2. Ordnungen

Wir betrachten nun einen weiteren Grundtyp einer Relation, bei dem die Elemente einer Menge nicht in Klassen eingeteilt, sondern angeordnet werden. Dadurch ergeben sich Strukturen, die wie Netze, Bäume, Leitern, Gitter, Perlenketten oder Linien aussehen.

Partielle Ordnungen

Im Folgenden ist wieder A eine beliebige Menge. Wir betrachten zunächst Relationen auf A, die die Menge A teilweise (partiell) ordnen. Teilweise bedeutet, dass für Elemente a, b der Menge eine Ordnungsbeziehung $a < b$, $a = b$, $b < a$ bestehen kann aber nicht muss. Es kann also Elemente a, b von A geben, die nicht miteinander vergleichbar sind.

Definition *(partielle Ordnungen)*

Sei A eine Menge. Eine Relation $<$ auf A heißt eine *(partielle) Ordnungsrelation (vom strikten Typ)* oder kurz *Ordnung* auf A, falls gilt:

(P1) $\forall a \in A \ \ \mathrm{non}(a < a)$ *(Irreflexivität)*

(P2) $\forall a, b, c \in A \ \ (a < b \ \land \ b < c \ \to \ a < c)$ *(Transitivität)*

Das geordnete Paar $(A, <)$ nennen wir eine *Ordnungsstruktur* oder ebenfalls kurz *Ordnung (vom strikten Typ)*. Für alle $a, b \in A$ setzen wir

$a \ \leq \ b$ *falls* $a < b$ oder $a = b$.

Die so definierte Relation $\leq$ heißt die *zugeordnete nichtstrikte Ordnung* auf A.

Für eine Ordnung verwenden wir Symbole wie $<$, $<^*$, $\prec$, $\lhd$, … Die zugeordneten nichtstrikten Versionen sind $\leq$, $\leq^*$, $\preccurlyeq$, $\unlhd$, …

Als Erstes halten wir fest:

Satz *(Eigenschaften von $\leq$)*

Sei A eine Menge, und sei $<$ eine Ordnung auf A. Dann gilt für die zugehörige nichtstrikte Ordnung $\leq$:

(Q1) $\forall a \in A \ \ a \leq a$ *(Reflexivität)*

(Q2) $\forall a, b \in A \ \ (a \leq b \ \land \ b \leq a \ \to \ a = b)$ *(Antisymmetrie)*

(Q3) $\forall a, b, c \in A \ \ (a \leq b \ \land \ b \leq c \ \to \ a \leq c)$ *(Transitivität)*

Eine Relation $\leq$ auf A mit Eigenschaften die (Q1), (Q2) und (Q3) nennen wir eine *(nichtstrikte partielle) Ordnung* auf A. Gegeben $\leq$ setzen wir für alle $a, b \in A$:

$a \ < \ b$ *falls* $a \leq b$ und $a \neq b$. *(zugeordnete strikte Ordnung)*

Dies definiert eine strikte Ordnung auf A, deren zugeordnete nichtstrikte Ordnung wieder $\leq$ ist. Kurz:

Wir haben stets zwei partielle Ordnungen $<$ und $\leq$. Die strikte Version erfüllt (P1) und (P2), die nichtstrikte (Q1), (Q2) und (Q3).

Die Aussagen (P1), (P2) bzw. (Q1), (Q2), (Q3) nennen wir auch die Axiome einer partiellen Ordnung.

Ob dem Typ < oder dem Typ ≤ der Vorzug gegeben wird, ist Geschmackssache und kann kontextabhängig immer wieder neu entschieden werden. Die strikte Version hat den Vorteil, dass nur zwei Aussagen zu beweisen sind, wenn wir zeigen wollen, dass eine Relation eine partielle Ordnung ist.

Beispiele

(1) Die üblichen Relationen < auf $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind Ordnungen.

(2) Sei A eine beliebige Menge. Dann ist die Inklusion (Teilmengenrelation) $\subseteq$ eine (nichtstrikte) Ordnung auf der Potenzmenge

$$\mathcal{P}(A) = \{ B \mid B \subseteq A \}$$

von A. Die strikte Version ist die echte Inklusion $\subset$ auf $\mathcal{P}(A)$.

(3) Die Teilbarkeitsrelation ist eine partielle Ordnung auf den natürlichen Zahlen (vom nichtstrikten Typ), d. h. die Setzung

$$a \leq b \quad \textit{falls} \quad \text{a ist ein Teiler von b}$$

definiert eine Ordnung auf $\mathbb{N}$. Dagegen ist die Teilbarkeitsrelation keine Ordnung auf $\mathbb{Z}$, denn in $\mathbb{Z}$ gilt zum Beispiel $1 \mid -1$ und $-1 \mid 1$, aber $1 \neq -1$, sodass die Antisymmetrie verletzt ist.

(4) Die Teilbarkeitsrelation auf $\mathbb{Z}$ gibt Anlass zur Einführung einer Äquivalenzrelation: Setzen wir für $a, b \in \mathbb{Z}$

$$a \equiv b \quad \textit{falls} \quad |a| = |b|,$$

so erhalten wir durch dieses „Absehen vom Vorzeichen“ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ mit den Äquivalenzklassen $[a] = \{ a, -a \}$ für alle $a \in \mathbb{Z}$. Diese Klassen können wir nun durch die Setzung

$$[a] \leq [b] \quad \textit{falls} \quad \text{a ist ein Teiler von b}$$

partiell ordnen. Die Relation ≤ ist eine Ordnung auf der Faktorisierung $\mathbb{Z}/\equiv$.

(5) Sei S die Menge aller endlichen 0-1-Folgen,

$$S = \{ (), (0), (1), (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), \ldots\},$$

wobei () die leere Folge ist. Wir schreiben kurz $a_1 \ldots a_n$ statt $(a_1, \ldots, a_n)$. Weiter nennen wir eine Folge $s = a_1 \ldots a_n$ ein *Anfangsstück* einer Folge $t = b_1 \ldots b_m$, falls $n \leq m$ und $a_i = b_i$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt. Ist zudem $s \neq t$, so heißt s ein *echtes Anfangsstück* von t. Wir setzen nun für alle $s, t \in S$:

$$s \lhd t \quad \textit{falls} \quad \text{s ist ein echtes Anfangsstück von t.}$$

Dann ist $\lhd$ eine Ordnung auf S. Es gilt zum Beispiel

$$001 \lhd 001110, \;\; \text{nicht}(001 \lhd 001), \;\; 001 \unlhd 001, \;\; \text{nicht}(101 \lhd 10).$$

Die leere Folge ist Anfangsstück jeder Folge, d. h. $() \unlhd t$ für alle $t \in S$.

(6) Sei G = (E, K) ein Baum. Wir zeichnen ein $e \in E$ als Wurzel aus, sodass eine Stufung des Baumes entsteht. Nun setzen wir für alle $a, b \in E$:

$a < b$ *falls* „b liegt im Wurzelbaum über a“,

was genauer bedeutet: „$a \neq b$ und der Weg von der Wurzel e nach b besucht die Ecke a“. Die Relation < ist eine Ordnung auf E.

(7) Sei G = (E, K) ein gerichteter Graph ohne Kreise. Wir setzen für alle $a, b \in E$:

$a \leq b$ *falls* es gibt einen (gerichteten) Weg von a nach b in G.

Dann ist $\leq$ eine Ordnung auf E. Die Kreisfreiheit wird für die Antisymmetrie benötigt.

Hasse-Diagramme

Eine Ordnung < auf einer endlichen Menge A lässt sich wie jede endliche Relation graphentheoretisch visualisieren, indem wir alle Elemente von A in der Ebene geeignet platzieren und für alle $a, b \in A$ mit $a < b$ einen Pfeil von a nach b zeichnen. Dabei wirkt sich die Transitivität oft störend aus, da sie zu einer Flut von Verbindungspfeilen führt. Wir lassen deswegen unnötige Verbindungspfeile weg. Zudem vereinbaren wir eine Wachstumsrichtung (z. B. von unten nach oben oder von links nach rechts). Dadurch entstehen sog. Hasse-Diagramme. Um sie genauer zu beschreiben, definieren wir:

Definition *(Nachfolger und Vorgänger)*

Sei < eine Ordnung auf A. Weiter seien $a, b \in A$. Dann heißt b ein *direkter Nachfolger* von a und a ein *direkter Vorgänger* von b, falls $a < b$ und kein c existiert mit $a < c$ und $c < b$.

Für die Inklusion auf $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$ sind $\{1, 2, 3\}$ und $\{1, 3, 4\}$ die beiden direkten Nachfolger von $\{1, 3\}$. Die direkten Vorgänger von $\{1, 3\}$ sind $\{1\}$ und $\{3\}$. Für die übliche Ordnung auf $\mathbb{Z}$ ist $a + 1$ der direkte Nachfolger und $a - 1$ der direkte Vorgänger von a. In $\mathbb{Q}$ existieren dagegen keine direkten Nachfolger und Vorgänger.

Definition *(transitive Reduzierung)*

Sei < eine Ordnung auf einer endlichen Menge A. Dann heißt

$$R_< \;=\; \{ (a, b) \in A^2 \mid b \text{ ist direkter Nachfolger von } a \text{ bzgl. } < \}$$

die *transitive Reduzierung* von <.

Die transitive Reduzierung der Ordnung < auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist zum Beispiel $R_< = \{ (a, a+1) \mid a \in \mathbb{Z} \}$.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun erklären:

Hasse-Diagramme

Sei $<$ eine Ordnung auf einer endlichen Menge A, und sei $R_<$ die transitive Reduzierung von $<$. Wir zeichnen $R_<$, indem wir die Elemente von A so anordnen, dass Nachfolger stets oberhalb von Vorgängern liegen und durch Linien oder Pfeile verbunden sind. Ein derartiges Diagramm heißt ein *Hasse-Diagramm* der Ordnung $<$.

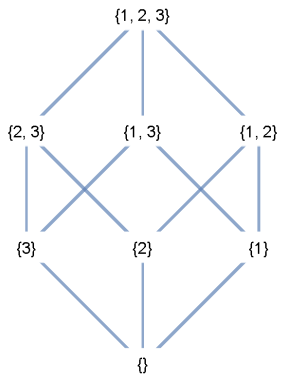
In der Sprache der Graphentheorie ist ein Hasse-Diagramm also ein von unten nach oben angeordnetes Ecken-Kanten-Diagramm des gerichteten Graphen $(A, R_<)$.

