) + B_{-\alpha}(r_-)$, so hat man

$$u = Q_\alpha u + Q_{-\alpha} u \qquad \text{bzw.} \qquad v = Q_\alpha v + Q_{-\alpha} v.$$

Unter Benutzung von Satz 6.5 erhalten wir dann

$$\begin{aligned}\|u-v\| &\leqq \|Q_\alpha u - Q_\alpha v\| + \|Q_{-\alpha} u - Q_{-\alpha} v\| \\ &\leqq \|Q_\alpha u - Q_\alpha v\| + C(r, r_-)\|Q_\alpha u - Q_\alpha v\| \\ &\qquad + C|||P_{-\alpha} T(u) - P_{-\alpha} T(v)||| \\ &\leqq C|||T(u)-T(v)||| + C(r, r_-)\|Q_\alpha u - Q_\alpha v\|.\end{aligned}$$

Um (i) in Satz 7.3 anders zu gestalten führen wir eine orthonormale Basis $(\eta_k)\subset\Pi$ im Raum Π ein, und zwar so gewählt, daß

$$L(\mathcal{N}_{-\alpha})^\perp = [\eta_k]_{k=1}^{\alpha-\varkappa_0}$$

ist. Insbesondere gilt also

$$\mathcal{R}(L)^\perp = L(\mathcal{N}_{-\alpha_0})^\perp = [\eta_k]_{k=1}^{\beta_0}.$$

Hiernach haben wir

Satz 7.4. *Die „verallgemeinerte Orthogonalitätsbedingung"* $\Phi_\alpha(w, h)=0$ *in (i) von Satz 7.3 ist äquivalent der Bedingung*

$$((T(u_{-\alpha, w}(h))|\eta_k)) = ((h|\eta_k)), \qquad k = 1, \ldots, \alpha-\varkappa_0.$$

Bemerkung 7.5. *Im Falle von Bemerkung 6.7 ist Aufgabe* $(\mathcal{F})$ *korrekt gestellt für die Schar der Mengenpaare*

$$\mathcal{S}_w \subset \Pi, \quad w+\mathcal{N}_{-\alpha} \subset H, \qquad w\in\mathcal{N}_\alpha,$$

für alle $\alpha\geqq\alpha'$.

8. Beweise

8.1. *Beweis von Lemma 6.1.* Die erste Behauptung gilt bekanntlich.
Existiere jetzt eine Folge $(v_j)\subset H$ mit

$$\begin{aligned} &\|v_j\| = 1, \\ &v_j\in\mathcal{N}_{-\alpha_j} \quad \text{für ein } \alpha_j \geqq j, \\ &\|v_j\|_0 \geqq \delta \quad \text{für ein } \delta > 0, \ j = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Dann besitzt die Folge (v_j) eine Teilfolge (v_j'), die schwach gegen ein $v\in H$ konvergiert. Speziell gilt also für jedes $k\in \boldsymbol{N}_+$

$$\lim_{j\to\infty} (v_j'|e_k) = (v|e_k),$$

woraus man

$$(v|e_k) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

schließt; deshalb strebt (v_j') schwach gegen 0 in H. Folglich konvergiert (v_j') gegen 0 in H_0, im Widerspruch zu (8.1).

Bemerkung. Die Behauptung ergibt sich wie oben auch daraus, daß eine (orthonormale) Basis eines Hilbertraumes zusammenschrumpfend („shrinking“; man siehe [10], [17], S. 267—279) ist.

8.2. *Beweis von Satz 6.5.*

8.2.1. Bevor wir diesen Satz beweisen, führen wir einige Hilfsbetrachtungen durch.

Ist $\alpha \geqq \alpha_0$, so können wir für $w \in H$ eine Abbildung

$$F_w = F_{\alpha, w}: \mathcal{N}_{-\alpha} \to \mathcal{N}_{-\alpha}$$

durch

$$F_w(u) := L_{-\alpha}^{-1} P_{-\alpha}\big(T(w+u) - T(w)\big), \qquad u \in \mathcal{N}_{-\alpha},$$

definieren. Dann gilt

$$F_w(u) = u + K_w(u),$$

wobei die Abbildung

$$K_w = K_{\alpha, w}: \mathcal{N}_{-\alpha} \to \mathcal{N}_{-\alpha}$$

durch

$$K_w(u) := L_{-\alpha}^{-1} P_{-\alpha}\big(S(w+u) - S(w)\big), \qquad u \in \mathcal{N}_{-\alpha},$$

erklärt wird.

Wir haben jetzt

Lemma 8.1. *Es seien* $r > 0$, $r_- > 0$ *und* $0 < \delta < 1$ *gegeben. Dann existiert* $\alpha(r, r_-, \delta) \in N_+$ *derart, daß mit* $\alpha \geqq \alpha(r, r_-, \delta)$ *die Ungleichungen*

$$\|K_w(u) - K_w(v)\| \leqq \delta \|u - v\| \tag{8.2}$$

und

$$\|K_w(u)\| \leqq \delta \|u\|, \tag{8.3}$$

wobei u *und* v *in* $B_{-\alpha}(r_-)$ *liegen, für alle* $w \in B(r)$ *bestehen.*

Beweis. Mit $\alpha \geqq \alpha_0$ hat man

$$K_w(u) - K_w(v) = L_{-\alpha}^{-1} P_{-\alpha}\big(S(w+u) - S(w+v)\big)$$

und folglich wegen 4.1 und Lemma 6.3

$$\begin{aligned} \|K_w(u) - K_w(v)\| &\leqq C_0 |||S(w+u) - S(w+v)||| \\ &\leqq C(r, r_-) \|u - v\|_0. \end{aligned}$$

Gemäß Lemma 6.1 gibt es $\alpha(r, r_-, \delta) \in N_+$ so, daß

$$\varepsilon(\alpha) C(r, r_-) \leqq \delta$$

für alle $\alpha \geqq \alpha(r, r_-, \delta)$ gilt. Somit erhält man

$$\|K_w(u) - K_w(v)\| \leqq \delta \|u - v\|$$

für diese α, und analog

$$\begin{aligned} \|K_w(u)\| &\leqq C_0 |||S(w+u) - S(w+v)||| \\ &\leqq C(r, r_-) \|u\|_0 \leqq \delta \|u\|. \end{aligned}$$

