Wir wollen zeigen, dass Bernstein-Mengen in allen überabzählbaren polnischen Räumen existieren. Hierzu brauchen wir:

Satz *(Mächtigkeit der Menge aller perfekten Mengen)*

Sei $\mathcal{X} = \langle X, \mathcal{U} \rangle$ ein überabzählbarer polnischer Raum, und sei $\mathcal{P} = \{ P \subseteq X \mid P \text{ ist perfekt} \}$. Dann gilt $|\mathcal{P}| = 2^\omega$.

Beweis

zu $|\mathcal{P}| \leq 2^\omega$:

Es gilt $|\mathcal{P}| \leq_{X - P \in \mathcal{U} \text{ für alle } P \in \mathcal{P}} |\mathcal{U}| \leq_{\mathcal{X} \text{ separabel}} \omega^\omega = 2^\omega$.

zu $2^\omega \leq |\mathcal{P}|$:

Sei $P \subseteq X$ nichtleer und perfekt (etwa der perfekte Kern von X). Weiter sei $\langle x_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ eine injektive konvergente Folge in P mit einem von allen x_n verschiedenen Limes x. Dann existieren paarweise disjunkte perfekte Mengen P_n mit $x_n \in P_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $\mathrm{cl}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n \cup \{ x \}$. Für $A \subseteq \mathbb{N}$ setzen wir

$$g(A) = \begin{cases} \bigcup_{n \in A} P_n & \textit{falls } A \text{ endlich,} \\ \bigcup_{n \in A} P_n \cup \{ x \} & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}$ injektiv.

Mit Hilfe einer Wohlordnung auf den reellen Zahlen können wir nun den folgenden Satz von Felix Bernstein beweisen ([Bernstein 1906] für $X = \mathbb{R}$):

Satz *(Existenz von Bernstein-Mengen)*

Sei $\mathcal{X} = \langle X, \mathcal{U} \rangle$ ein überabzählbarer polnischer Raum. Dann existiert eine Bernstein-Menge in $\mathcal{X}$.

Beweis

Wegen X überabzählbar ist $|X| = 2^\omega = |\mathcal{N}|$.
Sei $\mathcal{P} = \{ P \subseteq X \mid P \text{ ist nichtleer und perfekt} \}$. Dann gilt $|\mathcal{P}| = 2^\omega$ und

$$|\mathcal{P} \times \{0, 1\}| = 2^\omega \cdot 2 = 2^\omega = |\mathcal{N}|.$$

Weiter ist auch $|P| = 2^\omega = |\mathcal{N}|$ für alle $P \in \mathcal{P}$.
Sei $p : \mathcal{N} \to \mathcal{P} \times \{0, 1\}$ bijektiv, und sei $p(f) = (P_f, i_f)$ für $f \in \mathcal{N}$.
Sei $<$ eine Wohlordnung auf $\mathcal{N}$ minimaler Länge. Weiter sei $<_X$ die von einer Bijektion $h : X \to \mathcal{N}$ induzierte Wohlordnung auf X.
Wir definieren durch Rekursion über $\langle \mathcal{N}, < \rangle$ für $f \in \mathcal{N}$:

x_f = „das $<_X$-kleinste $x \in P_f$ mit $x \neq x_g$ für alle $g < f$“.

x_f existiert, denn für alle $f \in \mathcal{N}$ gilt $|P_f| = 2^\omega$, und nach Minimalität der Länge von $<$ gilt, dass $|\{ x_g \mid g < f \}| = |\mathcal{N}_f| < 2^\omega$, wobei wieder $\mathcal{N}_f = \{ g \in \mathcal{N} \mid g < f \}$ das durch f gegebene Anfangsstück von $\langle \mathcal{N}, < \rangle$ ist.

Wir setzen nun $B = \{ x_f \mid f \in \mathcal{N},\ i_f = 0 \}$.
Nach Konstruktion ist dann B eine Bernstein-Menge für $\mathcal{X}$.

 © Oliver Deiser

Dem Leser ist vielleicht aufgefallen, dass der Beweis keine speziellen Eigenschaften perfekter Mengen benutzt. Wichtig ist lediglich, dass für das diagonalisierte System $\mathscr{P} \subseteq \mathcal{P}(X)$ die Kardinalitätsgleichung $2^\omega = |\mathscr{P}| = |P|$ für alle $P \in \mathscr{P}$ gilt.

Der Beweis konstruiert eine Bernstein-Menge durch Diagonalisierung aller perfekten Mengen. Wir durchlaufen die perfekten Mengen in wohlgeordneter Weise, wobei jede Menge zweimal besucht wird. Während des Durchlaufs markieren wir an jeder Stelle ein unmarkiertes Element der gerade besuchten Menge, was durch die minimale Länge der Wohlordnung ermöglicht wird: An jeder Stelle der Konstruktion wurden bislang nur wenige – im Vergleich zur Größe 2^ω einer nichtleeren perfekten Menge – Elemente markiert. Nach Abschluss der Markierung bilden dann all die Elemente, die wir bei der mit 0 indizierten Begegnung einer perfekten Menge ausgezeichnet haben, eine Bernstein-Menge.

Das Argument ist darüber hinaus derart, dass für perfekte Räume de facto alle Elemente von X markiert werden:

Übung

Für die im obigen Beweis konstruierten x_f gilt:

$\{ x_f \mid f \in \mathcal{N} \}$ ist der perfekte Kern cp(P) von X.

[*zu* $\subseteq$: Es gilt $x_f \in P_f \subseteq \mathrm{cp}(P)$ für alle $f \in \mathcal{N}$.
zu $\supseteq$: *Annahme nicht.* Sei dann $x^* = \min(\mathrm{cp}(P) - \{ x_f \mid f \in \mathcal{N} \})$ bzgl. $<_X$.
Es existieren 2^ω-viele $f \in \mathcal{N}$ mit $x^* \in P_f$. Nach der Minimalitätsbedingung in der Definition von x_f gilt dann aber $\{ x_f \mid f \in \mathcal{N},\, x^* \in P_f \} \subseteq \{ x \in X \mid x < x^* \}$, also
$2^\omega = |\{ x_f \mid f \in \mathcal{N},\, x^* \in P_f \}| \leq |\{ x \in X \mid x <_X x^* \}| = |X_{x^*}| < |X| = 2^\omega$,
Widerspruch.]

Bernstein-Mengen sind offenbar nicht Marczewski-messbar. Weiter bilden sie für perfekte Räume auch ein Gegenbeispiel zur Baire-Eigenschaft:

Satz *(Bernstein-Mengen und Baire-Messbarkeit)*

Sei $\mathscr{X} = \langle X, \mathscr{U} \rangle$ ein nichtleerer perfekter polnischer Raum, und sei B eine Bernstein-Menge in X.
Dann ist B nicht Baire-messbar.

Beweis

Annahme doch. Dann ist auch X – B Baire-messbar.
O. E. sei B nicht mager (sonst arbeite mit X – B; $X = B \cup (X - B)$ ist nicht mager). Nach dem Darstellungssatz für Baire-messbare Mengen existieren also offene U_n für $n \in \mathbb{N}$ und ein mageres M mit:

$$B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \cup M.$$

Sei $Y = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Dann ist Y eine G_δ-Menge und weiter überabzählbar, da sonst

$$B = \bigcup_{x \in Y} \{ x \} \cup M$$