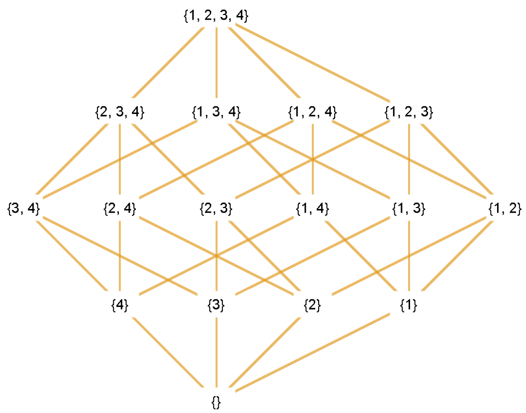
Bemerkung

(1) Eine gestufte Darstellung, bei der alle Nachfolger eines Elements genau eine Stufe höher erscheinen, ist natürlich, aber nicht zwingend erforderlich. Wir können einen Nachfolger b von a irgendwo oberhalb von a eintragen und zwei verschiedene Nachfolger auf unterschiedlicher Höhe platzieren. Ein Hasse-Diagramm ist damit nicht eindeutig bestimmt. Die Art und Weise der Anordnung der Elemente von A kann zu Diagrammen mit unterschiedlicher Aussagekraft führen.

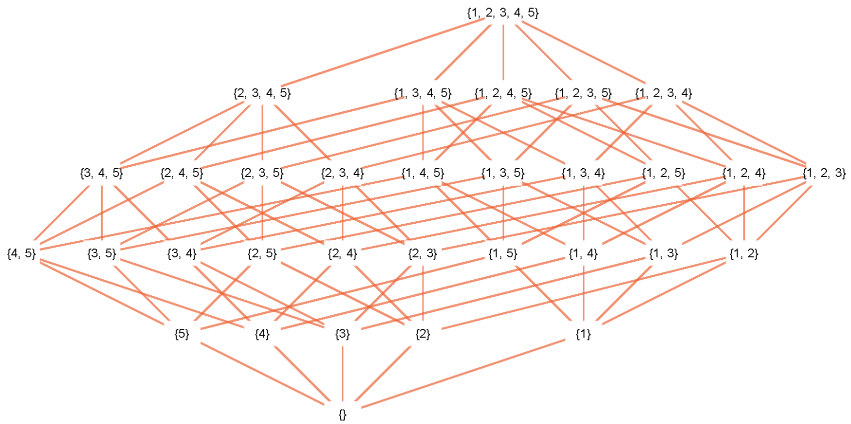
(2) Statt der Wachstumsrichtung „von unten nach oben“ können natürlich auch andere Orientierungen wie „von links nach rechts“ verwendet werden. Da eine Wachstumsrichtung vorgegeben ist, genügen Linien. Es stört aber auch nicht, Pfeile zu verwenden.

(3) Für unendliche Mengen ist eine Visualisierung schwieriger. Manchmal lassen sich Hasse-Diagramme „mit Pünktchen“ erstellen, oft sind aber auch ganz andere Ansätze nötig. Bekannte Beispiele sind die Zahlengeraden für $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$.

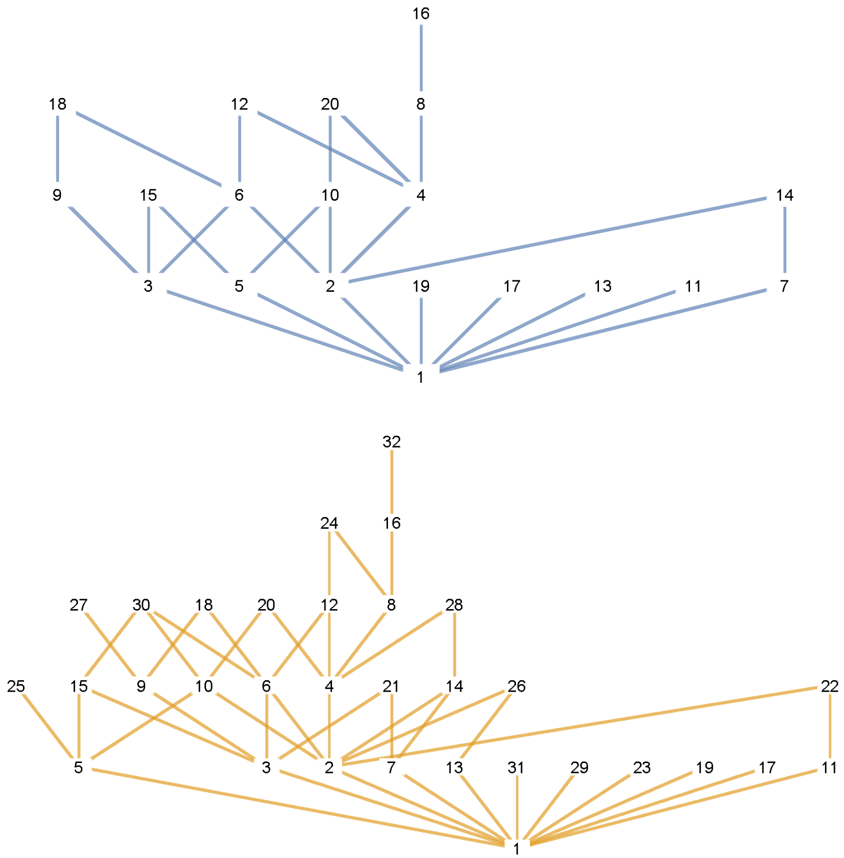




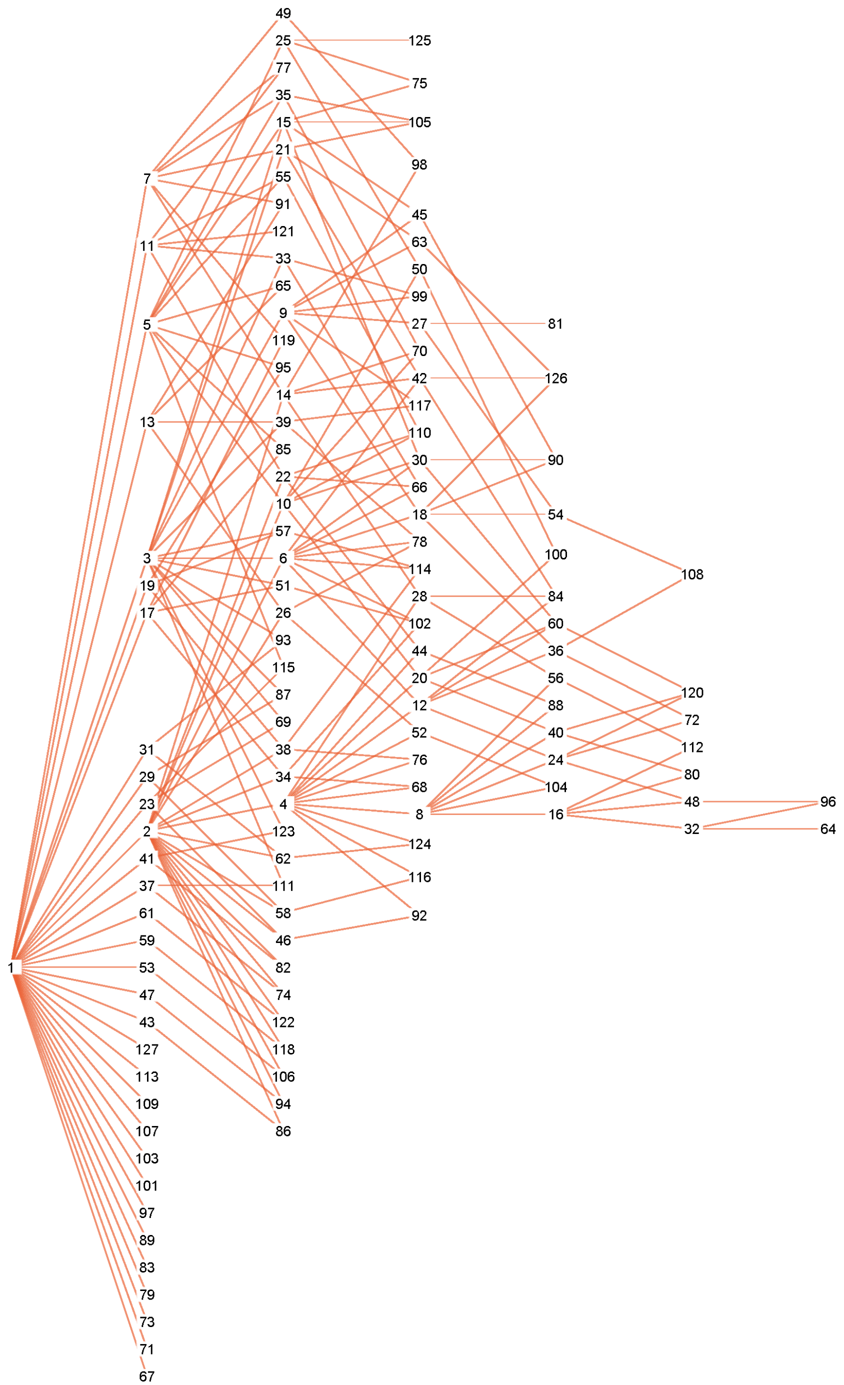
Hasse-Diagramme der Inklusion auf $\mathcal{P}(\{ 1, 2, 3\})$ (links) und $\mathcal{P}(\{ 1, 2, 3, 4\})$ (rechts)



Hasse-Diagramm der Inklusion auf $\mathcal{P}(\{\, 1, 2, 3, 4, 5 \,\})$



Hasse-Diagramme der Teilbarkeitsrelation auf $\{\, 1, \ldots, 20 \,\}$ und $\{\, 1, \ldots, 32 \,\}$



Hasse-Diagramm der Teilbarkeitsrelation auf { 1, …, 127 } (von links nach rechts)