Lemma 8.2. *Für gegebene* $r>0$ *und* $r_->0$ *gibt es* $\alpha(r, r_-)\in N_+$ *derart, daß mit* $\alpha \geqq \alpha(r, r_-)$ *gilt:*

(i) *Die Einschränkung von* F_w *auf* $B_{-\alpha}(r_-)$ *ist eine bijektive Abbildung*

$$F_w : B_{-\alpha}(r_-) \to B_{-\alpha}(r_-/2)$$

für jedes $w\in B(r)$;

(ii) *Für alle* $w, z\in B(r)$ *und alle* $u, v\in B_{-\alpha}(r_-)$ *ist*

$$\|u-v\| \leqq C(r, r_-)\|w-z\|_0+2\|F_w(u)-F_z(v)\|.$$

Beweis. A. Unter Anwendung von Lemma 8.1 wählen wir

$$\alpha(r, r_-) = \alpha(r, r_-, 1/2).$$

Die Injektivität der Abbildung F_w ergibt sich jetzt aus der Abschätzung

$$\begin{aligned}\|F_w(u)-F_w(v)\| &\leqq \|u-v\|+\|K_w(u)-K_w(v)\| \\ &\leqq (3/2)\|u-v\|.\end{aligned}$$

Um die Surjektivität zu zeigen, sei $x\in B_{-\alpha}(r_-/2)$ gegeben. Hat die Gleichung

$$x = F_w(u) = u+K_w(u)$$

eine Lösung $u\in B_{-\alpha}(r_-)$, so ist

$$u = x-K_w(u),$$

d. h., u ist ein Fixpunkt der Abbildung

$$x-K_w : x+B_{-\alpha}(r_-/2) \to x+B_{-\alpha}(r_-/2).$$

Für diese Abbildung gilt

$$\|(x-K_w)(u)-(x-K_w)(v)\| \leqq (1/2)\|u-v\|,$$

so daß sie kontrahierend ist und folglich, in der Tat, einen Fixpunkt besitzt. Also existiert $u_0\in x+B_{-\alpha}(r_-)$ mit

$$(x-K_w)(u_0) = u_0$$

oder

$$x = u_0+K_w(u_0) = F_w(u_0).$$

B. Mit Hilfe von Lemma 8.1 erhält man

$$\begin{aligned}\|u-v\| &\leqq \|F_w(u)-F_w(v)\|+\|K_w(u)-K_w(v)\| \\ &\leqq \|F_w(u)-F_w(v)\|+(1/2)\|u-v\|,\end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}\|u-v\| &\leqq 2\|F_w(u)-F_w(v)\| \\ &\leqq 2\|F_w(u)-F_z(v)\|+2\|F_w(v)-F_z(v)\|.\end{aligned}$$

Da jetzt

$$\begin{aligned}\|F_w(v)-F_z(v)\| &= \left\|L_{-\alpha}^{-1}P_{-\alpha}\big((S(w+v)-S(z+v))-(S(w)-S(z))\big)\right\| \\ &\leqq C(r, r_-)\|w-z\|_0\end{aligned}$$

ist, so haben wir

$$\|u-v\| \leqq C(r, r_-)\|w-z\|_0+2\|F_w(u)-F_z(v)\|.$$

Bemerkung 8.3. Genügt die Abbildung $S\colon H\to\Pi$ der gleichmäßigen Lipschitzbedingung

$$|||S(u)-S(v)||| \leqq C\|u-v\|_0, \qquad u, v\in H,$$

so existiert $\alpha'\in N_+$ derart, daß mit $\alpha\geqq\alpha'$ gilt:

(i) Für jedes $w\in H$ ist

$$F_w : \mathcal{N}_{-\alpha}\to\mathcal{N}_{-\alpha}$$

eine bijektive Abbildung;

(ii) Es besteht die Ungleichung

$$\|u-v\| \leqq C\|w-z\|_0+2\|F_w(u)-F_z(v)\|$$

für alle $w, z\in H$ und alle $u, v\in\mathcal{N}_{-\alpha}$.

Wie man analog zum Beweis von Lemma 8.1 einsehen kann, gibt es nämlich $\alpha(\delta)\in N_+$ so, daß die Abschätzungen (8.2) und (8.3) für jedes $\alpha\geqq\alpha(\delta)$ und für alle $w\in H$ und alle $u, v\in\mathcal{N}_{-\alpha}$ gelten. Setzt man nun $\alpha':=\alpha(1/2)$, so erhält man die Behauptungen wie diejenigen von Lemma 8.2.

8.2.2. Wir kommen jetzt zum Beweis von Satz 6.5.

A. Es sei $\alpha(r, r_-)\in N_+$ wie in Lemma 8.2. Mit $\alpha\geqq\alpha(r, r_-)$ gilt also

$$\|u-v\| \leqq C(r, r_-)\|w-z\|_0+2\|F_w(u)-F_z(v)\|.$$

Wegen der Identität

$$\begin{aligned}F_w(u)-F_z(v) &= L_{-\alpha}^{-1}P_{-\alpha}\big(T(w+u)-T(z+v)\big)\\ &\quad -L_{-\alpha}^{-1}P_{-\alpha}L(w-z)-L_{-\alpha}^{-1}P_{-\alpha}\big(S(w)-S(z)\big)\end{aligned}$$

folgt daraus

$$\begin{aligned}\|u-v\| &\leqq C(r, r_-)\|w-z\| + C_0C(\|w\|_0, \|z\|_0)\|w-z\|_0\\ &\quad +2C_0|||P_{-\alpha}T(w+u)-P_{-\alpha}T(z+v)|||\\ &\leqq C(r, r_-)\|w-z\| + C|||P_{-\alpha}T(w+u)-P_{-\alpha}T(z+v)|||.\end{aligned}$$

B. Die Behauptung (ii) ergibt sich aus den Ungleichungen

$$\|u-v\| \leqq C|||T(u)-T(v)||| \leqq C(r, r_-)\|u-v\|,$$

die aufgrund von (i) und Definition 4.1 für alle $u, v\in w+B_{-\alpha}(r_-)$ bestehen.