Lineare Ordnungen

Die Ordnungen auf den Zahlenmengen sind durch die paarweise Vergleichbarkeit zweier Elemente ausgezeichnet. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x < y$ oder $x = y$ oder $y < x$. Dagegen sind in der Anfangsstückordnung auf den endlichen 0-1-Folgen die Elemente 10 und 01 nicht miteinander vergleichbar: non(01 < 10), non(01 = 10), non(10 < 01). Wir definieren allgemein:

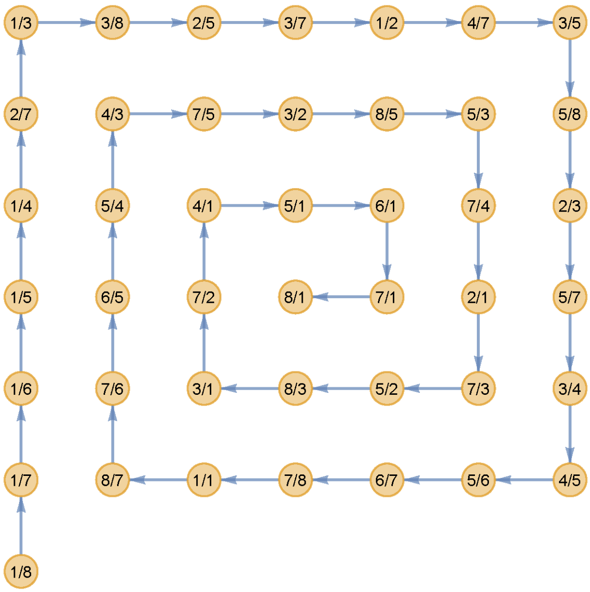
Definition *(vergleichbare Elemente, lineare Ordnung)*

Sei < eine Ordnung auf A. Sind $a, b \in A$ mit

$a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$,

so heißen die Elemente a und b *vergleichbar* bzgl. <. Andernfalls heißen a und b *unvergleichbar*. Sind alle $a, b \in A$ vergleichbar, so heißt < eine *lineare* oder *totale Ordnung* auf A.

Die lineare Ordnung der positiven Brüche mit Zähler und Nenner kleiner gleich 4. Vereinbaren wir Wachstum von links nach rechts, so können wir die Pfeile oder Linien zwischen den Elementen auch weglassen (vgl. die Zahlengerade).



Spiraldarstellung der linearen Ordnung der positiven Brüche mit Zähler und Nenner kleiner gleich 8

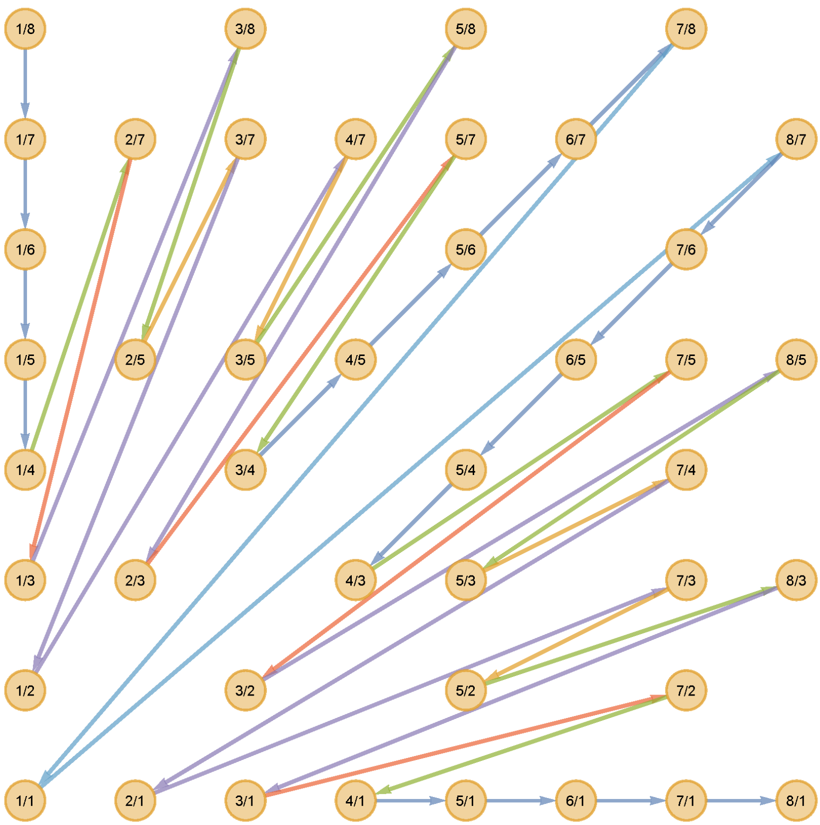
Eine Relation < auf A ist also genau dann eine lineare Ordnung, wenn sie zusätzlich zu (P1) und (P2) die folgende Eigenschaft besitzt:

(P3) $\forall a, b \in A \ (a < b \ \vee \ a = b \ \vee \ b < a)$ *(Vergleichbarkeit, Linearität für <)*

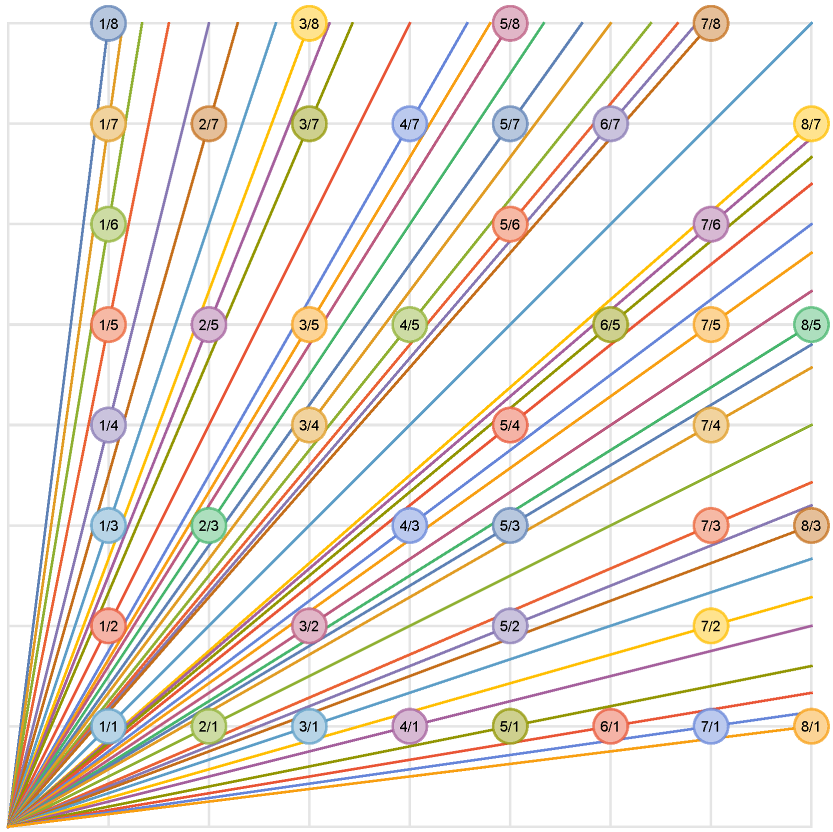
Analog ist eine Relation ≤ auf A genau dann eine lineare Ordnung (des nichtstrikten Typs), wenn sie neben (Q1), (Q2) und (Q3) erfüllt:

(Q4) $\forall a, b \in A \ (a \leq b \ \vee \ b \leq a)$ *(Vergleichbarkeit, Linearität für ≤)*

Die Vergleichbarkeit lässt sich also als zusätzliches (drittes oder viertes) Ordnungsaxiom ansehen. Bei der Übersetzung zwischen einer strikten und nichtstrikten Ordnung gehen (P3) und (Q4) ineinander über.



Gitter-Darstellung der linearen Ordnung der positiven Brüche mit Zähler und Nenner kleiner gleich 8: Die Brüche sind gekürzt und nach ihrem Zähler und Nenner auf einem Koordinatengitter angeordnet. Wir können zwei Brüche dieses Gitters nach ihrer Größe vergleichen, indem wir Geraden durch den Nullpunkt durch sie legen.



Brüche mit flacheren Geraden sind größer, denn die Gerade
durch den Punkt (a, b) hat die Steigung b/a.

Wir untersuchen unsere Beispiele auf Linearität.

Beispiele

Die Ordnungen auf den Zahlenmengen sind linear. Die Inklusion auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ von A ist linear, wenn A leer ist oder genau ein Element besitzt (da $\mathcal{P}(\{\}) = \{ \{ \} \}$ und $\mathcal{P}(\{ a \}) = \{ \{ \}, \{ a \} \}$). Andernfalls ist die Inklusion nicht linear. Denn sind $a, b \in A$ verschieden, so sind die Teilmengen $\{ a \}$ und $\{ b \}$ von A unvergleichbar bzgl. der Inklusion. Die Teilbarkeitsrelation auf $\mathbb{N}$ ist nicht linear, da zum Beispiel 2 und 3 unvergleichbar sind. Die Anfangsstückordnung auf den endlichen 0-1-Folgen S ist nicht linear. Die Ordnung eines Wurzelbaumes ist genau dann linear, wenn es einen in der Wurzel beginnenden Weg gibt, der alle Ecken besucht. Analog ist die Weg-Ordnung eines gerichteten kreisfreien Graphen G genau dann linear, wenn es einen Weg in G gibt, der alle Ecken besucht.

Neben den Ordnungen auf den Zahlen gibt es viele weitere Beispiele für lineare Ordnungen. Eine wichtige Klasse beschreibt die folgende allgemeine Konstruktion.