C. Wir wollen nun Behauptung (iii) beweisen. Mit $h\in P_{-\alpha}(Z_{-\alpha}(\varrho))=\Sigma_{-\alpha}(\varrho)$ hat man dann wegen Lemma 6.3

$$\|L_{-\alpha}^{-1}h\| \leqq C_0|||h||| \leqq C_0\varrho \leqq r_-/2$$

für $\varrho\leqq r_-/(2C_0)$, und somit

$$L_{-\alpha}^{-1}h\in B_{-\alpha}(r_-/2).$$

Nach Lemma 8.2 existiert deshalb $u \in B_{-\alpha}(r_-)$ mit

$$L_{-\alpha}^{-1} h = L_{-\alpha}^{-1} P_{-\alpha}\big(T(w+u)-T(w)\big).$$

Folglich ist

$$h \in P_{-\alpha}\big(T(w+B_{-\alpha}(r_-))-T(w)\big).$$

Es gilt also

$$P_{-\alpha}\big(Z_{-\alpha}(\varrho)\big) \subset P_{-\alpha}\big(T(w+B_{-\alpha}(r_-))-T(w)\big)$$

und damit auch

$$P_{-\alpha}\big(T(w)+Z_{-\alpha}(\varrho)\big) \subset P_{-\alpha}T\big(w+B_{-\alpha}(r_-)\big).$$

8.3. *Beweis von Folgerung 6.6.* Es sei $w \in B(r)$. Für $r_- > 0$ hat man dann nach Satz 6.5

$$P_{-\alpha}\big(T(w)+Z_{-\alpha}(\varrho')\big) \subset P_{-\alpha}T\big(w+B_{-\alpha}(r_-)\big)$$

für $\varrho' \leqq r_-/(2C_0)$ und $\alpha \geqq \alpha(r, r_-)$. Nun gilt

$$Z_{-\alpha}(\varrho) \subset T(w)+Z_{-\alpha}(\varrho')$$

für hinreichend großes ϱ', oder genauer gesagt, für $\varrho' \geqq \varrho + |||P_{-\alpha}T(w)|||$, wobei

$$|||P_{-\alpha}T(w)||| \leqq \big(\|L\|+C(r)\big)\|w\| + |||S(0)|||$$

ist. Also, wenn man jetzt

$$r_-(\varrho, r) \geqq 2C_0\big(\varrho + (\|L\|+C(r))\,r + |||S(0)|||\big)$$

wählt, so erhält man

$$P_{-\alpha}\big(Z_{-\alpha}(\varrho)\big) \subset P_{-\alpha}T\big(w+B_{-\alpha}(r_-)\big)$$

für alle $r_- \geqq r_-(\varrho, r)$ und alle $\alpha \geqq \alpha(\varrho, r, r_-)$.

Beweis von Bemerkung 6.7. Wählen wir $\alpha' \in N_+$ gemäß Bemerkung 8.3, so ergeben sich die Behauptungen aus Bemerkung 8.3 in der dem Beweis von Satz 6.5 in 8.2.2 ähnlichen Weise.

8.4. *Beweis von Lemma 7.1.*

A. Zuerst erhält man

$$\begin{aligned}|\Phi_\alpha(w, h)-\Phi_\alpha(z, g)| &= \big|J\big(T(u_{-\alpha, w}(h))-h\big)-J\big(T(u_{-\alpha, z}(g))-g\big)\big| \\ &\leqq \big|\big|\big|T\big(u_{-\alpha, w}(h)\big)-T\big(u_{-\alpha, z}(g)\big)\big|\big|\big| + |||h-g|||.\end{aligned}$$

Schreibt man jetzt

$$u_{-\alpha, w}(h) = w+u, \qquad u \in B_{-\alpha}(r_-),$$

$$u_{-\alpha, z}(g) = z+v, \qquad v \in B_{-\alpha}(r_-),$$

so gilt

$$P_{-\alpha}T(w+u) = P_{-\alpha}h,$$

$$P_{-\alpha}T(z+v) = P_{-\alpha}g,$$

und damit nach Satz 6.5

$$\|u-v\| \leqq C(r, r_-)\|w-z\| + C|||P_{-\alpha}h-P_{-\alpha}g|||.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}|\Phi_\alpha(w,h)-\Phi_\alpha(z,g)| &\leqq |||h-g|||+|||L(w-z)+L(u-v)|||+|||S(w+u)-S(z+v)|||\\ &\leqq |||h-g|||+\|L\|\,(\|w-z\|+\|u-v\|)\\ &\quad +C(r,r_-)(\|w-z\|_0+\|u-v\|_0)\\ &\leqq |||h-g|||+C(r,r_-)\|w-z\|+C(r,r_-)\|u-v\|\\ &\leqq C(r,r_-)(\|w-z\|+|||h-g|||).\end{aligned}$$

B. Aus Satz 6.5 ergibt sich, daß die Einschränkung von $P_{-\alpha}$ auf $T(w+B_{-\alpha}(r_-))$ ein Homöomorphismus ist. Wie man leicht einsieht, gilt

$$\mathscr{S}_w(\varrho)\subset T(w+B_{-\alpha}(r_-)).$$

Daher ist die Einschränkung von $P_{-\alpha}$ auf $\mathscr{S}_w(\varrho)$ und folglich auch auf $\mathscr{S}_{\mu,w}(\varrho)$ ein Homöomorphismus, weil man

$$\mathscr{S}_{\mu,w}(\varrho)=\mathscr{S}_w(\varrho)-J^{-1}\mu$$

hat. Es gilt nämlich

$$\Phi_\alpha(w,h+g)=\Phi_\alpha(w,h)-Jg$$

für $g\in L(\mathscr{N}_{-\alpha})^{\perp}$. Hieraus folgt auch

$$P_{-\alpha}(\mathscr{S}_{\mu,w}(\varrho))=\Sigma_{-\alpha}(\varrho).$$

Beweis von Bemerkung 7.2. Die Behauptungen lassen sich aus Bemerkung 6.7 und aus 7.1 analog zum vorigen Beweis von Lemma 7.1 schließen.

III. Elliptische fastlineare gemischte Randwertaufgaben

9. Elliptische lineare gemischte Randwertaufgaben

9.1. Der lineare Teil der Aufgabe ($\mathscr{F}\,bd$) bildet eine lineare gemischte Randwertaufgabe, und zwar die Aufgabe

$$\text{(9.1)}\qquad \begin{cases} Au=\sum\limits_{|p|\leqq 2m} a_p(x)D^pu=f\\ B_j^{\pm}u=\sum\limits_{|p|\leqq m_j^{\pm}} b_{jp}^{\pm}(x)\gamma_0D^pu=g_j^{\pm}, \qquad j=0,\dots,m-1.\end{cases}$$

Wir bezeichnen die den Hauptteilen der Operatoren A und $B_j^{\pm}$ entsprechenden (charakteristischen) Polynome mit $A_0(x,\xi)$ und $B_{j0}^{\pm}(x,\xi)$, also gilt für $\xi\in\boldsymbol{R}^2$

$$A_0(x,\xi)=\sum_{|p|=2m} a_p(x)\xi^p,$$

$$B_{j0}^{\pm}(x,\xi)=\sum_{|p|=m_j^{\pm}} b_{jp}^{\pm}(x)\xi^p.$$

Die Eigenschaften „A echt elliptisch" und „Randoperatoren überdecken A", mit denen die Randwertaufgabe bei stetigen Randbedingungen elliptisch heißt, definiert man wie folgt:

(I) Der Operator A heißt echt elliptisch, falls es gilt:

(i) Das Polynom $A_0(x, \xi)$ genügt der Beziehung

$$A_0(x, \xi) \neq 0$$

für alle $\xi \neq 0$ aus $\boldsymbol{R}^2$ und alle $x \in \bar{\Omega}$;

(ii) Gegeben seien $x \in \bar{\Omega}$ und zwei linear unabhängige Vektoren $\mu, \nu \in \boldsymbol{R}^2$. Dann besitzt das Polynom $A_0(x, \mu + z\nu)$ der komplexen Variablen z genau m Nullstellen $z_1^+, \ldots, z_m^+$ mit $\operatorname{Im} z_k^+ > 0$.

(II) Das System $\{B_j^{\pm}\}$ überdeckt den Operator A auf $\bar{\Gamma}_{\pm}$, falls es gilt: Gegeben seien $x \in \bar{\Gamma}_{\pm}$ und zwei Vektoren $\mu, \nu \in \boldsymbol{R}^2$, $\mu \neq 0$ tangential und $\nu \neq 0$ normal zu Γ im Punkt x. Dann sind die Polynome

$$B_{j0}^{\pm}(x, \mu + z\nu), \quad j = 0, \ldots, m-1,$$

der komplexen Variablen z linear unabhängig modulo des Polynoms

$$\prod_{k=1}^{m} (z - z_k^+(x; \mu, \nu)),$$

wobei $z_k^+(x; \mu, \nu)$, $k = 1, \ldots, m$, die Nullstellen von $A_0(x, \mu + z\nu)$ mit positivem Imaginärteil sind.

9.2. Es bezeichne $\Pi^s(\Omega) = \Pi^s(\Omega; m, m_j^{\pm})$ den durch

$$\Pi^s(\Omega) := H^{s-2m}(\Omega) \times \prod_{\pm, j} H^{s-m_j^{\pm}-1/2}(\Gamma_{\pm})$$

erklärten Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $((\cdot|\cdot))_{s,\Omega}$ und der entsprechenden Norm $|||\cdot|||_{s,\Omega}$,

$$|||h|||_{s,\Omega}^2 := \|f\|_{s-2m,\Omega}^2 + \sum_{\pm, j} \|g_j^{\pm}\|_{s-m_j^{\pm}-1/2, \Gamma_{\pm}}^2, \qquad h = (f, g_j^{\pm}) \in \Pi^s(\Omega).$$

Setzen wir weiter

$$L_s u := (Au, B_j^{\pm} u), \qquad u \in H^s(\Omega),$$

so erhalten wir einen linearen Operator

$$L_s = L_s(D) \in \mathscr{L}(H^s(\Omega); \Pi^s(\Omega)).$$

9.3. Es sei $s_0 := \max \mu_j^{\pm} + 1/2$, wobei $\mu_j^{\pm}$ die „normale" Ordnung des Operators $B_j^{\pm}$ bezeichnet. Dann gilt (man siehe J. Peetre [13])

Satz 9.1. *Die Bedingungen (I) und (II) seien erfüllt. Dann existieren reelle Zahlen $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$ $(l \leqq 2m)$ derart, daß die Koerzitivitätsungleichung*

$$\|u\|_{s,\Omega} \leqq C(|||L_s u|||_{s,\Omega} + \|u\|_{s-1,\Omega}), \qquad u \in H^s(\Omega),$$

für alle $s > s_0$ mit $s \not\equiv \sigma_k \bmod 1$ $(k = 1, \ldots, l)$ besteht.

9.4. Eine reelle Zahl s heiße zulässig, falls sie den Bedingungen in Satz 9.1 genügt, d. h., falls $s > s_0$ und $s \not\equiv \sigma_k \bmod 1$ $(k=1, \ldots, l)$ gilt.

Aufgrund der Sätze 6.2 und 9.1 erhalten wir

Satz 9.2. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 9.1 erfüllt und $s \in \boldsymbol{R}$ zulässig. Für den Operator*

$$L_s : H^s(\Omega) \to \Pi^s(\Omega)$$

gilt dann:

(i) $\alpha(L_s) = \dim \mathcal{N}(L_s) < \infty$;

(ii) $\mathcal{R}(L_s)$ *ist abgeschlossen in* $\Pi^s(\Omega)$.

Ferner gilt (man siehe J. Peetre [14])

Satz 9.3. *Unter den Voraussetzungen von Satz 9.1 hat $\mathcal{R}(L_s)$ für zulässiges s einen endlichen Defekt,*

$$\beta(L_s) = \operatorname{codim} \mathcal{R}(L_s) < \infty.$$

Bemerkt sei, daß dies Ergebnis nicht im Falle $n > 2$ gilt.

10. Die Fastlinearität des Operators $T_s = T_s(D)$

10.1. Um die Gleichungen (2.1) im Rahmen von II zu betrachten, definieren wir die Abbildung

$$T_s = T_s(D) : H^s(\Omega) \to \Pi^s(\Omega)$$

durch

$$T_s(u) := L_s u + S_s(u), \quad u \in H^s(\Omega),$$

wobei

$$S_s = S_s(D) : H^s(\Omega) \to \Pi^s(\Omega)$$

die durch

$$S_s(u) := \left(\mathcal{A}(u), \mathcal{B}_j^{\pm}(u)\right), \quad u \in H^s(\Omega),$$

erklärte Abbildung ist. Hierbei sei angenommen, daß $s \geqq 2m$ ist.