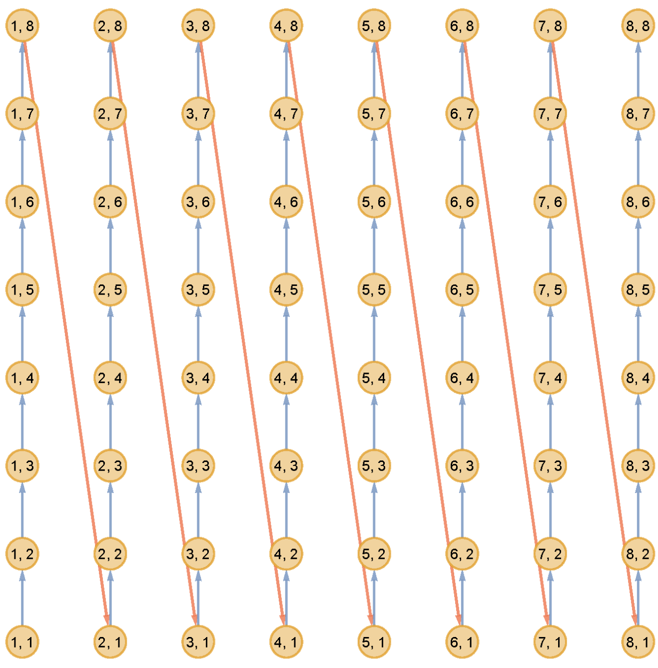
Definition *(lexikographische Ordnung)*

Seien (A, <), (B, <) lineare Ordnungen. Wir setzen für alle Elemente $(a, b), (c, d) \in A \times B$:

$(a, b) <_{\mathrm{lex}} (c, d)$ *falls* $a < c \vee (a = c \wedge b < d)$.

Die Relation $<_{\mathrm{lex}}$ heißt die *(spaltenweise) lexikographische Ordnung* auf $A \times B$.

Die lexikographische Ordnung ist eine lineare Ordnung auf $A \times B$ (Übung). Damit ist für jede lineare Ordnung (A, <) eine lineare Ordnung auf den Produktmengen $A^2 = A \times A$, $A^3 = A^2 \times A$ usw. definiert. Speziell erzeugt die übliche lineare Ordnung von $\mathbb{R}$ eine lineare Ordnung auf der Menge $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ der komplexen Zahlen. Bei dieser Ordnung werden zwei komplexe Zahlen nach ihrem Realteil und bei gleichem Realteil nach ihrem Imaginärteil verglichen. Diese Ordnung ist nicht mit der komplexen Arithmetik verträglich. Wir kommen bei der Diskussion angeordneter Körper hierauf zurück.



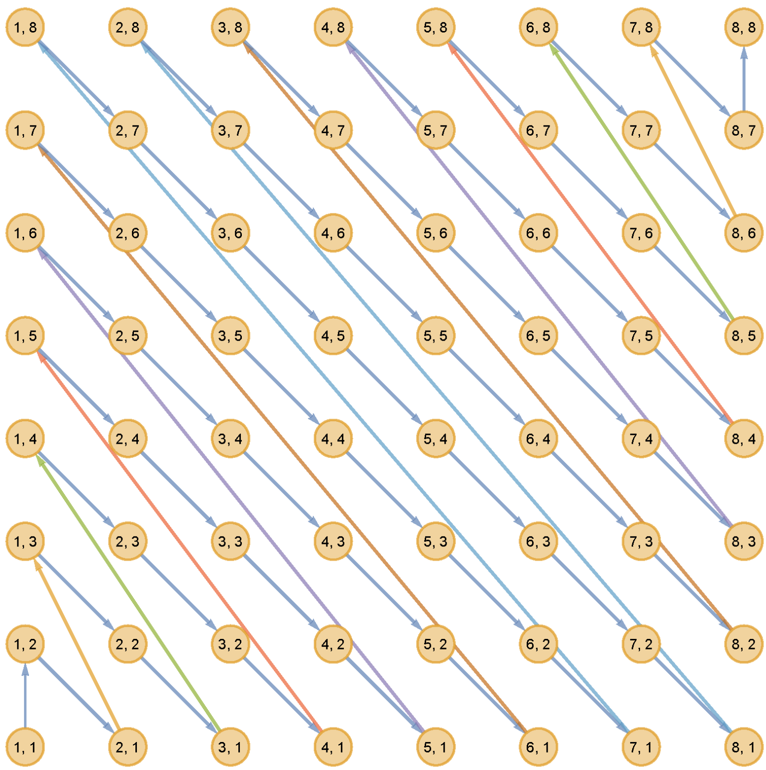
Die lexikographische Ordnung auf $A \times A$ mit $A = \{ 1, \ldots, 8 \}$ und der üblichen Ordnung auf A. Die Produktmenge wird spaltenweise von unten nach oben durchlaufen.

Die lexikographische Ordnung auf $A \times B$ können wir visualisieren, indem wir $A \times B$ als abstraktes Koordinatensystem zeichnen, mit der linearen Ordnung A als waagrechter und der linearen Ordnung B als senkrechter Achse. Wachsen A und B wie üblich von links nach rechts bzw. von unten nach oben, so ist $<_{\mathrm{lex}}$ die Ordnung, die entsteht, wenn wir alle Senkrechten von links nach rechts anordnen und die Punkte jeder Senkrechten von unten nach oben durchlaufen. Alternativ können wir natürlich auch die zweite Komponente bevorzugen und eine zeilenweise lexikographische Ordnung durch

$(a, b) \ <^{\mathrm{lex}} \ (c, d)$ *falls* $b < d \ \vee \ (b = d \wedge a < c)$.

definieren. Das kartesische Produkt $A \times B$ wird nun anschaulich Zeile für Zeile durchlaufen.

Neben der spalten- oder zeilenweisen Aufzählung eines Produkts $A \times B$ gibt es viele weitere Möglichkeiten, alle Elemente von $A \times B$ linear anzuordnen. Für endliche Mengen können wir zum Beispiel Diagonalen, Rechtecke oder Spiralen bilden und diese nach Wunsch anordnen. Wir begnügen uns an dieser Stelle mit zwei wichtigen Beispielen. Das erste ist:



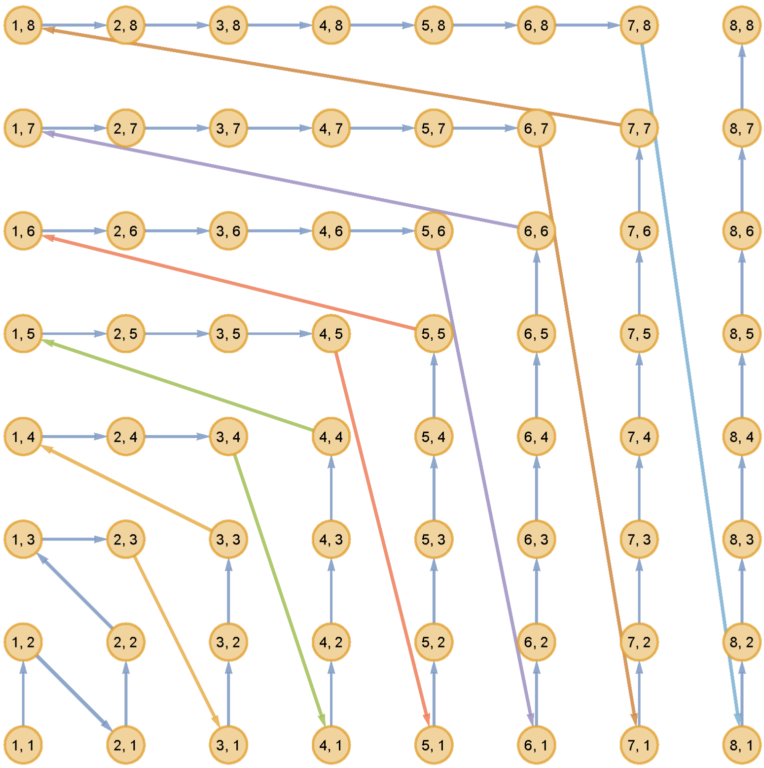
Eine Diagonalaufzählung des Produkts $A \times A$ mit $A = \{ 1, \ldots, 8 \}$

Die Diagonalaufzählung des Diagramms ist durch das *Cantorsche Paarungspolynom* $\pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit

$$\pi(a, b) \ = \ (a + b)(a + b + 1)/2 \ + \ a \quad \text{für alle } (a, b) \in \mathbb{N}^2$$

definiert. Die Paare $(a, b) \in A^2$ werden nach ihrem π-Wert geordnet (von klein nach groß). Wir beobachten hierzu, dass der erste Summand der π-Funktion konstant auf den Diagonalen von A^2 ist. Der zweite Summand legt die Position auf den Diagonalen fest. Definieren wir π durch „+ b“ anstelle von „+ a“, so werden die Diagonalen in der anderen Richtung durchlaufen.

Ein zweites Beispiel ist:



Eine Maximums-Aufzählung des Produkts $A \times A$ mit $A = \{ 1, \ldots, 8 \}$

Bei der Maximums-Aufzählung des Diagramms vergleichen wir zwei Paare (a, b) und (c, d) nach ihren Maxima max(a, b) und max(c, d). Bei gleichem Maximum ordnen wir die Paare lexikographisch (mit der spaltenweisen Version der lexikographischen Ordnung).

Endliche Folgen

Gegeben eine lineare Ordnung auf A liefert die lexikographische Ordnung eine lineare Ordnung auf A^2, A^3, …, A^n, … Oft ist es von Interesse, endliche Folgen variabler Länge miteinander vergleichen zu können. Wir definieren hierzu:

Definition *(endliche Folgen, Anfangsstück, kleinster Unterschied)*

Sei A eine Menge. Wir setzen

$\mathrm{Seq}_A = \{ (s_1, \dots, s_n) \mid n \in \mathbb{N},\ s_i \in A \text{ für alle } i \}$. *(endliche Folgen in A)*

Für jedes $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathrm{Seq}_A$ heißt $n = |s|$ die *Länge* von s. Sind s, t Folgen in A der Länge n bzw. m, so heißt s ein *Anfangsstück* von t (und t eine *Fortsetzung* von s), in Zeichen $s \trianglelefteq t$, falls

$n \leq m$ und $s_i = t_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Gilt zudem $s \neq t$, so heißt s ein *echtes Anfangsstück* von t, in Zeichen $s \triangleleft t$. Sind s, t keine Anfangsstücke voneinander, so sei $\delta(s, t)$ die kleinste Stelle eines Unterschieds, d. h. $\delta(s, t)$ = „das kleinste i mit $s_i \neq t_i$“.

Die leere Folge () ist immer ein Element von Seq_A. Identifizieren wir $a \in A$ mit der Folge $(a) \in \mathrm{Seq}_A$ der Länge 1, so können wir $A \subseteq \mathrm{Seq}_A$ annehmen. Die Anfangsstückrelation ist eine partielle Ordnung auf Seq_A.