10.2. Zuerst haben wir

Lemma 10.1. *Die Hilberträume $H^s(\Omega)$ und $H^{s-1}(\Omega)$ bilden ein Raumpaar $[H^s(\Omega), H^{s-1}(\Omega)]$.*

Es gilt nämlich (vgl. [9], S. 99)

Satz 10.2. *Der Hilbertraum $H^s(\Omega)$ ist separabel, und die Einbettung $H^s(\Omega) \to H^{s-\varepsilon}(\Omega)$ ist kompakt für jedes $\varepsilon > 0$.*

10.3. Nun beweisen wir

Satz 10.3. *Die Abbildung*

$$T_s = T_s(D) : H^s(\Omega) \to \Pi^s(\Omega)$$

ist fastlinear bezüglich des Raumpaars $[H^s(\Omega), H^{s-1}(\Omega)]$ für $s > 2m+1$.

10.3.1. Im Beweis benötigen wir einen Hilfssatz, den wir zunächst formulieren.

Es sei $k \in \boldsymbol{N}_+$. Die Sobolevräume $H^s(\Omega; \boldsymbol{C}^k)$ und $H^s(\Gamma; \boldsymbol{C}^k)$ von $\boldsymbol{C}^k$-wertigen, in Ω bzw. auf Γ erklärten Funktionen lassen sich ähnlich wie die Räume $H^s(\Omega) = H^s(\Omega; \boldsymbol{C})$ bzw. $H^s(\Gamma) = H^s(\Gamma; \boldsymbol{C})$ definieren. Wir bezeichnen die Norm von $H^s(\Omega; \boldsymbol{C}^k)$ mit $\|\cdot\|_{s,\Omega,k}$,

$$\|U\|_{s,\Omega,k}^2 := \sum_{i=1}^{k} \|u_i\|_{s,\Omega}^2, \quad U = (u_1, \ldots, u_k) \in H^s(\Omega; \boldsymbol{C}^k), \tag{10.1}$$

und die Norm von $H^s(\Gamma; \boldsymbol{C}^k)$ mit $\|\cdot\|_{s,\Gamma,k}$,

$$\|U\|_{s,\Gamma,k}^2 := \sum_{i=1}^{k} \|u_i\|_{s,\Gamma}^2, \quad U = (u_1, \ldots, u_k) \in H^s(\Gamma; \boldsymbol{C}^k). \tag{10.2}$$

Wir lassen k aus Indizes der Normen weg, wenn dies keine Unklarheit verursacht.

Es gilt jetzt

Lemma 10.4. *Es seien*

$$a : \bar{\Omega} \times \boldsymbol{C}^k \to \boldsymbol{C}$$

und

$$b : \Gamma \times \boldsymbol{C}^k \to \boldsymbol{C}$$

glatte Funktionen, wobei $k \in \boldsymbol{N}_+$ *ist. Dann hat man:*

a) *Ist* $s > 1$, *so gilt*

$$\|a(x, U) - a(x, V)\|_{s,\Omega} \leqq C(\|U\|_{s,\Omega,k}, \|V\|_{s,\Omega,k}) \|U - V\|_{s,\Omega,k}$$

für alle $U, V \in H^s(\Omega; \boldsymbol{C}^k)$.

b) *Ist* $s > 1/2$, *so gilt*

$$\|b(x, U) - b(x, V)\|_{s,\Gamma} \leqq C(\|U\|_{s,\Gamma,k}, \|V\|_{s,\Gamma,k}) \|U - V\|_{s,\Gamma,k}$$

für alle $U, V \in H^s(\Gamma; \boldsymbol{C}^k)$.

Der Beweis des Lemmas benutzt die Banachalgebra-Eigenschaft des Raumes $H^s(\Omega)$, $s > 1$, bzw. $H^s(\Gamma)$, $s > 1/2$, sowie den Zusammenhang der Sobolevnormen und der Besovnormen. (Wegen des Beweises siehe man Babin [2], S. 446—450, und vergleiche auch Adams [1], S. 208—214, 223—225, Lions—Magenes [9], S. 52, Nikol'skiĭ [11], S. 159—162; das Resultat auf Γ erhält man durch Lokalisierung, vgl. [15].)

10.3.2. *Beweis von Satz 10.3.* Wegen

$$L_s \in \mathscr{L}(H^s(\Omega); \Pi^s(\Omega))$$

genügt es zu zeigen, daß die Ungleichung

$$|||S_s(u) - S_s(v)|||_{s,\Omega} \leqq C(\|u\|_{s-1,\Omega}, \|v\|_{s-1,\Omega}) \|u - v\|_{s-1,\Omega} \tag{10.3}$$

für alle $u, v \in H^s(\Omega)$ besteht.

Aus Definitionen folgt zuerst

$$\begin{aligned}(10.4)\qquad |||S_s(u)-S_s(v)|||^2_{s,\Omega} &= \left\|a\big(x,\partial_{2m-1}(u)\big)-a\big(x,\partial_{2m-1}(v)\big)\right\|^2_{s-2m,\Omega}\\ &+\sum_{\pm,j}\left\|b_j^{\pm}\big(x,\gamma_0\,\partial_{m_j^{\pm}-1}(u)\big)-b_j^{\pm}\big(x,\gamma_0\,\partial_{m_j^{\pm}-1}(v)\big)\right\|^2_{s-m_j^{\pm}-1/2,\Gamma_{\pm}}.\end{aligned}$$