Eine lineare Ordnung auf A können wir zu einer linearen Ordnung nach Seq_A liften, indem wir Folgen an der Stelle ihres kleinsten Unterschieds miteinander vergleichen und zudem angeben, wie wir Anfangsstücke behandeln. In einem Lexikon erscheint zum Beispiel s vor t, falls s ein echtes Anfangsstück von t ist. Diese Einordnung wird anschaulich, wenn wir eine endliche Folge als unendliche Folge auffassen, die in einem symbolischen Nullwert endet, der kleiner ist als alle Elemente von A. Setzen wir dagegen s durch einen symbolischen Wert ∞ fort, so ist s größer als t, falls $s \triangleleft t$. Schließlich können wir auch die Länge als maßgebliches Vergleichkriterium heranziehen: Wir ordnen kürzere Folgen vor längeren ein und vergleichen gleichlange Folgen an der kleinsten Stelle eines Unterschieds. Die formalen Definitionen dieser drei Ordnungen lauten:

Definition *(lineare Ordnungen auf den endlichen Folgen)*

Sei (A, <) eine lineare Ordnung. Dann setzen wir für alle $s, t \in \mathrm{Seq}_A$:

$s <_{\mathrm{lex}} t$ *falls* $s \triangleleft t$ oder $s_\delta < t_\delta$ (mit $\delta = \delta(s, t)$),

$s <_{\mathrm{KB}} t$ *falls* $t \triangleleft s$ oder $s_\delta < t_\delta$,

$s <_{\mathrm{shortlex}} t$ *falls* $|s| < |t|$ oder $s_\delta < t_\delta$.

Die Relationen heißen die *lexikographische Ordnung*, *Kleene-Brouwer-Ordnung* bzw. *Short-Lex-Ordnung* auf Seq_A.

Beispiele

Sei A = { 0, 1 }, mit der üblichen Ordnung auf { 0, 1 }.

(1) Für die lexikographische Ordnung auf Seq_A gilt

$$() <_{\mathrm{lex}} 0 <_{\mathrm{lex}} 00 <_{\mathrm{lex}} 01 <_{\mathrm{lex}} 010111 <_{\mathrm{lex}} 1 <_{\mathrm{lex}} 10.$$

(2) Für die Kleene-Brouwer-Ordnung auf Seq_A gilt

$$00 <_{\mathrm{KB}} 010111 <_{\mathrm{KB}} 01 <_{\mathrm{KB}} 0 <_{\mathrm{KB}} 10 <_{\mathrm{KB}} 1 <_{\mathrm{KB}} ().$$

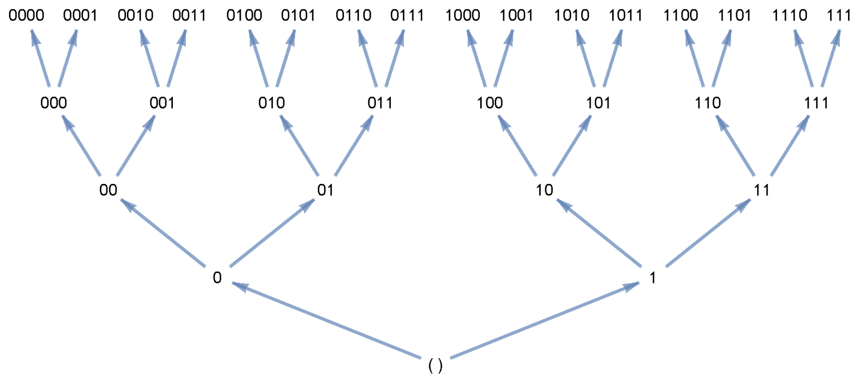
Durch eine symbolische ∞-Fortsetzung wird diese Anordnung suggestiv, zum Beispiel ist

$$010111\infty\infty\infty\ldots <_{\mathrm{KB}} 01\infty\infty\infty\ldots <_{\mathrm{KB}} 0\infty\infty\infty\ldots$$

(3) Für die Short-Lex-Ordnung auf Seq_A gilt

$$() <_{\mathrm{lex}} 0 <_{\mathrm{shortlex}} 1 <_{\mathrm{shortlex}} 00 <_{\mathrm{shortlex}} 01 <_{\mathrm{shortlex}} 10 <_{\mathrm{shortlex}} 010111.$$

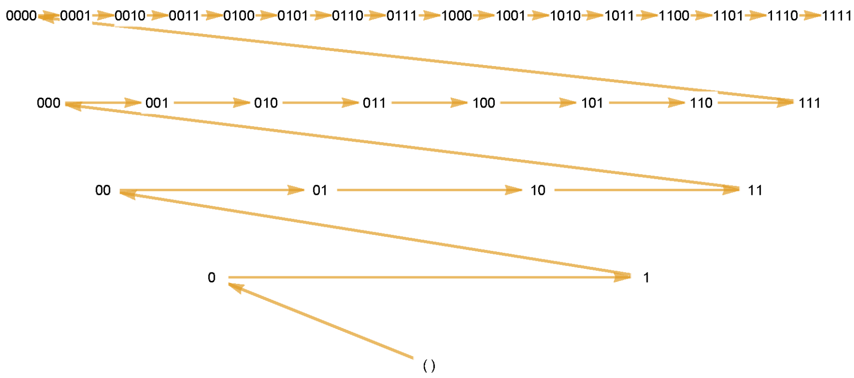
Die partielle Ordnung $(\mathrm{Seq}_A, \lhd)$ können wir uns als einen unendlich hohen Baum mit der Wurzel () vorstellen, der sich an jeder Stelle A-fach verzweigt. Auf der n-ten Stufe befinden sich alle Folgen in A der Länge n.



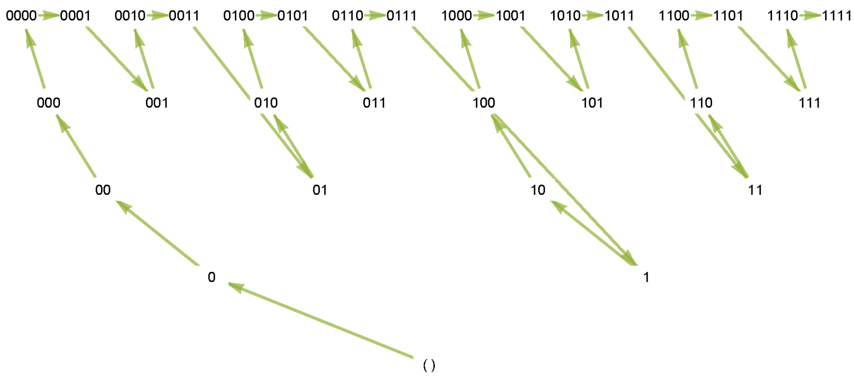
Die ersten Stufen von Seq_A für A = { 0, 1 }

Die Short-Lex-Ordnung können wir so beschreiben: Wir fügen die lexikographisch geordneten Stufen aneinander. Die beiden anderen Ordnungen sind komplizierter. Für A = { 0, 1 } sind bei $<_{\mathrm{lex}}$ und $<_{\mathrm{KB}}$ alle Nullfolgen 0, 00, 000, … kleiner als die Folge 1 der Länge 1 auf Stufe 1. Bei $<_{\mathrm{KB}}$ sind die Nullfolgen zudem umgekehrt geordnet, sodass 0 größer ist 00, 00 größer als 000 usw.

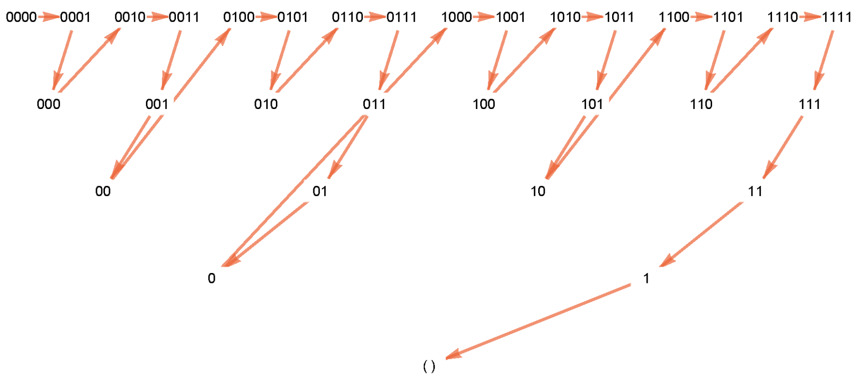
Einen Eindruck von der Bauart der drei linearen Ordnungen können wir erhalten, indem wir uns auf die ersten Stufen von Seq_A beschränken. Ist A endlich, so können wir die Elemente des gestutzten Baumes entsprechend der gewählten linearen Ordnung durchzählen. In den folgenden Diagrammen betrachten wir wieder Folgen der Länge kleiner oder gleich 4 in der Menge A = { 0, 1 }.