Aufgrund von Lemma 10.4 erhält man hier

$$\begin{aligned} I_a &:= \left\|a\big(x,\partial_{2m-1}(u)\big)-a\big(x,\partial_{2m-1}(v)\big)\right\|_{s-2m,\Omega}\\ &\leqq C\big(\|\partial_{2m-1}(u)\|_{s-2m,\Omega},\|\partial_{2m-1}(v)\|_{s-2m,\Omega}\big)\|\partial_{2m-1}(u)-\partial_{2m-1}(v)\|_{s-2m,\Omega},\end{aligned}$$

wobei wegen (10.1) beispielweise

$$\|\partial_{2m-1}(u)\|^2_{s-2m,\Omega}=\sum_{|p|\leqq 2m-1}\|D^p u\|^2_{s-2m,\Omega}\leqq C\|u\|^2_{s-1,\Omega}$$

gilt (vgl. [9], S. 44). Folglich ist

$$I_a\leqq C(\|u\|_{s-1,\Omega},\|v\|_{s-1,\Omega})\|u-v\|_{s-1,\Omega}.$$

Im zweiten Glied der rechten Seite von (10.4) erhält man mit Hilfe von Lemma 10.4 entsprechend (vgl. auch [15])

$$\begin{aligned} I_b &:= \left\|b_j^{\pm}\big(x,\gamma_0\,\partial_{m_j^{\pm}-1}(u)\big)-b_j^{\pm}\big(x,\gamma_0\,\partial_{m_j^{\pm}-1}(v)\big)\right\|_{s-m_j^{\pm}-1/2,\Gamma_{\pm}}\\ &\leqq \left\|b_j^{\pm}\big(x,\gamma_0\,\partial_{m_j^{\pm}-1}(u)\big)-b_j^{\pm}\big(x,\gamma_0\,\partial_{m_j^{\pm}-1}(v)\big)\right\|_{s-m_j^{\pm}-1/2,\Gamma}\\ &\leqq C\big(\|\gamma_0\,\partial_{m_j^{\pm}-1}(u)\|_{s-m_j^{\pm}-1/2,\Gamma},\|\gamma_0\,\partial_{m_j^{\pm}-1}(v)\|_{s-m_j^{\pm}-1/2,\Gamma}\big)\\ &\qquad\times\|\gamma_0\,\partial_{m_j^{\pm}-1}(u)-\gamma_0\,\partial_{m_j^{\pm}-1}(v)\|_{s-m_j^{\pm}-1/2,\Gamma}.\end{aligned}$$

Hierbei gilt nach (10.2) und Spurtheoremen (vgl. [9], S. 41—42)

$$\begin{aligned}\|\gamma_0\,\partial_{m_j^{\pm}-1}(u)\|^2_{s-m_j^{\pm}-1/2,\Gamma} &= \sum_{|p|\leqq m_j^{\pm}-1}\|\gamma_0 D^p u\|^2_{s-m_j^{\pm}-1/2,\Gamma}\\ &\leqq C\sum_{|p|\leqq m_j^{\pm}-1}\|D^p u\|^2_{s-m_j^{\pm},\Omega}\\ &\leqq C\|u\|^2_{s-1,\Omega}.\end{aligned}$$

Man hat also

$$I_b\leqq C(\|u\|_{s-1,\Omega},\|v\|_{s-1,\Omega})\|u-v\|_{s-1,\Omega},$$

was den Beweis von (10.3) und dann auch den Beweis des Satzes vollendet.

Bemerkt sei, daß wir oben die Glattheit von $b_j^{\pm}$ bezüglich x auf Γ benutzten, und zwar im ersten Schritt der Abschätzung von I_b. Setzt man dies jedoch nur auf $\bar{\Gamma}_{\pm}$ voraus, so muß man die Sobolevräume $H^s(\Gamma_{\pm};C^k)$ einführen und eine der letzteren Ungleichung von Lemma 10.4 entsprechende Abschätzung nachweisen (am einfachsten mit Hilfe der genannten Ungleichung; vgl. [15]).

Bemerkung 10.5. *Man nehme an, daß die den Operatoren $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}_j^{\pm}$ zugehörigen Funktionen gleichmäßig den Abschätzungen von Lemma 10.4 genügen (wie* *ist der Fall, wenn*

$$|a(x, z_1)-a(x, z_2)| \leqq C|z_1-z_2|,$$

$$|b_j^{\pm}(x, z_1)-b_j^{\pm}(x, z_2)| \leqq C|z_1-z_2|$$

gilt). Dann besteht die Ungleichung

$$|||S_s(u)-S_s(v)|||_{s,\Omega} \leqq C\|u-v\|_{s-1,\Omega},$$

und Satz 10.3 gilt für alle $s \geqq 2m$.

11. Elliptische fastlineare gemischte Randwertaufgabe ($\mathscr{F}bd$)

11.1. Wir werden nun Aufgabe ($\mathscr{F}$) auf das Lösen der Aufgabe ($\mathscr{F}bd$) anwenden. Zu diesem Zweck nehmen wir als die zugrundeliegenden Hilberträume H, H_0 und Π die Sobolevräume $H^s(\Omega)$, $H^{s-1}(\Omega)$ bzw. $\Pi^s(\Omega)$ an, und benutzen hiernach auch Bezeichnungen von II sachgemäß modifiziert.

Speziell sei also $(e_k) \subset H^s(\Omega)$ eine orthonormale Basis von $H^s(\Omega)$ mit

$$\mathscr{N}(L_s) = [e_k]_{k=1}^{\alpha_s}$$

und $(\eta_k) \subset \Pi^s(\Omega)$, $\eta_k=(\varphi_k, \psi_{kj}^{\pm})$, eine orthonormale Basis von $\Pi^s(\Omega)$ mit

$$L(\mathscr{N}_{-\alpha_s})^{\perp} = [\eta_k]_{k=1}^{\beta_s}, \qquad \beta_s = \alpha_s - \varkappa_s$$

wobei $\alpha_s=\alpha(L_s)$, $\beta_s=\beta(L_s)$ und $\varkappa_s=\varkappa(L_s)$ ist.

11.2. Als Zusammenfassung der Ergebnisse von §§ 9 und 10 haben wir zuerst

Satz 11.1. *Sind die Bedingungen (I) und (II) erfüllt und ist* $s>2m+1$ *zulässig, so ist der Operator*

$$T_s = T_s(D): H^s(\Omega) \to \Pi^s(\Omega)$$

eine elliptische fastlineare Abbildung bezüglich des Raumpaars $[H^s(\Omega), H^{s-1}(\Omega)]$.