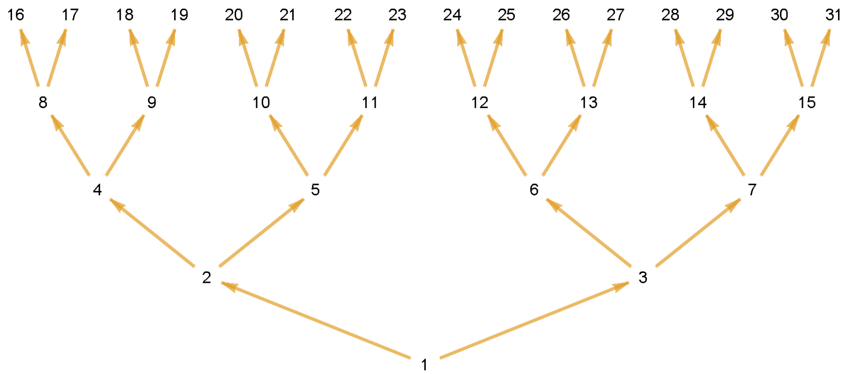
Die Short-Lex-Ordnung zählt die Elemente Stufe für Stufe auf



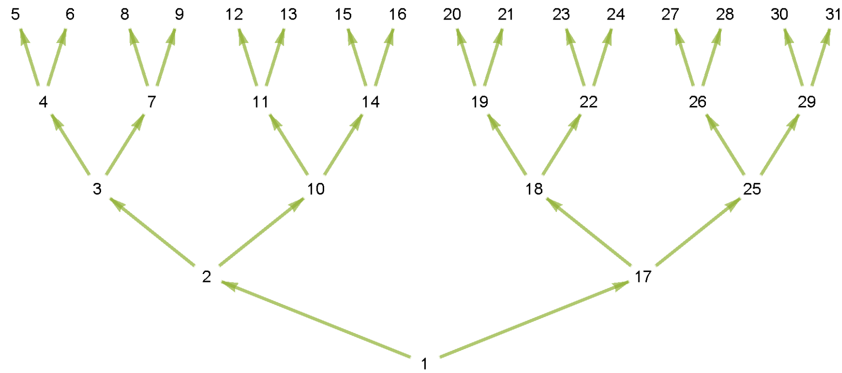
Anordnung der Folgen unter der lexikographischen Ordnung



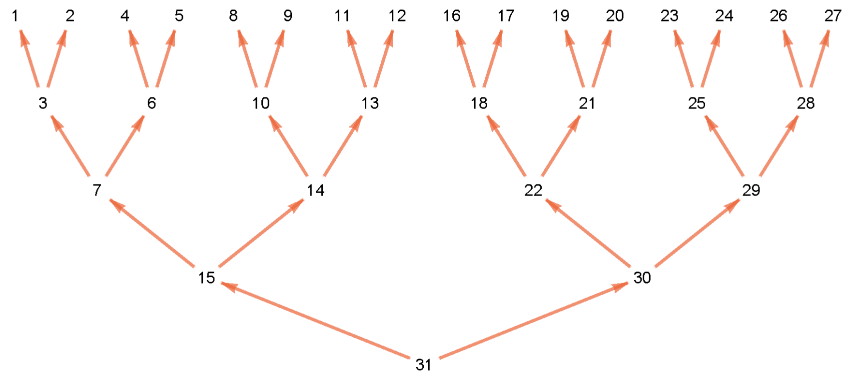
Anordnung der Folgen unter der Kleene-Brouwer-Ordnung



Nummerierung der Folgen durch die Short-Lex-Ordnung



Nummerierung der Folgen durch die lexikographische Ordnung



Nummerierung der Folgen durch die Kleene-Brouwer-Ordnung

Die Linearisierung des unendlich hohen Folgenbaumes Seq_A ist für die endliche Menge $A = \{ 0, 1 \}$ deutlich komplexer. Die obigen Diagramme sind ein gewisses Abbild der Ordnungen, aber es gibt wesentliche Unterschiede. Am einfachsten ist die Short-Lex-Ordnung, bei der Elemente auf höheren Stufen immer später erscheinen als auf niedrigeren Stufen. Die Positionen bleiben fest, 110 ist das 14. Element der Ordnung $<_{\mathrm{shortlex}}$ auf ganz Seq_A. Bei den anderen Ordnungen ist dies nicht der Fall, 110 ist keineswegs das 26. Element von $<_{\mathrm{lex}}$ und auch nicht das 25. Element von $<_{\mathrm{KB}}$ auf Seq_A. Beim Hinzufügen neuer Stufen werden immer wieder Elemente eingewoben und nicht nur am Ende angehängt. Wir betrachten hierzu die Ordnung $<_{\mathrm{lex}}$ genauer, ähnliche Überlegungen gelten für $<_{\mathrm{KB}}$.

In der Ordnung $< \, = \, <_{\mathrm{lex}}$ gibt es unmittelbare Nachfolger: Für alle s ist die Verlängerung s0 der Folge s um 0 größer als s, und es gibt keine t mit $s < t < s0$. Damit beginnt die Ordnung mit den Folgen auf dem linken Ast von Seq_A:

(+) $() < 0 < 00 < 000 < \ldots$

Nun gibt es aber keine kleinste Folge, die größer ist als alle 0-Folgen in (+). Die 0-Folgen haben keinen unmittelbaren Nachfolger mehr. Um dies einzusehen betrachten wir die Folgen des Typs $0 \ldots 01$. Diese Folgen sind absteigend geordnet und größer als alle 0-Folgen:

(++) $() < 0 < 00 < 000 < \ldots < \ldots < 0001 < 001 < 01 < 1$

Während auf der linken Seite dieser Kette direkte Nachfolger gebildet werden, ist dies auf der rechten Seite nicht der Fall: 01 ist nicht der direkte Vorgänger der 1, 001 nicht der direkte Vorgänger von 01 usw. Es gilt

$$\ldots < 001 < 0010 < 00100 < \ldots < 01 < 010 < 0100 < \ldots < 1 < 10 < 100 < \ldots$$

mit direkten Nachfolgerbildungen. Damit ergibt sich folgendes Bild: In (++) liegt an jeder Stelle 1, 01, 001, … eine Kopie der Ordnung $<_{\mathrm{lex}}$, die mit dem linken Ast oberhalb von 1, von 01, von 001 usw. beginnt. Die Ordnung beginnt strukturell mit einer Kopie von $\mathbb{N}$, danach folgen unendlich viele Kopien der gesamten Ordnung, die wie die negativen ganzen Zahlen angeordnet sind. Alternativ können wir auch so argumentieren: Die Fortsetzungen einer Folge s liefern zwei Ordnungen, die mit s0 bzw. s1 beginnen und Kopien von $<_{\mathrm{lex}}$ sind. Führen wir diese Aufspaltung beginnenden mit () wiederholt durch, so erhalten wir

$$(),\ 0,\ \text{---},\ 1,\ \text{---}$$

$$(),\ 0,\ 00,\ \text{---},\ 01,\ \text{---},\ 1,\ \text{---}$$

$$(),\ 0,\ 00,\ 000,\ \text{---},\ 001,\ \text{---},\ 01,\ \text{---},\ 1,\ \text{---} \quad \text{usw.}$$

wobei jeder Teil --- der Ordnung wie die ganze Ordnung $<_{\mathrm{lex}}$ aussieht.

In unserer Diskussion haben wir uns auf $A = \{ 0, 1 \}$ beschränkt. Wir können aber mit einer beliebigen linearen Ordnungen auf einer endlichen oder unendlichen Menge A starten, den Baum aller Folgen mit dem „Alphabet“ A betrachten und diesen linear ordnen. Für $A = \mathbb{Z}$ hat eine Folge s in $<_{\mathrm{lex}}$ keinen direkten Nachfolger mehr, da $\ldots < s(a-1) < sa < s(a+1) < \ldots$ für alle $a \in \mathbb{Z}$. Auch $\mathbb{R}$ ist als Alphabet möglich. Wir erhalten so lineare Ordnungen aller endlichen reellen Folgen.

Schranken

Ordnungsbegriffe werden in der Mathematik an vielen verschiedenen Stellen verwendet, der Leser denke etwa an das Maximum in der Definition des größten gemeinsamen Teilers, das Supremum einer beschränkten nichtleeren Menge von reellen Zahlen oder an kürzeste Kantenzüge in der Graphentheorie. Viele Begriffe lassen sich allgemein für partielle Ordnungen einführen. Die folgende Definition versammelt einige davon.

Definition *(Schranken in partiellen Ordnungen)*

Sei $<$ eine Ordnung auf A. Weiter seien $a \in A$ und $B \subseteq A$. Dann heißt

(i) a eine *obere Schranke von B*, in Zeichen $B \leq a$, falls $\forall b \in B\ b \leq a$,

(ii) a eine *untere Schranke von B*, in Zeichen $a \leq B$, falls $\forall b \in B\ a \leq b$,

(iii) a das *Maximum* oder *größte Element von B*, in Zeichen $a = \max(B)$, falls $a \in B \wedge B \leq a$,

(iv) a das *Minimum* oder *kleinste Element von B*, in Zeichen $a = \min(B)$, falls $a \in B \wedge a \leq B$,

(v) a das *Supremum* oder die *kleinste obere Schranke von B*, in Zeichen $a = \sup(B)$, falls $a = \min(\{ s \mid B \leq s \})$,

(vi) a das *Infimum* oder die *größte untere Schranke von B*, in Zeichen $a = \inf(B)$, falls $a = \max(\{ s \mid s \leq B \})$,

(vii) a *maximal in B*, falls $a \in B \wedge \neg \exists b \in B\ a < b$,

(viii) a *minimal in B*, falls $a \in B \wedge \neg \exists b \in B\ b < a$,

(ix) B *nach oben beschränkt*, falls eine obere Schranke von B existiert,

(x) B *nach unten beschränkt*, falls eine untere Schranke von B existiert,

(xi) B *beschränkt*, falls B nach oben und unten beschränkt ist.

Wir betrachten einige Beispiele.

Beispiele

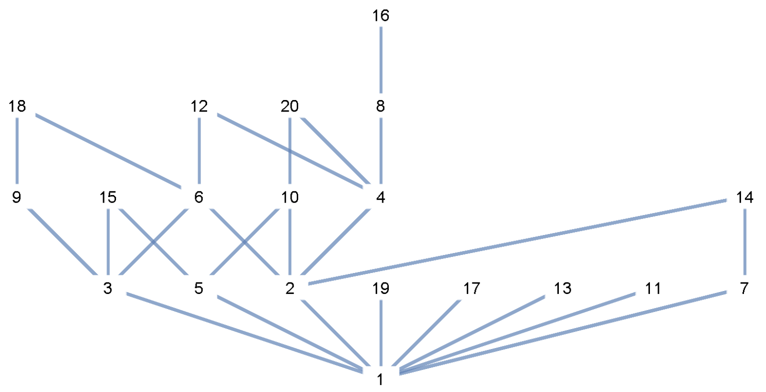
(1) Die Menge der natürlichen Zahlen hat unter der üblichen Ordnung das kleinste Element 0. Ein größtes Element existiert nicht. Jede nichtleere Teilmenge besitzt ein Minimum.

(2) In $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Ordnung hat die beschränkte Menge

$$Q = \{ q > 0 \mid q^2 \leq 2 \}$$

aufgrund der Irrationalität von $\sqrt{2}$ kein Supremum.

(3) Wir betrachten die partielle Ordnung der Teilbarkeit auf { 1, …, 20 }, dargestellt durch ein Hasse-Diagramm:



Das Minimum der Ordnung ist 1, ein Maximum existiert nicht. Dagegen sind 11, …, 20 maximale Elemente der Ordnung. Die Elemente 6, 12 und 18 sind die oberen Schranken von { 2, 3 }. Das Supremum von { 2, 3 } ist 6.

(4) Für die partielle Ordnung der Inklusion auf A = $\mathcal{P}$({ 1, 2, 3 }) und die Menge B = { { 1 }, { 1, 2 }, { 3 }} gilt:

{ 1 } und { 3 } sind minimal in B,

{ 1, 2 } und { 3 } sind maximal in B,

max(B) und min(B) existieren nicht,

sup(B) = { 1, 2, 3 }, inf(B) = { }.

(5) Sei A = { 0, 1 } und Seq_A linear geordnet durch $<_{\mathrm{lex}}$. Dann ist die leere Folge () das Minimum der Ordnung, ein Maximum existiert nicht. Ist

B = { 0, 00, 000, 0000, … },

so ist jede Folge der Form 0…01 eine obere Schranke von B. Die Menge B besitzt kein Supremum.

(6) Die Ordnung $<_{\mathrm{KB}}$ auf Seq_A hat das größte Element () und kein kleinstes Element. Denn für jede Folge s ist jede echte Fortsetzung t von s (d. h. jedes t mit s $\triangleleft$ t) kleiner als s.

(7) Sei (A, <) eine endliche lineare Ordnung und Seq_A linear geordnet durch die Short-Lex-Ordnung. Dann besitzt jede nichtleere Teilmenge B von Seq_A ein kleinstes Element: Wir betrachten die kleinste Stufe des Baumes Seq_A, auf der sich Elemente von B befinden. Unter diesen suchen wir das lexikographisch kleinste. Dieses Element ist das Minimum von B.

Dichte Ordnungen

Eine wichtige Eigenschaft für unendliche Ordnungen ist:

Definition *(dicht)*

Eine Ordnung $<$ auf A heißt *dicht*, falls gilt:

(D) $\forall a, b \in A\, (a < b \;\to\; \exists c \in A\;\; a < c < b)$.

Dichtheit bedeutet, dass zwischen je zwei vergleichbaren Elementen a und b der Ordnung noch ein weiteres Element c liegt. Weiter liegt dann auch zwischen a und c noch ein Element d usw. Dies zeigt, dass zwischen zwei vergleichbaren Elementen sogar unendlich viele Elemente liegen. Mit Ausnahme der Ordnungen, die nur aus paarweise unvergleichbaren Elementen bestehen, gibt es also keine endliche dichte Ordnung. Die Ordnung auf $\mathbb{Q}$ ist dicht, denn für alle rationalen Zahlen $a < b$ ist das arithmetische Mittel $(a + b)/2$ der beiden Zahlen eine rationale Zahle, die zwischen a und b liegt. Aus diesem Blickwinkel ist es bemerkenswert, dass es irrationale Zahlen gibt: Obwohl zwischen zwei rationalen Zahlen immer unendlich viele weitere rationale Zahlen liegen, gibt es immer noch Lücken in $\mathbb{Q}$, die beim Übergang von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ mit neuen Zahlen gefüllt werden. Dieses Phänomen tritt aber bereits mit einer Teilmenge von $\mathbb{Q}$ auf:

Beispiel

Sei $A = \{ a/2^n \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \}$. Dann ist A mit der von $\mathbb{Q}$ ererbten Ordnung dicht (wie erneut die Bildung von arithmetischen Mitteln zeigt). Aber es gilt zum Beispiel $1/3 \notin A$, sodass $1/3$ aus der Sicht von A eine Lücke darstellt.

Wir betrachten auch wieder unsere Ordnungen auf den endlichen Folgen.

Beispiele

(1) Sei $A = \{ 0, 1 \}$. Die Ordnung $<_{\mathrm{lex}}$ auf Seq_A ist nicht dicht. Denn ist $s \in \mathrm{Seq}_A$ und $t = s0$ die um 0 verlängerte Folge s, so gilt $s <_{\mathrm{lex}} t$, aber es gibt keine Elemente zwischen s und s0. Analog ist die Ordnung $<_{\mathrm{KB}}$ nicht dicht, wobei nun zwischen s1 und s keine Elemente liegen. Und auch die Ordnung $<_{\mathrm{shortlex}}$ auf Seq_A ist nicht dicht, da sich zum Beispiel zwischen 0 und 1 keine Elemente befinden.

(2) Sei $\mathbb{Z}$ versehen mit der üblichen linearen Ordnung. Dann ist die Ordnung $<_{\mathrm{lex}}$ auf $\mathrm{Seq}_{\mathbb{Z}}$ dicht. Für alle $s \in \mathrm{Seq}_{\mathbb{Z}}$ und alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt

$$s <_{\mathrm{lex}} sb <_{\mathrm{lex}} sa \quad \text{für alle } b \in \mathbb{Z} \text{ mit } b < a,$$

woraus die Dichtheit folgt (Übung). Analoges gilt für $<_{\mathrm{KB}}$. Dagegen ist $<_{\mathrm{shortlex}}$ nicht dicht, da für alle Folgen $s \in \mathrm{Seq}_{\mathbb{Z}}$ und alle $a \in \mathbb{Z}$ zwischen den Folgen sa und $s(a+1)$ keine Elemente der Ordnung liegen.

Ordnungen aus beliebigen Relationen

Sei R eine beliebige Relation auf einer Menge A. Wir konstruieren mit Hilfe von R eine partielle Ordnung $\leq$. Da R im Allgemeinen weder reflexiv noch antisymmetrisch noch transitiv ist, erscheint dies zunächst vielleicht unmöglich. Wir können die drei Eigenschaften aber durch eine Vergrößerung von R und eine Äquivalenzklassenbildung erreichen. Zuerst kümmern wir uns um die Transitivität. Hierzu definieren wir allgemein:

Definition *(Verknüpfung zweier Relationen)*

Sei A eine Menge, und seien R, S Relationen auf A. Dann definieren wir die *Verknüpfung* $R \circ S$ von R und S durch

$$R \circ S \;=\; \{ (a, c) \in A^2 \mid \text{es gibt ein } b \in A \text{ mit } a\,R\,b \text{ und } b\,S\,c \}.$$

Speziell sind die Potenzen $R^1 = R$, $R^2 = R \circ R$, …, $R^{n+1} = R^n \circ R$, …definiert. Wir setzen zudem $R^0 = \mathrm{Id}_A = \{ (a, a) \mid a \in A \}$. Damit können wir definieren:

Definition *(transitive Hülle)*

Sei A eine Menge, und sei R eine Relation auf A. Dann definieren wir die *transitive Hülle* R^+ von R durch

$$R^+ \;=\; \bigcup_{n \geq 1} R^n \;=\; \{ (a, b) \in A^2 \mid \text{es gibt ein } n \geq 1 \text{ mit } a\,R^n\,b \}.$$

Die Relation R^+ ist die kleinste Erweiterung von R, die transitiv ist. Setzen wir $R^* = R^0 \cup R^+$, so ist R^* reflexiv und transitiv. Graphentheoretisch ist R^* die reflexive Erreichbarkeitsrelation des gerichteten Graphen (A, R). Für alle $n \geq 0$ und alle $a, b \in A$ gilt $a\,R^n\,b$ genau dann, wenn b durch einen Kantenzug der Länge n von a aus erreicht werden kann. Eine reflexive und transitive Relation auf einer Menge A heißt auch eine *Präordnung* oder *Quasiordnung* auf A. Zu einer partiellen Ordnung fehlt im Allgemeinen noch die Antisymmetrie. Diese können wir durch Einführung einer Äquivalenzrelation erzeugen. Wir setzen für alle $a, b \in A$:

$a \sim b$ *falls* $a\,R^*\,b$ und $b\,R^*\,a$.

Nun definieren wir $\leq \,=\, \leq_R$ auf der Faktorisierung $A/\sim$ durch

$[a] \leq [b]$ *falls* $a\,R^*\,b$.

Die Definition ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten und $\leq$ ist eine partielle Ordnung auf $A/\sim$ (Übung).

Beispiel

Sei $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ und $R = \{ (1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 4) \}$. Dann ist

$$R^* \;=\; R^0 \cup R^+ \;=\; R \cup R^0 \cup \{ (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 2) \}.$$

Es gilt $A/\sim \,=\, \{ \{ 1, 2, 3 \}, \{ 4 \} \}$ und $\{ 1, 2, 3 \} < \{ 4 \}$.

Elemente der Ordnungstheorie

Die Theorie der partiellen und linearen Ordnungen ist so reichhaltig, dass sie als eigene Teildisziplin der Mathematik angesehen werden kann. Beziehungen ergeben sich insbesondere zur diskreten Mathematik, zur Algebra und zur Mengenlehre. Wir stellen einige Motive im Stil eines kurzen Rundgangs vor und betrachten Wohlordnungen, Bäume und Verbände. Wir beginnen mit den Wohlordnungen. Sie verallgemeinern die Ordnung der natürlichen Zahlen:

Definition *(Wohlordnung)*

Eine lineare Ordnung $<$ auf A heißt eine *Wohlordnung*, falls gilt:

(W) $\forall B \subseteq A\,(B \neq \emptyset \;\to\; \exists a\;\, a = \min(B))$.

In einer Wohlordnung besitzt jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element. Diese Eigenschaft ist entscheidend für induktive Beweise und rekursive Definitionen.

Beispiele

(1) Jede endliche lineare Ordnung ist eine Wohlordnung. Bis auf die Namen der Elemente gibt es nur die Wohlordnungen $\{ 0, \ldots, n-1 \}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Die erste unendliche Wohlordnung ist $\mathbb{N}$.

(2) Ist $(A, <)$ eine Wohlordnung und a^* beliebig mit $a^* \notin A$, so können wir eine Relation $<^*$ auf $A^* = A \cup \{ a^* \}$ definieren durch

$a <^* b$ *falls* $a < b$ oder $b = a^*$. *(Enderweiterung um a*)*

Wir fügen also ein neues Element a^* an die alte Ordnung an (ganz so, wie wir oft einen symbolischen Wert ∞ an $\mathbb{N}$ angefügt haben). Die Relation $<^*$ ist eine Wohlordnung auf A^*. Wir können an sie ein neues Element a^{**} anfügen, dann a^{***} usw. Die technisch nichttriviale Durchführung dieser einfachen Idee führt zu den transfiniten Zahlen, die ein Herzstück der heutigen Mengenlehre bilden.