Wir können also Aufgabe ($\mathscr{F}$) anwenden und erhalten dadurch die folgende Lösung für Aufgabe ($\mathscr{F}bd$):

Satz 11.2. *Die Bedingungen (I) und (II) seien erfüllt und die reelle Zahl* $s>2m+1$ *sei zulässig. Weiter seien* $\varrho>0$ *und* $r>0$ *gegeben.*

Dann existieren $r_-(\varrho, r)>0$ *und* $\alpha(\varrho, r, r_-) \in N_+$ *derart, daß für* $r_- \geqq r_-(\varrho, r)$ *und* $\alpha \geqq \alpha(\varrho, r, r_-)$ *gilt:*

Aufgabe ($\mathscr{F}bd$) ist korrekt gestellt für die Schar der Mengenpaare

$$\mathscr{S}_w(\varrho) \subset \Pi^s(\Omega), \quad w+B_{-\alpha}(r_-) \subset H^s(\Omega), \qquad w \in B_\alpha(r) \subset H^s(\Omega),$$

mit

$$\mathscr{S}_w(\varrho) = \{h \in Z_{-\alpha}(\varrho) | \Phi_\alpha(w, h) = 0\};$$

dies bedeutet:

Die Aufgabe

$$(11.1)\qquad \begin{cases} T_s(u) = h \\ Q_\alpha u = w \end{cases}$$

mit gegebenen $h \in Z_{-\alpha}(\varrho)$ *und* $w \in B_\alpha(r)$ *genügt den Aussagen:*

(i) *Aufgabe (11.1) besitzt eine Lösung* $u \in B_\alpha(r) + B_{-\alpha}(r_-)$ *genau dann, wenn* $\Phi_\alpha(w, h) = 0$ *ist;*

(ii) *Die Lösung* $u \in B_\alpha(r) + B_{-\alpha}(r_-)$ *der Aufgabe (11.1) ist eindeutig bestimmt;*

(iii) *Es besteht die Ungleichung*

$$\|u - v\|_{s,\Omega} \leqq C \,|||T_s(u) - T_s(v)|||_{s,\Omega} + C(r, r_-) \|Q_\alpha u - Q_\alpha v\|_{s,\Omega}$$

für alle $u, v \in B_\alpha(r) + B_{-\alpha}(r_-)$*;*
oder mit Hilfe der orthonormalen Basen ausgedrückt:

Für die Aufgabe

$$(11.1')\qquad \begin{cases} T_s(u) = h \\ (u\,|\,e_k)_s = \lambda_k, \qquad k = 1, \dots, \alpha \end{cases}$$

mit gegebenen $h \in Z_{-\alpha}(\varrho)$ *und* $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\alpha) \in C^\alpha$, $|\lambda| \leqq r$, *gilt:*

(i′) *Es gibt eine Lösung* $u \in B_\alpha(r) + B_{-\alpha}(r_-)$ *für (11.1′) genau dann, wenn die Beziehungen*

$$((T_s(u_{-\alpha, J^{-1}w}(h))\,|\,\eta_k))_{s,\Omega} = ((h\,|\,\eta_k))_{s,\Omega}, \qquad k = 1, \dots, \alpha - \varkappa_s,$$

erfüllt sind;

(ii′) *Die Lösung* $u \in B_\alpha(r) + B_{-\alpha}(r_-)$ *von (11.1′) ist eindeutig bestimmt;*

(iii′) *Für alle* $u, v \in B_\alpha(r) + B_{-\alpha}(r_-)$ *gilt*

$$\|u - v\|_{s,\Omega} \leqq C \,|||T_s(u) - T_s(v)|||_{s,\Omega} + C(r, r_-) |\lambda - \mu|$$

mit $\lambda = JQ_\alpha u$ *und* $\mu = JQ_\alpha v$.

Aufgrund der Bemerkungen 7.5 und 10.5 erhalten wir noch

Bemerkung 11.3. *Wenn die Bedingungen (I) und (II) erfüllt sind und* $s \geqq 2m$ *zulässig ist, so ist Aufgabe* ($\mathscr{F}$ *bd) im Falle von Bemerkung 10.5 korrekt gestellt für die Schar der Mengenpaare*

$$\mathscr{S}_w \subset \Pi^s(\Omega), \quad w + \mathscr{N}_{-\alpha} \subset H^s(\Omega), \qquad w \in \mathscr{N}_\alpha,$$

für alle $\alpha \geqq \alpha'$, *wobei* $\alpha' \in N_+$ *nach Bemerkung 6.7 gewählt ist.* (Beispiele für diese Situation kann man mit Hilfe der Beispiele von Peetre [13], S. 349, und Babin [2], S. 441—442, konstruieren.)

12. Ergänzende Bemerkung

Die natürliche Frage nach Verallgemeinerungen sei noch kurz behandelt werden.

12.1. *Der Fall* „$H^{s,p}(\Omega)$“. Anstatt der oben zugrundegelegten Räume $H^s(\Omega) = H^{s,2}(\Omega)$ und $\Pi^s(\Omega) = \Pi^{s,2}(\Omega)$ seien die Sobolevschen Banachräume $H^{s,p}(\Omega)$ und $\Pi^{s,p}(\Omega)$ betrachtet. Dann gelten den in § 9 erreichten entsprechende

Ergebnisse für zulässige $s \geqq 2m$ mit $s \not\equiv 1/p, 2/p \bmod 1$ für $p \neq 2$ (man siehe E. Shamir [16]).

Ist ein solches s eine ganze Zahl, so lassen sich die vorigen Resultate ohne wesentliche Schwierigkeiten für die Räume $H^{s,p}(\Omega)$ und $\Pi^{s,p}(\Omega)$ verallgemeinern. Der Raum $H^{s,p}(\Omega)$ besitzt nämlich dann eine (Schaudersche) Basis (vgl. [3]), und ist kompakt in $H^{s-1,p}(\Omega)$ eingebettet (vgl. [1], S. 144). Infolge der Tatsache, daß eine Basis reflexiven Banachraumes zusammenschrumpfend ist (vgl. [10], [17], S. 278—279), bilden die Räume $H^{s,p}(\Omega)$ und $H^{s-1,p}(\Omega)$ also ein zulässiges Raumpaar im Sinne von Babin [2] (vgl. 8.1).

Versucht man diese, als natürlich scheinende, Behandlungsweise auf den Fall $s \notin \boldsymbol{N}$ anzuwenden, so stößt man jedoch auf zwei, soweit der Verfasser weiß, noch ungelöste Fragen, und zwar, erstens auf die Frage nach der Kompaktheit der $H^{s,p}(\Omega)$-Einbettungen (vgl. jedoch Shamir [16]) und zweitens auf diejenige nach der Existenz einer Basis im Raum $H^{s,p}(\Omega)$.

12.2. *Der Fall „Quasilinear“.* Die im Sinne von Babin [2] quasilinearen, gemischten Randwertaufgaben mit parametrisch Fredholmschem Operator sind (im allgemeinen) nicht elliptisch.

Als Beispiel betrachten wir für $s \geqq 2$ die Abbildung

$$T_s : H^s(\boldsymbol{R}^2_+) \to \Pi^s(\boldsymbol{R}^2_+) = H^{s-2}(\boldsymbol{R}^2_+) \times H^{s-3/2}(\boldsymbol{R}_+) \times H^{s-3/2}(\boldsymbol{R}_-),$$

$$T_s(u) := \big(Au, B^+(u)u, B^-u\big),$$

wobei A der Operator

$$A := D_1^2 + D_2^2$$

ist und die Randoperatoren B^+ und B^- durch

$$B^+(v) : = \cos\left(\frac{\pi}{2}\|\gamma_0 v\|_{s-3/2,\boldsymbol{R}_+}\right)\gamma_0 \frac{d}{d\mu}$$

$$+\sin\left(\frac{\pi}{2}\|\gamma_0 v\|_{s-3/2,\boldsymbol{R}_+}\right)\gamma_0 \frac{d}{d\nu} \qquad \text{bei festem } v \in H^s(\boldsymbol{R}^2_+),$$

bzw. durch

$$B^- := \gamma_0 \frac{d}{d\gamma}$$

erklärt sind; hierbei bezeichnen μ, ν, γ drei Vektoren in $\boldsymbol{R}^2$, und zwar sei

$$\mu = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad \nu = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad \gamma = (0, 1).$$

Nun ist die Abbildung T_s im Sinne von Babin [2] quasilinear bezüglich des Raumpaars $[H^s(\boldsymbol{R}^2_+), H^{s-1}(\boldsymbol{R}^2_+)]$ (vgl. Definition 4.1). Es gilt nämlich die Lipschitzbedingung

$$\left\|\big(B^+(v) - B^+(w)\big)u\right\|_{s-3/2,\boldsymbol{R}_+} \leqq C\|v-w\|_{s-1,\boldsymbol{R}^2_+}\|u\|_{s,\boldsymbol{R}^2_+}, \qquad u, v, w \in H^s(\boldsymbol{R}^2_+),$$

(sogar mit einer von v und w unabhängigen Konstanten C) woraus die Quasilinearität von T_s sich folgern läßt.

Die Abbildung T_s ist jedoch nicht elliptisch bezüglich des Raumpaars $[H^s(\boldsymbol{R}^2_+), H^{s-1}(\boldsymbol{R}^2_+)]$. In der Tat, bei festgelegtem $v \in H^s(\boldsymbol{R}^2_+)$ findet man (vgl. Peetre [13]), daß $s \geqq 2$ mit

$$s \equiv \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \|\gamma_0 v\|_{s-3/2, \boldsymbol{R}_+} \mod 1$$

ein exzeptioneller Wert, d. h. nicht zulässig ist.

Literatur

[1] Adams, R. A.: Sobolev spaces. – Pure and Applied Mathematics 65. Academic Press, Inc., New York—San Francisco—London, 1975.

[2] Babin, A. V.: Finite dimensionality of the kernel and cokernel of quasilinear elliptic mappings. – Math. USSR—Sb. 22, 1974, 427—455.

[3] Fučik, S., O. John, und J. Nečas: On the existence of Schauder bases in Sobolev spaces. – Comment. Math. Univ. Carolinae 13, 1972, 163—175.

[4] Goldberg, S.: Unbounded linear operators: Theory and applications. – McGraw–Hill Series in Higher Mathematics. McGraw-Hill Book Company, New York—St. Louis—San Francisco—Toronto—London—Sydney, 1966.

[5] Hadamard, J.: Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. – Dover Publications, Inc., New York, 1952.

[6] John, F.: Partial differential equations. – Mathematics applied to physics, 229—315. UNESCO, Paris / Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1970.

[7] Lavrentiev, M. M.: Some improperly posed problems of mathematical physics. – Springer Tracts in Natural Philosophy 11. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1967.

[8] Lieberstein, H. M.: Theory of partial differential equations. – Mathematics in Science and Engineering 93. Academic Press, New York—London, 1972.

[9] Lions, J. L., und E. Magenes: Non-homogeneous boundary value problems and applications. Volume I. – Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen 181. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1972.

[10] Mil'man, V. D.: Geometric theory of Banach spaces (Part I—The theory of basis and minimal systems). – Russian Math. Surveys 25:3, 1970, 111—170.

[11] Nikol'skiĭ, S. M.: Approximation of functions of several variables and imbedding theorems. – Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen 205. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1975.

[12] Peetre, J.: Another approach to elliptic boundary problems. – Comm. Pure Appl. Math. 14, 1961, 711—731.

[13] Peetre, J.: Mixed problems for higher order elliptic equations in two variables, I. – Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Sci. Fis. Mat. (3) 15, 1961, 337—353.

[14] Peetre, J.: Mixed problems for higher order elliptic equations in two variables, II. – Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Mat. (3) 17, 1963, 1—12.

[15] Purmonen, V. T.: Über gemischte koerzitive elliptische lineare partielle Randwertaufgaben. – Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. Dissertationes 5, 1975, 1—193.

[16] SHAMIR, E.: Mixed boundary value problems for elliptic equations in the plane. The L^p theory. – Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Mat. (3) 17, 1963, 117—139.
[17] SINGER, I.: Bases in Banach spaces I. – Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen 154. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1970.
[18] TIHONOV, A. N., V. K. IVANOV, und M. M. LAVRENT'EV: Improperly posed problems. – Amer. Math. Soc. Transl. (2) 105, 1976, 313—332.

Universität Jyväskylä
Mathematisches Institut
Sammonkatu 6
SF-40100 Jyväskylä 10
Finnland

Eingegangen am 12. September 1977