(3) Sind $(A, <)$ und $(B, <)$ Wohlordnungen, so sind die lexikographischen Ordnungen $<_{lex}$ (spaltenweise) und $<^{lex}$ (zeilenweise) Wohlordnungen auf $A \times B$ (Übung).

(4) Ist $(A, <)$ eine Wohlordnung, so ist die Short-Lex-Ordnung eine Wohlordnung auf Seq_A (vgl. obiges Argument der Existenz eines Minimums). Die Ordnung lässt sich als Summe der lexikographischen Ordnungen auf $A, A^2, \ldots,$ ansehen). Dagegen ist $<_{lex}$ bereits im Fall $A = \{ 0, 1 \}$ keine Wohlordnung. Denn die Menge

$B = \{ 1, 01, 001, 0001, \ldots \}$

hat kein Minimum bzgl. $<_{lex}$. Analoges gilt für $<_{KB}$.

Der Begriff der Wohlordnung führt zu einer sehr allgemeinen Definition eines Baumes:

Definition *(Baum)*

Eine partielle Ordnung $(A, <)$ heißt ein *(ordnungstheoretischer) Baum*, falls gilt:

(T) Für alle $a \in A$ ist $\{ b \in A \mid b < a \}$ wohlgeordnet unter $<$.

Ist A endlich, so ist die Bedingung äquivalent dazu, dass für jedes Element a der Ordnung die Menge der kleineren Elemente linear geordnet ist. Ein Baum darf sich nach oben (im Sinne von größer werdend), nicht aber nach unten verzweigen. Ein Baum kann unendlich hoch sein und sogar eine transfinite Höhe erreichen. In diesem Sinne sind die Bäume noch einmal eine Verallgemeinerung der transfiniten Zahlen: Im Vergleich zu diesen Zahlen verzichten wir auf die Eindeutigkeit des Nachfolgers und erlauben an jeder Stelle beliebige (auch unendliche) Verzweigungen.

Zeichnen wir in einem graphentheoretischen Baum eine Wurzel aus und tragen wir den Baum von der Wurzel ausgehend stufenweise von unten nach oben auf, so entsteht ein Diagramm, das wir als das Hasse-Diagramm eines ordnungstheoretischen Baumes ansehen können. Umgekehrt können wir jeden endlichen ordnungstheoretischen Baum als Hasse-Diagramm zeichnen und dieses Diagramm als graphentheoretischen Baum (mit einer natürlichen Wurzel) ansehen.

Schließlich betrachten wir noch einen algebraischen Begriff:

Definition *(Verband)*

Eine partielle Ordnung $(A, <)$ heißt ein *Verband*, falls für alle $a, b \in A$ gilt:

(V) $\sup(\{ a, b \})$ und $\inf(\{ a, b \})$ existieren.

Für alle $a, b \in A$ setzen wir

$$a \vee b = \sup(\{ a, b \}), \quad a \wedge b = \inf(\{ a, b \}).$$

Wir sagen auch kurz, dass je zwei Elemente ein Supremum und Infimum besitzen. Verbände erhalten dadurch eine gitter- oder netzartige Struktur. Nicht zufällig wird ein Verband im Englischen mit *lattice* bezeichnet.

Beispiele

(1) Ein wichtiges Beispiel für einen Verband ist die Teilbarkeitsrelation auf den natürlichen Zahlen. Für alle $a, b \geq 1$ ist $a \wedge b$ der größte gemeinsame Teiler und $a \vee b$ das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden Zahlen. Für $\wedge$ und $\vee$ gelten die Distributivgesetze.

(2) Sei A eine beliebige Menge. Dann bildet die Inklusion auf $\mathcal{P}(A)$ einen Verband. Für alle Teilmengen B und C von A gilt

$$B \wedge C = B \cap C, \quad B \vee C = B \cup C.$$

Übungen

Übung 1

Sei A eine Menge. Zeigen Sie, dass sowohl die echte Inklusion $\subset$ als auch die umgekehrte echte Inklusion $\supset$ partielle Ordnungen auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(A) = \{ B \mid B \subseteq A \}$ von A sind.

Übung 2

Betrachten Sie die Hasse-Diagramme zur Teilbarkeitsrelation. Welche allgemeinen Eigenschaften können Sie feststellen? Beweisen Sie diese Eigenschaften. Welche Eigenschaften gelten auch für ein Hasse-Diagramm der Teilbarkeitsrelation auf $\mathbb{N}^*$?

Übung 3

Seien $(A, <)$, $(B, <)$ partielle Ordnungen. Wir setzen für alle $(a, b), (c, d) \in A \times B$:

$(a, b) \;<\; (c, d)$ *falls* $a < c \;\wedge\; b < d$.

(a) Zeigen Sie, dass $<$ eine partielle Ordnung auf $A \times B$ ist.

(b) Zeichnen Sie ein Diagramm zur Illustration der Konstruktion.

(c) Ist $<$ auf $A \times B$ linear, falls die Ordnungen auf A und B linear sind?

Übung 4

Sei A eine Menge, und sei

$R \;=\; \{ \sim \mid \sim \text{ ist eine Äquivalenzrelation auf } A \}$.

Wir setzen für alle $\sim_1, \sim_2 \in R$:

$\sim_1 \;\leq\; \sim_2$ *falls* $\sim_1$ ist eine Verfeinerung von $\sim_2$.

Zeigen Sie, dass $\leq$ eine partielle Ordnung auf R ist.

Übung 5

Seien $(A, <)$, $(B, <)$ lineare Ordnungen. Zeigen Sie, dass die lexikographischen Ordnung $<_{lex}$ eine lineare Ordnung auf $A \times B$ ist.

Übung 6

Sei A eine Menge, und sei Seq_A die Menge aller endlichen Folgen in A. Zeigen Sie, dass die echte Anfangsstückrelation $\lhd$ eine partielle Ordnung auf Seq_A ist.

Übung 7

Zeigen Sie, dass die lineare Ordnung $<_{lex}$ auf der Menge $\mathrm{Seq}_{\mathbb{Z}}$ aller endlichen Folgen in $\mathbb{Z}$ dicht ist.

Übung 8

Sei $(A, <)$ eine Ordnung, und sei $A^{\mathbb{N}} = \{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n \in A$ für alle $n \}$ die Menge aller unendlichen Folgen in A. Wir setzen für alle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} < (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *falls* $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass $<$ eine partielle Ordnung auf $A^{\mathbb{N}}$ ist.

Übung 9

Sei $G = (E, K)$ ein gerichteter kreisfreier Graph. Wir setzen für alle $a, b \in E$:

$a \le b$ *falls* es gibt einen Weg von a nach b in G.

Zeigen Sie, dass $\le$ eine partielle Ordnung auf E ist.

Übung 10

Sei A eine Menge. Wir ordnen $\mathcal{P}(A)$ durch die Inklusion $\subseteq$. Zeigen Sie, dass für alle $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(A)$ gilt:

$\sup(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A} = \{ a \in A \mid$ es gibt ein $B \in \mathcal{A}$ mit $a \in B \}$,

$\inf(\mathcal{A}) = \bigcap \mathcal{A} = \{ a \in A \mid$ für alle $B \in \mathcal{A}$ gilt $a \in B \}$.

Übung 11

Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen unter den üblichen linearen Ordnungen auf den Zahlen dicht sind:

$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x$ ist irrational $\}$,

$B = \{ q \in \mathbb{Q} \mid x$ besitzt eine endliche Dezimaldarstellung $\}$,

$C = \{ q \in \mathbb{Q} \mid x$ besitzt keine endliche Dezimaldarstellung $\}$.

Übung 12

Seien R, S, T Relationen auf A. Zeigen Sie:

$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.

Übung 13

Eine Funktion $f : A \to B$ ist als Menge von geordneten Paaren eine Relation auf $C = A \cup B$, da $f = \{ (a, f(a)) \mid a \in A \} \subseteq C^2$. Wie hängt die Komposition von Funktionen mit der Komposition von Relationen zusammen?

Übung 14

Sei A eine Menge, und sei R eine reflexive Relation auf A. Zeigen Sie:

$R^0 \subseteq R^1 \subseteq \ldots \subseteq R^n \subseteq \ldots$

Übung 15

Sei R eine Relation auf einer endlichen Menge A, und sei $n = |A|$. Zeigen Sie:

(a) $R^+ = \bigcup_{1 \leq k \leq n} R^k$.

(b) Ist R reflexiv, so gilt $R^* = R^+ \cup R^0 = R^+ = R^{n-1}$.

Ist $R^+ \neq \bigcup_{1 \leq k < n} R^k$ in (a) möglich?

Übung 16

Sei A eine Menge, und sei R eine Präordnung auf A, d. h. eine reflexive und transitive Relation auf A. Wir setzen für alle $a, b \in A$:

$a \sim b$ *falls* $a \, R \, b$ und $b \, R \, a$.

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenz auf A ist.

Übung 17

Seien A, R, $\sim$ wie in der vorangehenden Übung. Wir definieren nun eine Relation $\leq$ auf der Faktorisierung $A/\sim \; = \{ [a] \mid a \in A \}$ durch

$[a] \leq [b]$ *falls* $a \, R \, b$.

(a) Zeigen Sie, dass $\leq$ eine partielle Ordnung (vom nichtstrikten Typ) auf $A/\sim$ definiert.

(b) Zeichnen Sie ein Diagramm zur Illustration.

(c) Führen Sie die Konstruktion für die Teilbarkeitsrelation auf $\mathbb{Z}$ durch.

Übung 18

Seien $G, U \subseteq \mathbb{N}$ die Mengen der geraden bzw. ungeraden natürlichen Zahlen. Wir ordnen $\mathbb{N} = G \cup U$ durch

$n < m$ *falls* $n \in G$ und $m \in U$ *oder* n, m haben gleiche Parität und $n < m$.

Zeigen Sie, dass $<$ eine Wohlordnung auf $\mathbb{N}$ ist. Welcher Form der vollständigen Induktion entspricht diese Wohlordnung?

Übung 19

Seien $(A, <)$ und $(B, <)$ Wohlordnungen. Zeigen Sie, dass die lexikographischen Ordnungen $<_{lex}$ und $<^{lex}$ Wohlordnungen auf $A \times B$ sind.